

# Optimalno upravljanje nestacionarnim strujanjima u cjevovodima

---

**Vuković, Senka**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**1998**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:188:200144>

*Rights / Prava:* [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-01**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka Library - SVKRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

Senka Vuković

**OPTIMALNO UPRAVLJANJE  
NESTACIONARNIM STRUJANJIMA U CJEVOVODIMA**

Doktorska disertacija

Mentor: Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing.



Rijeka, 1998.

Sveučilište u Rijeci  
TEHNIČKI FAKULTET  
- Fakultetsko vijeće -  
Klasa: 602/04-96-01/20  
Ur.broj: 2170-57-43-96-05  
Rijeka, 25.05.1996.

Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci na 20. sjednici održanoj 24.05.1996. godine donijelo je sljedeću

### O D L U K U

Prihvata se izvješće Stručnog povjerenstva u sastavu: prof.dr.sc. Luka Sopta, prof.dr.sc. Zoran Mrša i izv.prof.dr.sc. Josip Brnić, te se utvrđuje da predložena **mr.sc. Senka Vuković**, **prof.** ispunjava zakonske uvjete te da može pristupiti izradbi i obrani doktorske disertacije, pod naslovom: "OPTIMALNO UPRAVLJANJE NESTACIONIRANIM STRUJANJIMA U CJEVOVODIMA", izvan doktorskog studija.

Predloženi se za mentora određuje prof.dr.sc. Luka Sopta.

Dekan:

Izv.prof.dr.sc. Josip Brnić, dipl.ing.

Dostaviti:

- 1.) mr.sc. Senka Vuković
- 2.) Članovi Stručnog povjerenstva (3x)
- 3.) Zavod za matematiku
- 4.) Mentor
- 5.) Dosje (Evidencija studija)
- 6.) Voditelj Opće i kadrovske službe
- 7.) Arhiva F.V.



## SAŽETAK

Predstavljen je matematički model nestacionarnog strujanja mješavine tekućine i plina u cjevovodu sastavljenim od cijevi, spremnika, ventila, zračnih komora, vodnih komora, crpki, turbina itd. Tako dobiveni inicijalno-rubni problemi za nelinearne hiperboličke sustave riješeni su numerički uz pomoć esencijano neoscilirajućih shema. Optimizacijski problemi za nestacionarna strujanja u cjevovodima riješeni su rabljenjem genetskog algoritma. Razvijen je računarski program za proračun i optimizaciju strujanja u proizvoljnim cjevovodima. Program je primijenjen na više problema proračuna i optimalnog upravljanja. Rezultati su uspoređeni s analitičkim rješenjima, rezultatima iz literature i izmjerenim podacima.



## SUMMARY

A mathematical model for nonstationary liquid-gas mixture flow in a pipeline consisting of pipes, reservoirs, valves, air chambers, surge tanks, pumps, turbines etc. is presented. Thus obtained initial-boundary value problems for nonlinear hyperbolic systems are solved numerically with the aid of essentially nonoscillatory schemes. Optimization problems for nonstationary flows in pipelines are solved using genetic algorithm. A computer program for computation and optimization of flows in any pipeline is developed. The program is applied on several modelling and optimal control problems. Results are compared with analytical solutions, results in literature and measured data.

## PREDGOVOR

Cilj je ove disertacije rješenje problema modeliranja i optimalnog upravljanja nestacionarnim strujanjima u cjevovodima što sam postigla primjenom najbolje do danas razvijene numeričke metode za hiperboličke zakone očuvanja – ENO shema i primjenom najopćenitije suvremene metode za rješavanje optimizacijskih problema – genetskog algoritma. Konačan rezultat nisu samo riješeni problemi proračuna i optimalnog upravljanja strujanjima za pojedine cjevovode izloženi u ovoj disertaciji već i računarski program kojim je moguće riješiti iste probleme za potpuno proizvoljne cjevovode. Taj računarski program može se primijeniti u projektiranju novih cjevovoda, planiranju promjena u postojećim cjevovodima, predviđanju posljedica uslijed manipuliranja ventilima, crpkama, turbinama itd. Posebno može se riješiti bilo koji problem optimizacije strujanja upravljanjem pojedinim djelovima cjevovoda kojemu je cilj smanjenje tlačnih udara, smanjenje kavitacijskih područja itd.

Ova je disertacija dio moje suradnje u znanstveno-istraživačkom projektu Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske "Kompjutersko modeliranje i optimizacija strujanja fluida" br. 069002 kojeg vodi glavni istraživač red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing.. Također je rezultat mojeg rada kao mladog znanstvenika-nositelja projekta istog Ministarstva "Računarsko modeliranje i optimizacija hidrauličkih tranzijenata" vezanog uz glavni projekt br. 069002.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. L. Sopti jer me je uveo u znanstvena istraživanja na području Računarske mehanike fluida te naučio značenju detaljnog razumijevanja fizike promatranih pojava, važnosti i ograničenjima matematičkih modela, traženju najboljih numeričkih metoda, nužnosti interpretiranja i preispitivanja dobivenih rezultata te konačnom smislu u primjeni na realne probleme u privredi. Zahvaljujem se prof. dr. sc. Z. Mrši na poticajima i savjetima.

Gosp. D. Marijanu zahvaljujem se na podacima i mjerenjima u slučaju Hidroelektrane "Vinodol", a mr. sc. I. Plišiću na podacima i postavljanju problema za cjevovod Plase-Opatija.

Također se zahvaljujem kolegama L. Kranjčeviću i G. Mediću na raznolikoj pomoći, osoblju knjižnice Tehničkog fakulteta na pomoći u nabavci literature i Z. Pekiću iz računskog centra Tehničkog fakulteta na pomoći u odabiru i nabavci softverskih alata.

*Senka Vuković*

# SADRŽAJ

Uvod	1
1. Matematički model nestacionarnog strujanja u cjevovodu	4
1.1. Matematički model nestacionarnog strujanja u cijevi	4
1.2. Matematički model utjecaja ostalih dijelova cjevovoda na strujanje	6
1.2.1. Spoj cijevi	6
1.2.2. Spremnik	7
1.2.3. Ventil na kraju cijevi	7
1.2.4. Ventil između dvije cijevi	8
1.2.5. Zračna komora	8
1.2.6. Vodna komora	9
1.2.7. Crpka	10
1.2.8. Turbina	11
1.2.9. Poznati tlak	13
1.2.10. Poznata brzina	13
2. Esencijalno neoscilirajuća shema u proračunu nestacionarnog strujanja u cjevovodu	15
2.1. Nelinearni hiperbolički sustav zakona očuvanja	15
2.1.1. Polja karakteristika	15
2.1.2. Riemannov problem	16
2.2. Primjena esencijalno neoscilirajućih shema na proračun strujanja u cijevi	19
2.2.1. Prostorna i vremenska diskretizacija	19
2.2.2. Približna vrijednost vremenskog operatora	19
2.2.3. Približna vrijednost prostornog operatora	20
2.3. Primjena esencijalno neoscilirajućih shema na proračun utjecaja ostalih dijelova cjevovoda na strujanje	23
2.3.1. Spoj cijevi	24
2.3.2. Spremnik	24
2.3.3. Ventil na kraju cijevi	25
2.3.4. Ventil između dvije cijevi	25
2.3.5. Zračna komora	26
2.3.6. Vodna komora	26
2.3.7. Crpka	27
2.3.8. Turbina	28
2.3.9. Poznati tlak	29
2.3.10. Poznata brzina	30
3. Proračun nestacionarnog strujanja u cjevovodu	31
3.1. Idealni hidraulički udar	31
3.2. Nestacionarno strujanje u cjevovodu spremnik-cijev-cijev-ventil uzrokovano zatvaranjem ventila	35
3.3. Nestacionarno strujanje u cjevovodu spremnik-cijev-crpka-cijev-cijev-spremnik uzrokovano prestankom rada crpke	41
3.4. Usporedba proračuna i mjerenja izvršenih u Hidroelektrani "Vinodol" 19.05.1983	47
3.5. Nestacionarno strujanje s kavitacijom u cjevovodu crpka-cijev-spremnik	53

uzrokovano promjenama u radu crpke	
3.6. Predviđanje posljedica prestanka rada crpke za cjevovod Plase-Opatija	61
4. Genetski algoritam u optimalnom upravljanju nestacionarnim strujanjem u cjevovodu	65
4.1. Genotip i fenotip	65
4.2. Prilagođenost jedinke	66
4.3. Odabir roditelja	67
4.4. Križanje	69
4.5. Mutacija	70
4.6. Napredni operatori genetskog algoritma	70
5. Optimalno upravljanje nestacionarnim strujanjem u cjevovodu	71
5.1. Upravljanje protokom kod idealnog hidrauličkog udara	71
5.2. Upravljanje zatvaranjem ventila	74
5.3. Upravljanje radom crpke	75
5.4. Nalaženje parametara modela Hidroelektrane "Vinodol"	77
5.5. Upravljanje zaustavljanjem crpke u cjevovodu Plase-Opatija	79
6. Računarski program za proračun i optimalno upravljanje nestacionarnim strujanjem u cjevovodu	81
6.1. Mreža	81
6.2. Zakoni očuvanja	84
6.3. Optimalno upravljanje	88
6.4. Cjevovod	90
6.5. Korisničko sučelje	94
Zaključak	97
Popis literature	98
Popis oznaka	102
Popis slika	104

## UVOD

Cilj je ovog rada rješenje zadatka optimalnog upravljanja nestacionarnim strujanjima u cjevovodima što zahtijeva postavljanje matematičkog modela strujanja, odabir i primjenu numeričke metode za proračun strujanja, odabir i primjenu metode optimizacije, izradu računarskog programa te primjenu i provjeru nađenih rješenja na većem broju problema modeliranja i optimizacije.

Predmet su ovoga rada nestacionarna strujanja u cjevovodima hidroelektrana, nuklearnih elektrana, vodovoda, naftne industrije, brodova itd. U takvim cjevovodima tekućine struje malom brzinom ali zatvaranja i otvaranja ventila, promjene u radu crpki i turbina, nagli prestanak rada crpki i turbina itd. uzrokuju velike poremećaje u strujanju. Ti se poremećaji očituju u velikim promjenama u tlaku, šire se brzinom zvuka uzvodno i nizvodno kroz tekućinu, periodički se ponavljaju te s vremenom slabe zbog gubitaka na trenju. Budući da su ta nestacionarna strujanja prijelazna između dva stacionarna strujanja nazivaju se tranzijentima, a budući da su im svojstvene velike promjene u tlaku i tlačnim udarima. Posebno, ako je tekućina u cjevovodu voda govori se o hidrauličkim tranzijentima i hidrauličkom udaru. Velika povećanja tlaka mogu dovesti do oštećenja cjevovoda, a velika sniženja tlaka do isparavanja tekućine i kavitacija koje isto oštećuju cjevovode. Rješenje zadatka optimalnog upravljanja takvim strujanjima omogućava predviđanje i izbjegavanje svih štetnih posljedica i primjenljivo je u projektiranju novih cjevovoda kao i u radu i održavanju postojećih.

Prvi je korak u rješavanju postavljenog zadatka nalaženje matematičkog modela strujanja. Budući da je kod promatranih strujanja brzina tekućine znatno manja od brzine zvuka mogu se linearizirati zakon očuvanja mase i zakon očuvanja količine gibanja za tekućinu ([1], [2], [3]) te se dobivaju Allijevijeve jednadžbe ([4], [5]). No takav model ne uzima u obzir moguću prisutnost plinova i para u tekućini niti se njime može modelirati isparavanje tekućine i kavitacije ([6], [7], [8]). Zato u ovome radu postavljen model polazi od Kranenburgovog modela ([9]). Time je modelirano jednodimenzionalno nestacionarno strujanje u cijevi ([10], [11], [12]). Modeliranje utjecaja ostalih dijelova cjevovoda na strujanje (spojevi cijevi, spremnici, ventili, zračne komore, vodne komore, crpke, turbine itd) znači modeliranje procesa i mehanizama kod tih dijelova ([4], [5], [13]-[19]). Cjelokupni matematički model izložen je u 1. poglavlju rada.

Drugi je korak numeričko rješavanje. Sa matematičkog stanovišta postavljeni je model inicijalno-rubni problem za nelinearni hiperbolički sustav. Analitička rješenja takvih inicijalno-rubnih problema poznata su samo kod najjednostavnijih slučajeva, problem dokazivanja postojanja i jedinstvenosti rješenja je otvoren ([20]-[23]). U teoriji hiperboličkih zakona očuvanja polazi se od analize polja karakteristika i rješavanja Riemannovog problema pomoću Rankine-Hugoniotovog uvjeta skoka, Laxovog uvjeta entropije, valova razrjeđenja, Riemannovih invarijanata, Hugoniotovog lokusa i integralnih krivulja ([24]-[28]), što omogućava dublje razumijevanje fizike pojava opisanih takvim hiperboličkim sustavima. Zbog specifičnih svojstava hiperboličkih sustava razvijene su posebne numeričke metode za njihovo rješavanje ([24], [29]-[44]). Esencijalno neoscilirajuća shema ([45]-[49]) je numerička metoda konačnih razlika visokog reda točnosti, s TVD-svojstvom, neoscilirajuća i šok-hvatajuća, a zasniva se na razdvajanju prostornog i vremenskog operatora i rekonstrukciji



pomoću primitivne funkcije te se može smatrati najboljom do danas razvijenom shemom za hiperboličke zakone. U ovom radu primijenjena je na proračun nestacionarnih strujanja u cjevovodima a budući da su kod ovog inicijalno-rubnog problema rubni uvjeti izuzetno složeni dano je rješenje koje se ne može naći u literaturi. Rezultati primjene ENO sheme izloženi su u 2. poglavlju.

Na temelju matematičkog i numeričkog modela napisan je prvi dio računarskog programa pomoću kojega se može dobiti proračun nestacionarnog strujanja u potpuno proizvoljnom cjevovodu. Provjera je provedena za šest slučajeva a rezultati su izloženi u 3. poglavlju. Prvi je proračun izveden za hidraulički udar uz zanemareno trenje i rubni uvjet - trenutno zaustavljanje protoka. Za takav problem poznato je analitičko rješenje s kojim se rješenje dobiveno proračunom izuzetno dobro podudara. Cjevovodi iz drugog i trećeg proračuna uzeti su prema Chaudhryju ([4]) radi provjere proračuna složenih rubnih uvjeta (spremnik, spoj cijevi, ventil, crpka). Rezultati pokazuju da se svako strujanje koje se može modelirati Allijejevijevim jednadžbama i metodom karakteristika može proračunati i novim modelom, kao što je i očekivano. Zatim je u četvrtom slučaju model primijenjen na problem iz prakse: proračun hidrauličkih tranzijenata u cjevovodu Hidroelektrane "Vinodol" što je omogućilo provjeru modela usporedbom s mjerenjima ([50]). U posljednja dva primjera u cjevovodu je mješavina tekućine i plina, a dolazi i do kavitacije. Peti je primjer proračun za strujanje koje je iznio Kranenburg ([9]) te se vrši usporedba s rezultatima eksperimenta i Kranenburgovog numeričkog modela. Zahvaljujući izvrsnim svojstvima ENO shema dobiveni rezultat pokazuje superiornost u praćenju širenja šoka. Posljednji, šesti proračun primjena je modela na predviđanje posljedica prestanka rada crpke u cjevovodu Plase-Opatija ([51]) što predstavlja tipičnu primjenu razvijenog računarskog programa. Iskustvo prikupljeno na svim proračunima pokazuje da je lokalno-Lax-Friedrichsova inačica ENO sheme bolja od Roeove inačice, da se najbolji rezultati dobivaju shemama drugog i trećeg reda te s Courant-Friedrichs-Levijevim koeficijentom 0,5, dok se prostorni korak prilagođava promatranom slučaju.

Rješenje zadatka optimizacije zahtijeva odabir optimizacijske metode. Većina standardnih metoda optimalnog upravljanja - CGD metoda, dinamičko programiranje, itd. ([52]-[57]) polazi od svojstava funkcije cilja kao i prostora njenih promjenljivih koja se zbog neregularnosti ovdje zadanih problema ne mogu pretpostaviti. Za razliku od toga Goldbergov genetski algoritam ([58]) ne zahtijeva derivabilnost niti bilo kakvu drugu regularnost funkcije cilja i prostora parametara. Također ne ovisi o početnoj procjeni ekstrema već je uopće i ne treba, te uspješno nalazi globalne a ne samo lokalne ekstreme čak i kod multimodalnih funkcija cilja. Izuzetno je učinkovit već i u najjednostavnijem obliku s tri osnovna operatora odabir-križanje-mutacija. Iako matematička teorija nije do kraja razjasnila zašto genetski algoritam tako dobro radi, primjena svakodnevno raste jer ne postoji nikakvo ograničenje na područja i zadatke optimizacije koji se genetskim algoritmom mogu riješiti. Zato je genetski algoritam odabran kao metoda optimizacije u ovome radu te su osnovne značajke i prilagodba vrsti optimalnih zadataka koji se rješavaju izloženi u 4. poglavlju.

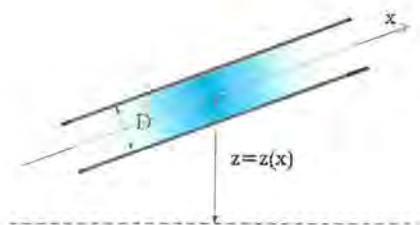
Prvi dio računarskog programa povezan je s genetskim algoritmom (GALLOPS [59]) i dobiven je cjeloviti računarski program za modeliranje i optimalno upravljanje nestacionarnim strujanjima u cjevovodima kojeg je bitna značajka potpuna proizvoljnost u zadavanju cjevovoda i zadataka optimizacije. Računarski je program primijenjen na pet različitih optimizacijskih zadataka. Postavljanje problema i funkcija cilja samo su djelomično vođena nekim primjerima iz literature ([60], [61], [62]) i svi su riješeni slučajevi novi i ne mogu se naći u literaturi. Prvi optimizacijski zadatak odnosi se na strujanje iz prvog proračuna u 3. poglavlju. U slučaju optimalnog upravljanja zaustavljanjem protoka s jednim parametrom

pomoću genetskog algoritma nađeno je točno optimalno rješenje. Za isti zadatak sa tri i sedam parametara pomoću genetskog algoritma nalaze se manje vrijednosti funkcije cilja, te se popravljaju rezultat optimizacije. U drugom optimizacijskom problemu nalazi se optimalna krivulja zatvaranja ventila za cjevovod iz drugog proračuna u 3. poglavlju, a u trećem optimizacijskom problemu optimalna strategija zaustavljanja crpke za cjevovod iz trećeg proračuna u 3. poglavlju. Dok je cilj u prva tri slučaja smanjenje tlačnog udara u četvrtom slučaju cilj je nalaženje parametara modela HE "Vinodol", odnosno nalaze se faktori trenja u svim cijevima cjevovoda te hidroelektrane takvi da je razlika između mjerenog i računatog tlaka najmanja. Posljednji zadatak je optimalno upravljanje radom crpke u cjevovodu Plase-Opatija uz kriterij smanjenja kavitacijskog područja. Svi rezultati su dobiveni tako da su isprobane različite inačice operatora genetskog algoritma. Tako stečeno iskustvo pokazalo je superiornost nekih te su prikazani samo najbolji rezultati. Izlazi da je u istraženim slučajevima bilo najbolje rabiti stohastički univerzalni odabir, dvotočkovno križanje, višebitnu mutaciju i kružnu inverziju. Veličinu populacije treba prilagoditi broju parametara i broju gena po parametru tj. veličini kromosoma jedinice.

# 1. MATEMATIČKI MODEL NESTACIONARNOG STRUJANJA U CJEVODU

Neka je proizvoljan cjevovod sastavljen od cijevi, spremnika, zračnih komora, vodnih komora, ventila, crpki, turbina itd. i neka njime struji tekućina u kojoj mogu biti prisutni mjehurići plina i pare. Treba postaviti matematički model za takvo strujanje unutar pojedine cijevi kao i matematički model utjecaja ostalih dijelova cjevovoda na isto strujanje.

## 1.1 MATEMATIČKI MODEL NESTACIONARNOG STRUJANJA U CIJEVI



Sl. 1. Jednodimenzionalno strujanje u cijevi

Neka cijev ima duljinu  $L$ , kružni poprečni presjek promjera  $D$ , neka je  $x$ -os postavljena u smjeru prostiranja cijevi te neka je  $z = z(x)$  visina mjerena od zadane razine.

Promatrano je strujanje u cijevi jednodimenzionalno i nestacionarno, te moraju biti zadovoljeni zakon očuvanja mase:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (1.1)$$

i zakon očuvanja količine gibanja:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) = -\rho \left( g \frac{dz}{dx} + \frac{\lambda}{2D} v |v| \right), \quad (1.2)$$

gdje je:

$t$  - vrijeme,

$\rho$  - gustoća,

$v$  - brzina strujanja,

$p$  - tlak,

$g$  - ubrzanje sile teže,

$\lambda$  - faktor trenja.

U jednadžbi (1.2) prvim se pribrojnikom na desnoj strani modelira utjecaj sile teže na strujanje, a drugim pribrojnikom utjecaj trenja prema Darcy-Weisbachovoj formuli.

Pri tom je u tekućini otopljen plin te su prisutni mjehurići plina i pare. Primjenom zakona idealnog plina za pojedini mjehurić i Boussinesquove relacije za proces prijelaza plina u



mjehurić i ponovno otapanje u tekućini, dobiva se da se količina plina u pojedinom mjehuriću mijenja prema jednakosti:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\kappa) = c_1 \frac{p_s - p}{\sqrt{p - p_v}} \sqrt{\kappa}, \quad (1.3)$$

gdje je:

$\kappa$  - količina plina u pojedinom mjehuriću,

$c_1$  - konstanta proporcionalnosti,

$p_s$  - tlak zasićenja tekućine plinom,

$p_v$  - tlak isparavanja tekućine.

Uslijed prisutnosti plina gustoća je manja od gustoće same tekućine i iznosi:

$$\rho = \left(1 - \frac{c_2 \kappa}{p - p_v}\right) \rho_l, \quad (1.4)$$

gdje je:

$c_2$  - konstanta proporcionalnosti,

$\rho_l$  - gustoća tekućine.

Kada bi u istoj cijevi bila samo tekućina promjena tlaka širila bi se brzinom:

$$a_t = \sqrt{\frac{dp}{d\rho_l}}, \quad (1.5)$$

gdje je:

$a_t$  - brzina zvuka u tekućini u cijevi.

Tako matematički model nestacionarnog strujanja u cijevi čini sustav jednadžbi (1.1)-(1.2)-(1.3) uz relacije (1.4) i (1.5) za veličine  $\rho = \rho(x,t)$ ,  $v = v(x,t)$ ,  $p = p(x,t)$ ,  $\kappa = \kappa(x,t)$ .

Često se pored brzine promatra protok:

$$Q = Av \quad (1.6)$$

gdje je:

$Q$  - protok,

$A$  - površina poprečnog presjeka cijevi.

Konstante proporcionalnosti u jednadžbama (1.3) i (1.4) računaju se prema izrazima:

$$c_1 = 2c_e \sqrt{6c_d c_p T v_m}, \quad (1.7)$$

$$c_2 = \frac{n_m c_p T}{A}, \quad (1.8)$$

gdje je:

$c_e$  - konstanta proporcionalnosti u relaciji između tlaka plina i ravnotežne koncentracije otopljenog plina,

$c_d$  - koeficijent difuzije,

$c_p$  - univerzalna plinska konstanta,

$T$  - temperatura,

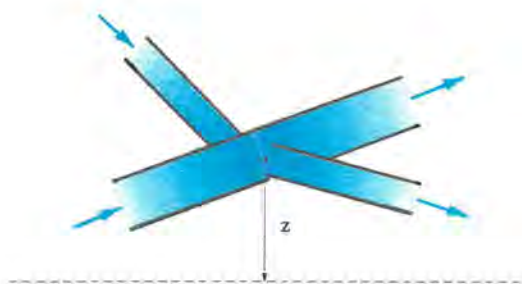
$v_m$  - brzina gibanja mjehurića u odnosu na tekućinu,

$n_m$  - broj mjehurića po jedinici duljine cijevi.

## 1.2 MATEMATIČKI MODEL UTJECAJA OSTALIH DIJELOVA CJEVOVODA NA STRUJANJE

Svaki cjevovod pored cijevi sadržava čitav niz drugih dijelova: cijevi odvođe ili dovode tekućinu iz spremnika, pomoću crpki povećava se protok, zatvaranjem i otvaranjem ventila regulira se strujanje tekućine, kod elektrana na kraju su cjevovoda turbine, radi slabljenja tlačnih udara ugrađuju se zračne komore, vodne komore i razne vrste sigurnosnih ventila, postoje spojevi cijevi sa ili bez grananja, itd. Svaki od tih dijelova ima svoja svojstva i svoj utjecaj na strujanje tekućine na mjestu na kojem se nalazi. Svaki promatrani dio cjevovoda ima barem jednu dovodnu ili odvodnu cijev. Veličine koje se odnose na dovodnu cijev označavaju se indeksom  $d$ , a veličine koje se odnose na odvodnu cijev označavaju se indeksom  $o$ .

### 1.2.1 Spoj cijevi



Sl. 2. Spoj cijevi

Spoj cijevi je spoj jedne ili više dovodnih cijevi sa jednom ili više odvodnih cijevi.

Tlak na spoju isti je za sve cijevi:

$$p_{d,i} = p \quad \text{za sve } i = 1, \dots, n_d, \quad (1.9)$$

$$p_{o,j} = p \quad \text{za sve } j = 1, \dots, n_o, \quad (1.10)$$

gdje je:

$p$  - tlak kod spoja cijevi,

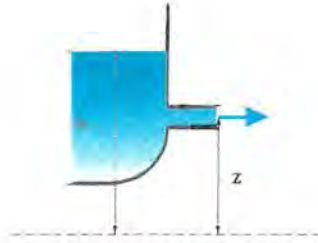
$n_d$  - broj dovodnih cijevi,

$n_o$  - broj odvodnih cijevi,

a ukupni ulazni protok jednak je ukupnom izlaznom protoku:

$$\sum_{i=1}^{n_d} Q_{d,i} = \sum_{j=1}^{n_o} Q_{o,j}. \quad (1.11)$$

### 1.2.2 Spremnik



Sl. 3. Dovodni spremnik

Spremnik je u cjevovodu početak ili kraj neke grane cjevovoda.

Ako je cijev odvodna ili dovodna za spremnik vrijedi:

$$p_o = p_{atm} + \rho_s g(z_s - z) - \frac{\rho Q_o^2}{2A_o^2} - k \frac{\rho Q_o |Q_o|}{2A_o^2} \quad \text{ili} \quad (1.12)$$

$$p_d = p_{atm} + \rho_s g(z_s - z) - \frac{\rho Q_d^2}{2A_d^2} + k \frac{\rho Q_d |Q_d|}{2A_d^2}, \quad (1.13)$$

gdje je

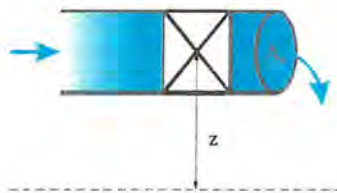
$p_{atm}$  - atmosferski tlak,

$z_s = z_s(t)$  - visina tekućine u spremniku,

$\rho_s$  - gustoća tekućine u spremniku,

$k$  - koeficijent gubitaka na izlazu iz spremnika.

### 1.2.3 Ventil na kraju cijevi



Sl. 4. Ventil na kraju cijevi

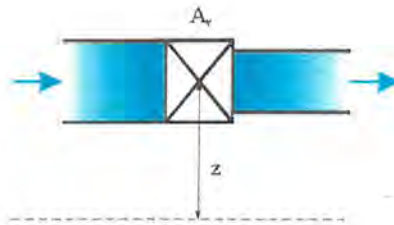
Pomoću ventila na kraju neke grane cjevovoda upravlja se istjecanjem tekućine mijenjajući površinu otvora ventila. Pri tome se tlak kod ventila mijenja prema relaciji:

$$p_d = p_{atm} + \frac{\rho Q_d^2}{2A_v^2}, \quad (1.14)$$

gdje je:

$A_v = A_v(t)$  - površina otvora ventila.

### 1.2.4 Ventil između dvije cijevi



Sl. 5. Ventil između dvije cijevi

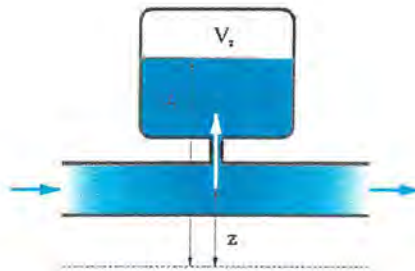
Neka je ventil smješten između dvije cijevi. Tada je protok prije i poslije ventila isti:

$$Q_d = Q_o, \quad (1.15)$$

dok se tlak prolazom tekućine kroz ventil mijenja prema izrazu:

$$p_d = p_o + \frac{\rho Q_d |Q_d|}{2A_v^2}. \quad (1.16)$$

### 1.2.5 Zračna komora



Sl. 6. Zračna komora

Zračna je komora zatvorena komora smještena između dvije cijevi u cjevovodu koju do neke razine ispunjava tekućina iz cjevovoda a ostatak prostora ispunjen je zrakom.

Dok je tlak u tekućini veći od tlaka zraka u komori tekućina utječe u komoru i volumen se prostora koji ispunjava zrak smanjuje čime se ujedno povećava tlak zraka i obratno, kada tlak zraka u komori postane veći od tlaka u tekućini tekućina istječe iz komore i zrak u komori se širi. Takvim jednostavnim procesom zračne komore ublažavaju tlačne udare u cjevovodu.

Na ulazu u komoru vrijedi:

$$p_d = p, \quad p_o = p, \quad (1.17)$$

$$Q_d = Q_o + Q, \quad (1.18)$$

gdje je:

$p$  - tlak na ulazu u komoru,

$Q$  - protok u komoru.

Utjecanje ili istjecanje tekućine u komoru povećava ili smanjuje razinu tekućine:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{Q}{A_{zk}}, \quad (1.19)$$

gdje je:



$z_i$  - razina tekućine u komori,

$A_{zk} = A_{zk}(z)$  - površina poprečnog presjeka komore na visini  $z$ .

Time se smanjuje ili povećava volumen koji zauzima zrak:

$$\frac{dV_z}{dt} = -Q, \quad (1.20)$$

gdje je:

$V_z$  - volumen zraka u komori.

To se odražava na promjenu tlaka prema politropskoj jednadžbi za idealni plin:

$$p_z \cdot V_z^s = \text{const.}, \quad (1.21)$$

gdje je:

$p_z$  - tlak zraka u komori,

$s$  - eksponent jednak 1,0 za izotermalnu, odnosno 1,4 za adijabatsku promjenu.

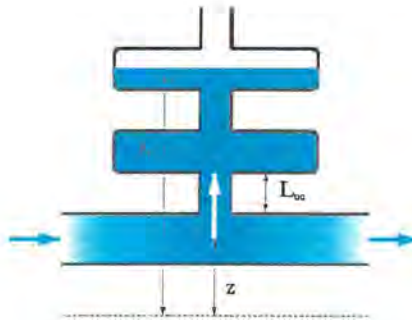
Relacija između tlaka u zraku i tlaka na ulazu u komoru glasi:

$$p = k\rho g Q|Q| + \rho g(z_i - z) + p_z, \quad (1.22)$$

gdje je:

$k$  - koeficijent gubitaka.

### 1.2.6 Vodna komora



Sl. 7. Vodna komora

Vodna se komora postavlja između dvije cijevi cjevovoda, ima kratku ulaznu cijev, složen oblik sa više različito smještenih bočnih galerija te je na vrhu otvorena.

Slično kao kod zračne komore povećanje ili smanjenje tlaka u tekućini izaziva podizanje ili spuštanje razine tekućine u vodnoj komori uz bitnu razliku da je vodna komora otvorena te nema stlačivanja zraka. Također je moguće da kod velikog porasta tlaka vodna komora bude ispunjena do vrha te da se tekućina prelije van. Vodna komora kao i zračna komora smanjuje mogućnost razornog djelovanja tlačnih udara.

Za tlak na kraju dovodne cijevi i na početku odvodne cijevi vrijedi:

$$p_d = p, \quad p_o = p, \quad (1.23)$$

gdje je:

$p$  - tlak na ulazu u vodnu komoru.

Protok u dovodnoj cijevi grana se na protok u vodnu komoru i protok u odvodnu cijev:

$$Q_d = Q_o + Q, \quad (1.24)$$

gdje je:

$Q$  - protok u vodnu komoru,

a utjecanje ili istjecanje u vodnu komoru uzrokuje povišenje ili sniženje razine tekućine u komori:

$$\frac{dz_t}{dt} = \frac{Q}{A_{vk}}, \quad (1.25)$$

gdje je:

$z_t$  - visina tekućine u vodnoj komori,

$A_{vk} = A_{vk}(z)$  - površina poprečnog presjeka vodne komore na visini  $z$ .

Razlika tlakova uzrokuje kretanje tekućine u kratkoj uzlaznoj cijevi vodne komore prema relaciji:

$$p = p_{atm} + \rho g(z_t - z) + \frac{\lambda_{uc} L_{uc} \rho}{2D_{uc} A_{uc}^2} Q|Q| + \frac{L_{uc} \rho}{A_{uc}} \frac{dQ}{dt}, \quad (1.26)$$

gdje je:

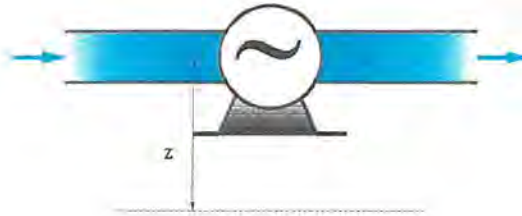
$L_{uc}$  - duljina uzlazne cijevi,

$D_{uc}$  - promjer uzlazne cijevi,

$A_{uc}$  - površinu poprečnog presjeka uzlazne cijevi,

$\lambda_{uc}$  - faktor trenja u uzlaznoj cijevi.

### 1.2.7 Crpka



Sl. 8. Crpka

Crpka u cjevovodu bitno mijenja tlak i protok tekućine. Ako motor crpke radi, ovisno o brzini okretanja crpka povećava protok i stvara promjenu u tlaku na mjestu na kojem se nalazi. Ako motor crpke ne radi, tekućina protjecanjem kroz crpku ovisno o tromosti crpke uzrokuje okretanje, te su protok i tlak tekućine također bitno drugačiji nego što bi bili u odsutnosti crpke.

Protok se prolazom kroz crpku ne mijenja:

$$Q_d = Q, \quad Q_o = Q, \quad (1.27)$$

gdje je:

$Q$  - protok kroz crpku,

ali crpka uzrokuje promjenu tlaka iz dovodne u odvodnu cijev:

$$p_o = p_d + \rho_l g H - k \rho g Q|Q| \quad (1.28)$$

gdje je :

$H$  - promjena piezometričke brzine kod crpke,

$k$  - koeficijent gubitaka.

Nadalje razlikujemo dva slučaja. U prvom slučaju motor crpke radi i tada je poznat broj okretaja u sekundi kao funkcija vremena:

$$N = N(t), \quad (1.29)$$

te promjena piezometričke visine ovisi o protoku i brzini okretanja. Karakteristikom za piezometričku visinu dana je potrebna ovisnost. Ta je karakteristika izražena pomoću skaliranih veličina:

$$h = \frac{H}{H_R}, \quad q = \frac{Q}{Q_R} \quad \text{i} \quad \alpha = \frac{N}{N_R} \quad (1.30)$$

gdje je indeksom  $R$  označena referentna vrijednost promatrane veličine, te promjenljive:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\alpha}{q} \in [0, 2\pi] \quad (1.31)$$

i zadana je kao funkcija:

$$F_h = F_h(\theta), \quad (1.32)$$

iz koje se dobiva:

$$h = (\alpha^2 + q^2) F_h. \quad (1.33)$$

U drugom slučaju motor crpke ne radi, a okretanje u crpki posljedica je strujanja tekućine. Tada vrijedi:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{60}{2\pi} \frac{1}{WR^2} M, \quad (1.34)$$

gdje je:

$WR^2$  - ukupni moment inercije crpke, motora i tekućine,

$M$  - moment crpke.

Tada je pored prve potrebna i druga karakteristika crpke. Ta karakteristika je karakteristika za moment, izražava se pomoću skalirane veličine:

$$\beta = \frac{M}{M_R}, \quad (1.35)$$

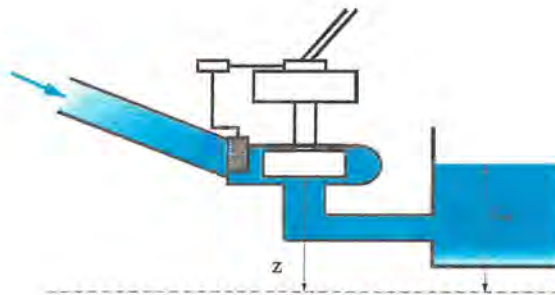
kao funkcija:

$$F_\beta = F_\beta(\theta), \quad (1.36)$$

iz koje se dobiva:

$$\beta = (\alpha^2 + q^2) F_\beta. \quad (1.37)$$

### 1.2.8 Turbina



Sl. 9. Turbina

U hidroelektranama voda iz izvora (jezera, spremnika, otvorenog kanala ili sl.) cjevovodom dotječe do turbina i zatim istječe kroz odvodni sustav.

Protok kroz turbinu je jednak protoku u dovodnoj cijevi:

$$Q_d = Q, \quad (1.38)$$

gdje je:

$Q$  - protok kroz turbinu,

a za tlak vrijedi:

$$p_d = p_{atm} + \rho_t g H_n + \rho_t g (z_{os} - z) - \frac{\rho Q_d^2}{2A_d^2}, \quad (1.39)$$

gdje je:

$H_n$  - neto pad kod turbine,

$z_{os}$  - visina vode u odvodnom sustavu.

Vrsta i svojstva turbine utjecat će na to kakva će biti veza između neto pada i protoka u turbini.

U slučaju Franciseove turbine zadane su dvije karakteristike:

$$\chi = \chi(\phi, \tau) \quad \text{i} \quad \psi = \psi(\phi, \tau) \quad (1.40)$$

gdje je:

$\chi$  - jedinični protok,

$\psi$  - jedinična snaga,

$\phi$  - jedinični broj okretaja,

$\tau$  - relativni otvor zakretnih lopatica.

Ove su veličine definirane relacijama:

$$\chi = \frac{Q}{D^2 \sqrt{H_n}}, \quad (1.41)$$

$$\psi = \frac{P}{D^2 \sqrt{H_n^3}}, \quad (1.42)$$

$$\phi = \frac{DN}{84,45 \sqrt{H_n}}, \quad (1.43)$$

gdje je:

$D$  - promjer rotora,

$P$  - proizvedena snaga.

Pored toga vrijedi:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{WR^2} \left( \frac{60}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{N} \left( P - \frac{P_{gen}}{\eta_{gen}} \right) \quad (1.44)$$

gdje je:

$WR^2$  - ukupni moment inercije turbine i generatora,

$P_{gen}$  - snaga generatora,

$\eta_{gen}$  - koeficijent iskoristivosti generatora.

Brojem okretaja upravlja se pomoću regulatora. Matematički model za prigušni regulator je:

$$\frac{dw_a}{dt} = \frac{1}{T_a} (\alpha_{ref} - \alpha - e_p - \sigma w_a), \quad (1.45)$$



$$\frac{de_p}{dt} = \frac{1}{t_p} \left( \delta t_p \frac{dw_a}{dt} - e_p \right), \quad (1.46)$$

$$\frac{dw_v}{dt} = \frac{1}{t_v} (k_v (w_a - \tau) - w_v), \quad (1.47)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = k_s w_v, \quad (1.48)$$

gdje je:

$w_a$  - izlazna veličina aktuatora,

$w_v$  - izlazna veličina razdjelnog ventila,

$e_p$  - izlazna veličina prigušivača,

$\alpha$  - skalirani broj okretaja,

$\alpha_{ref}$  - referentna vrijednost skaliranog broja okretaja,

$k_s$  - pojačanje otvora servomotora,

$k_v$  - pojačanje otvora razdjelnog ventila,

$t_v$  - vremenska konstanta razdjelnog ventila,

$t_a$  - vremenska konstanta aktuatora,

$t_p$  - vremenska konstanta prigušivača,

$\delta$  - trenutačno smanjenje broja okretaja,

$\sigma$  - trajno smanjenje broja okretaja.

### 1.2.9 Poznati tlak

Ponekad je moguće neki element cjevovoda modelirati samo pomoću izmjerenog ili pretpostavljenog tlaka kao funkcije vremena u pripadnoj točki cjevovoda.

Na primjer, ako za crpku nisu poznate karakteristike ili ostali važni parametri a treba proračunati tlačni udar u slučaju najgoreg mogućeg događaja: naglog prestanka ili naglog početka rada crpke, tada se proračun izvodi tako da se na položaju crpke zada tlak te se prestanak rada crpke simulira trenutačnim padom tlaka i obratno početak rada crpke trenutačnim porastom tlaka. Slično, kod spremnika se ponekad može zanemariti gubitke, te iz poznate razine tekućine u spremniku izračunati tlak na izlazu iz spremnika.

Kod ovakvog pristupa točka u kojoj je poznat tlak ili je početna točka odvodne cijevi, pa vrijedi:

$$p_o = p_o(t) \quad (1.49)$$

ili završna točka dovodne cijevi:

$$p_d = p_d(t) \quad (1.50)$$

### 1.2.10 Poznata brzina

Slično kao u prethodnoj točki, modeliranje nekog elementa cjevovoda moguće je i pomoću izmjerenog ili pretpostavljenog protoka kao funkcije vremena u pripadnoj točki cjevovoda.

Takav je pristup posebno pogodan za završetke cjevovoda kod kojih tekućina istječe u neki drugi sustav. Na primjer, modeliranje tlačnog udara uslijed naglog zatvaranja ventila na kraju cijevi najjednostavnije je zadavanjem protoka kod tog ventila. Slično vrijedi i za završetak

dovodnog sustava vode kod hidroelektrana ako nisu poznati svi potrebni podaci o turbini. Tada, posebno ako treba simulacijom ponoviti podatke dobivene mjerenjima te tako provjeriti uspješnost postavljenog modela cjevovoda, može se turbinu simulirati pomoću izmjerenog protoka.

Kod ovakvog pristupa točka u kojoj je poznat protok, dakle i brzina tekućine ili je početna točka odvodne cijevi, pa vrijedi:

$$v_o = v_o(t), \quad (1.51)$$

ili završna točka dovodne cijevi:

$$v_d = v_d(t). \quad (1.52)$$

## 2. ESENCIJALNO NEOSCILIRAJUĆA SHEMA U PRORAČUNU NESTACIONARNOG STRUJANJA U CJEVOVODU

### 2.1 NELINEARNI HIPERBOLIČKI SUSTAV ZAKONA OČUVANJA

#### 2.1.1 Polja karakteristika

Sustav (1.1)-(1.2) može se napisati u obliku:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}(\bar{u}) = \bar{g}(\bar{u}, x, t), \quad (2.1)$$

uz vektor stanja:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

funkcija fluksa nad vektorom stanja:

$$\bar{f}(\bar{u}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{u}) \\ f_2(\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p(\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + p(u_1) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

te vektor desne strane sustava:

$$\bar{g}(\bar{u}, x, t) = \begin{pmatrix} g_1(\bar{u}, x, t) \\ g_2(\bar{u}, x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \left( g \frac{dz}{dx}(x) + \frac{\lambda}{2D} v|v| \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_1 \left( g \frac{dz}{dx}(x) + \frac{\lambda}{2D} \frac{u_2 |u_2|}{u_1^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Odgovarajuća Jacobijeva matrica fluksa je:

$$D\bar{f}(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 + \frac{dp}{du_1} & 2\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Budući da s povećanjem tlaka i gustoća raste i obratno, može se uvesti veličina:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{du_1}} \quad (2.6)$$

i napisati:

$$D\bar{f}(\bar{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Ova matrica ima svojstvene vrijednosti:

$$\lambda^{(1)}(\bar{u}) = v - a < \lambda^{(2)}(\bar{u}) = v + a, \quad (2.8)$$

te je sustav (2.1) strogo hiperbolički. U 1-polju karakteristika desni i lijevi svojstveni vektori su:

$$\bar{r}^{(1)} = c_{r1} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \bar{l}^{(1)} = c_{l1} \begin{pmatrix} -\lambda^{(2)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

a u 2-polju karakteristika:

$$\vec{r}^{(2)} = c_{r2} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(2)} \end{pmatrix} \text{ i } \vec{l}^{(2)} = c_{l2} \begin{pmatrix} -\lambda^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

gdje su  $c_{r1}$ ,  $c_{r2}$ ,  $c_{l1}$  i  $c_{l2}$  takvi da je zadovoljen uvjet normiranosti:

$$\vec{r}^{(1)} \vec{l}^{(1)} = -c_{r1} c_{l1} 2a = 1 \text{ i } \vec{r}^{(2)} \vec{l}^{(2)} = c_{r2} c_{l2} 2a = 1, \quad (2.11)$$

odnosno može se uzeti:

$$c_{r1} = c_{r2} = \frac{1}{2a}, \quad c_{l1} = -1, \quad c_{l2} = 1. \quad (2.12)$$

Komponente fluksa po poljima kakarakteristika iznose:

$$f^{(1)} = \vec{l}^{(1)} \vec{f}(\vec{u}) = -p(u_1) + u_2 a(u_1) \quad (2.13)$$

te:

$$f^{(2)} = \vec{l}^{(2)} \vec{f}(\vec{u}) = p(u_1) + u_2 a(u_1). \quad (2.14)$$

Prema teoriji hiperboličkih zakona očuvanja mora se zadati početni uvjet (stanje tekućine u trenutku  $t = 0$ ):

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x), \quad (2.15)$$

te kako je domena  $x \in [0, L]$  i rubne uvjete. Pri tome kako je kod promatranih pojava brzina tekućine  $v$  znatno manja od brzine zvuka  $a$ , vrijedi:

$$\lambda^{(1)} < 0 \text{ i } \lambda^{(2)} > 0, \quad (2.16)$$

te je nužno na oba ruba (na rubu  $x = 0$  i na rubu  $x = L$ ) zadati točno po jedan rubni uvjet.

### 2.1.2 Riemannov problem

Sa stanovišta teorije hiperboličkih sustava od posebnog je značenja rješavanje Riemannovog problema, odnosno rješavanje homogenog hiperboličkog sustava:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \vec{f}(\vec{u}) = 0 \quad (2.17)$$

uz početni uvjet:

$$\vec{u}(x, 0) = \begin{cases} \vec{u}_l & x \leq 0 \\ \vec{u}_r & x > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

a koji se rješava nalaženjem Hugoniotovog lokusa i Riemannovih integralnih krivulja u faznom prostoru.

Hugoniotov lokus čine po jedan jednoparametarski skup točaka u faznom prostoru za svako polje karakteristika a koji se nalaze iz Rankine-Hugoniotovog uvjeta skoka za dva stanja  $\vec{u}$  i  $\hat{\vec{u}}$  odvojena prekidom koji se širi brzinom  $v_s$ :

$$\vec{f}(\vec{u}) - \vec{f}(\hat{\vec{u}}) = v_s (\vec{u} - \hat{\vec{u}}). \quad (2.19)$$

Za sustav (2.1) Rankine-Hugoniotov uvjet skoka glasi:

$$\left. \begin{aligned} & \vec{u}_2 - \hat{u}_2 = v_s (\vec{u}_1 - \hat{u}_1) \\ & \left( \frac{\vec{u}_2^2}{\vec{u}_1} + p(\vec{u}_1) \right) - \left( \frac{\hat{u}_2^2}{\hat{u}_1} + p(\hat{u}_1) \right) = v_s (\vec{u}_2 - \hat{u}_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

iz kojega slijedi:

$$v_s = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \pm \sqrt{\frac{p(\tilde{u}_1) - p(\hat{u}_1)}{\tilde{u}_1 - \hat{u}_1}} \sqrt{\frac{\tilde{u}_1}{\hat{u}_1}} \quad (2.21)$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{\tilde{u}_1}{\hat{u}_1} \hat{u}_2 \pm \sqrt{\frac{p(\tilde{u}_1) - p(\hat{u}_1)}{\tilde{u}_1 - \hat{u}_1}} \sqrt{\frac{\tilde{u}_1}{\hat{u}_1}} (\tilde{u}_1 - \hat{u}_1). \quad (2.22)$$

Tako je za stanje  $\hat{u}$  uz parametrizaciju:

$$\tilde{u}_1 = \hat{u}_1 (1 + \xi) \quad (2.23)$$

Hugoniotov lokus u 1-polju:

$$\tilde{u} = \hat{u} + \xi \left( \hat{u}_2 - \sqrt{\frac{p(\hat{u}_1(1+\xi)) - p(\hat{u}_1)}{\hat{u}_1 \xi}} \hat{u}_1 \sqrt{1+\xi} \right) \quad (2.24)$$

sa brzinom širenja šoka:

$$v_s = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} - \sqrt{\frac{p(\hat{u}_1(1+\xi)) - p(\hat{u}_1)}{\hat{u}_1 \xi}} \sqrt{1+\xi}, \quad (2.25)$$

a Hugoniotov lokus u 2-polju:

$$\tilde{u} = \hat{u} + \xi \left( \hat{u}_2 + \sqrt{\frac{p(\hat{u}_1(1+\xi)) - p(\hat{u}_1)}{\hat{u}_1 \xi}} \hat{u}_1 \sqrt{1+\xi} \right) \quad (2.26)$$

sa brzinom širenja šoka:

$$v_s = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} + \sqrt{\frac{p(\hat{u}_1(1+\xi)) - p(\hat{u}_1)}{\hat{u}_1 \xi}} \sqrt{1+\xi}. \quad (2.27)$$

Budući da je:

$$D\lambda^{(1)}(\bar{u}) \cdot \bar{r}^{(1)}(\bar{u}) \propto \begin{pmatrix} -\frac{u_2}{u_1^2} - a'(u_1) \\ 1 \\ u_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u_2 - a(u_1) \end{pmatrix} = -\left( \frac{a(u_1)}{u_1} + a'(u_1) \right) \neq 0 \quad (2.28)$$

$$D\lambda^{(2)}(\bar{u}) \cdot \bar{r}^{(2)}(\bar{u}) \propto \begin{pmatrix} -\frac{u_2}{u_1^2} + a'(u_1) \\ 1 \\ u_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u_2 + a(u_1) \end{pmatrix} = \left( \frac{a(u_1)}{u_1} + a'(u_1) \right) \neq 0, \quad (2.29)$$

oba su polja istinski nelinearna te prema Laxovom uvjetu entropije nisu dopušteni svi šokovi već samo oni kod kojih karakteristike nestaju u šoku s protjecanjem vremena. Točnije, Riemannov problem ima rješenje s šokom u 1-polju karakteristika ako je zadovoljen uvjet:

$$\lambda^{(1)}(\bar{u}_l) > v_s > \lambda^{(1)}(\bar{u}_r), \quad (2.30)$$

odnosno s šokom u 2-polju karakteristika ako je zadovoljen uvjet:

$$\lambda^{(2)}(\bar{u}_l) > v_s > \lambda^{(2)}(\bar{u}_r). \quad (2.31)$$

Raspisivanjem ovih uvjeta nalazi se da je 1-šok moguć ako je:

$$u_{r,1} > u_{l,1}, \quad (2.32)$$

a 2-šok ako je:

$$u_{r,1} < u_{l,1} \quad (2.33)$$

Budući da 1-šokovi putuju sporije od čestica pa čestice prolazom kroz 1-šok prelaze iz stanja  $\bar{u}_l$  u stanje  $\bar{u}_r$ , dok 2-šokovi putuju brže od čestica pa čestice prolazom kroz 2-šok prelaze iz stanja  $\bar{u}_r$  u stanje  $\bar{u}_l$ , u oba je slučaja šok moguć samo ako prolaskom kroz šok tekućina prelazi iz stanja nižeg u stanje višeg tlaka.

Obrnuti prijelaz moguć je kroz val razrjeđenja. Integralnu krivulju  $\bar{u} = \bar{u}(\xi)$  u faznom prostoru čine sva stanja koja mogu biti međusobno povezana valom razrjeđenja. Budući da je za te krivulje u svakoj točki tangenta kolinearna s desnim svojstvenim vektorom promatranog polja karakteristika, diferencijalna jednadžba integralne krivulje p-razrjeđenja glasi:

$$\bar{u}'(\xi) = \frac{1}{D\lambda^{(p)}(\bar{u}(\xi)) \cdot \bar{r}^{(p)}(\bar{u}(\xi))} \bar{r}^{(p)}(\bar{u}(\xi)), \quad p = 1, 2. \quad (2.34)$$

Za sustav (2.1) diferencijalna jednadžba integralne krivulje 1-razrjeđenja glasi:

$$\bar{u}'(\xi) = \frac{1}{\frac{a(u_1)}{u_1} + a'(u_1)} \begin{pmatrix} 1 \\ u_2 + a(u_1) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

a diferencijalna jednadžba integralne krivulje 2-razrjeđenja:

$$\bar{u}'(\xi) = \frac{-1}{\frac{a(u_1)}{u_1} + a'(u_1)} \begin{pmatrix} 1 \\ u_2 - a(u_1) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

koje se rješavaju uz početni uvjet:

$$\bar{u}(0) = \hat{\bar{u}}. \quad (2.37)$$

Integralne krivulje za neko polje karakteristika bitne su i zato jer se duž njih ne mijenja vrijednost p-Riemannove invarijante  $R^{(p)} = R^{(p)}(\bar{u})$ ,  $p = 1, 2$ . Riemannove invarijante nalaze se iz uvjeta:

$$DR^{(p)}(\bar{u}) \cdot \bar{r}^{(p)}(\bar{u}) = 0, \quad p = 1, 2 \quad (2.38)$$

te se dobiva 1-Riemannova invarijanta:

$$R^{(1)}(\bar{u}) = \frac{u_2}{u_1} - \int \frac{a(u_1)}{u_1} du_1 \quad (2.39)$$

i 2-Riemannova invarijanta:

$$R^{(2)}(\bar{u}) = \frac{u_2}{u_1} + \int \frac{a(u_1)}{u_1} du_1. \quad (2.40)$$

Kod sustava (2.1) niti 1- niti 2-polje karakteristika nije linearno degenerirano te su nemogući kontakti diskontinuiteti.

## 2.2 PRIMJENA ESENCIJALNO NEOSCILIRAJUĆIH SHEMA NA PRORAČUN STRUJANJA U CIJEVI

### 2.2.1 Prostorna i vremenska diskretizacija

Inicijalno-rubni problem za hiperbolički zakon očuvanja (2.1) se rješava numerički metodom esencijalno neoscilirajućih (ENO) shema.

Budući da je postavljeni problem prostorno jednodimenzionalan zadaje se prostorni korak  $\Delta x$  i dobiva prostornu diskretizaciju:

$$x_j = j\Delta x, \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (2.41)$$

te vremensku diskretizaciju:

$$t_0 = 0, \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

gdje se vremenski korak  $\Delta t_n$  bira tako da bude zadovoljen nužan uvjet stabilnosti numeričke metode, a to je prema Courantu, Friedrichsu i Lewyju uvjet:

$$\Delta t_n \leq c_{\text{eff}} \frac{1}{\max_{p=1,2} \left( \max_{[0,L]} |\lambda^{(p)}(\bar{u}(\cdot, t_n))| \right)} \Delta x \quad (2.43)$$

gdje je  $0 < c_{\text{eff}} \leq 1$  - Courant-Friedrichs-Lewyjev koeficijent.

Nadalje, hiperbolički zakon očuvanja (2.1) treba napisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u} = \bar{L}(\bar{u}, x, t) \quad (2.44)$$

gdje je:

$$\bar{L}(\bar{u}, x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \bar{f}(\bar{u}) + \bar{g}(\bar{u}, x, t) \quad (2.45)$$

te se posebno računa približna vrijednost prostornog operatora  $\bar{L}(\bar{u}, x, t)$  definiranog sa (2.45), a posebno približna vrijednost vremenskog operatora opisanog jednadžbom (2.44). Obje približne vrijednosti moraju biti formalno  $r$ -tog reda točnosti, odnosno lokalna greška odsijecanja mora biti  $O(\Delta x^{r+1})$ .

### 2.2.2 Približna vrijednost vremenskog operatora

Približna vrijednost vremenskog operatora omogućava da se iz vrijednosti:

$$\bar{u}_j^n = \bar{u}(x_j, t_n), \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (2.46)$$

izračuna vrijednosti:

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}(x_j, t_{n+1}), \quad j = 0, 1, \dots, J. \quad (2.47)$$

Taj se problem rješava  $r$ -koračnom Runge-Kutta metodom:

$$\bar{u}_j^{n,(0)} = \bar{u}_j^n, \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (2.48)$$

$$\bar{u}_j^{n,(i)} = \sum_{k=0}^i \left( \alpha_{ik} \bar{u}_j^{n,(k)} + \beta_{ik} \Delta t \bar{L}_j^{n,(k)} \right), \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (2.49)$$

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^{n,(r)}, \quad j = 0, 1, \dots, J. \quad (2.50)$$



Ovdje su  $\bar{L}_j^{n,(k)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$  dobiveni primjenom približne vrijednosti prostornog operatora  $\bar{L}(\bar{u}, x, t)$  definiranog u točki 2.2.1 na vrijednosti  $\bar{u}_j^{n,(k)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$  za vremenski trenutak  $t_n^{(k)}$ . Koeficijenti su numeričke sheme takvi da je shema TVD i što višeg formalnog reda točnosti. Tako se za 2-koračnu shemu koeficijenti:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0} &= 1 & \beta_{1,0} &= 1 \\ \alpha_{2,0} &= \frac{1}{2} & \alpha_{2,1} &= \frac{1}{2} & \beta_{2,0} &= 0 & \beta_{2,1} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.51)$$

za 3-koračnu shemu:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0} &= 1 & \beta_{1,0} &= 1 \\ \alpha_{2,0} &= \frac{3}{4} & \alpha_{2,1} &= \frac{1}{4} & \beta_{2,0} &= 0 & \beta_{2,1} &= \frac{1}{4} \\ \alpha_{3,0} &= \frac{1}{3} & \alpha_{3,1} &= 0 & \alpha_{3,2} &= \frac{2}{3} & \beta_{3,0} &= 0 & \beta_{3,1} &= 0 & \beta_{3,2} &= \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (2.52)$$

za 4-koračnu shemu:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0} &= 1 & \beta_{1,0} &= \frac{1}{2} \\ \alpha_{2,0} &= \frac{1}{2} & \alpha_{2,1} &= \frac{1}{2} & \beta_{2,0} &= -\frac{1}{4} & \beta_{2,1} &= \frac{1}{2} \\ \alpha_{3,0} &= \frac{1}{9} & \alpha_{3,1} &= \frac{2}{9} & \alpha_{3,2} &= \frac{2}{3} & \beta_{3,0} &= -\frac{1}{9} & \beta_{3,1} &= -\frac{1}{3} & \beta_{3,2} &= 1 \\ \alpha_{4,0} &= 0 & \alpha_{4,1} &= \frac{1}{3} & \alpha_{4,2} &= \frac{1}{3} & \alpha_{4,3} &= \frac{1}{3} & \beta_{4,0} &= 0 & \beta_{4,1} &= \frac{1}{6} & \beta_{4,2} &= 0 & \beta_{4,3} &= \frac{1}{6} \end{aligned} \quad (2.53)$$

itd.

Istom se  $r$ -koračnom Runge-Kutta metodom rješava jednačba (1.3).

### 2.2.3 Približna vrijednost prostornog operatora

Neka su poznate približne vrijednosti:

$$\bar{u}_j, \quad j = 0, \dots, J \quad (2.54)$$

za neko vrijeme  $t$ . Treba izračunati približnu vrijednost prostornog operatora  $\bar{L}(\bar{u}(x, t), x, t)$ .

Za član  $\bar{g}(\bar{u}, x, t)$  iz izraza (2.45) uzima se približnu vrijednost:

$$\bar{g}_j = \bar{g}(\bar{u}_j, x_j, t) \quad (2.55)$$

dok se član  $-\frac{\partial}{\partial x} \bar{f}(\bar{u})$  računa prema konzervativnoj shemi:

$$-\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2} \right) \quad (2.56)$$

gdje su  $\hat{f}_{j-1/2}$  i  $\hat{f}_{j+1/2}$  približne vrijednosti fluksa kroz rubove ćelije  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ . Tako je glavni zadatak dobro modeliranje konzistentnog numeričkog fluksa  $\hat{f}_{j+1/2}$ .

Prvo se ispituju dva lokalna polja karakteristika. Kako je položaj  $x_{j+1/2}$  okružen stanjima  $\bar{u}_j$  i  $\bar{u}_{j+1}$  za približnu vrijednost lokalnog Jacobijana uzima se:



$$D\vec{f}_{j+1/2} = D\vec{f}\left(\frac{1}{2}(\vec{u}_j + \vec{u}_{j+1})\right) \quad (2.57)$$

i računa se pripadne svojstvene vrijednosti te desne i lijeve svojstvene vektore:

$$\lambda_{j+1/2}^{(p)}, \vec{r}_{j+1/2}^{(p)}, \vec{l}_{j+1/2}^{(p)}, \quad p = 1, 2. \quad (2.58)$$

Zatim se promatra komponente vektora stanja i vektora fluksa u lokalnom p-polju karakteristika:

$$u^{(p)} = \vec{l}_{j+1/2}^{(p)} \vec{u}, \quad f^{(p)} = \vec{l}_{j+1/2}^{(p)} \vec{f}(\vec{u}), \quad p = 1, 2, \quad (2.59)$$

odnosno, kod Roeove inačice sheme (ENORoe) promatra se funkcije:

$$w = f^{(p)}, \quad p = 1, 2, \quad (2.60)$$

a kod lokalno-Lax-Friedrichsove inačice sheme (ENOLLF) funkcije:

$$w = \frac{1}{2}(f^{(p)} \pm \alpha_{j+1/2}^{(p)} u^{(p)}), \quad p = 1, 2, \quad (2.61)$$

gdje je:

$$\alpha_{j+1/2}^{(p)} = \max\left\{|\lambda^{(p)}(\vec{u}_j)|, |\lambda^{(p)}(\vec{u}_{j+1})|\right\}, \quad p = 1, 2. \quad (2.62)$$

Za funkciju  $w = w(x)$  poznate su samo srednje vrijednosti na ćelijama:

$$[x_{l-1/2}, x_{l+1/2}], \quad l = 0, 1, \dots, J \quad (2.63)$$

jer su poznate samo vrijednosti:

$$u_l^{(p)} = \vec{l}_{j+1/2}^{(p)} \vec{u}_l, \quad f_l^{(p)} = \vec{l}_{j+1/2}^{(p)} \vec{f}(\vec{u}_l), \quad l = 0, 1, \dots, J. \quad (2.64)$$

Međutim za pripadnu primitivnu funkciju definiranu sa:

$$W(x) = \int_{x_{-1/2}}^x w(\xi) d\xi \quad (2.65)$$

poznate su vrijednosti na rubovima tih ćelija:

$$W_{l+1/2} = W(x_{l+1/2}) = \int_{x_{-1/2}}^{x_{l+1/2}} w(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^l \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w(\xi) d\xi = \Delta x \sum_{i=0}^l w_i, \quad l = 0, 1, \dots, J. \quad (2.66)$$

Postavlja se interpolacioni polinom prvog stupnja  $P_1$  i to pomoću konačne razlike prvog reda izračunate kroz vrijednosti  $W_{j-1/2}$  i  $W_{j+1/2}$  ako je odgovarajuća svojstvena vrijednost pozitivna ili kroz vrijednosti  $W_{j+1/2}$  i  $W_{j+3/2}$  ako je odgovarajuća svojstvena vrijednost negativna. Zatim se uzastopno povećava stupanj polinoma pomičući uzorak rabljenih točaka za jednu točku lijevo ili za jednu točku desno tako da uvijek dodana konačna razlika bude ona koja je manja po apsolutnoj vrijednosti. Konačan rezultat je interpolacioni polinom  $P_r$  stupnja  $r$  čime se postiže formalnu točnost istog reda. Način na koji se bira uzorak rabljenih točaka čini shemu esencijalno neoscilirajućom jer konačan interpolacioni polinom  $P_r$  za primitivnu funkciju  $W = W(x)$  na intervalu  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  ima najmanju moguću oscilaciju.

Opisanim postupkom dobiveni interpolacioni polinom za primitivnu funkciju p-komponente fluksa  $f^{(p)}$  označava se sa  $P_{j+1/2}$ , a za primitivnu funkciju p-komponente lokalnog Lax-

Friedrichsovog fluksa  $\frac{1}{2}(f^{(p)} \pm \alpha_{j+1/2}^{(p)} u^{(p)})$  sa  $P_{j+1/2}^{\pm}$ , ( $p = 1, 2$ ).

Na kraju, kod Roeove se inačice sheme uzima:

$$\hat{f}_{j+1/2}^{(p)} = \frac{d}{dx} P_{j+1/2}(x_{j+1/2}), \quad (2.67)$$

a kod lokalno-Lax-Friedrichsove inačice sheme:

$$\hat{f}_{j+1/2}^{(p)} = \frac{d}{dx} P_{j+1/2}^{-}(x_{j+1/2}) + \frac{d}{dx} P_{j+1/2}^{+}(x_{j+1/2}) \quad (2.68)$$

te se vektor numeričkog fluksa  $\hat{f}_{j+1/2}$  rekonstruira pomoću baze desnih svojstvenih vektora:

$$\hat{f}_{j+1/2} = \sum_{p=1}^2 \hat{f}_{j+1/2}^{(p)} \vec{r}_{j+1/2}^{(p)}. \quad (2.69)$$

### 2.3 PRIMJENA ESENCIJALNO NEOSCILIRAJUĆIH SHEMA NA PRORAČUN UTJECAJA OSTALIH DIJELOVA CJEVOVODA NA STRUJANJE

Na način opisan u točki 2.2.3 moguće je izračunati numerički fluks na rubovima ćelija koje su u unutrašnjosti domene odnosno:

$$\hat{f}_{j+1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, J-1 \quad (2.70)$$

dok se za numerički fluks na lijevom rubu domene  $\hat{f}_{-1/2}$  i numerički fluks na desnom rubu domene  $\hat{f}_{J+1/2}$  mora uzeti u obzir odgovarajuće rubne uvjete.

Kod numeričkog fluksa na rubu domene za približnu vrijednost lokalnog Jacobijana na rubu  $x_{-1/2}$  koji nema lijeve ćelije uzima se:

$$D\vec{f}_{-1/2} = D\vec{f}(\vec{u}_0), \quad (2.71)$$

a na rubu  $x_{J+1/2}$  koji nema desne ćelije uzima se:

$$D\vec{f}_{J+1/2} = D\vec{f}(\vec{u}_J). \quad (2.72)$$

Nadalje, za odvodnu cijev, budući da je  $\lambda_o^{(2)} > 0$  može se izračunati vrijednost 1-komponente fluksa te naći 2-komponentu fluksa pomoću rubnog uvjeta i jednakosti:

$$p_o - a_o \rho_o v_o = -f_o^{(1)}, \quad (2.73)$$

gdje je:

$$a_o = a_o(p_o), \quad \rho_o = \rho(p_o). \quad (2.74)$$

Slično, za dovodnu cijev, budući da je  $\lambda_d^{(1)} < 0$  može se izračunati vrijednost 2-komponente fluksa te naći 1-komponentu fluksa pomoću rubnog uvjeta i jednakosti:

$$p_d + a_d \rho_d v_d = f_d^{(2)}. \quad (2.75)$$

U točkama koje slijede izlaže se priprema numeričkog proračuna za sve dijelove cjevovoda iz točke 1.2. Jednadžbe koje opisuju utjecaj nekog dijela cjevovoda na strujanje tekućine prelaze u sustav nelinearnih jednadžbi za više nepoznanica koji se numerički rješava Newton-Raphsonovom metodom, a u nekim slučajevima dobiva se i sustav običnih diferencijalnih jednadžbi koji se rješava u skladu s odabranim numeričkim modelom vremenskog operatora, odnosno  $r$ -koračnom Runge-Kutta metodom.

### 2.3.1 Spoj cijevi

Prema točki 1.2.1 ovaj rubni uvjet dan je sustavom jednažbi:

$$\left. \begin{aligned} p_{d,i} &= p, \quad i = 1, \dots, n_d \\ p_{o,j} &= p, \quad j = 1, \dots, n_o \\ \sum_{i=1}^{n_d} A_{d,i} v_{d,i} &= \sum_{j=1}^{n_o} A_{o,j} v_{o,j} \\ p_{d,i} + a_{d,i} \rho_{d,i} v_{d,i} &= f_{d,i}^{(2)}, \quad i = 1, \dots, n_d \\ p_{o,j} - a_{o,j} \rho_{o,j} v_{o,j} &= -f_{o,j}^{(1)}, \quad j = 1, \dots, n_o \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

Sređivanjem ovog sustava dobiva se jedna jednažba:

$$F_1(x_1) = \sum_{k=1}^n c_{1,k} \frac{x_1 + c_{2,k}}{a_k(x_1)} = 0 \quad (2.77)$$

za jednu nepoznatu promjenljivu:

$$x_1 = p \quad (2.78)$$

uz oznake:

$$n = n_d + n_o, \quad (2.79)$$

$$c_{1,k} = \begin{cases} A_{d,k} & k = 1, \dots, n_d \\ A_{o,k-n_d} & k = n_d + 1, \dots, n \end{cases}, \quad (2.80)$$

$$c_{2,k} = \begin{cases} -f_{d,k}^{(2)} & k = 1, \dots, n_d \\ f_{o,k-n_d}^{(1)} & k = n_d + 1, \dots, n \end{cases}, \quad (2.81)$$

$$a_k = \begin{cases} a_{d,k} & k = 1, \dots, n_d \\ a_{o,k-n_d} & k = n_d + 1, \dots, n \end{cases}. \quad (2.82)$$

### 2.3.2 Spremnik

Prema točki 1.2.2 treba razmotriti dva slučaja. Ako spremnik ima odvodnu cijev tada se dobiva sustav:

$$\left. \begin{aligned} p_o &= p_{atm} + g\rho_s(z_s(t) - z) - \frac{\rho_o v_o^2}{2} - k \frac{\rho_o v_o |v_o|}{2} \\ p_o - a_o \rho_o v_o &= -f_o^{(1)} \end{aligned} \right\}, \quad (2.83)$$

a ako spremnik ima dovodnu cijev sustav:

$$\left. \begin{aligned} p_d &= p_{atm} + g\rho_s(z_s(t) - z) - \frac{\rho_d v_d^2}{2} + k \frac{\rho_d v_d |v_d|}{2} \\ p_d + a_d \rho_d v_d &= f_d^{(2)} \end{aligned} \right\}, \quad (2.84)$$

Oba se sustava može napisati kao sustav od dvije jednažbe za dvije nepoznate promjenljive:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= x_1 + c_1 \rho(x_1) x_2^2 + c_2 \rho(x_1) x_2 |x_2| + c_3 = 0 \\ F_2(x_1, x_2) &= x_1 + c_4 a(x_1) \rho(x_1) x_2 + c_5 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

gdje se za slučaj odvodne cijevi rabe oznake:

$$x_1 = p_o, \quad x_2 = v_o, \quad (2.86)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{k}{2}, c_3 = -p_{atm} - g\rho_s(t)(z_s(t) - z),$$

$$c_4 = -1, c_5 = f_o^{(1)}, \quad (2.87)$$

a za slučaj dovodne cijevi:

$$x_1 = p_d, x_2 = v_d, \quad (2.88)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{k}{2}, c_3 = -p_{atm} - g\rho_s(t)(z_s(t) - z),$$

$$c_4 = 1, c_5 = -f_d^{(2)}. \quad (2.89)$$

### 2.3.3 Ventil na kraju cijevi

Za ventil na kraju cijevi prema točki 1.2.3 rubni uvjet je:

$$p_d = p_{atm} + \frac{A_d^2}{2A_v^2(t)} \rho_d v_d^2 \left. \vphantom{p_d} \right\}, \quad (2.90)$$

$$p_d + \alpha_d \rho_d v_d = f_d^{(2)}$$

što se može napisati kao sustav dvije jednačbe:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= c_1 x_1 + c_2 \rho(x_1) x_2^2 + c_3 = 0 \\ F_2(x_1, x_2) &= x_1 + \alpha_d(x_1) \rho(x_1) x_2 + c_4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

za dvije nepoznate promjenljive:

$$x_1 = p_d \text{ i } x_2 = v_d \quad (2.92)$$

uz oznake:

$$c_1 = A_v^2(t), c_2 = -\frac{A_d^2}{2}, c_3 = -A_v^2(t)p_{atm}, c_4 = -f_d^{(2)}. \quad (2.93)$$

Ako je  $c_1 = 0$  (ventil je zatvoren), rješenje sustava je:

$$x_1 = -c_4, x_2 = 0. \quad (2.94)$$

### 2.3.4 Ventil između dvije cijevi

Prema točki 1.2.4 kod ventila između dvije cijevi rubni uvjet je:

$$A_d v_d = A_o v_o \left. \vphantom{A_d v_d} \right\}, \quad (2.95)$$

$$p_d = p_o + \frac{A_d^2}{2A_v^2(t)} \rho_d v_d |v_d| \left. \vphantom{p_d} \right\}$$

$$p_d + \alpha_d \rho_d v_d = f_d^{(2)}$$

$$p_o - \alpha_o \rho_o v_o = -f_o^{(1)}$$

što čini sustav od tri jednačbe:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &= c_1 (x_2 - x_1) + c_2 \rho(x_1) x_3 |x_3| = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + \alpha_d(x_1) \rho(x_1) x_3 + c_3 = 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= x_2 + c_4 \alpha_o(x_1) \rho(x_1) x_3 + c_5 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

za tri nepoznate promjenljive:

$$x_1 = p_d, x_2 = p_u, x_3 = v_d \quad (2.97)$$

uz oznake:

$$c_1 = A_v^2(t), c_2 = \frac{A_d^2}{2}, c_3 = -f_d^{(2)}, c_4 = -\frac{A_d}{A_o}, c_5 = f_o^{(1)}. \quad (2.98)$$

Ako je  $c_1 = 0$  (ventil je zatvoren), rješenje sustava je:

$$x_1 = -c_3, x_2 = -c_5, x_3 = 0. \quad (2.99)$$

### 2.3.5 Zračna komora

Utjecaj zračne komore na strujanje u cjevovodu opisan je u točki 1.2.5 dan je sustavom:

$$\left. \begin{aligned} p_d &= p \\ p_o &= p \\ Q &= A_d v_d - A_o v_o \\ \frac{dz_t}{dt} &= \frac{Q}{A_{zk}(z_t)} \\ \frac{dV_z}{dt} &= -Q \\ p_z V_z^s &= \text{const.} \\ p + g\rho(z - z_t) - p_z - k\rho g Q|Q| &= 0 \\ p_d + a_d \rho_d v_d &= f_d^{(2)} \\ p_o - a_o \rho_o v_o &= -f_o^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.100)$$

Razdvaja se dio koji pripada vremenskom operatoru:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_t}{dt} &= \frac{A_d v_d - A_o v_o}{A_{zk}(z_t)} \\ \frac{dV_z}{dt} &= -(A_d v_d - A_o v_o) \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

od dijela koji omogućava izračunavanje komponenti fluksa u prostornom operatoru a može se napisati kao sustav jednažbi:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + c_1 \rho(x_1)(c_2 x_2 + c_3 x_3) |c_2 x_2 + c_3 x_3| + c_4 \rho(x_1) + c_5 = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + a_d(x_1) \rho(x_1) x_2 + c_6 = 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 - a_o(x_1) \rho(x_1) x_3 + c_7 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

za nepoznate:

$$x_1 = p, x_2 = v_d, x_3 = v_o \quad (2.103)$$

uz oznake:

$$\begin{aligned} c_1 &= -kg, c_2 = A_d, c_3 = -A_o, c_4 = g(z - z_t), c_5 = -\frac{\text{const.}}{V_z^s} \\ c_6 &= -f_d^{(2)} \text{ i } c_7 = f_o^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

### 2.3.6 Vodna komora

Jednažbe su rubnog uvjeta kod vodne komore prema točki 1.3.6:

$$\left. \begin{aligned}
 p_d &= p \\
 p_o &= p \\
 Q &= A_d v_d - A_o v_o \\
 \frac{dz_t}{dt} &= \frac{Q}{A_{vk}(z_t)} \\
 \frac{dQ}{dt} &= \frac{A_{uc}}{L_{uc}} \left( \frac{p - p_{atm}}{\rho} + g(z - z_t) \right) - \frac{\lambda_{uc}}{2D_{uc} A_{uc}} Q|Q| \\
 p_d + \alpha_d \rho_d v_d &= f_d^{(2)} \\
 p_o - \alpha_o \rho_o v_o &= -f_o^{(1)}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

Slično kao i u prethodnoj točki četvrta i peta jednadžba ovog sustava pripadaju vremenskom koraku metode i čine sustav od dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dQ}{dt} &= \frac{D_{uc}^2 \pi}{4L_{uc}} \left( \frac{p}{\rho} - g(z_t - z) - \frac{p_{atm}}{\rho} \right) - \frac{2\lambda_{uc}}{D_{uc}^3 \pi} Q|Q| \\
 \frac{dz_t}{dt} &= \frac{Q}{A_{vk}(z_t)}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

Preostale jednadžbe rubnog uvjeta su:

$$\left. \begin{aligned}
 F_1(x_1, x_2) &= x_1 + \alpha_d(x_1) \rho(x_1) (c_1 x_2 + c_2) + c_3 = 0 \\
 F_2(x_1, x_2) &= x_1 - \alpha_o(x_1) \rho(x_1) x_2 + c_4 = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

za nepoznate:

$$x_1 = p, \quad x_2 = v_o \quad (2.108)$$

gdje se rabe oznake:

$$c_1 = \frac{A_o}{A_d}, \quad c_2 = \frac{Q}{A_d}, \quad c_3 = -f_d^{(2)}, \quad c_4 = f_o^{(1)}. \quad (2.109)$$

### 2.3.7 Crpka

Prema točki 1.2.7 rubni uvjet kod crpke nakon prestanka rada čine jednadžbe:

$$\left. \begin{aligned}
 A_d v_d &= Q_R q \\
 A_o v_o &= Q_R q \\
 p_o &= p_d + g \rho_l H_R h - k \rho_d g Q_R^2 q |q| \\
 h &= F_h \left( \tan^{-1} \frac{\alpha}{q} \right) (\alpha^2 + q^2) \\
 \beta &= F_\beta \left( \tan^{-1} \frac{\alpha}{q} \right) (\alpha^2 + q^2) \\
 \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{60}{2\pi} \frac{1}{WR^2} \frac{M_R}{N_R} \beta \\
 p_d + \alpha_d \rho_d v_d &= f_d^{(2)} \\
 p_o - \alpha_o \rho_o v_o &= -f_o^{(1)}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.110)$$

Pri računanju približne vrijednosti vremenskog operatora rješava se jednadžba:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{60}{2\pi} \frac{1}{WR^2} \frac{M_R}{N_R} F_\beta \left( \tan^{-1} \frac{\alpha}{q} \right) (\alpha^2 + q^2), \quad (2.111)$$

dok se preostale jednakosti rubnog uvjeta rabe pri računanju približne vrijednosti prostornog operatora i čine sustav:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 - x_2 + c_1 \rho(x_1) x_3 |x_3| + c_2 F_h \left( \tan^{-1} \frac{\alpha}{x_3} \right) (\alpha^2 + x_3^2) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + c_3 a_d(x_1) \rho(x_1) x_3 + c_4 = 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= x_2 + c_5 a_o(x_1) \rho(x_1) x_3 + c_6 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.112)$$

za nepoznate veličine:

$$x_1 = p_d, \quad x_2 = p_o, \quad x_3 = q \quad (2.113)$$

uz oznake:

$$c_1 = -kgQ_R^2, \quad c_2 = g\rho_t H_R, \quad c_3 = \frac{Q_R}{A_d}, \quad c_4 = -f_d^{(2)},$$

$$c_5 = -\frac{Q_R}{A_o}, \quad c_6 = f_o^{(1)}. \quad (2.114)$$

Slično se dobiva numerički model za crpku koja radi uz razliku da je tada  $\alpha = \alpha(t)$  zadano te ne treba riješiti jednadžbu (2.111).

### 2.3.8 Turbina

Utjecaj Franciseove turbine na strujanje opisan je u točki 1.2.8 i odgovarajući rubni uvjet čini sustav:

$$\left. \begin{aligned} A_d v_d &= \frac{D^3 N_R \alpha}{84,45\phi} \chi(\phi, \tau) \\ p_d &= P_{atm} + g\rho_t \left( \frac{DN_R \alpha}{84,45\phi} \right)^2 + g\rho_t (z_{os}(t) - z) - \frac{v_d^2}{2} \rho_d \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{WR^2} \left( \frac{60}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{N_R^2 \alpha} \left( D^2 \left( \frac{DN_R \alpha}{84,45\phi} \right)^3 \psi(\phi, \tau) - \frac{P_{gen}(t)}{\eta_{gen}} \right) \\ \frac{dw_a}{dt} &= \frac{1}{t_a} (\alpha_{ref} - \alpha - e_p - \sigma w_a) \\ \frac{de_p}{dt} &= \frac{1}{t_p} \left( \delta t_p \frac{dw_a}{dt} - e_p \right) \\ \frac{dw_v}{dt} &= \frac{1}{t_v} (k_v (w_a - \tau) - w_v) \\ \frac{d\tau}{dt} &= k_s w_v \\ p_d + a_d \rho_d v_d &= f_d^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (2.115)$$

Kada se izdvoji sustav diferencijalnih jednadžbi:



$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{WR^2} \left( \frac{60}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{N_R^2 \alpha} \left( D^2 \left( \frac{DN_R \alpha}{84,45\phi} \right)^3 \psi(\phi, \tau) - \frac{P_{gen}(t)}{\eta_{gen}} \right) \\ \frac{dw_a}{dt} &= \frac{1}{t_a} (\alpha_{ref} - \alpha - e_p - \sigma w_a) \\ \frac{de_p}{dt} &= \frac{1}{t_p} \left( \delta t_p \frac{dw_a}{dt} - e_p \right) \\ \frac{dw_v}{dt} &= \frac{1}{t_v} (k_v (w_a - \tau) - w_v) \\ \frac{d\tau}{dt} &= k_s w_v \end{aligned} \right\} \quad (2.116)$$

koji pripada vremenskom operatoru, preostale jednadžbe sustava omogućuju modeliranje prostornog operatora u zakonima očuvanja i pišu se u obliku:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + c_1 \rho(x_1) x_2^2 + \frac{c_2}{x_3^2} + c_3 = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &= c_4 x_2 + c_5 \frac{\chi(x_3, \tau)}{x_3} = 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + a_d(x_1) \rho(x_1) x_2 + c_6 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.117)$$

gdje su nepoznate:

$$x_1 = p_d, \quad x_2 = v_d \quad \text{i} \quad x_3 = \phi \quad (2.118)$$

uz oznake:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}, \quad c_2 = -g\rho_t \left( \frac{DN_R \alpha}{84,45} \right)^2, \quad c_3 = -g v_t (z_{os}(t) - z) - p_{atm}, \\ c_4 &= A_d, \quad c_5 = -\frac{D^3 N_R \alpha}{84,45}, \quad c_6 = -f_d^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

### 2.3.9 Poznati tlak

Prema točki 1.2.9 treba razmotriti dva slučaja. Za slučaj odvodne cijevi vrijedi sustav:

$$\left. \begin{aligned} p_o &= p_o(t) \\ p_o - a_o \rho_o v_o &= -f_o^{(1)} \end{aligned} \right\}, \quad (2.120)$$

a za slučaj dovodne cijevi sustav:

$$\left. \begin{aligned} p_d &= p_d(t) \\ p_d + a_d \rho_d v_d &= f_d^{(2)} \end{aligned} \right\}. \quad (2.121)$$

Oba se sustava može formalizirati kao trivijalnu jednadžbu za jednu nepoznatu:

$$F_1(x_1) = c_1 x_1 + c_2 = 0 \quad (2.122)$$

gdje se za slučaj odvodne cijevi rabi oznake:

$$x_1 = v_o, \quad (2.123)$$

$$c_1 = -\rho(p_o) a_o(p_o), \quad c_2 = f_o^{(1)} + p_o, \quad (2.124)$$

a za slučaj dovodne cijevi oznake:

$$x_1 = v_d, \quad (2.125)$$

$$c_1 = \rho(p_d) a_d(p_d), \quad c_2 = -f_d^{(2)} + p_d. \quad (2.126)$$

### 2.3.10 Poznata brzina

Ako je poznata brzina u početnoj točki odvodne cijevi, prema točki 1.2.10 rubni je uvjet:

$$\left. \begin{aligned} v_o &= v_o(t) \\ p_o - a_o \rho_o v_o &= -f_o^{(1)} \end{aligned} \right\}, \quad (2.127)$$

a ako je poznatu brzinu u završnoj točki dovodne cijevi:

$$\left. \begin{aligned} v_d &= v_d(t) \\ p_d + a_d \rho_d v_d &= f_d^{(2)} \end{aligned} \right\}. \quad (2.128)$$

U oba se slučaja dobiva jednačba za jednu nepoznatu promjenljivu:

$$F_1(x_1) = x_1 + c_1 a(x_1) \rho(x_1) + c_2 = 0 \quad (2.129)$$

gdje se za slučaj odvodne cijevi rabe oznake:

$$x_1 = p_o, \quad (2.130)$$

$$c_1 = -v_o, \quad c_2 = f_o^{(1)}, \quad (2.131)$$

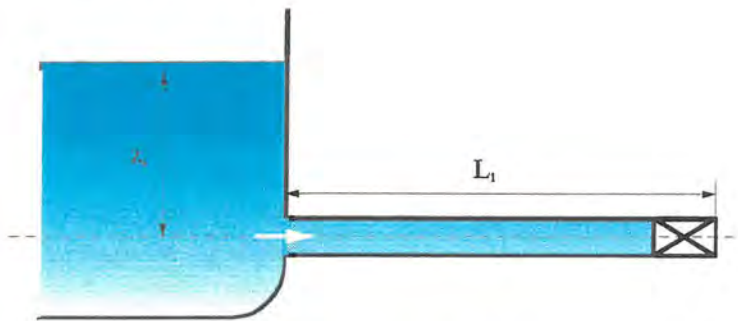
a za slučaj dovodne cijevi oznake:

$$x_1 = p_d, \quad (2.132)$$

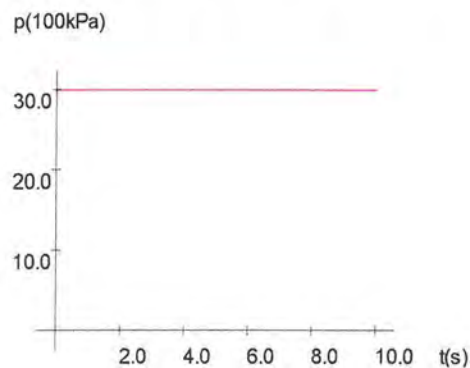
$$c_1 = v_d, \quad c_2 = -f_d^{(2)}. \quad (2.133)$$

### 3. PRORAČUN NESTACIONARNOG STRUJANJA U CJEVODU

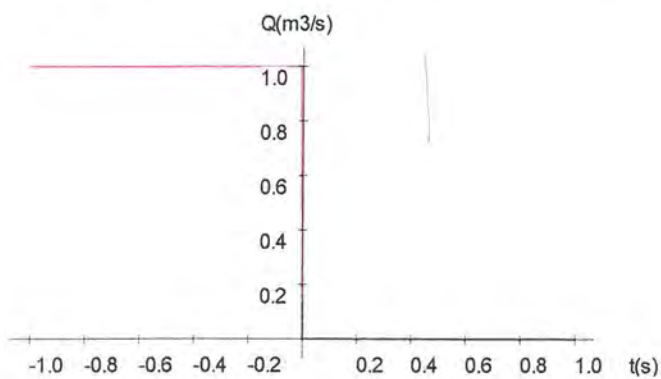
#### 3.1 IDEALNI HIDRAULIČKI UDAR



Sl. 10. Proračun 3.1 – cjevovod spremnik-cijev-ventil



Sl. 11. Proračun 3.1 – tlak kod spremnika



Sl. 12. Proračun 3.1 – protok kod ventila

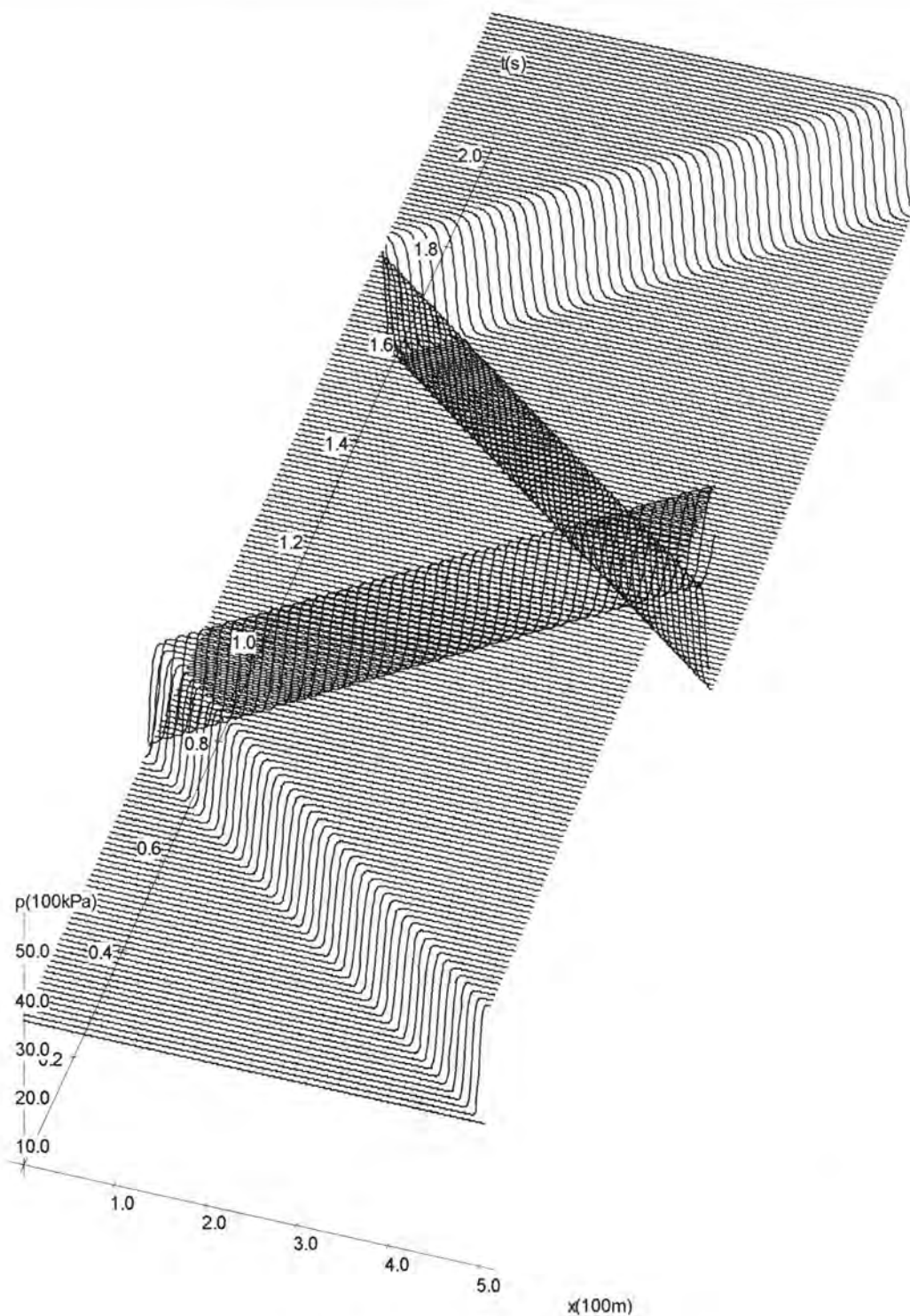
Prvi je primjer strujanje u cjevovodu koji se sastoji od spremnika iz kojega izlazi vodoravno položena cijev duljine  $L_1 = 500m$  i promjera  $D_1 = 0,75m$  na kraju koje je ventil (sl. 10.).

Spremnik ispunjen vodom do stalne razine modelira se kao rubni uvjet s poznatim stalnim tlakom od  $3000kPa$  (sl. 11.). Zanemaruje se trenje u cijevi i uzima se da je brzina zvuka u vodi u cijevi  $a_1 = 1000ms^{-1}$ . Ventil se modelira kao rubni uvjet s poznatim protokom i to tako da je početno stanje protok od  $1m^3s^{-1}$  duž čitave cijevi, a zatim se ventil potpuno zatvara u trenutku  $t = 0s$  uslijed čega protok kod ventila trenutačno pada na  $0m^3s^{-1}$  (sl. 12.).

Za ovakvo idealizirano strujanje poznato je točno rješenje. Poremećajem na rubu izazvan je šok – trenutna promjena u tlaku i brzini strujanja vode koja se širi pretpostavljenom brzinom. Tako šok nakon  $0,25s$  dolazi do polovice cijevi, nakon  $0,5s$  do spremnika, zatim se tamo odbija i vraća te je nakon  $1s$  ponovno kod ventila. Dok šok putuje od ventila prema spremniku voda prelazi u stanje mirovanja, a zatim nakon odbijanja utječe u spremnik s intenzitetom protoka jednakom početnom. Vremenski je period pojave  $2s$  i tlačne oscilacije uslijed nepostojanja trenja nikada ne iščezavaju.

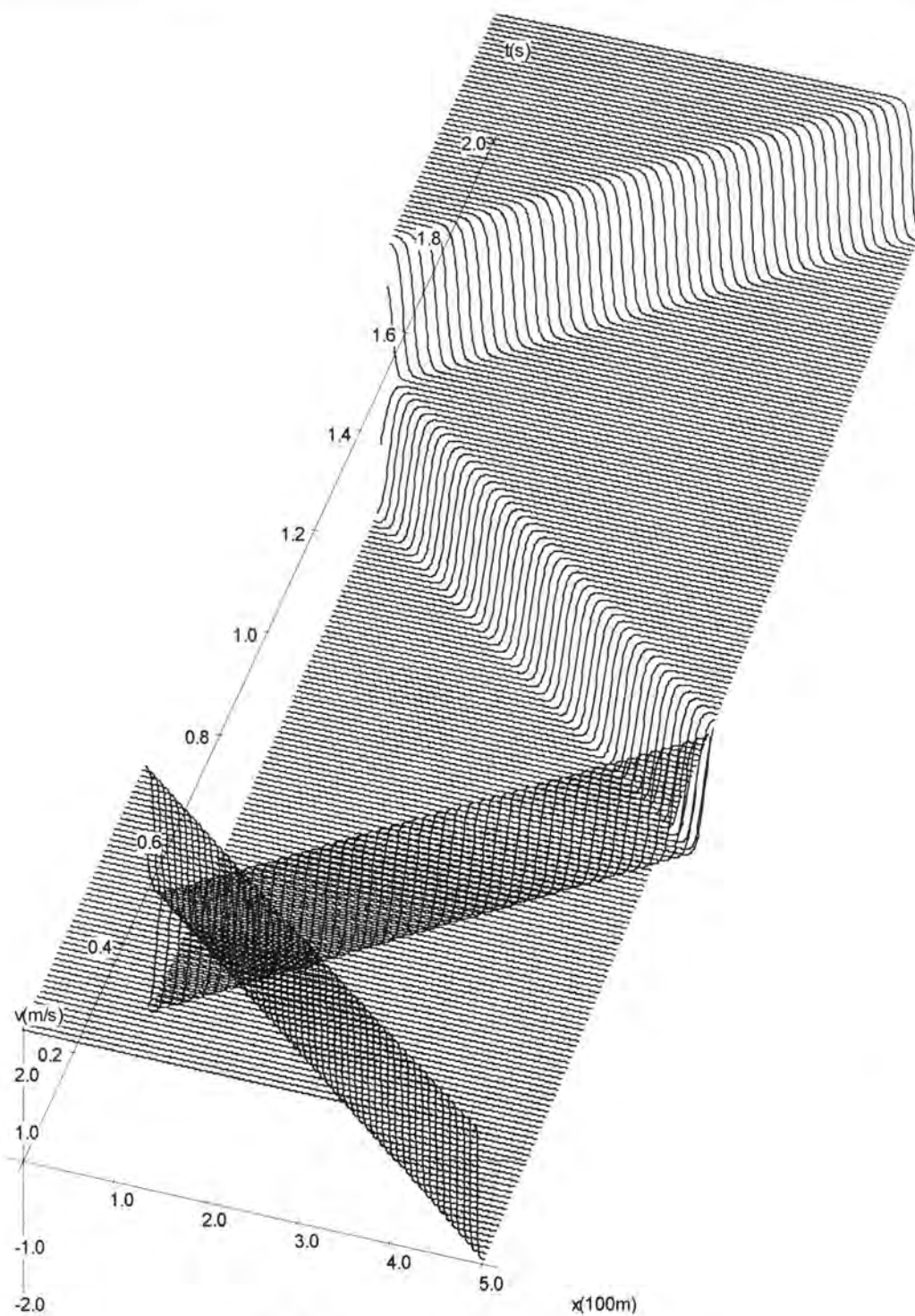
Numeričko je rješenje dobiveno postavljenim modelom uz primjenu ENOLLF sheme reda  $r = 2$ , CFL-koeficijent  $c_{cfl} = 0,5$  i prostorni korak od  $\Delta x = 1m$ . Na sl. 13. prikazan je tlak, a na sl. 14. brzina u cijevi od  $t = 0s$  do  $t = 2s$ . Vide se izvrsna svojstva modela: shema je neoscilirajuća, točno prati širenje šoka, izgladivanje šoka uslijed numeričke difuzije je zanemarivo, razlika u odnosu na analitičko rješenje je neuočljiva.





Sl. 13. Proračun 3.1 – tlak u cijevi

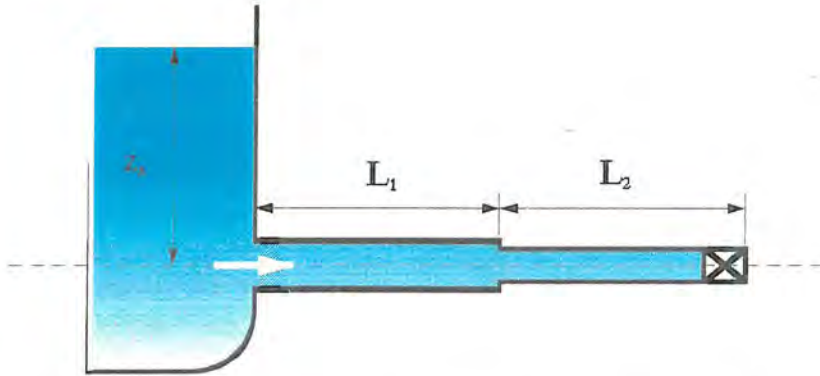
EDUCIJSKA KNJIZARICA  
BIBLIOTEKA



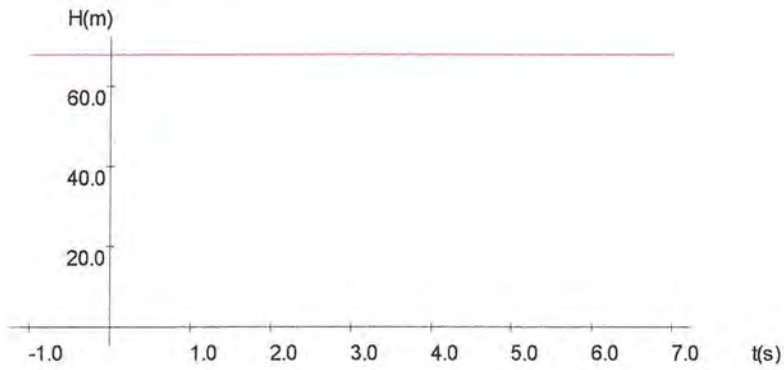
Sl. 14. Proračun 3.1 – brzina u cijevi



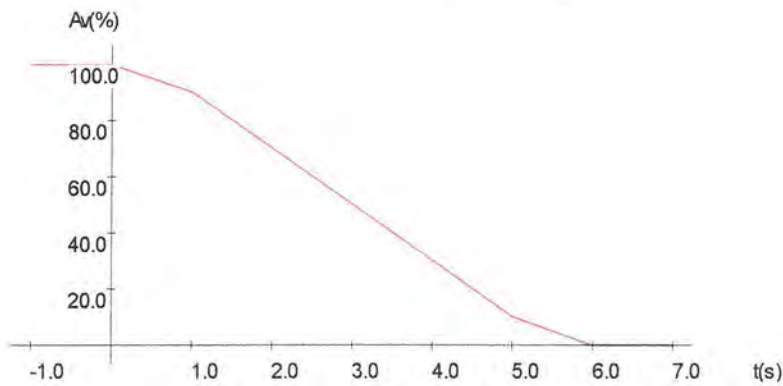
### 3.2 NESTACIONARNO STRUJANJE U CJEVOVODU SPREMNIK-CIJEV-CIJEV-VENTIL UZROKOVANO ZATVARANJEM VENTILA



Sl. 15. Proračun 3.2 – cjevovod spremnik-cijev-cijev-ventil



Sl. 16. Proračun 3.2 – visina vode u spremniku



Sl. 17. Proračun 3.2 – zatvaranje ventila

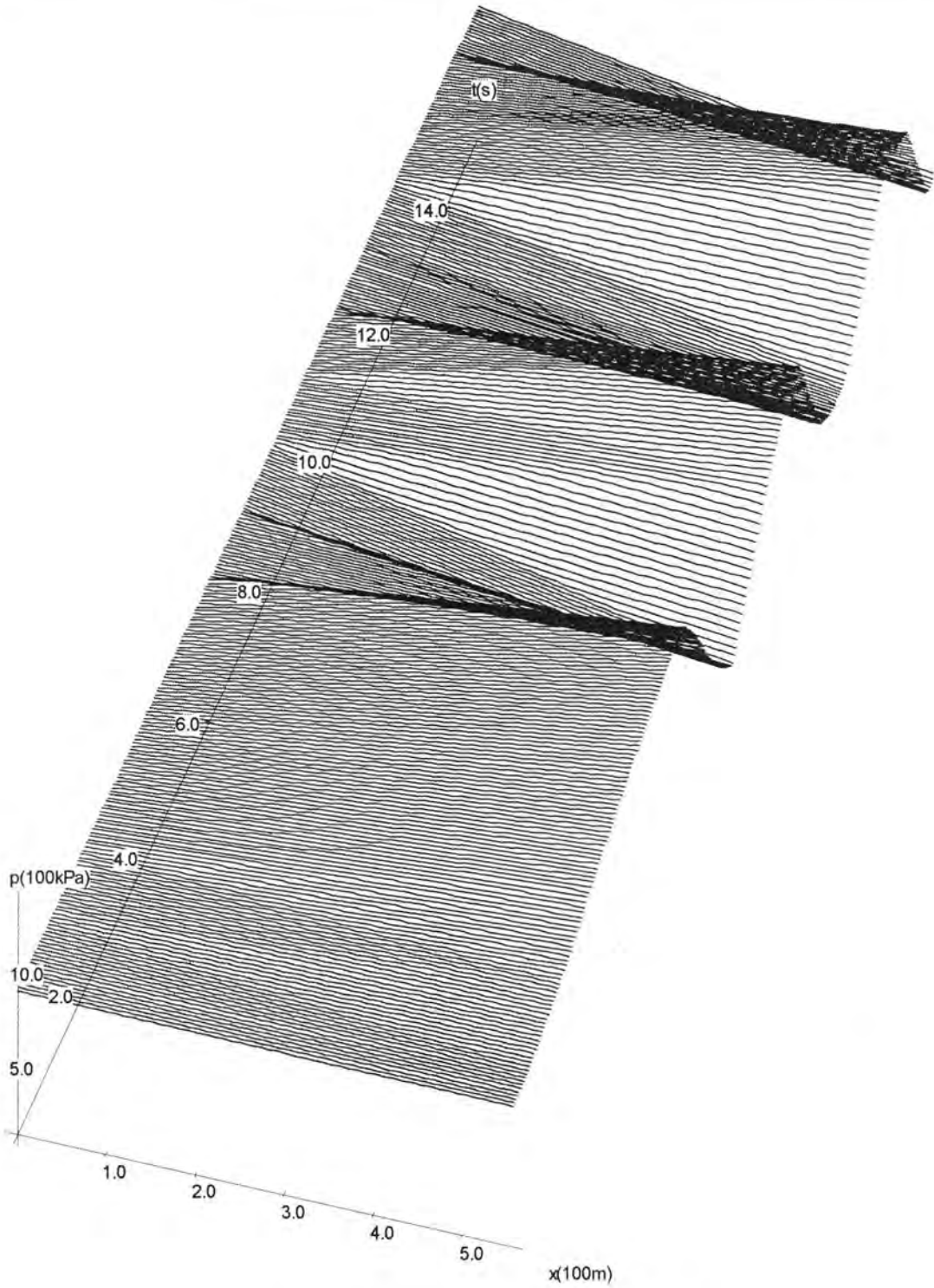
Promatra se strujanje u cjevovodu kojeg čine spremnik iz kojega izlazi cijev duljine  $L_1 = 550m$  i promjera  $D_1 = 0,75m$ , na koju je u niz spojena druga cijev duljine  $L_2 = 450m$  i promjera  $D_2 = 0,6m$  a na kraju koje je ventil. Obje su cijevi položene vodoravno (sl. 15.).

Cjevovodom struji voda u kojoj je prisutstvo plina ili vodene pare zanemarivo. Uzimajući u obzir fizikalna svojstva cijevi zanemaruje se gubitke na izlazu iz spremnika te se uzima u prvoj cijevi faktor trenja  $\lambda_1 = 0,01$  i brzina širenja zvuka  $a_{t,1} = 1100ms^{-1}$ , a u drugoj  $\lambda_2 = 0,012$  i  $a_{t,2} = 900ms^{-1}$ .

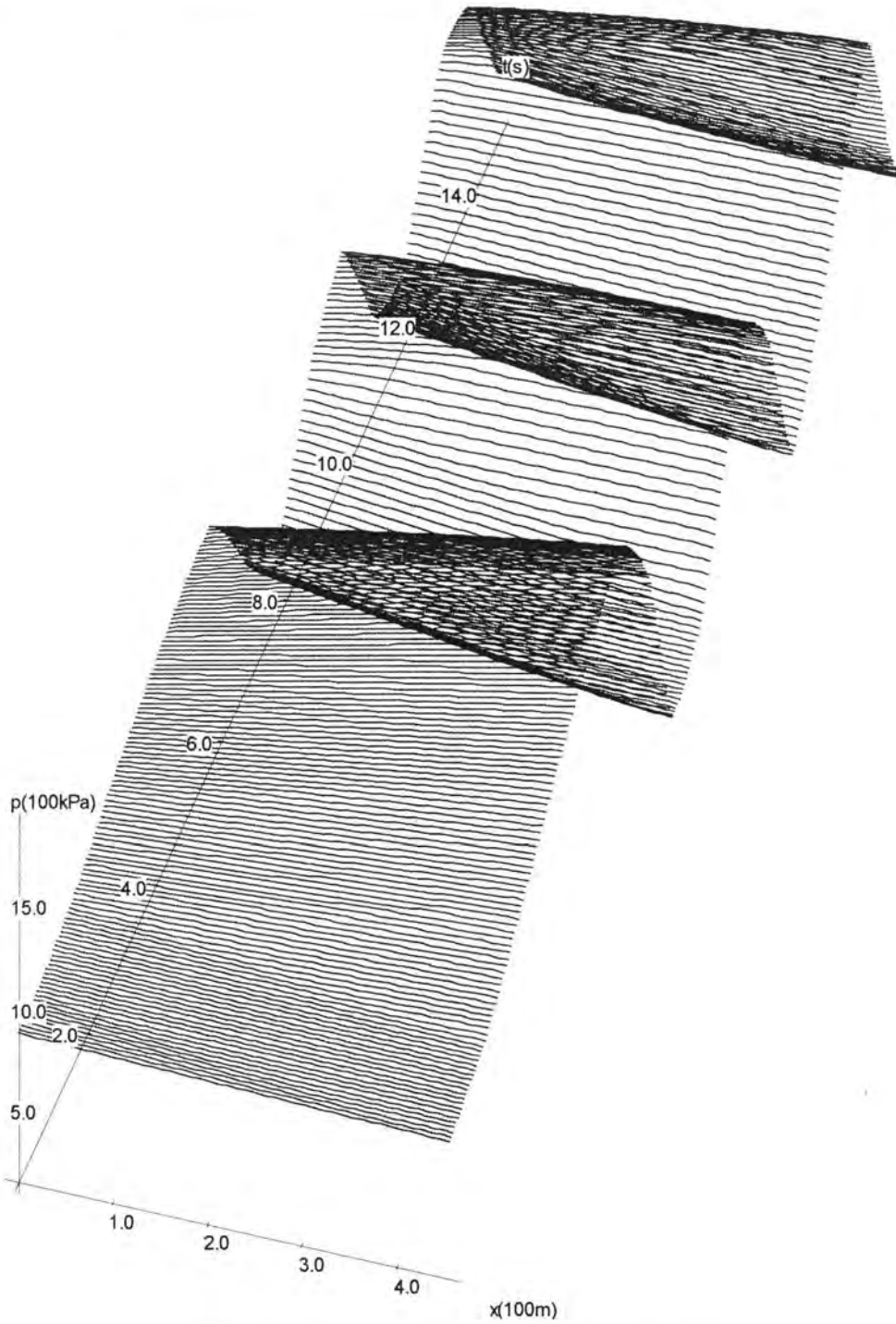
Spremnik je ispunjen vodom do visine  $67,96m$ , i ta visina ostaje stalna (sl. 16.). U početku je ventil potpuno otvoren te je protok vode duž čitavog cjevovoda  $1m^3s^{-1}$ . Ventil se zatvara u prvih šest sekundi prema krivulji na sl. 17.

Smanjivanje otvora ventila izaziva smanjivanje brzine protjecanja vode kroz ventil što uzrokuje povećanje tlaka. Promjena tlaka koja je na tom mjestu nastala putuje kroz vodu brzinom zvuka, te tako poremećaj ulazi u prvu cijev nakon  $0,5s$  i stiže do spremnika nakon  $1s$ , ovdje se odbija i vraća u idućoj sekundi natrag do ventila. Period je tlačnog vala  $4s$ . Poremećaji s ventila stižu prvih  $6s$ , amplituda tlačnih oscilacija s vremenom pada zbog gubitaka na trenju te je čitava promatrana pojava prelazno stanje između dva stacionarna strujanja.

U ovome se primjeru za proračun tlakova i brzina u cjevovodu rabi ENOLLF shema reda  $r = 2$ , CFL koeficijent  $c_{cfl} = 0,5$  i prostorni korak  $\Delta x = 5m$ . Na sl. 18. i 19. prikazan je tlak u prvoj i drugoj cijevi, a na sl. 20. i 21. brzina u prvoj i drugoj cijevi u vremenu od  $t = 0s$  do  $t = 15s$ .

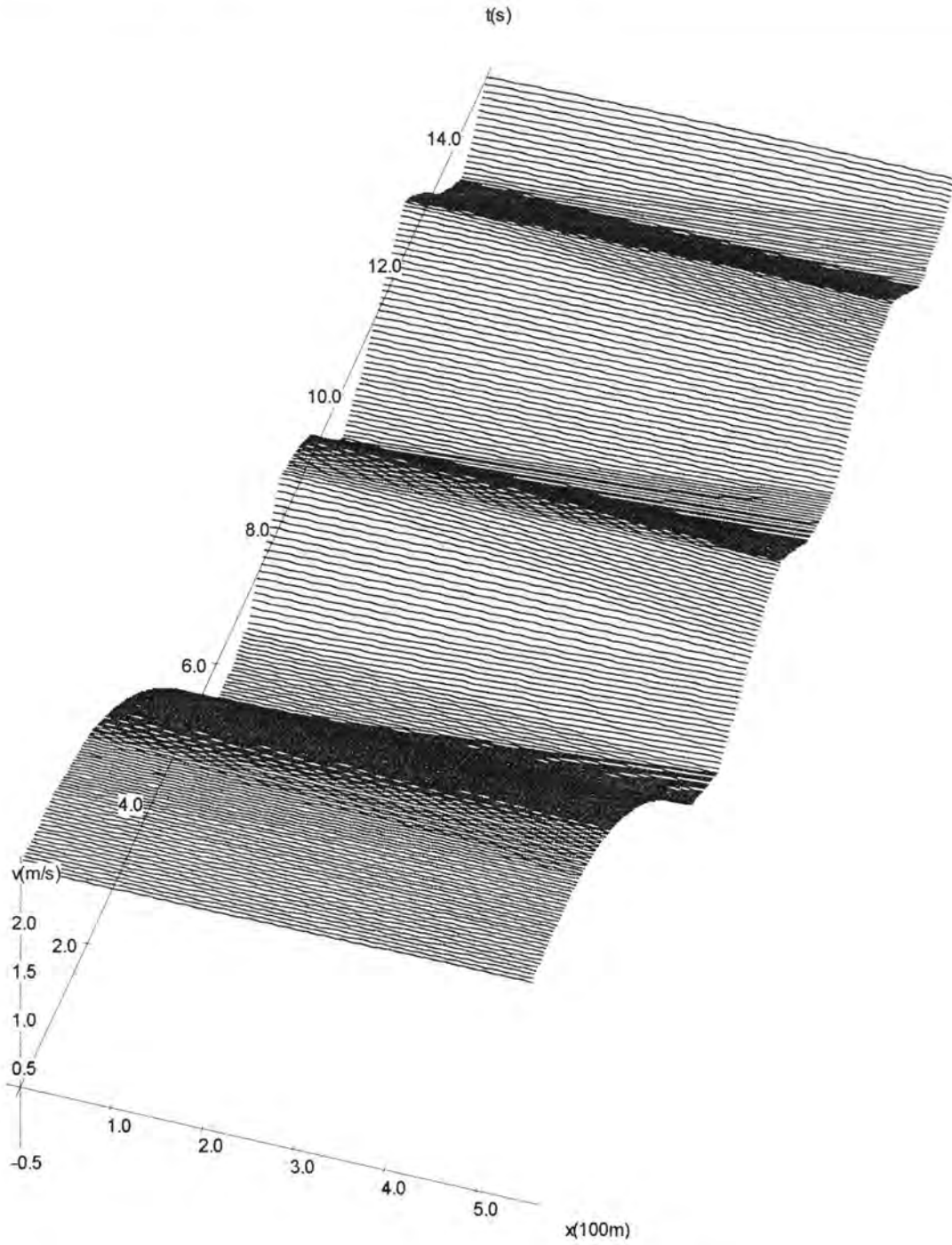


Sl. 18. Proračun 3.2 – tlak u prvoj cijevi

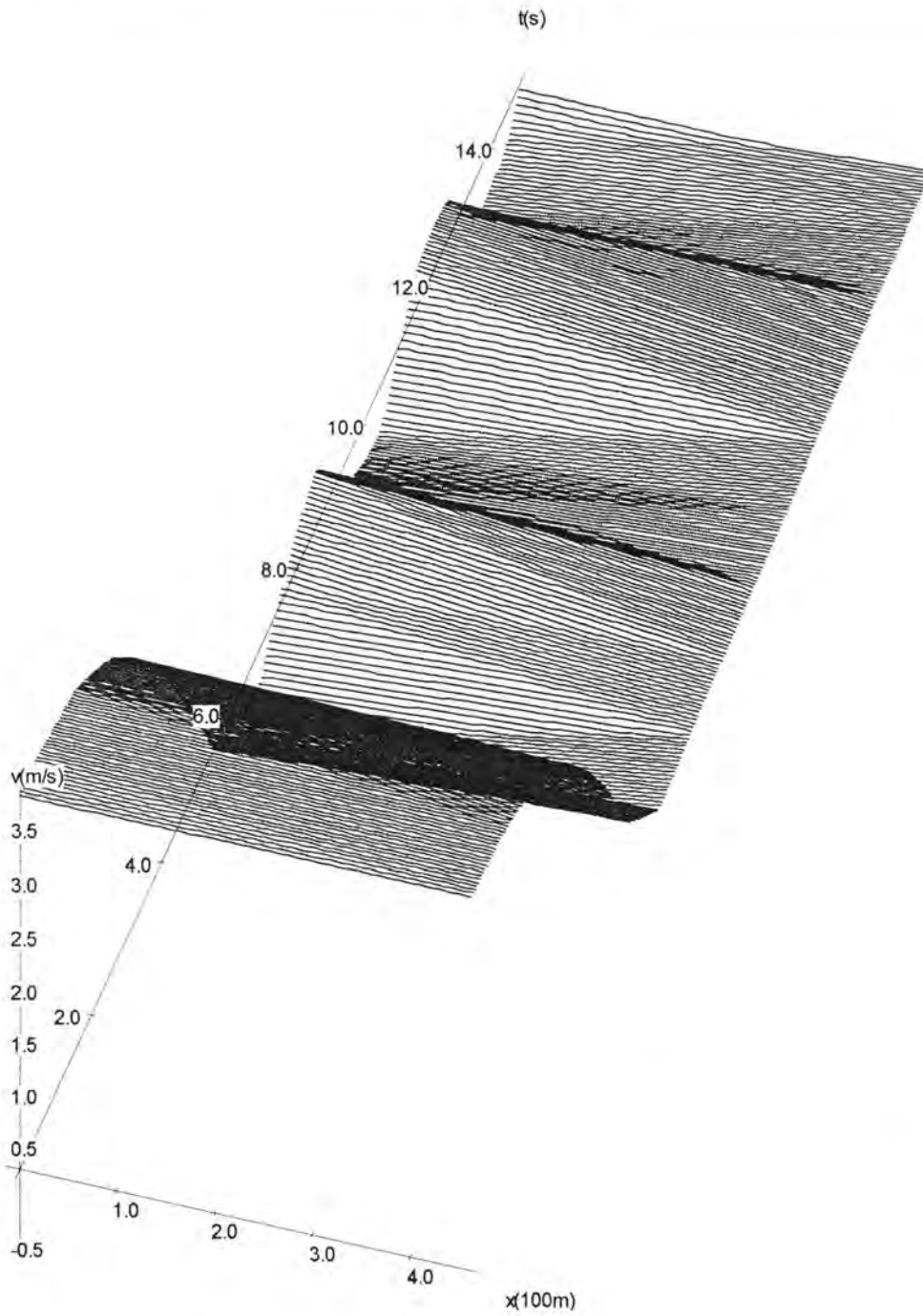


Sl. 19. Proračun 3.2 – tlak u drugoj cijevi





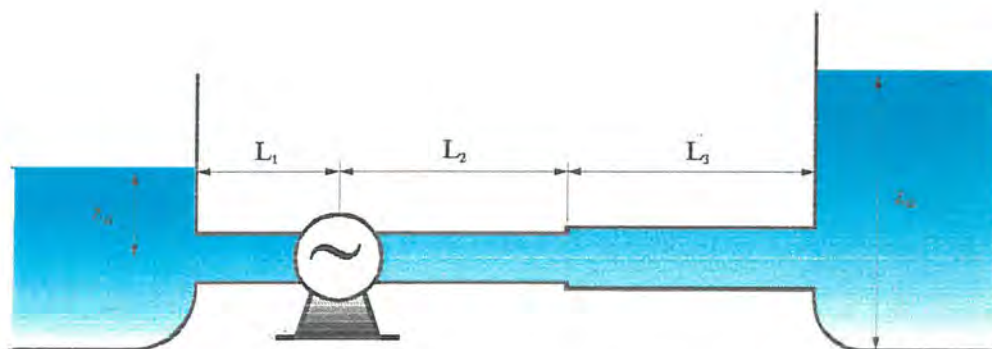
Sl. 20. Proračun 3.2 – brzina  $u$  u prvoj cijevi



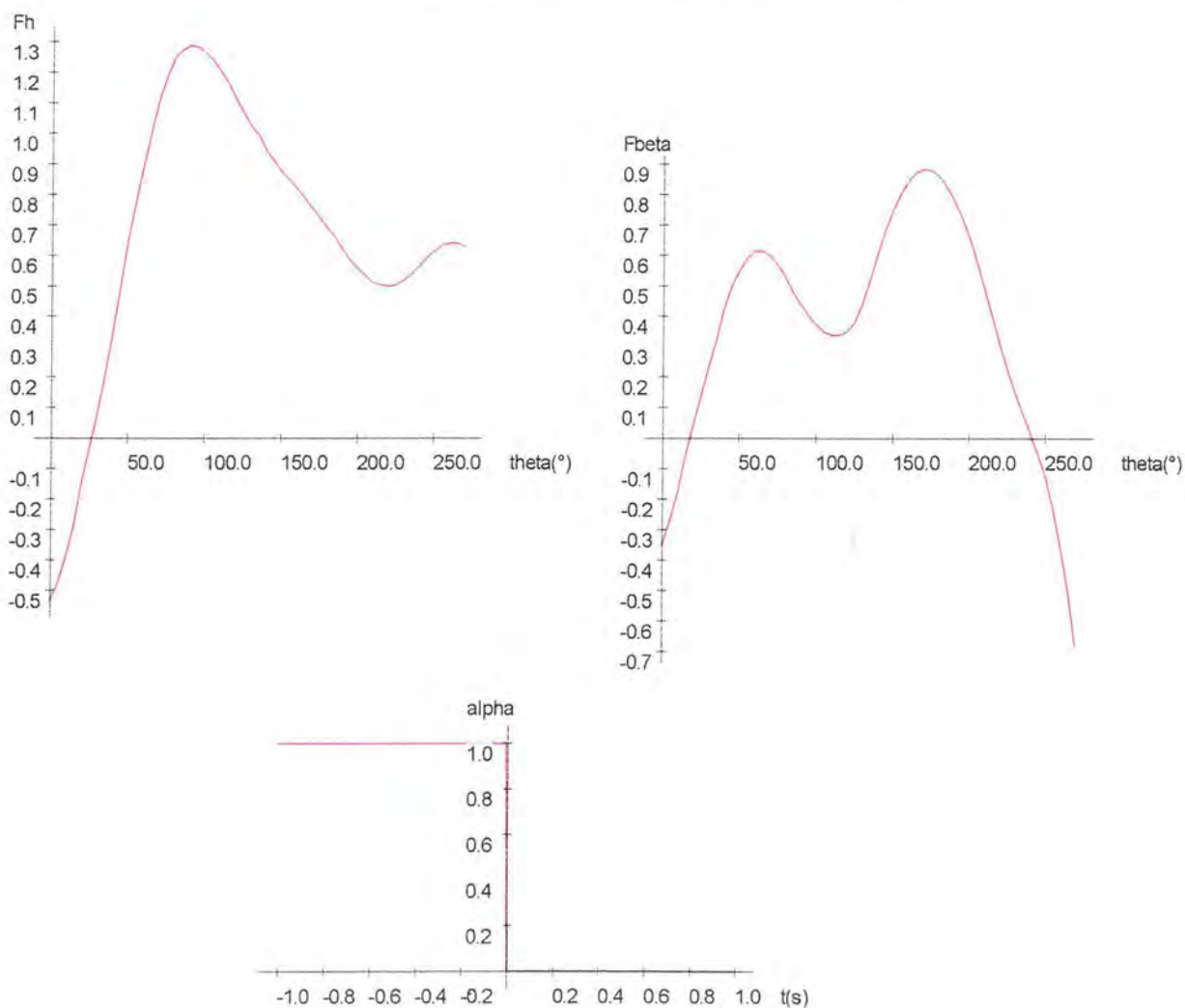
Sl. 21. Proračun 3.2 – brzina u drugoj cijevi



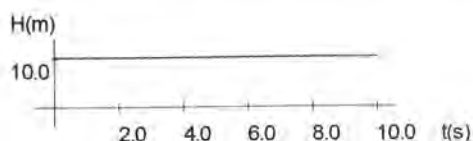
### 3.3 NESTACIONARNO STRUJANJE U CJEVODU SPREMNIK-CIJEV-CRPKA-CIJEV-CIJEV-SPREMNIK UZROKOVANO PRESTANKOM RADA CRPKE



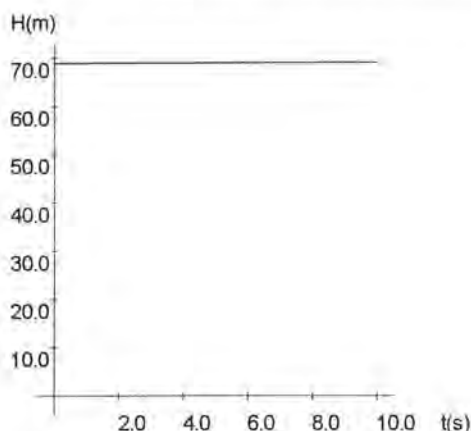
Sl. 22. Proračun 3.3 – cjevovod spremnik-cijev-crpka-cijev-cijev-spremnik



Sl. 23. Proračun 3.3 – karakteristike crpke i brzina rada crpke



Sl. 24. Proračun 3.3 – visina vode kod uzvodnog spremnika



Sl. 25. Proračun 3.3 – visina vode kod nizvodnog spremnika

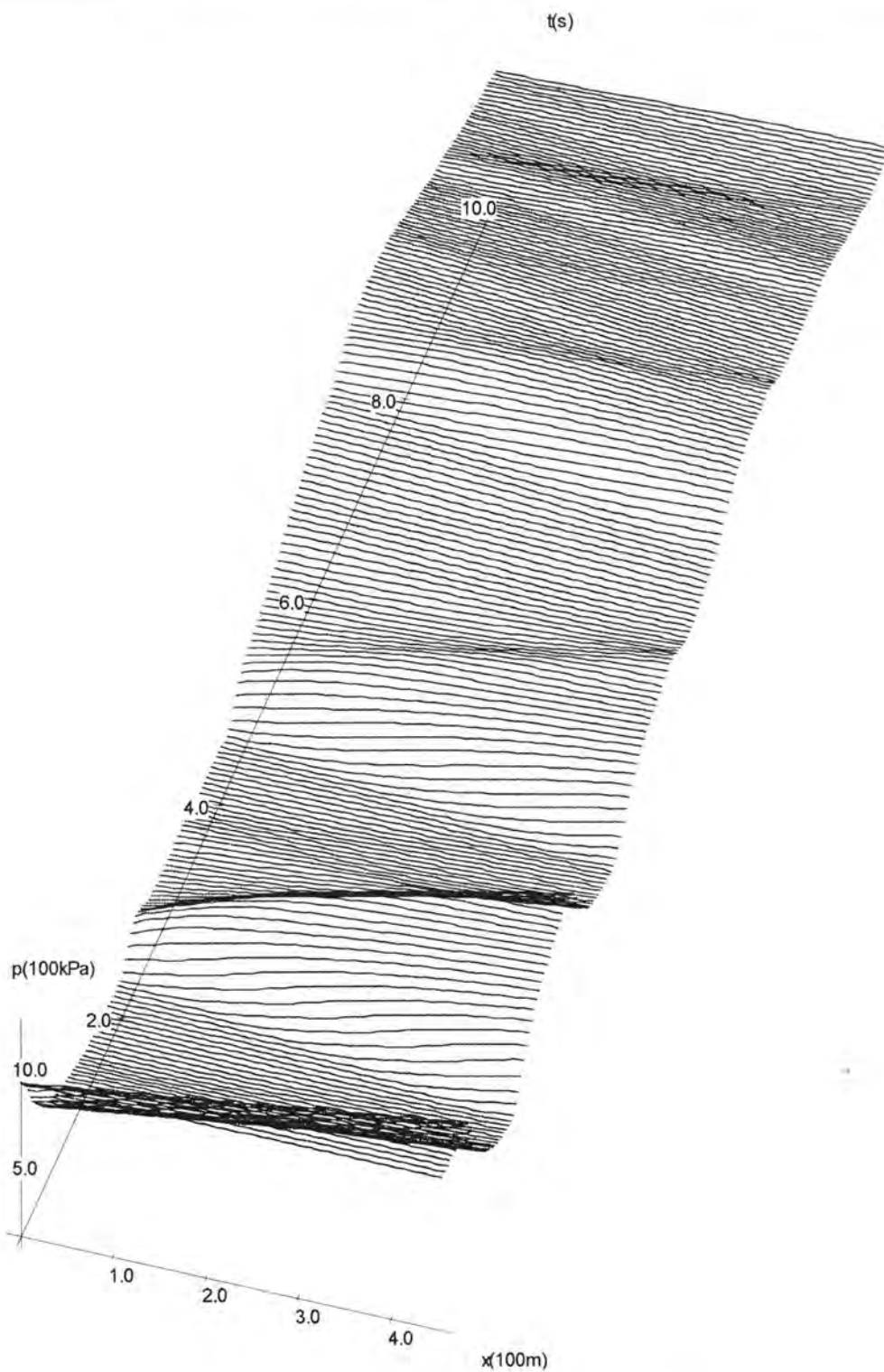
Cjevovod u ovom primjeru povezuje dva spremnika i svi su dijelovi cjevovoda na istoj visini (sl. 22.).

Pored uzvodnog spremnika postavljena je crpka, točnije između se nalazi kratka cijev duljine  $L_1 = 50m$  i promjera  $D_1 = 0,75m$ . Između crpke i nizvodnog spremnika u niz su spojene dvije cijevi od kojih prva ima duljinu  $L_2 = 450m$  i promjer  $D_2 = 0,75m$ , a druga duljinu  $L_3 = 550m$  i promjer  $D_3 = 0,75m$ .

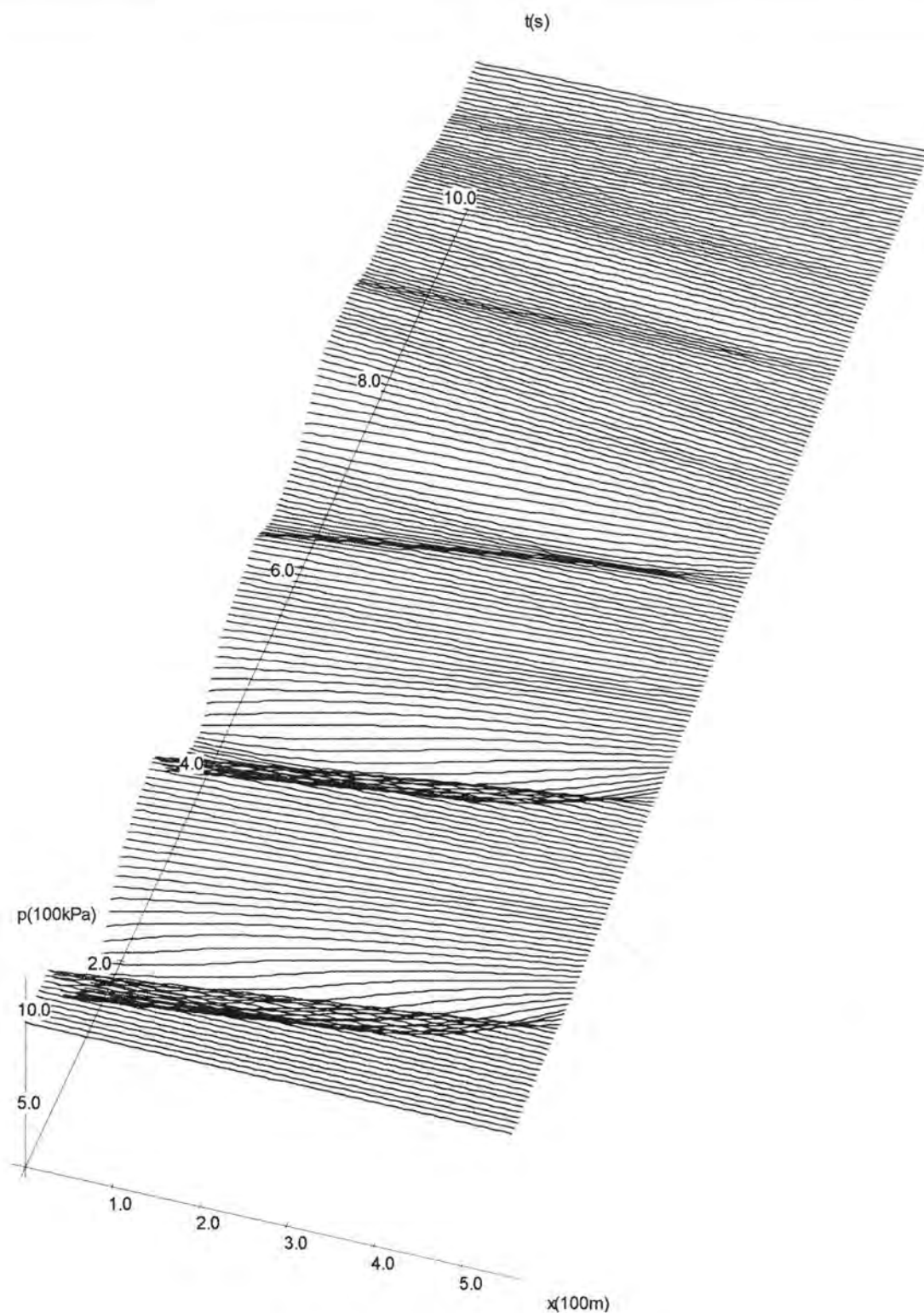
Visina je vode u uzvodnom spremniku  $10,065m$ , u nizvodnom  $69m$ , te se u vremenu ne mijenjaju (sl. 24. i 25.). Za crpku su poznate obje karakteristike (sl. 23.), referentne vrijednosti piezometričke visine  $H_R = 60m$ , protoka  $Q_R = 0,5m^3s^{-1}$ , brzine vrtnje  $N_R = 1100s^{-1}$  i momenta  $M_R = 3039,123Nm$  te ukupni moment inercije  $WR^2 = 16,85kgm^2$ , a gubici su kod crpke zanemareni. Na početku crpka radi tako da su sve vrijednosti jednake referentnima te protok duž čitavog cjevovoda iznosi  $0,5m^3s^{-1}$ . Zatim crpka naglo, u trenutku  $t = 0s$  prestane raditi.

Poremećaj tlaka koji je tako nastao kod crpke širi se brzinom zvuka duž cijevi, nastupa nestacionarno strujanje koje nakon nekog vremena zbog razlike u visinama vode u spremnicima prelazi u stacionarno, sa protokom od nizvodnog prema uzvodnom spremniku.

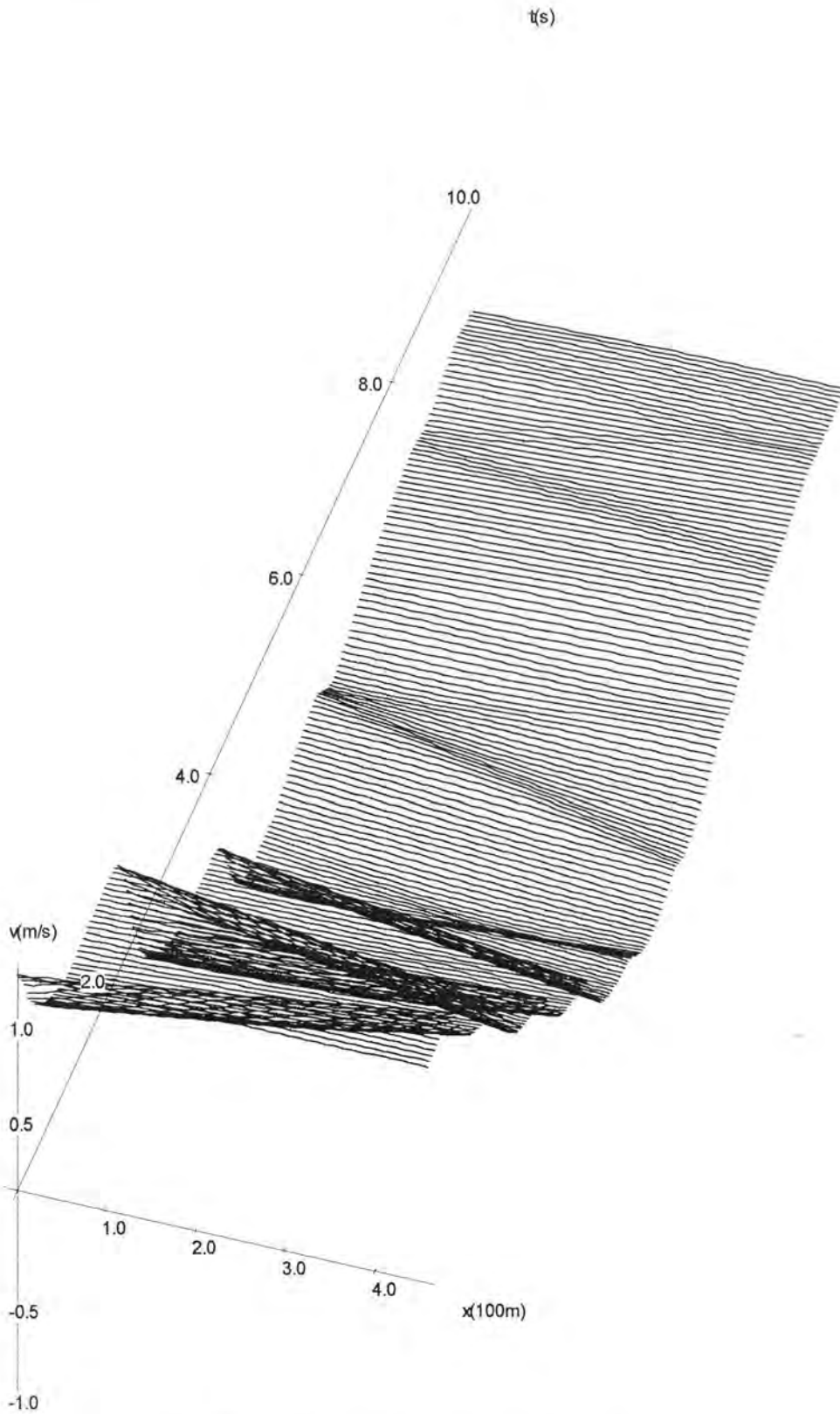
Za proračun strujanja primjenjena je ENOLLF shema reda  $r = 2$ , CFL koeficijent  $c_{eff} = 0,5$  i prostorni korak  $\Delta x = 5m$ . Na sl. 26. i 27. prikazan je tlak u drugoj i trećoj cijevi, a na sl. 28. i 29. brzina u drugoj i trećoj cijevi u vremenu od  $t = 0s$  do  $t = 12s$ .



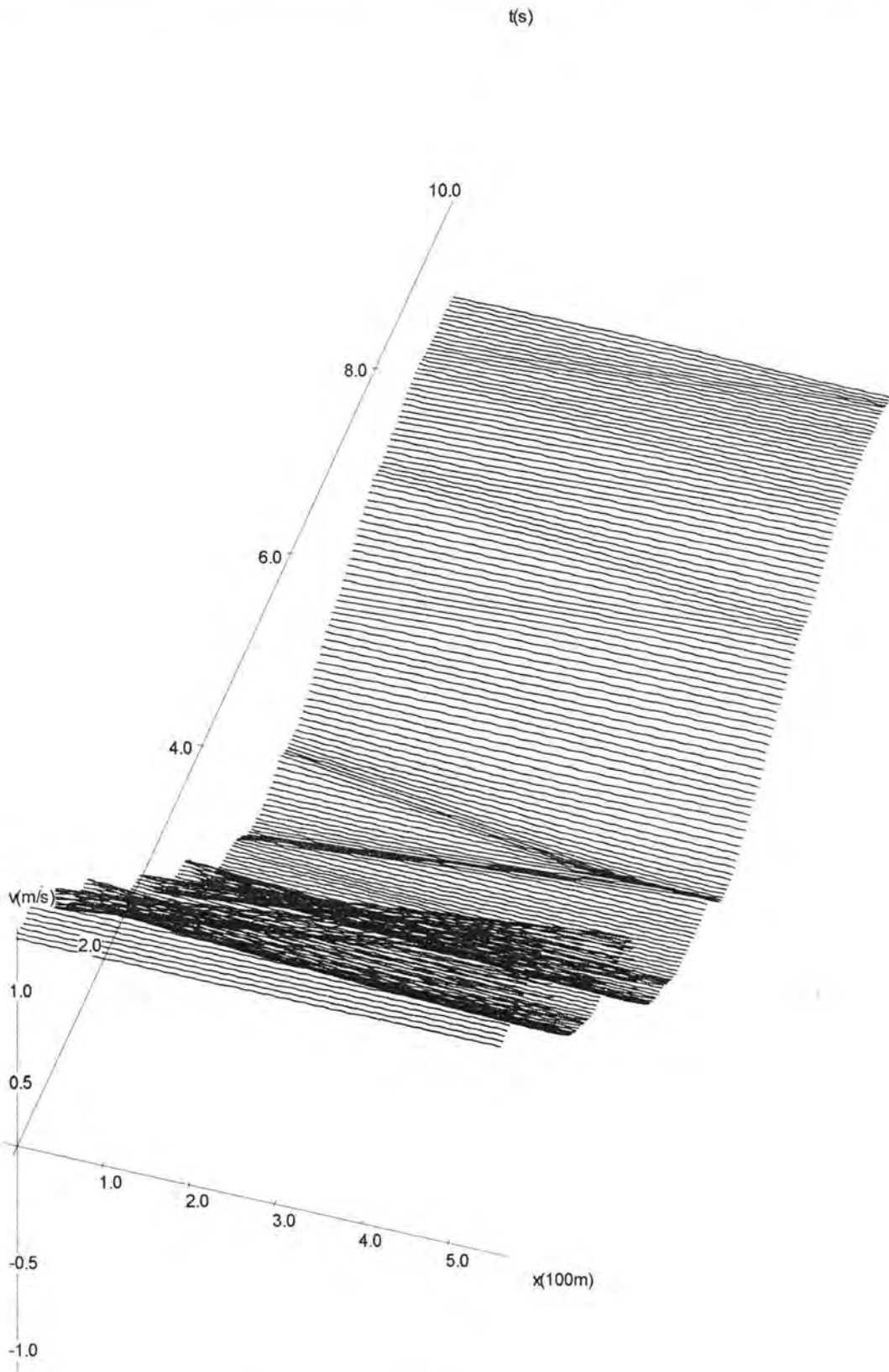
Sl. 26. Proračun 3.3 – tlak u drugoj cijevi



Sl. 27. Proračun 3.3 – tlak u trećoj cijevi



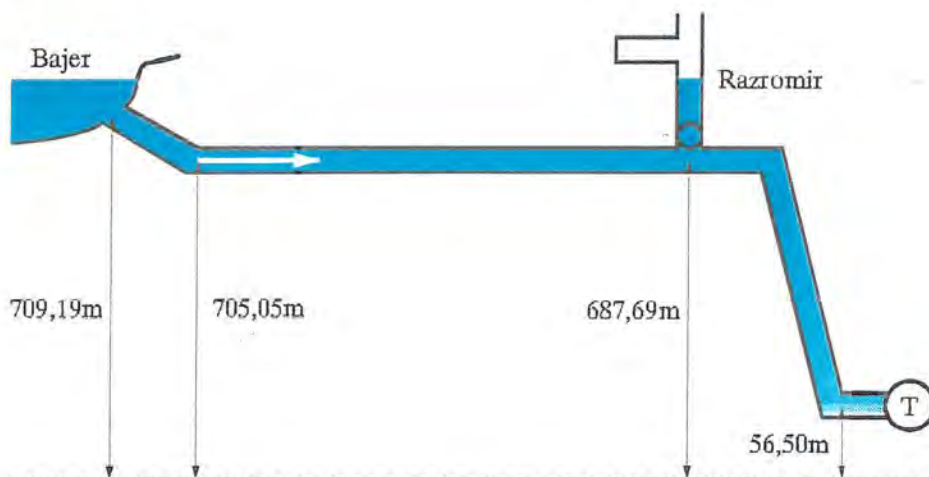
Sl. 28. Proračun 3.3 – brzina u drugoj cijevi



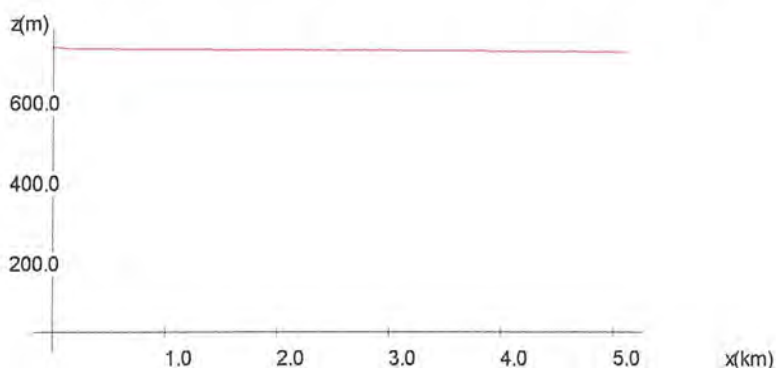
Sl. 29. Proračun 3.3 – brzina u trećoj cijevi



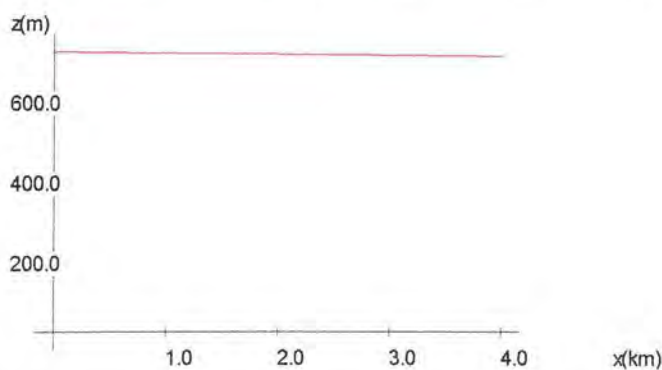
### 3.4 USPOREDBA PRORAČUNA I MJERENJA IZVRŠENIH U HIDROELEKTRANI "VINODOL" 19.05.1983.



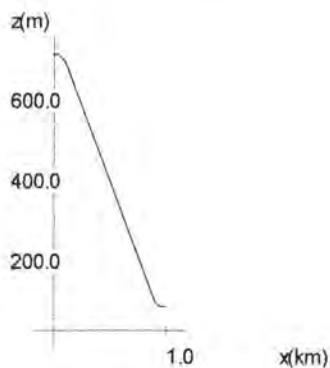
Sl. 30. Proračun 3.4 – dovodni sustav HE "Vinodol"



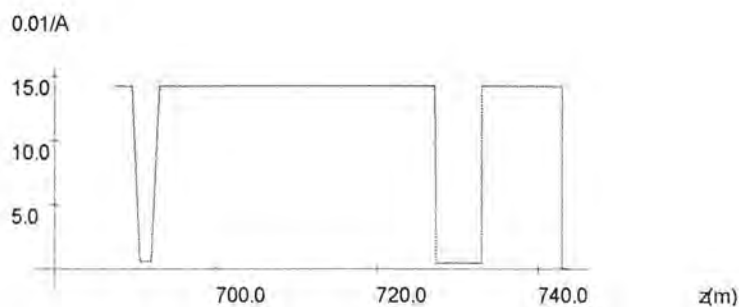
Sl. 31. Proračun 3.4 – nadmorska visina u tunelu Bajer i cjevovodu Lič



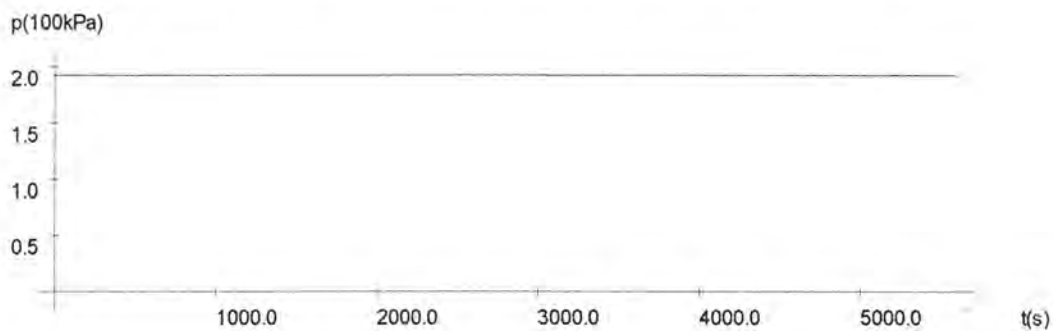
Sl. 32. Proračun 3.4 – nadmorska visina u tunelu Potkobiljak



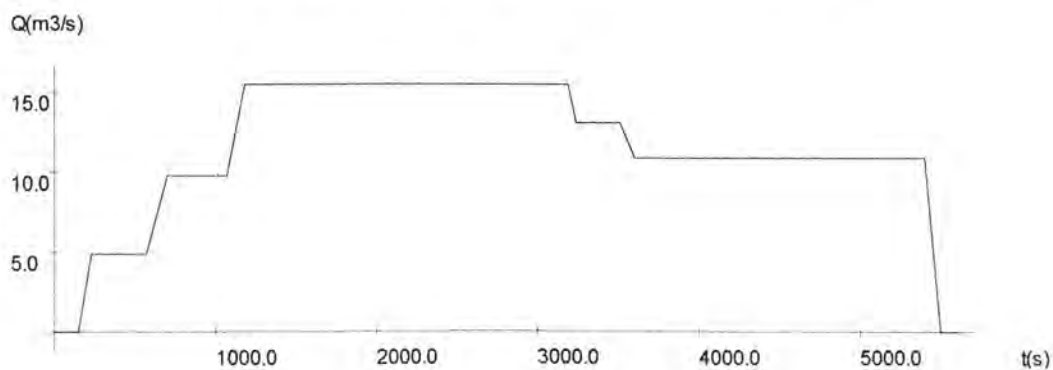
Sl. 33. Proračun 3.4 – nadmorska visina u tlačnom cjevovodu Razromir



Sl. 34. Proračun 3.4 – poprečni presjeci vodne komore Razromir



Sl. 35. Proračun 3.4 – tlak kod jezera Bajer



Sl. 36. Proračun 3.4 – protok kod turbina

Sustav za dovod vode od jezera Bajer do turbina Hidroelektrane "Vinodol" sastoji se od tunela Bajer, cjevovoda Lič, tunela Potkobiljak, vodne komore Razromir sa dvije donje, jednom gornjom galerijom i otvorenim vrhom, kratkog tunela te tlačnog cjevovoda Razromir (sl. 30.).

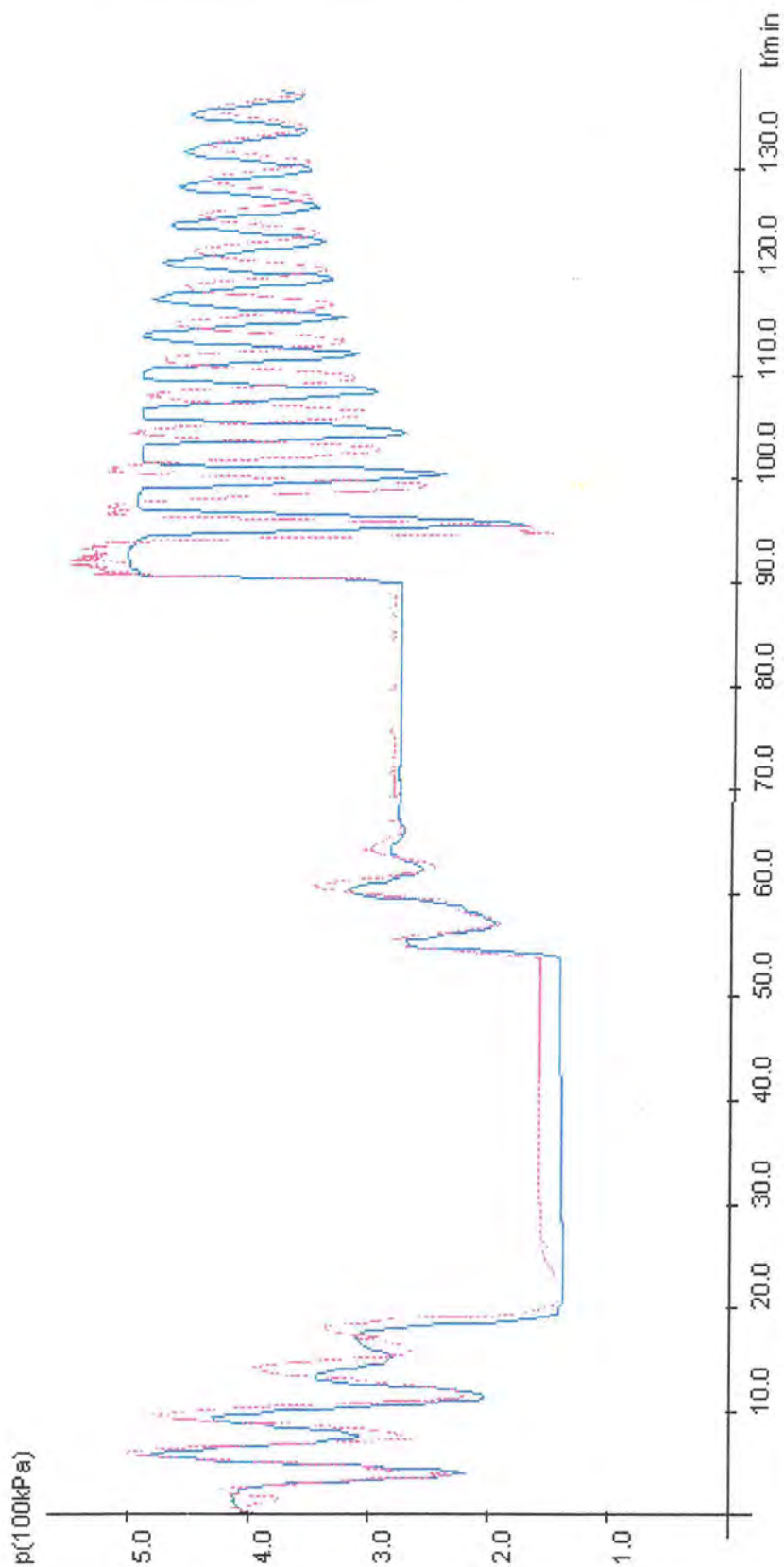
Dana 19.05.1983. između 10:00 i 11:33 obavljeno je postupno uključanje hidroelektrane u mrežu do snage od  $75MW$  te zatim ponovno isključenje, a čitav je postupak praćen mjerenjem tlaka na nekoliko točaka dovodnog cjevovoda.

Zbog vodne komore kod ovog je nestacionarnog strujanja najizraženija oscilacija vodenih masa u dijelu cjevovoda između jezera i vodne komore koja se očituje kao oscilacija tlaka sa velikom vremenskom periodom, a na koju se superponira tlačni udar koji se širi brzinom zvuka i ima znatno kraću vremensku periodu. Zbog toga što je tlak mjeren svakih 10s, tada izvršenim mjerenjima nije dobro izmjeren tlačni udar već samo oscilacija vodenih masa.

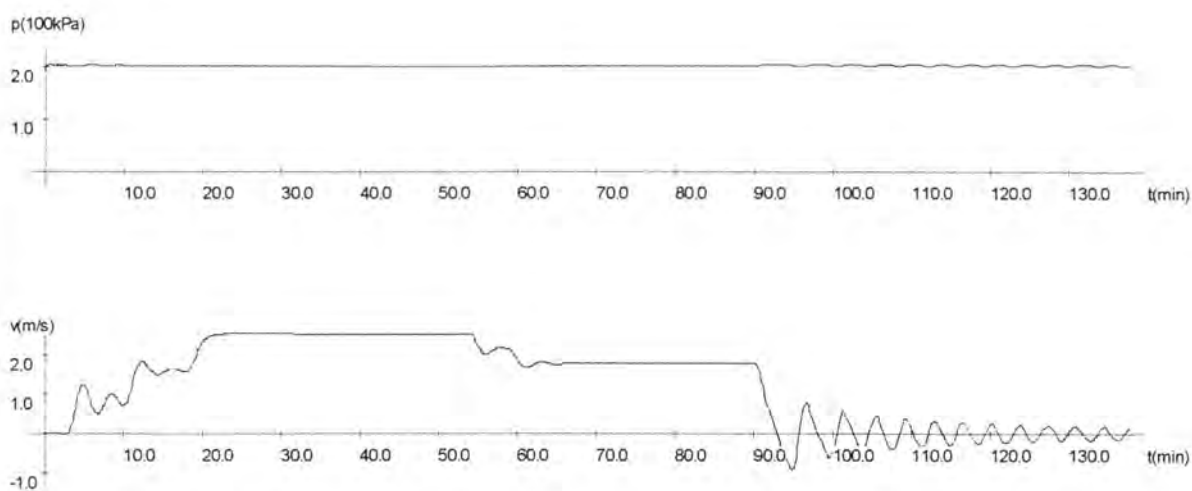
Obavljena mjerenja omogućavaju provjeru postavljenog modela. Nadmorske visine i duljine duž tog cjevovoda prikazane su na sl. 31.-33., a inverzne vrijednosti površina poprečnih presjeka vodne komore po nadmorskim visinama na sl. 34. Parametre se modela (faktor trenja, brzina zvuka, faktori gubitaka) može procijeniti na temelju poznavanja vrste stijenki pojedinih dijelova cjevovoda. Prisutnost mjehurića plina je zanemarena.

Prema prikupljenim podacima u promatranom vremenu razina vode u jezeru Bajer bila je na stalnoj nadmorskoj visini  $716,11m$  (sl. 35.). Zbog nedostatka potrebnih podataka o turbinama nizvodni kraj cjevovoda modeliran je kao rubni uvjet s poznatim protokom (sl. 36.).

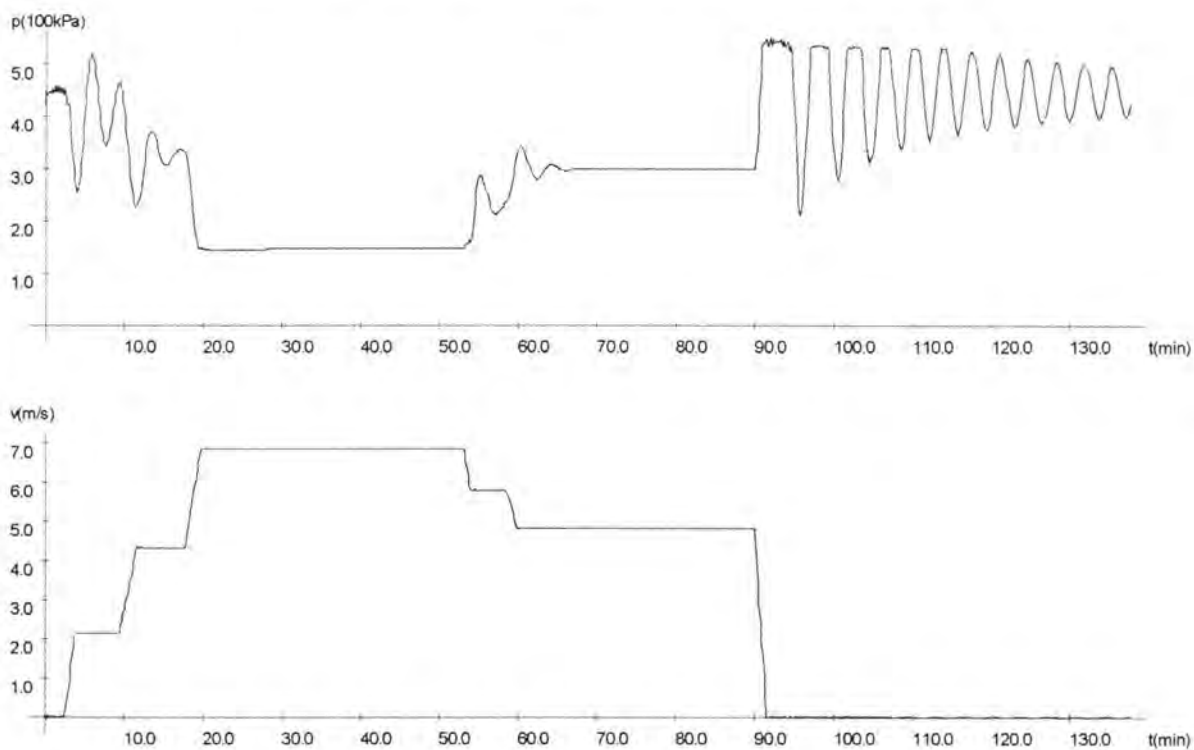
Na sl. 37. prikazan je izračunati (punom crtom) i mjereni (isprekidanom crtom) tlak za prvih 8270s kod vodne komore Razromir. S obzirom na samo približno poznavanje velikog dijela prikupljenih podataka, podudarnost je između proračuna i mjerenja vrlo dobra. Na sl. 38.-41. prikazani su tlak i brzina za isti vremenski period na različitim točkama cjevovoda.



Sl. 37. Proračun 3.4 – izračunati (puna plava crta) i mjereni (isprekidana crvena crta) tlak kod vodne komore Razromir

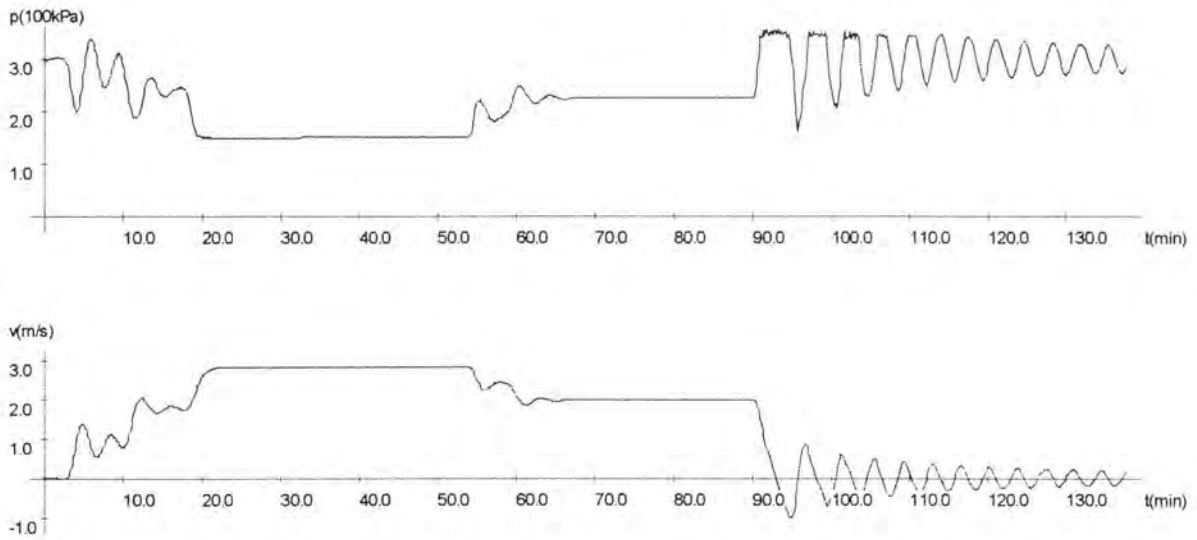


Sl. 38. Proračun 3.4 – tlak i brzina kod jezera "Bajer"

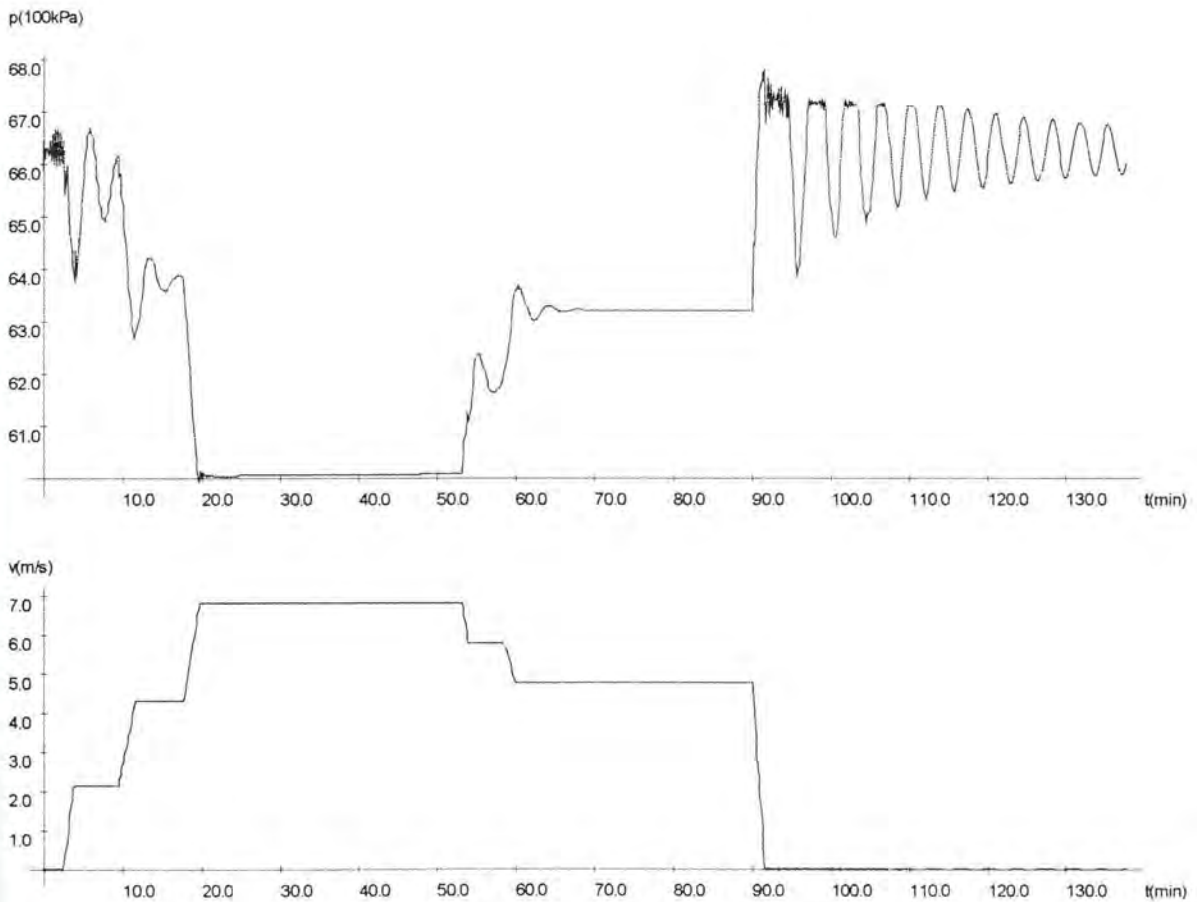


Sl. 39. Proračun 3.4 – tlak i brzina na početku tlačnog cjevovoda





Sl. 40. Proračun 3.4 – tlak i brzina na početku tunela Potkobiljak

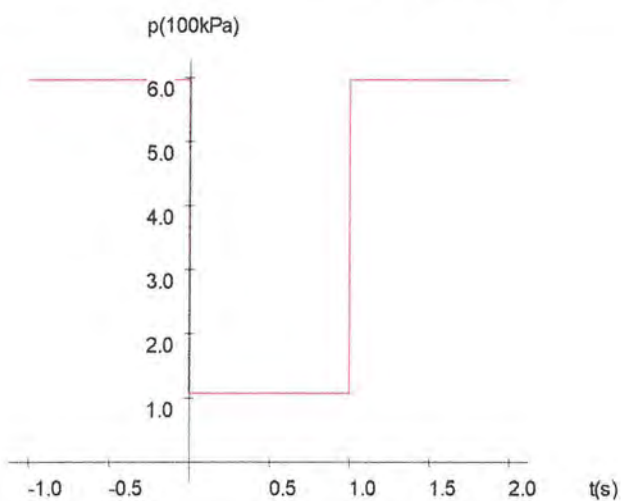


Sl. 41. Proračun 3.4 – tlak i brzina kod turbina

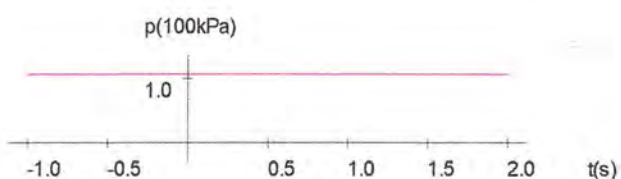
### 3.5 NESTACIONARNO STRUJANJE S KAVITACIJOM U CJEVOVODU CRPKA-CIJEV-SPREMNIK UZROKOVANO PROMJENAMA U RADU CRPKE



Sl. 42. Proračun 3.5 – cjevovod crpka-cijev-spremnik



Sl. 43. Proračun 3.5 – tlak kod crpke



Sl. 44. Proračun 3.5 – tlak kod spremnika

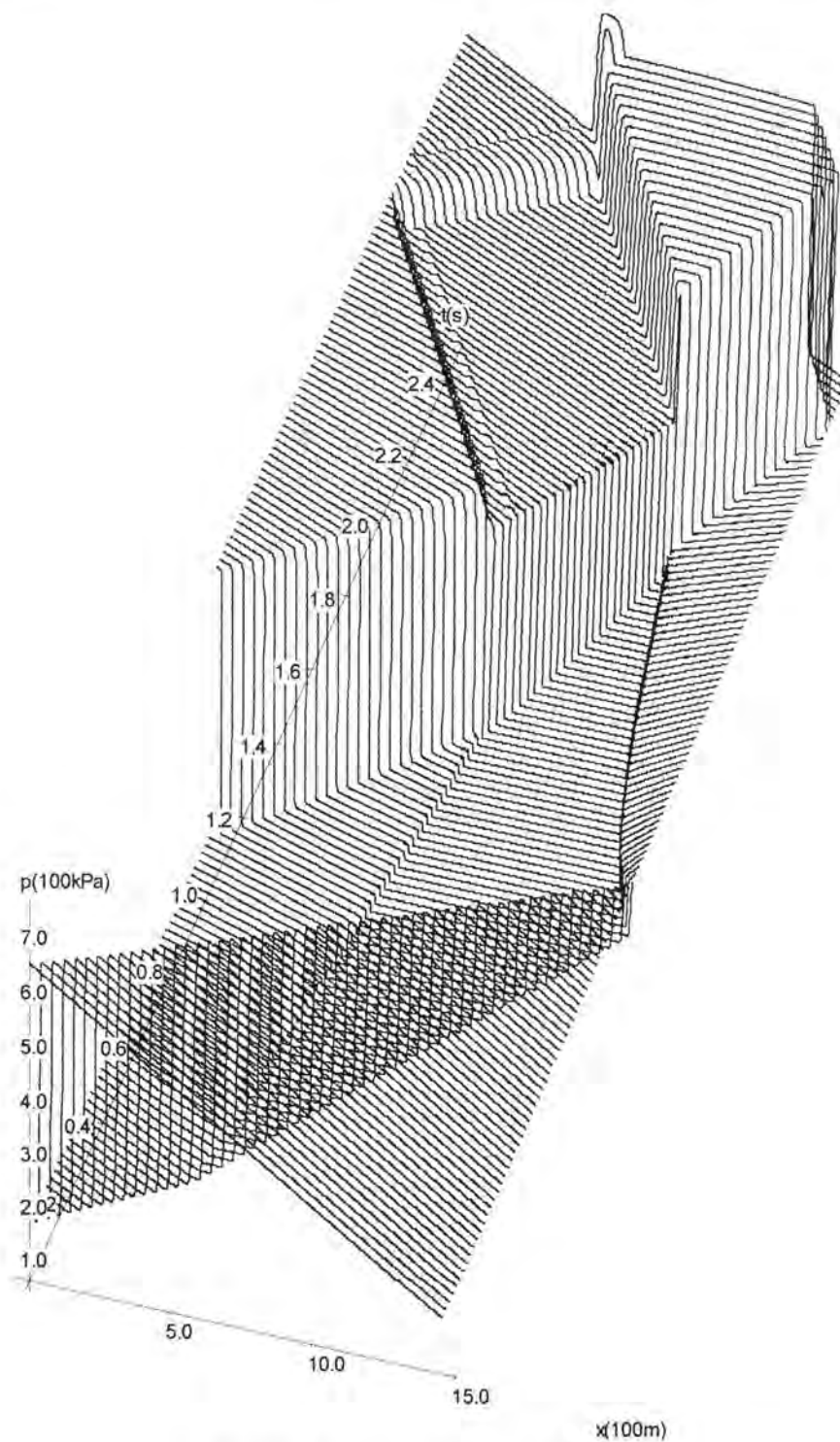
Ovaj primjer omogućava provjeru uspješnosti modela i u slučaju kada tlak pada ispod tlaka isparavanja tekućine. Cjevovod se sastoji od crpke, cijevi i spremnika (sl. 42.).

Cijev je položena vodoravno, duljine  $L = 1450m$  i promjera  $D = 0,1m$ . Faktor je trenja  $\lambda = 0,018$ , brzina zvuka u vodi u cijevi  $a_t = 1290ms^{-1}$  te tlak kod kojeg počinje isparavanje vode  $p_v = 2000Pa$ . Crpka i spremnik nisu modelirani prema točkama 1.2.7 i 1.2.2, zbog nepoznavanja svih potrebnih podataka o crpki, već kao rubni uvjeti poznatog tlaka (sl. 43. i 44.).

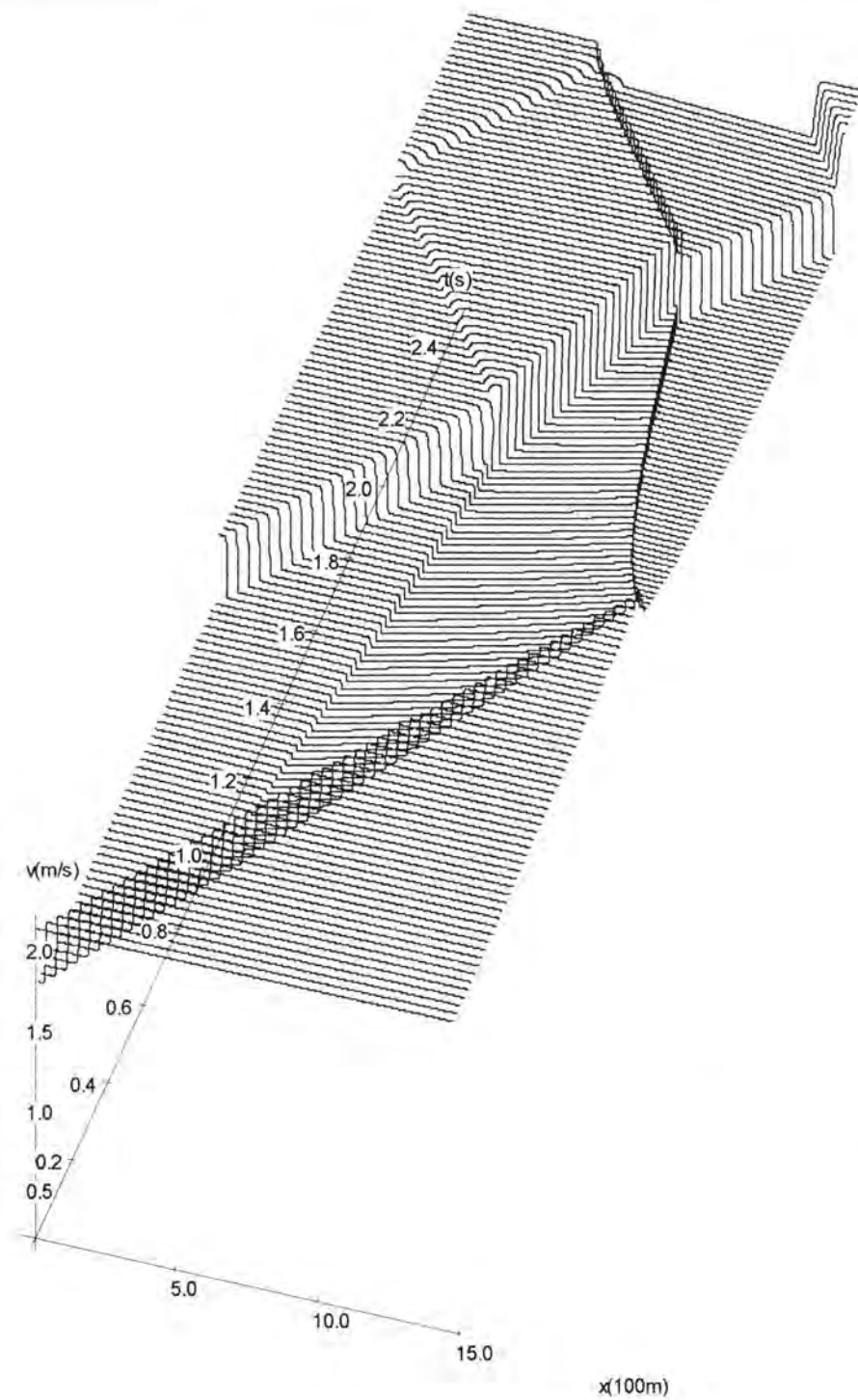
Tlak kod crpke u trenutku  $t = 0s$  pada s početne vrijednosti  $596000Pa$  na  $106000Pa$  i zatim se nakon  $1s$  ponovno uspostavlja početna vrijednost, dok tlak kod spremnika ima stalnu vrijednost  $106000Pa$ . Time je simuliran nagli prestanak i zatim ponovno uspostavljanje rada crpke.

Širenje šoka uslijed pada tlaka, pojavu kavitacije, refleksiju šoka na zadnjoj točki cijevi, nastanak novog šoka porastom tlaka, sudaranje reflektiranog i novog šoka može se detaljno proučiti na sl. 45. i 46. na kojima su predloženi rezultati proračuna tlaka i brzine u cijevi u vremenu od  $t = 0s$  do  $t = 2,5s$ . Rezultati su dobiveni primjenom ENOLLF sheme reda  $r = 2$ , CFL koeficijentom  $c_{cfl} = 0,5$  i prostornim korakom  $\Delta x = 10m$ .

Podudaranje s rezultatima mjerenja i Kranenburgovog numeričkog modela koja su navedena u [9] i ovdje prikazana na sl. 47. vide se usporedbom sa sl. 48. na kojoj su prikazani rezultati proračuna tlaka i brzina za iste točke u cijevi kao u [9]. Jedina je razlika u tome što je ovdje zahvaljujući esencijalno neoscilirajućoj i šok hvatajućoj prirodi primjenjene sheme promatrana trenutačna promjena tlaka, dok je eksperiment i proračun u navedenom članku izveden uz postupnije smanjenje i povećanje tlaka kod crpke.



Sl. 45. Proračun 3.5 – tlak u cijevi



Sl. 46. Proračun 3.5 – brzina u cijevi



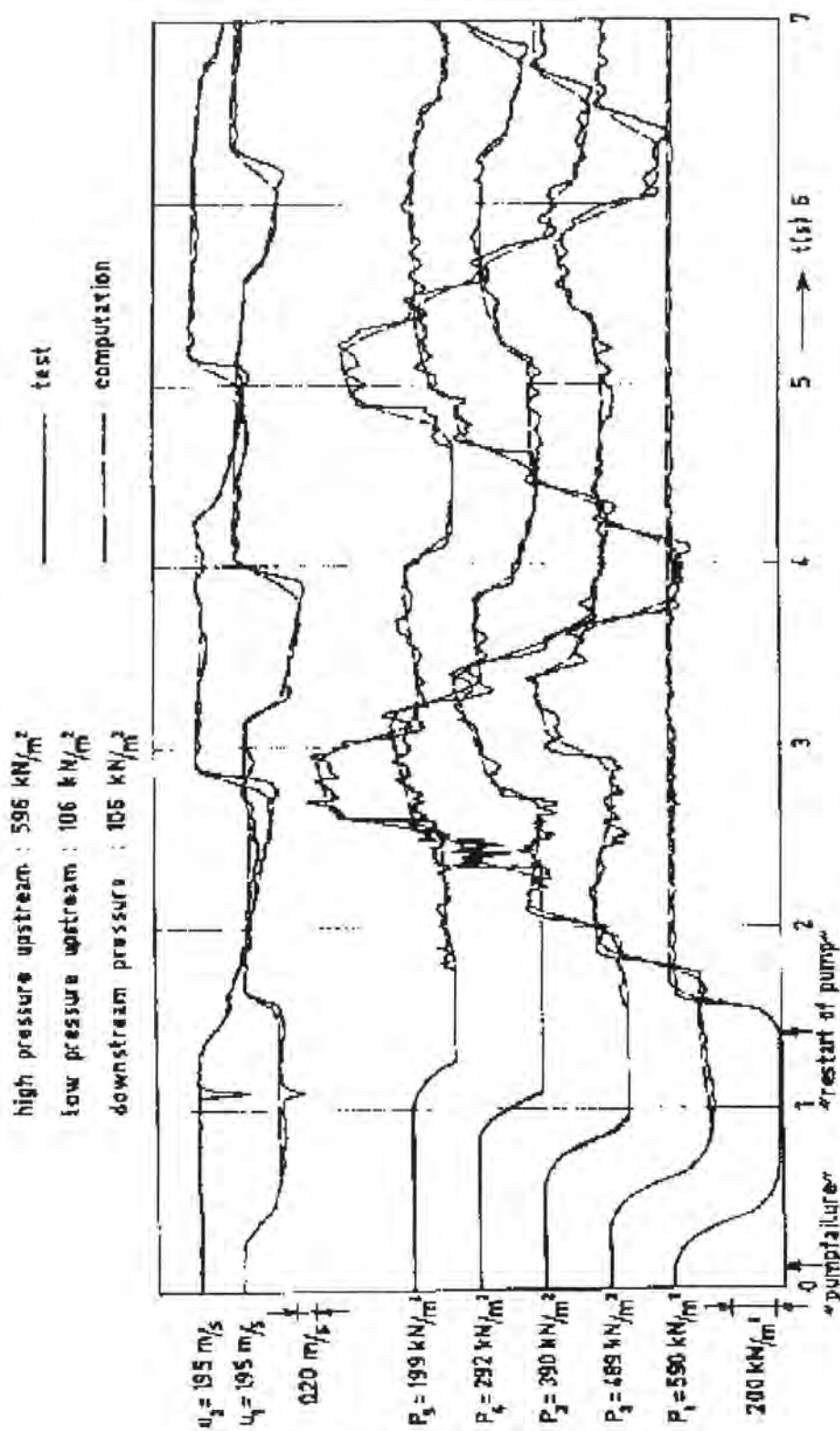
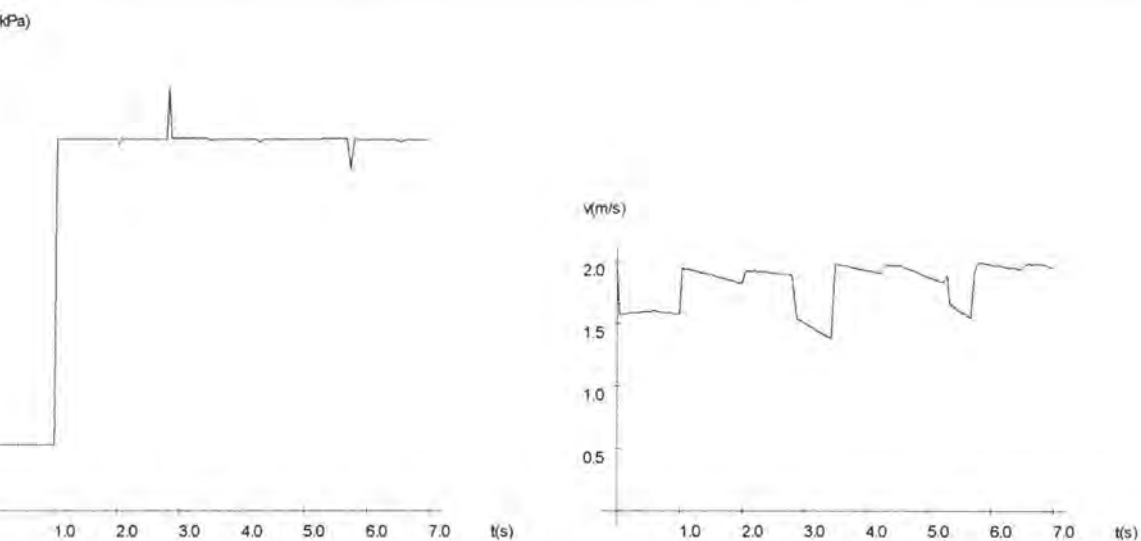
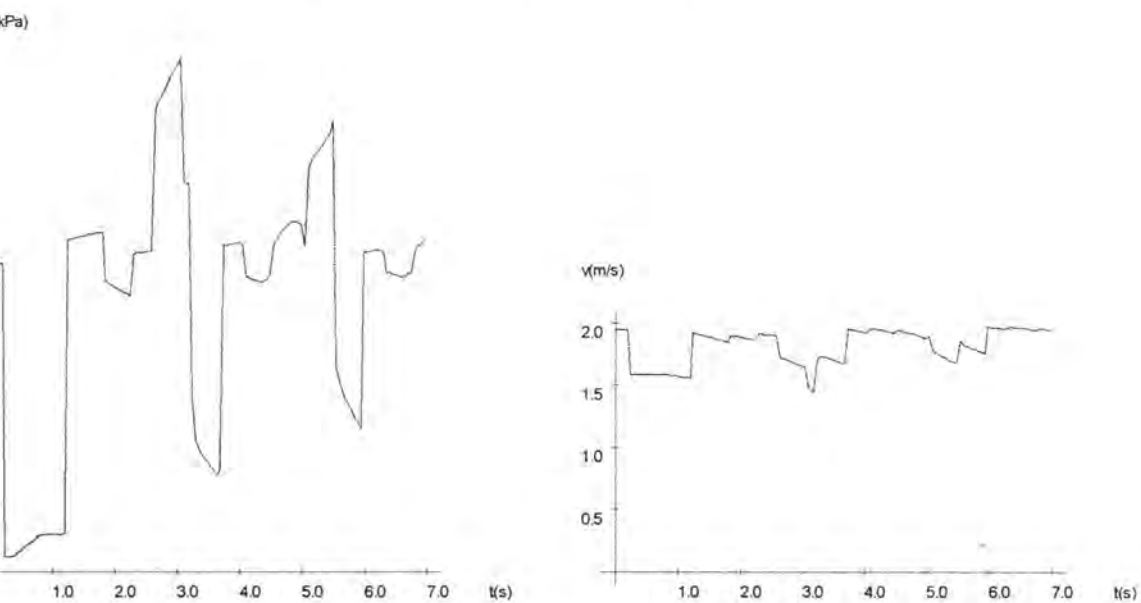


FIG. 4.—Simulation of Pump Failure Causing Cavitating Flow in Horizontal Pipeline ( $1 \text{ m/s} = 3.28 \text{ fps}$ ;  $100 \text{ kN/m}^2 = 14.5 \text{ psi}$ )

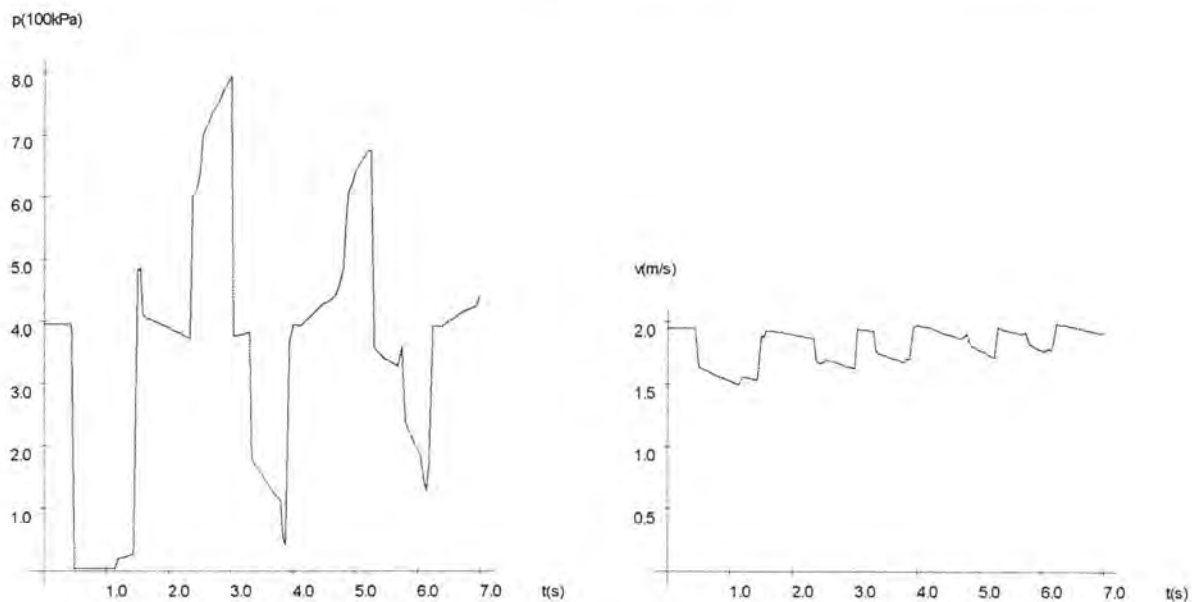
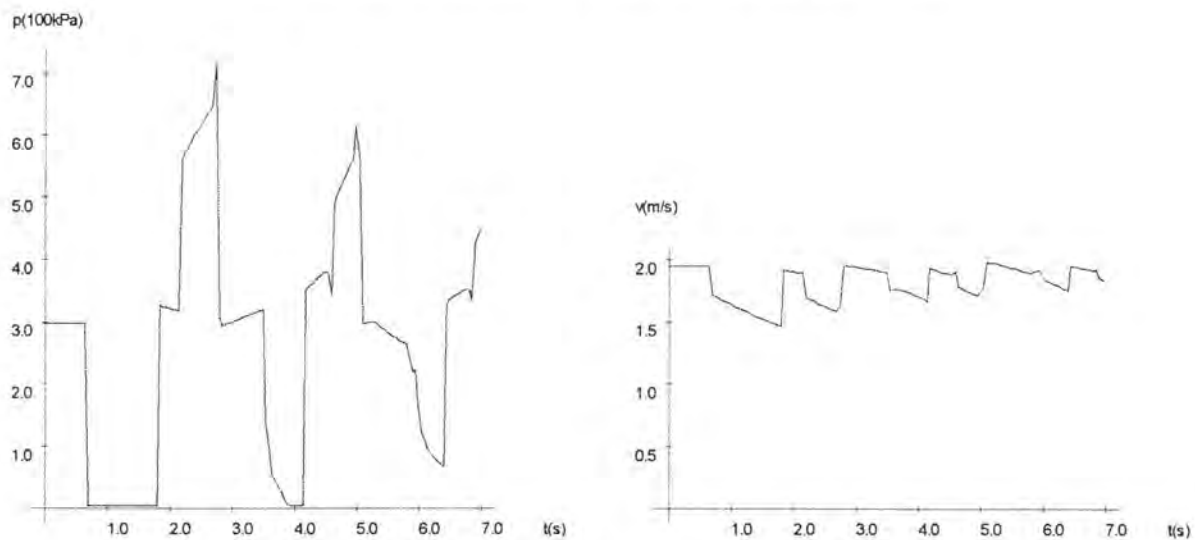
Sl. 47. Proračun 3.5 – proračun i mjerenje iz [9]

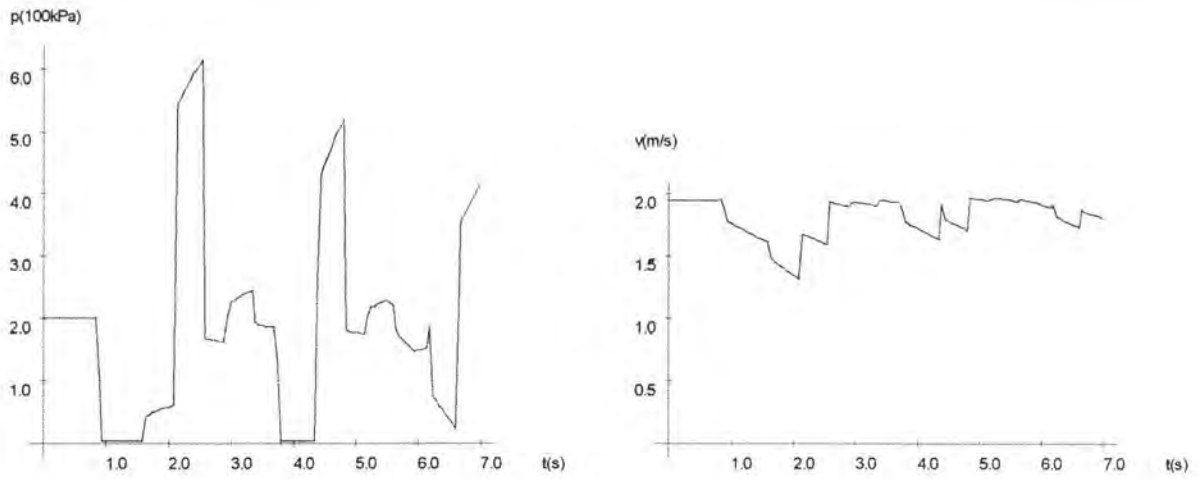


Sl. 48.i) Proračun 3.5 – tlak i brzina kod  $x = 3m$

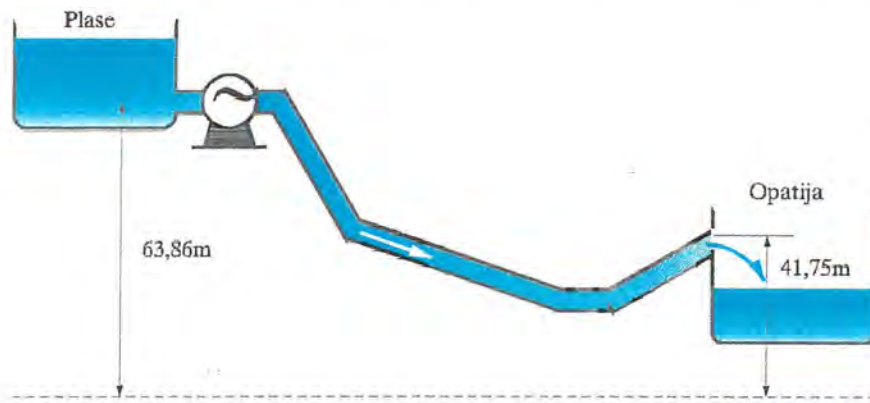


Sl. 48.ii) Proračun 3.5 – tlak i brzina kod  $x = 299m$

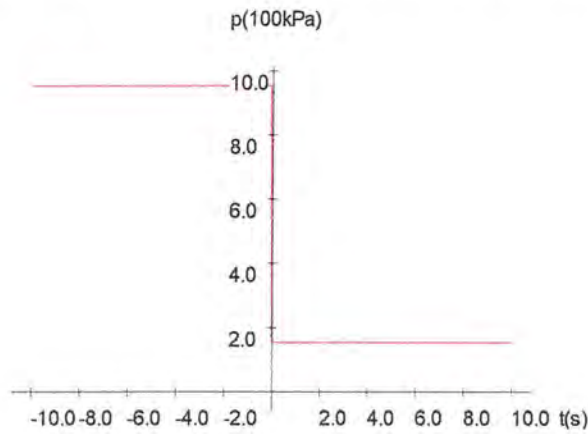
Sl. 48.iii) Proračun 3.5 – tlak i brzina kod  $x = 597m$ Sl. 48.iv) Proračun 3.5 – tlak i brzina kod  $x = 887m$

Sl. 48.v) Proračun 3.5 – tlak i brzina kod  $x = 1168m$

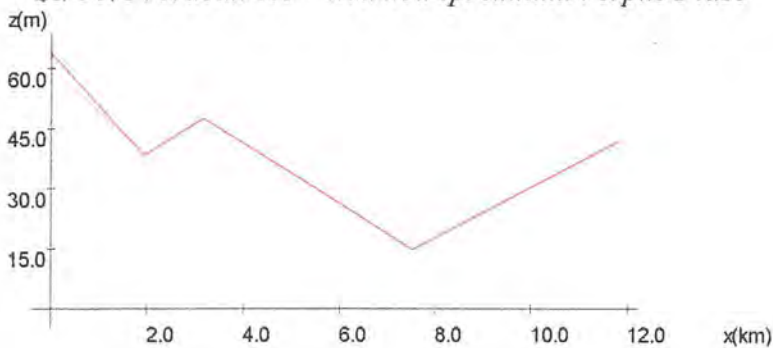
### 3.6 PREDVIĐANJE POSLJEDICA PRESTANKA RADA CRPKE ZA CJEVOVOD PLASE-OPATIJA



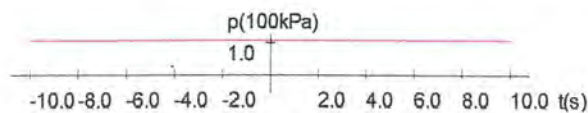
Sl. 49. Proračun 3.6 – cjevovod Plase-Opatija



Sl. 50. Proračun 3.6 – tlak kod spremnika i crpke Plase



Sl. 51. Proračun 3.6 – nadmorske visine cjevovoda Plase-Opatije



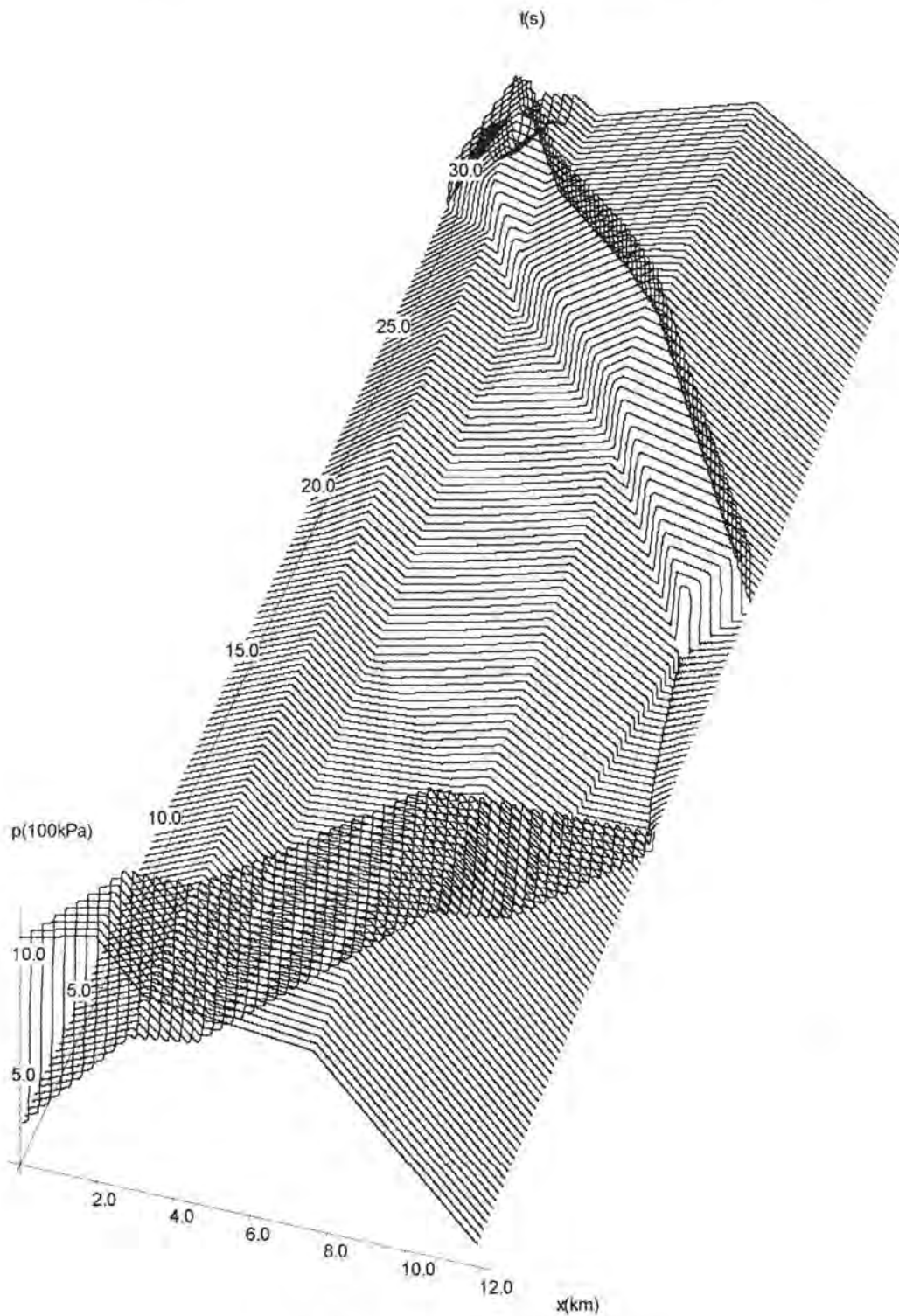
Sl. 52. Proračun 3.6 – tlak u zadnjoj točki cjevovoda



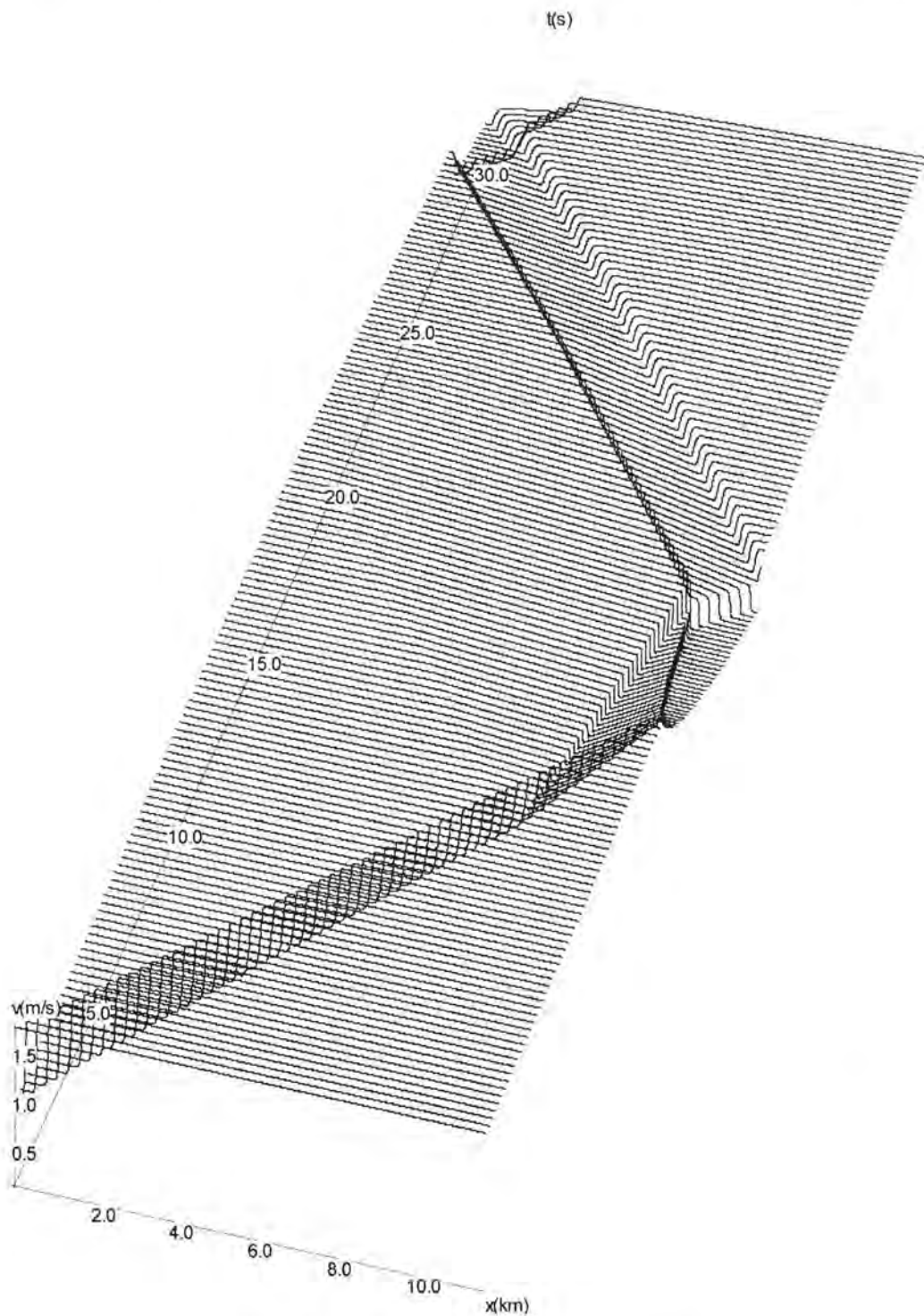
Iz spremnika Plase u Rijeci voda se približno  $L = 12000m$  dugačkim cjevovodom odvodi do središta Opatije. Uslijed razlike između nadmorskih visina početka i kraja cjevovoda strujanje je stacionarno s protokom  $0,13m^3s^{-1}$ . Ugradnjom crpke kod spremnika Plase želi se udvostručiti protok, ali se tada pojavljuje problem naglog prestanka rada crpke. Naime takav događaj uzrokuje tlačni udar, a budući da se radi o padu tlaka vjerojatna je pojava kavitacija posebno na povišenim točkama cjevovoda.

Postavljeni model omogućava predviđanje ako se utvrde osnovni parametri cjevovoda. Spremnik Plase i crpka modelirani su kao rubni uvjet s poznatim tlakom, zbog toga što je crpka koja treba biti ugrađena nepoznatih svojstava i karakteristika i zbog toga što ako se pretpostavi trenutačni pad tlaka dobiva se najgori mogući tlačni udar neublažen inercijom crpke. Iz poznatih podataka o cjevovodu lako se izračuna da je tlak kod spremnika Plase bez crpke  $150377Pa$  te da tlak kod crpke mora biti  $942886Pa$  da bi povećani protok iznosio  $0,26m^3s^{-1}$ . Tlak kao funkcija vremena u početnoj točki cjevovoda predočen je na sl. 50. Nadmorske visine duž cjevovoda vide se na sl. 51., promjer cijevi je  $0,45m$ . U krajnjoj točki cjevovoda voda slobodno istječe, prema tome treba je smatrati rubnim uvjetom s poznatim tlakom jednakim atmosferskome (sl. 52.).

Sada je moguće pratiti širenje tlačnog udara brzinom od  $1000ms^{-1}$ , pri čemu se pretpostavlja mali volumni udio plina i para u vodi te se uzima da voda uz očekivane temperature isparava kod tlaka od  $2000Pa$ . Rezultati proračuna tlaka i brzine u cijevi u vremenu od  $t = 0s$  do  $t = 30s$  koji su dobiveni pomoću ENOLLF sheme reda  $r = 2$ , CFL koeficijent  $c_{eff} = 0,5$  i prostorni korak od  $\Delta x = 10m$  predočeni su na sl. 53. i 54.. Na njima se jasno uočava pojava kavitacije u zadnjem dijelu cjevovoda, povratak tlačnog vala sa kraja cjevovoda, urušavanje kavitacijskog područja praćeno naglim povećanjem tlaka koje zatim putuje uzvodno, refleksiju tog udara kod uzvodnog spremnika itd.



Sl. 53. Proračun 3.6 – tlak u cijevi



Sl. 54. Proračun 3.6 – brzina u cijevi

## 4. GENETSKI ALGORITAM U OPTIMALNOM UPRAVLJANJU NESTACIONARNIM STRUJANJEM U CJEVOVODU

Kada se govori jezikom genetskog algoritma, pojedino je strujanje u cjevovodu jedinka. Kao u prirodi tako i u genetskom algoritmu, jedinke žive u populacijama. Postavljeni kriterij optimalnog upravljanja čini vanjske uvjete pod kojima jedinke žive. Za svako strujanje može se izračunati vrijednost funkcije cilja, dakle za svaku jedinku može se znati koliko je dobro prilagođena uvjetima življenja. U prirodi, u nastajanju novog naraštaja najuspješnije jedinke imaju najveći udio, te se tako iz naraštaja u naraštaj u populaciji izloženoj stalnim uvjetima povećava prilagođenost. Operatori genetskog algoritma oponašajući procese prirodnog odabira, djeluju nad naraštajima umjetnih populacija i postižu postavljeni cilj – stvaranje najuspješnije jedinke, dakle nalaženje onog strujanja u cjevovodu koje ima optimalnu vrijednost funkcije cilja.

### 4.1 GENOTIP I FENOTIP

Postavljanje nekog zadatka optimalnog upravljanja znači odabir skupa parametara  $\xi_1, \dots, \xi_n$  te funkcije cilja kojoj su ti parametri promjenljive. Kada parametri poprima određene vrijednosti, dobiva se točno određeno strujanje u cjevovodu. Skup parametara i strujanje može se poistovjetiti, odnosno vrijednosti skupa parametara čine fenotip neke jedinke. No genetski algoritam djeluje na razini gena te je potrebno poznavati genotip svake jedinke. Prema tome prvi problem je problem preslikavanja između fenotipa i genotipa, odnosno problem kodiranja skupa parametara u oblik umjetnog kromosoma.

Umjetni je kromosom niz gena, pa je problem kodiranja problem odabira onoga što se u genetskom algoritmu naziva abecedom gena te problem duljine kromosoma. U rješavanju pomažu dva temeljna načela: načelo smislenih graditeljskih blokova i načelo najmanje abecede. Zato se bira binarnu abecedu, gene koji su slika jednog parametra drži se u nizu od  $l$  uzastopnih položaja, a cjeline gena koji pripadaju različitim parametrima slaže se jedne iza drugih te se dobiva kromosome duljine  $nl$ . Tako preslikavanje iz genotipa u fenotip izgleda ovako. Neka je:

$$g_1 g_2 \dots g_l \dots g_{(i-1)l+1} g_{(i-1)l+2} \dots g_{il} \dots g_{(n-1)l+1} g_{(n-1)l+2} \dots g_{nl} \quad (4.1)$$

kromosom jedne jedinke, gdje je svaki pojedini gen iz binarne abecede:

$$g_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \dots, nl. \quad (4.2)$$

Dio kromosoma (4.1):

$$g_{(i-1)l+1} g_{(i-1)l+2} \dots g_{il} \quad (4.3)$$

shvaća se kao binarni zapis prirodnog broja:

$$\eta_i = g_{(i-1)l+1} 2^0 + g_{(i-1)l+2} 2^1 + \dots + g_{il} 2^{l-1} \quad (4.4)$$

koji leži u intervalu  $[0, 2^l - 1]$ . Kod ovog zadatka optimizacije  $i$ -ti je parametar realni broj koji ima smisao samo ako prima vrijednost između neke najmanje i najveće moguće vrijednosti  $[\xi_{i,\min}, \xi_{i,\max}]$ . Tako ako se izvrši bijektivno afino preslikavanje intervala  $[0, 2^l - 1]$  na interval  $[\xi_{i,\min}, \xi_{i,\max}]$  dobiva se smisljena vrijednost  $i$ -tog parametra:



$$\xi_i = \frac{\xi_{i,\max} - \xi_{i,\min}}{2^l - 1} \eta_i + \xi_{i,\min} \quad (4.5)$$

Kada se ovaj postupak ponovi za sve dijelove kromosoma,  $i = 1, \dots, n$  za jedinku je iz genotipa pročitana fenotip. Očiti obrnuti postupak uz zaokruživanje kodiranje je skupa parametara.

## 4.2 PRILAGOĐENOST JEDINKE

U prirodi neka je jedinka manje ili više uspješna od drugih jedinki ovisno o tome kako joj genotip pretočen u fenotip omogućava da odgovori na uvjete u kojima živi. Za umjetnu jedinku u genetskom algoritmu također se iz njenog fenotipa – pripadnog skupa parametara može izračunati vrijednost funkcije cilja te zaključiti da li slabije ili bolje od drugih jedinki zadovoljava kriterije koji su postavljeni. Radi kvantitativnog uspoređivanja jedinki nužna je mjera prilagođenosti jedinke. Mjera prilagođenosti  $\Phi$  mora poprimati nenegativne vrijednosti, te operatori genetskog algoritma omogućavaju nalaženje jedinke s najvećom prilagođenosti  $\Phi$ . Za razliku od toga, funkcija cilja  $\varphi$  zadatka optimalnog upravljanja općenito može poprimati i pozitivne i negativne vrijednosti a optimalna vrijednost ovisno o problemu može biti najveća ili najmanja vrijednost te funkcije. Dakle, nije moguće jednostavno izjednačiti funkciju cilja  $\varphi$  i mjeru prilagođenosti  $\Phi$  već se postupa ovako.

Ako je zadatak optimizacije naći najveću vrijednost funkcije cilja  $\varphi$  jedini problem su moguće negativne vrijednosti što se može riješiti dodavanjem dovoljno velikog pozitivnog broja  $C$ , odnosno tada se uzima:

$$\Phi = \max \{ \varphi + C, 0 \}. \quad (4.6)$$

Ako je zadatak optimizacije naći skup parametara za koji je vrijednost funkcije cilja  $\varphi$  najmanja, tada tome odgovara najveća vrijednost funkcije  $-\varphi$  te se uz dodavanje dovoljno velikog pozitivnog broja  $C$  također dobiva pogodnu mjeru prilagođenosti:

$$\Phi = \max \{ -\varphi + C, 0 \}. \quad (4.7)$$

No u genetskom algoritmu ovako dobivenu prilagođenost smatra se sirovom. Naime, jedinke ovisno o svojoj prilagođenosti sudjeluju u stvaranju novih naraštaja, točnije prema teoriji genetskog algoritma udio je neke jedinke proporcionalan eksponencijalnoj funkciji razlike između prilagođenosti promatrane jedinke i prosječne prilagođenosti u populaciji. Kako je u prvom naraštaju neke populacije velika većina jedinki slabo prilagođena i samo nekoliko jedinki izrazito odskače od prosjeka, već bi u idućoj generaciji dominirali njihovi potomci te bi došlo do preranog gubljenja genetskog materijala. S druge strane, u kasnijim naraštajima razlika između prilagođenosti jedinki bi se smanjila te bi osrednje i bolje jedinke dobivale sličan udio u potomstvu i napredovanje populacije bi se usporilo. U oba slučaja problem je u prevelikoj, odnosno premaloj razlici između najveće i prosječne prilagođenosti u nekoj populaciji. To se rješava uvođenjem skalirane prilagođenosti koja za razliku od sirove treba u svim naraštajima zadržati sličan omjer između svoje najveće i prosječne vrijednosti.

U genetskom algoritmu moguća su ova skaliranja:

1. linearno skaliranje,
2. sigma rezanje,
3. skaliranje u obliku zakona potencija,
4. prozorsko skaliranje.

Budući da je u ovoj primjeni genetskog algoritma primijenjeno linearno skaliranje, ostali načini skaliranja ovdje se neće objašnjavati. Kod linearnog skaliranja (sl. 52.) iz sirove prilagođenosti računa se skaliranu pomoću izraza:



$$\tilde{\Phi} = \max \left\{ \Phi_s + (c-1)\Phi_s \frac{\Phi - \Phi_s}{\Phi_{\max} - \Phi_s}, 0 \right\}, \quad (4.8)$$

čime se postiže dva temeljna svojstva:

$$\tilde{\Phi}_s = \Phi_s \text{ i } \tilde{\Phi}_{\max} = c\Phi_s, \quad (4.9)$$

gdje je:

$c$  - po volji odabrani faktor, uspješno se rabe vrijednosti  $1,2 \leq c \leq 2$ ,

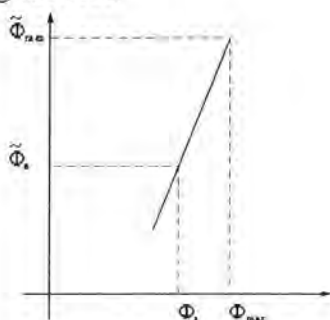
$\tilde{\Phi}$  - skalirana prilagođenost,

$\Phi_s$  - srednja prilagođenost,

$\Phi_{\max}$  - maksimalna prilagođenost,

$\tilde{\Phi}_s$  - srednja skalirana prilagođenost,

$\tilde{\Phi}_{\max}$  - maksimalna skalirana prilagođenost.



Sl. 55. Linearno skaliranje prilagođenosti

### 4.3 ODABIR RODITELJA

U prirodi jedinke koje su bolje prilagođene od ostalih jedinki iste populacije žive dulje i imaju više potomaka. Do sada je objašnjeno kako u genetskom algoritmu populaciju čine jedinke od kojih svaka ima svoj genotip, iz kojega se može dekodirati fenotip te izračunati mjeru prilagođenosti. Sada treba pogledati na koji se način, kada se u genetskom algoritmu stvara jedinke novog naraštaja, među jedinkama starog naraštaja bira roditelje.

Jasno je da je ovo jedan od ključnih koraka genetskog algoritma, da upravo ovdje treba doći do izražaja oponašanje prirodnog odabira te da koliko puta će neka jedinka biti birana za roditelja mora ovisiti o prilagođenosti te jedinke. Pri tome ne zna se što bi to bila apsolutno najbolja prilagođenost nego se može samo uspoređivati jedinke unutar jedne populacije. Zato se radi slijedeće: zbrajaju se prilagođenosti svih jedinki i promatra se za svaku jedinku relativna prilagođenost izražena u postocima:

$$\frac{\Phi_i}{\sum_{k=1}^J \Phi_k} \cdot 100\% \quad , \quad i = 1, \dots, J \quad (4.10)$$

gdje je:

$J$  - veličina populacije,

$\Phi_i$  - prilagođenost  $i$ -te jedinke.

Nadalje je poznato nekoliko mogućnosti:

1. stohastički odabir sa zamjenom,

3. deterministički odabir,
4. stohastički odabir ostatka bez zamjene,
5. stohastički odabir ostatka sa zamjenom,
6. Wetzellovo rangiranje,
7. stohastički univerzalni odabir,
8. linearno rangiranje sa stohastičkim univerzalnim odabirom.

Stohastički odabir sa zamjenom naziva se i odabirom pomoću kotača ruleta. Naime, svakoj jedinki pridružuje se dio kotača ruleta površine u postocima jednake relativnoj prilagođenosti te jedinke. Sada je za odabir roditelja dovoljno zavrtjeti kotač ruleta i uzeti onu jedinku kojoj pripada područje u kojem se rulet slučajno zaustavio. Ovaj je odabir stohastički i vjerojatnost da neka jedinka bude odabrana kao roditelj jednaka je njenoj relativnoj prilagođenosti.

Stohastički odabir bez zamjene De Jongov je model očekivane vrijednosti. Kod ovog odabira računa se očekivani broj potomaka za svaku jedinku:

$$\frac{\Phi_i}{\sum_{k=1}^J \Phi_k / J}, \quad i = 1, \dots, J. \quad (4.11)$$

Zatim se bira stohastički kao i kod prve metode, tj. bira se u skladu s istom vjerojatnosnom raspodjelom jedinki. Ako iza toga jedinka postaje roditelj jedne nove jedinke pripadni očekivani broj potomaka se smanjuje za 0,5, a ako jedinka prelazi u novi naraštaj bez zamjene pripadni očekivani broj potomaka se smanjuje za 1. Kada jedinki očekivani broj potomaka uslijed ovakvog smanjivanja padne ispod 0 jedinku se više ne može birati.

Kod metoda odabira 3., 4. i 5. počinje se tako da se svaku jedinku bira onoliko puta za roditelja koliki je cjelobrojni dio očekivanog broja potomaka (4.11). Time se naravno ne dobiva dovoljan broj parova roditelja te se javlja problem ostatka populacije koji se u ove tri metode rješava na različite načine.

Kod determinističkog se odabira reda jedinke populacije prema veličini decimalnog dijela očekivanog broja potomaka (4.11) te se s vrha tako dobivenog popisa uzima potrebni ostatak roditelja.

Isti se ostatak roditelja primjenom stohastičkog odabira ostatka bez zamjene nalazi pomoću kotača ruleta i to tako da se svakoj jedinki pridruži dio kotača ruleta proporcionalan decimalnom dijelu očekivanog broja potomaka (4.11).

Stohastički odabir ostatka sa zamjenom znači da svaka jedinka osim što je već bila onoliko puta roditelj koliko iznosi cjelobrojni dio očekivanog broja potomaka (4.11) još može biti ponovno odabrana kao roditelj (do popunjavanja potrebnog broja) s vjerojatnošću jednakom decimalnom dijelu očekivanog broja potomaka (4.11).

Wetzellovo rangiranje slično je stohastičkom odabiru bez zamjene, ali nakon što se pomoću kotača ruleta odabere dvije jedinke, uspoređuje ih se prema njihovoj prilagođenosti i zadržava samo uspješniju kao budućeg roditelja.

Kod linearnog se rangiranja najprije poreda jedinke po prilagođenosti, tako da najbolje prilagođena jedinka postane prvom a najslabije prilagođena  $J$ -tom jedinkom populacije. Zatim se vjerojatnost da jedinka bude odabrana ne računa iz prilagođenosti nego iz položaja jedinke u poretku:

$$\frac{1}{J} \left( j_{\max} - \frac{i-1}{J-1} (j_{\max} - j_{\min}) \right), \quad (4.12)$$

gdje su  $1 \leq j_{\max} \leq 2$  i  $j_{\min} = 2 - j_{\max}$  po volji odabrani parametri.

Za ove i druge inačice odabira izvršena su brojna ispitivanja i poznata je njihova učinkovitost na različitim problemima. Dostupnost različitih metoda odabira kod primjene genetskog algoritma povećava mogućnosti optimalnog upravljanja.

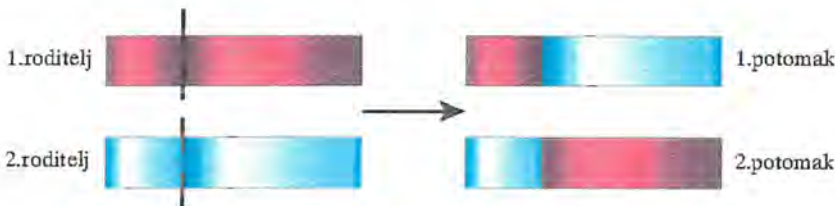
#### 4.4 KRIŽANJE

U genetskom algoritmu tipično je da dva roditelja imaju dva potomka. Pri tom je najbitniji prijenos genetskog materijala sa starih na nove jedinke križanjem. Točnije, križanje se događa samo s nekom od korisnika odabranom vjerojatnošću, pa se može dogoditi da uopće ne dođe do križanja. U tom slučaju odabrane stare jedinke neizmijenjene ulaze u novi naraštaj populacije. Kada pak dolazi do križanja jedan potomak nasljeđuje dio gena od jednog a ostali dio gena od drugog roditelja, a drugi potomak nasljeđuje preostale dijelove kromosoma.

Prema načinu na koji se bira koje će gene naslijediti koje dijete od kojeg roditelja razlikuju se:

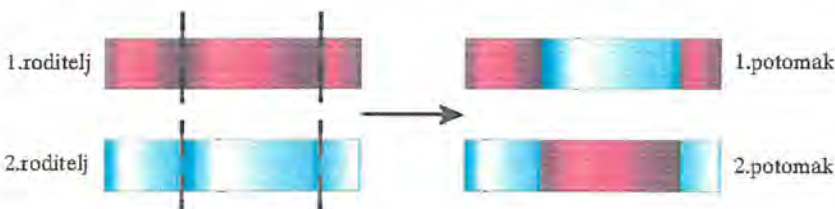
1. križanje s jednom točkom reza,
2. križanje s više točaka reza,
3. uniformno križanje.

Kod križanja s jednom točkom reza (sl. 53.), slučajno se bira jedan položaj u kromosomu. Zatim sve gene od početka do odabrane točke u kromosomu prvog roditelja i sve gene od odabrane točke do kraja kromosoma drugog roditelja nasljeđuje prvo dijete, a sve preostale gene prvog i drugog roditelja drugo dijete.



Sl. 56. Križanje s jednom točkom reza

Kod križanja s više točaka reza (sl. 54.) bira se više položaja za rez u kromosomu, također slučajno. Ako se radi križanje s parnim brojem točaka reza, zamišlja se da je spajanjem prvog i zadnjeg gena zatvoren kromosom u oblik prstena. Parnim brojem rezova kromosomi roditelja odvajaju se u dijelove, pa prvo dijete dobiva naizmjenično dijelove od prvog pa od drugog roditelja, a drugo dijete kao i obično preostali genetski materijal. Križanje s neparnim brojem točaka reza, svodi se na križanje s parnim brojem dodavanjem početka kromosoma kao obaveznog mjesta reza.



Sl. 57. Križanje s parnim brojem točaka reza



Uniformno križanje znači da se svaki gen promatra neovisno od drugih. Pojedini gen prvo dijete nasljeđuje od prvog roditelja s vjerojatnošću 0,5, pa ako se to ne dogodi nasljeđuje ga od drugog roditelja. Drugo dijete dobiva isti gen od roditelja koji nije darovao taj gen prvom djetetu.

Uzimajući u obzir ideju o graditeljskim cjelinama, jasno je da križanje s većim brojem točaka reza ne može biti korisno jer s većom vjerojatnosti razbija uspješne shemate. Zato se za većinu primjena genetskog algoritma preporučuje križanje s dvije točke reza. Također se obično uzima da se križanje događa s vjerojatnosti 0,6.

#### 4.5 MUTACIJA

Do sada proučeni operatori genetskog algoritma rade samo sa postojećim genetskim materijalom neke populacije. Ako za neki gen u početnoj populaciji nema niti jedne jedinke koja bi imala vrijednost tog gena jednaku nekoj vrijednosti iz odabrane genetske abecede tako ostaje i u svim budućim naraštajima te populacije. Štoviše napredovanjem kroz naraštaje smanjuje se raznolikost genetskog materijala. To može dovesti do usporavanja konvergencije genetskog algoritma i nagomilavanja populacije oko nekog lokalnog, dakle lažnog optimuma. Da se to izbjegne u genetskom algoritmu ponovno se oponaša prirodu te se povećava raznolikost ukupnog genetskog materijala populacije uvodeći mutacije. U ovoj primjeni pogodne su dvije vrste mutacije:

1. jednogenska mutacija,
2. višegenska mutacija.

Jednogenska mutacija djeluje tako da za svaku jedinku novog naraštaja pripadni operator prelazi preko svih gena, ali djeluje slučajno i to s vrlo malom vjerojatnosti. Kada djeluje vrijednost danog gena mijenja se u neku drugu slučajno odabranu vrijednost iz dozvoljene abecede genetskog materijala.

Višegenska mutacija razlikuje se od jednogenske samo po tome što kada pripadni operator djeluje zahvaća mutacijom više susjednih gena. Broj tih mutiranih gena slučajna je varijabla Poissonove raspodjele s vjerojatnosti obrnuto proporcionalnoj očekivanoj broju susjednih mutacija. Mutacije na rubu kromosoma rješavaju se zamišljajući kromosom u obliku prstena.

Kao i u prirodi ako je mutacija učinila jedinku slabije prilagođenom ta će jedinka biti uklonjena prirodnim odabirom. No ponekad se može dogoditi da upravo zahvaljujući mutaciji neki gen poprimi vrijednost koje prije nije bilo u populaciji, a koja bitno poboljšava prilagođenost i pospješuje nalaženje globalnog optimuma postavljenog problema.

Kod primjene najvažnije je birati vrlo malu vjerojatnost mutacije, obično oko vrijednosti 0,0333.

#### 4.6 NAPREDNI OPERATORI GENETSKOG ALGORITMA

Osnovni operatori genetskog algoritma su odabir, križanje i mutacija i već su oni dovoljni za uspješno rješavanje različitih problema optimizacije. No jasno je da osnovni genetski algoritam tek vrlo pojednostavljeno oponaša procese prilagodbe, reprodukcije i razvoja živih bića. Slijedeći logiku da priroda vrlo uspješno stvara sve savršenije i savršenije oblike života pa je u postupcima optimizacije treba samo što vjernije oponašati, razvijeni su brojni napredni operatori i tehnike: diploidnost i dominantni geni, inverzija, redukcija incesta, određivanja spola, specijalizacija, migracije između subpopulacija itd.

## 5.OPTIMALNO UPRAVLJANJE NESTACIONARNIM STRUJANJEM U CJEVODU

### 5.1 UPRAVLJANJE PROTOKOM KOD IDEALNOG HIDRAULIČKOG UDARA

Za cjevovod iz točke 3.1. postavlja se sljedeći zadatak optimalnog upravljanja: ako treba zaustaviti protok u zadanom vremenu od  $2s$  kako to učiniti pa da time uzrokovani tlačni udar bude najmanji mogući.

Prvo treba razjasniti funkciju cilja. Budući da se promatra idealizirani cjevovod u kome tlačne oscilacije imaju periodu  $2s$  i beskonačno se ponavljaju jer nema gubitaka na trenje, bitna su odstupanja tlaka od početne stacionarne vrijednosti i može ih se promatrati na nizvodnom kraju cijevi, odnosno na položaju  $x = 500m$  jer nigdje drugdje u cjevovodu tlak neće imati drugačije vrijednosti odstupanja. Nadalje budući da se svaki poremećaj koji nastane na tom rubu reflektira na spremniku i vrati natrag u vremenu od  $1s$  dovoljno je promatrati samo prve  $3s$  pojave. Tako je funkcija cilja:

$$\varphi = \max_{t \in [t_1, t_2]} |p(t) - p(0)|, \quad (5.1)$$

gdje je  $p(t) = p(500, t)$  tlak na kraju cijevi,  $t_1 = 0s$  i  $t_2 = 3s$ . Zadatak je naći minimum ove funkcije pa treba primijeniti izraz (4.7) da se dobije mjera prilagođenosti u genetskom algoritmu. Konstanti  $C$  lako se bira vrijednost, jer najjači tlačni udar nastupa pri trenutnom zatvaranju pa je dovoljno uzeti vrijednost funkcije cilja u tom slučaju.

Nadalje treba ustanoviti skup parametara problema optimizacije. Ono što se može mijenjati da bi se promijenila vrijednost funkcije cilja je postupak zatvaranja, dakle krivulja protoka na nizvodnom kraju cijevi kao funkcija vremena. No da bi se primijenio genetski algoritam promjenljiva veličina ne može biti funkcija već mora biti skup realnih parametara. Zato se bira nekoliko vremenskih trenutaka  $0s < t^{(i)} < 2s$ ,  $i = 1, \dots, n$  i za parametre uzima vrijednosti:

$$0m^3s^{-1} \leq Q_i = Q(500, t^{(i)}) \leq 1m^3s^{-1}, i = 1, \dots, n. \quad (5.2)$$

Genetski je algoritam primijenjen uz 30 gena po parametru, stohastički univerzalni odabir, dvotočkovno križanje, višebitnu mutaciju, kružnu inverziju i jednu populaciju te proračun strujanja za svaku jedinku pomoću ENOLLF sheme reda  $r = 2$  s CFL koeficijentom  $c_{cfl} = 0,5$  i prostornim korakom  $\Delta x = 10m$ .

Optimizacijom u slučaju 1 parametra ( $t^{(1)} = 1s$ ) dobiven je sljedeći rezultat:

$$Q_1 = 0,664061m^3s^{-1}, \quad (5.3)$$

$$\varphi_{\min} = 788503,31Pa, \quad (5.4)$$

u slučaju 3 parametra ( $t^{(1)} = 0,5s$ ,  $t^{(2)} = 1s$ ,  $t^{(3)} = 1,5s$ ) rezultat:

$$Q_1 = 0,673726m^3s^{-1}, Q_2 = 0,667629m^3s^{-1}, Q_3 = 0,189754m^3s^{-1}, \quad (5.5)$$

$$\varphi_{\min} = 752261,1Pa, \quad (5.6)$$

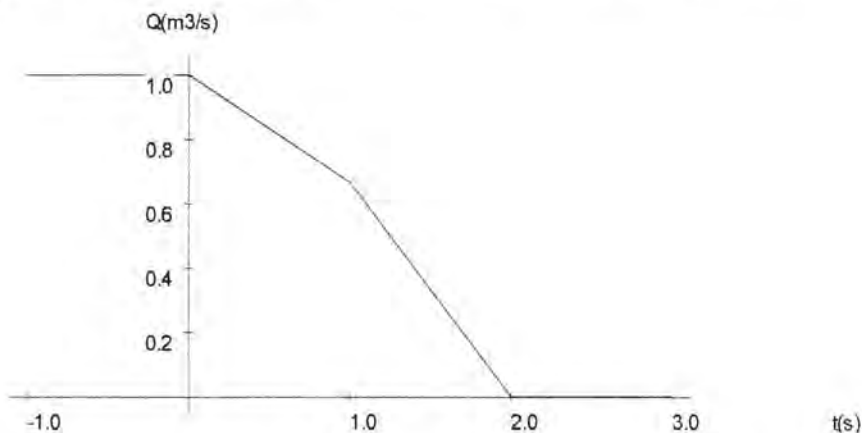
te u slučaju 7 parametara ( $t^{(1)} = 0,25s$ ,  $t^{(2)} = 0,5s$ , ...,  $t^{(3)} = 1,75s$ ) rezultat:

$$Q_1 = 0,654017m^3s^{-1}, Q_2 = 0,742937m^3s^{-1}, Q_3 = 0,667968m^3s^{-1}, Q_4 = 0,671928m^3s^{-1}, \\ Q_5 = 0,105705m^3s^{-1}, Q_6 = 0,239622m^3s^{-1}, Q_7 = 0,351652m^3s^{-1}, \quad (5.7)$$

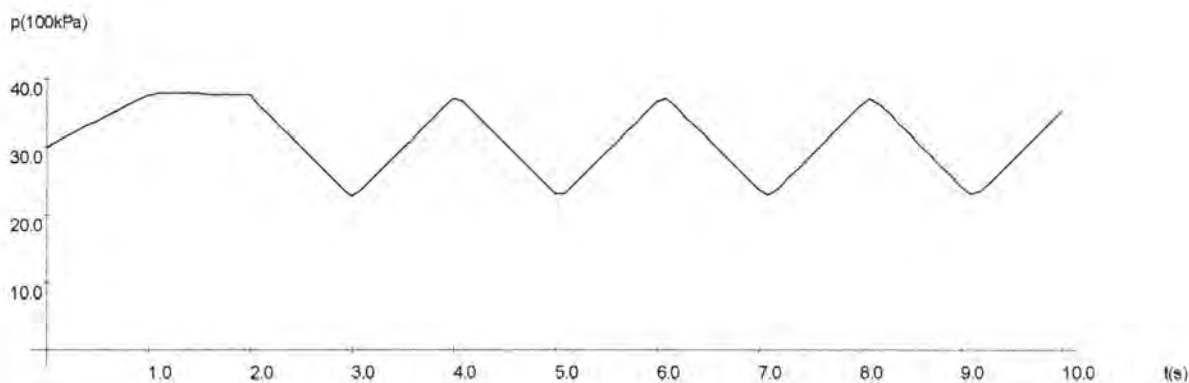
$$\varphi_{\min} = 752545,2 Pa. \quad (5.8)$$

Budući da se kod slučaja jednog parametra može iz poznavanja analitičkog rješenja lako izračunati da je vrijednost za koju je tlačni udar minimalan  $Q_1 = 0,6 m^3 s^{-1}$  vidi se da je primijenjenom metodom gotovo točno nađeno optimalno rješenje.

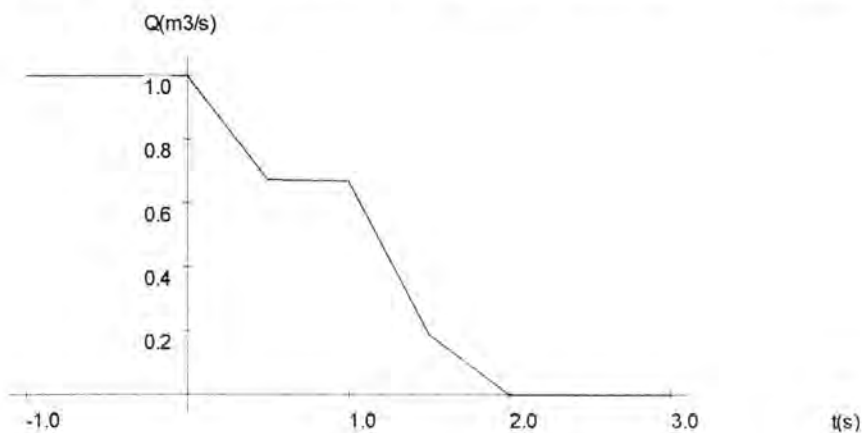
Odgovarajuće krivulje protoka te optimizirane tlačne oscilacije na rubu cijevi prikazane su na sl. 58.-63.



Sl. 58. Optimizacijski problem 5.1 - najbolji protok s 1 točkom

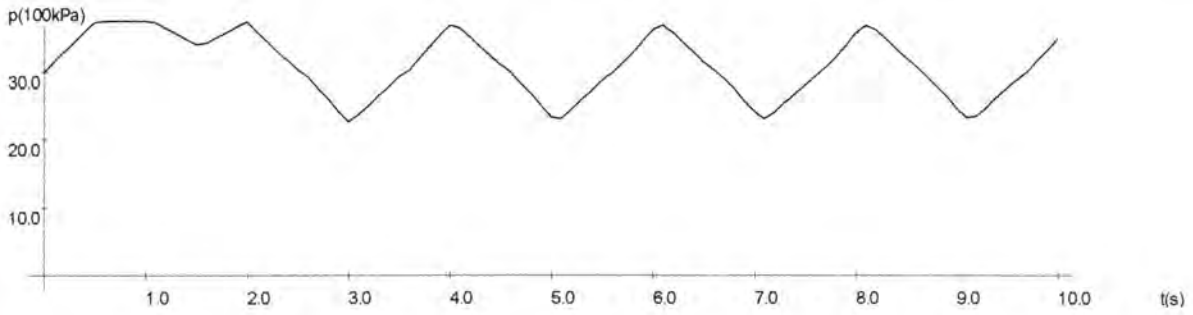


Sl. 59. Optimizacijski problem 5.1 - najmanje oscilacije tlaka s 1 točkom

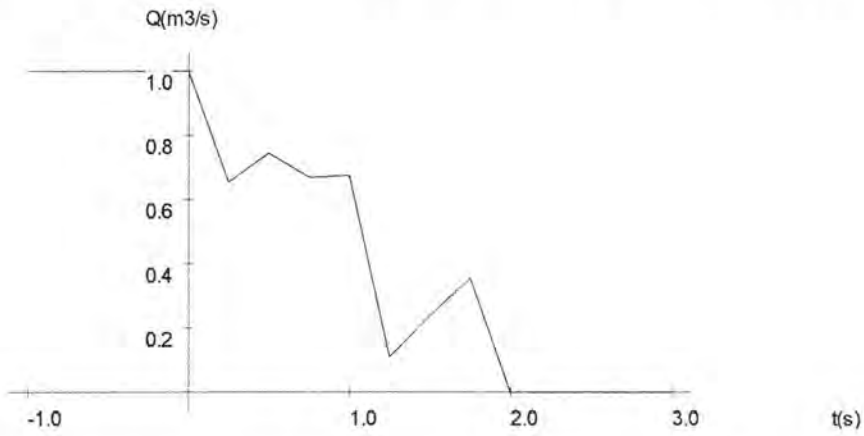


Sl. 60. Optimizacijski problem 5.1 - najbolji protok s 3 točke

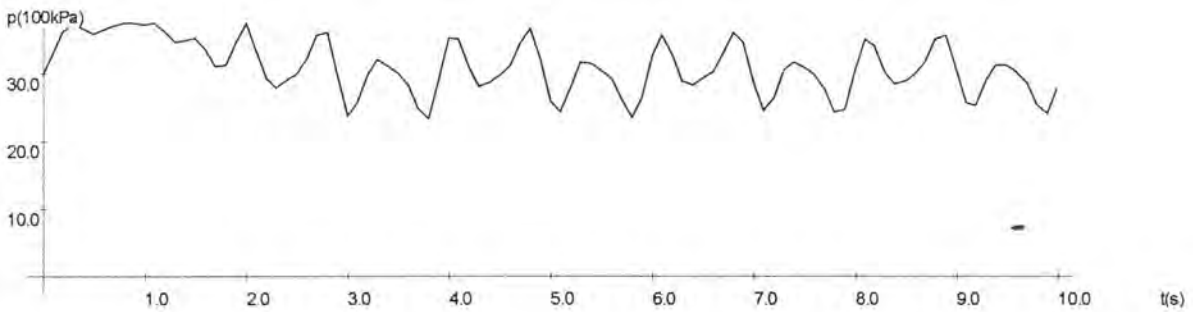




Sl. 61. Optimizacijski problem 5.1 - najmanje oscilacije tlaka s 3 točke



Sl. 62. Optimizacijski problem 5.1 - najbolji protok sa 7 točaka



Sl. 63. Optimizacijski problem 5.1 - najmanje oscilacije tlaka sa 7 točaka

## 5.2 UPRAVLJANJE ZATVARANJEM VENTILA

Za cjevovod iz točke 3.2 postavlja se zadatak optimizacije sličan prethodnomu no koji je korisno promotriti zbog sljedećih razlika.

U ovom cjevovodu poremećaj je tlaka najjači kod ventila jer tu nastaje i pri širenju kroz cjevovod slabi uslijed trenja. Poremećaj se stvara prvih 6s a zatim su potrebne iduće 2s da se odrazi kod spremnika i vrati natrag. Dakle funkciju cilja računa se prema izrazu (5.1) uz  $p = p(t)$  tlak kod ventila,  $t_1 = 0s$  i  $t_2 = 8s$ . Promjenljiva funkcije cilja je krivulja zatvaranja ventila, odnosno nekoliko odabranih točaka te krivulje. Zato se bira pet vremenskih trenutaka  $t^{(1)} = 1s, \dots, t^{(5)} = 5s$  i za genotip jedinke uzima sa po 10 gena parametru kodirane površine poprečnih presjeka otvora ventila izražene u postocima:

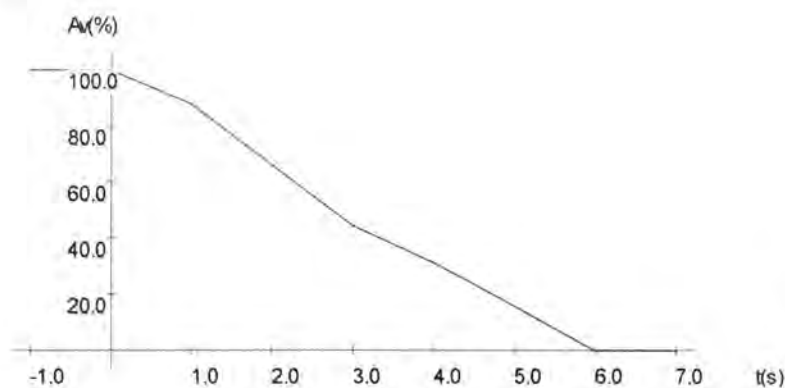
$$0\% \leq A_{v,i} = A_v(t^{(i)}) \leq 100\%, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (5.9)$$

Genetski algoritam uz stohastički univerzalni odabir, dvotočkovno križanje, višebitnu mutaciju, kružnu inverziju i jednu populaciju te proračun za svaku pojedinu jedinku primjenom ENOLLF sheme reda  $r = 2$ , CFL koeficijentom  $c_{cfl} = 0,5$  i prostornim korakom od  $\Delta x = 10m$  daje najbolju krivulju zatvaranja ventila (sl. 64.) i pripadne najmanje oscilacije tlaka (sl. 65.). Točnije, za vrijednosti parametara:

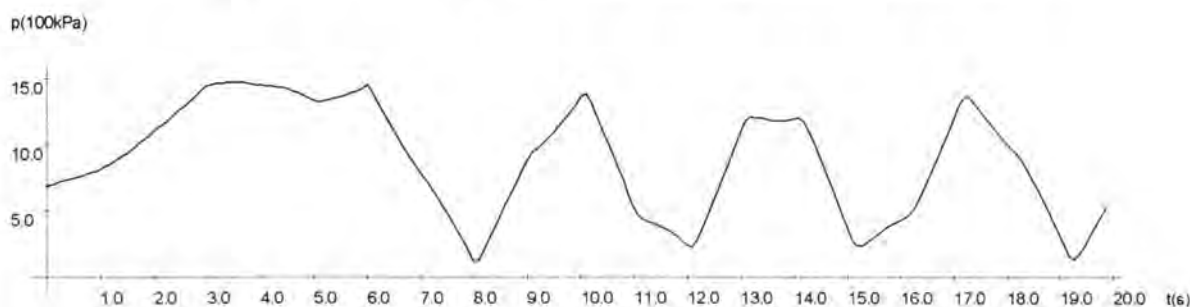
$$A_{v,1} = 87,68\%, \quad A_{v,2} = 65,98\%, \quad A_{v,3} = 44,28\%, \\ A_{v,4} = 31,09\%, \quad A_{v,5} = 15,74\% \quad (5.10)$$

dobiva se vrijednost funkcije cilja:

$$\varphi_{\min} = 784117,96Pa. \quad (5.11)$$



Sl. 64. Optimizacijski problem 5.2 - najbolje zatvaranje ventila



Sl. 65. Optimizacijski problem 5.2 - najmanje oscilacije tlaka

### 5.3 UPRAVLJANJE RADOM CRPKE

Kod cjevovoda iz točke 3.3 prirodno se nameće sljedeći problem: ako crpka ne prestane raditi trenutno već ako se mora isključiti u nekom zadanom vremenu, kako treba smanjivati brzinu rada crpke da bi nastao što slabiji tlačni udar.

Kao i kod prethodnih zadataka dovoljno je odabrati jednu točku u cjevovodu i kod nje promatrati tlačni udar. Naime, ako se postigne najmanja odstupanja od početnog stacionarnog stanja npr. na spoju između druge i treće cijevi tada će i svugdje drugdje u tom cjevovodu tlačne oscilacije biti manje nego kod bilo koje druge strategije zaustavljanja crpke. Ako zatvaranje mora trajati najviše 4s, poremećaju koji je time nastao kod crpke potrebne su još 2s da se odrazi na nizvodnom spremniku i vrati natrag te treba nadzirati prvih 6s pojave. Dakle, funkciju cilja se računa prema izrazu (5.1) uz  $p = p(t)$  tlak na spoju između druge i treće cijevi,  $t_1 = 0s$  i  $t_2 = 6s$ . Tri točke na krivulji brzine rada crpke, za tri vremenska trenutka  $t^{(1)} = 1s$ ,  $t^{(2)} = 2s$ ,  $t^{(3)} = 3s$ :

$$0 \leq \alpha_i = \alpha(t^{(i)}) \leq 1, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (5.12)$$

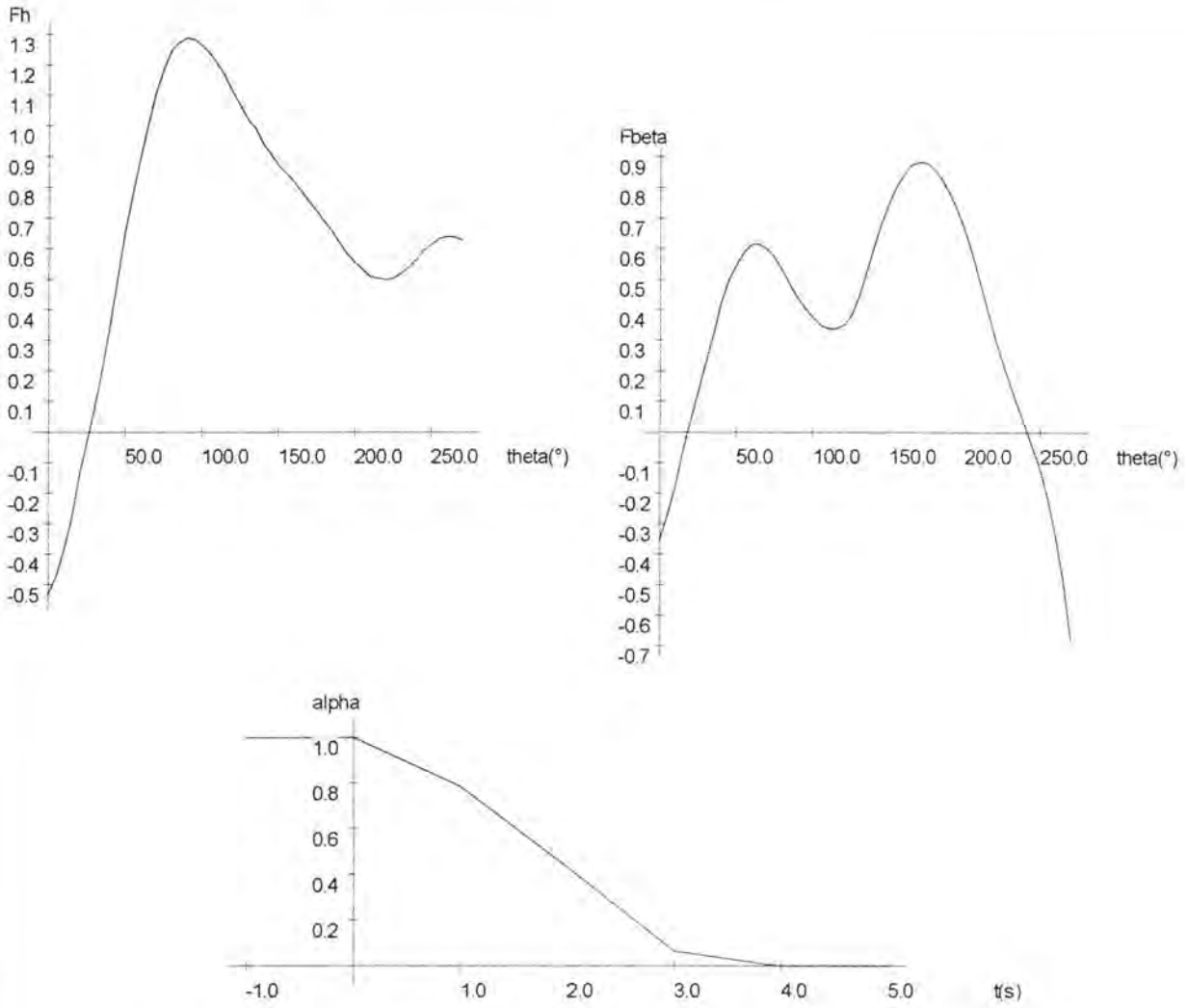
promjenljive su veličine o kojima ovisi funkcija cilja.

Za rješenje ovog zadatka optimalnog upravljanja rabi se genetski algoritam uz 10 gena po parametru, stohastički univerzalni odabir, dvotočkovno križanje, višebitnu mutaciju, kružnu inverziju i jednu populaciju te proračun za svaku pojedinu jedinku primjenom ENOLLF sheme reda  $r = 2$ , CFL koeficijentom  $c_{cfl} = 0,5$  i prostornim korakom od  $\Delta x = 10m$ . Nađena najbolja strategija zaustavljanja crpke je s vrijednostima parametara (sl. 66.):

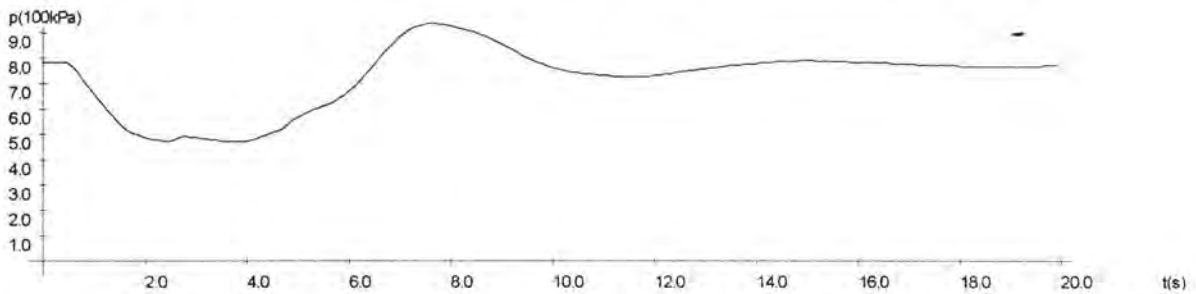
$$\alpha_1 = 0,782, \quad \alpha_2 = 0,433, \quad \alpha_3 = 0,063 \quad (5.13)$$

i odgovarajućom vrijednosti funkcije cilja (sl. 67.):

$$\varphi_{\min} = 310760,01Pa \quad (5.14)$$



Sl. 66. Optimizacijski problem 5.3 - najbolje zaustavljanje rada crpke



Sl. 67. Optimizacijski problem 5.3 - najmanje oscilacije tlaka

## 5.4 NALAŽENJE PARAMETARA MODELA HIDROELEKTRANE "VINODOL"

Točnost proračuna za neki realni cjevovod ne ovisi samo o tome koliko je dobro modelirana fizika pojave i kakva je kakvoća odabrane numeričke metode, već ovisi i o poznavanju podataka nužnih za primjenu modela. Točne podatke o položaju pojedinih dijelova cjevovoda, promjeru i duljini cijevi, poprečnim presjecima vodne ili zračne komore itd. jednostavno je prikupiti, no faktore trenja i brzine širenja zvuka u tekućini za pojedinu cijev ili neke druge parametre znatno se teže određuje.

Kod određivanja vrijednosti faktora trenja polazi se od poznavanja materijala od kojeg su napravljene stijenke cjevovoda te se može u odgovarajućim tablicama naći traženu vrijednost. No to je samo prva procjena. Ako su dostupna mjerenja stacionarnih strujanja u cjevovodu kojeg se proučava, često se pokazuje da su ti faktori nešto drugačiji, jer članom kojim se opisuje trenje najčešće se modelira i neke druge gubitke u istom cjevovodu. Konačno priznate teškoće javljaju se i zbog toga što se trenje modelira izrazom za stacionarna strujanja a primjenjuje na nestacionarna strujanja tekućine. Tako kod zaustavljanja protoka u nekom cjevovodu oscilacije tlaka u stvarnosti trnu brže nego što će se izračunati ako se rabi vrijednosti faktora trenja koje odgovaraju početnom stacionarnom strujanju. Slične teškoće pojavljuju se pri određivanju različitih faktora gubitaka (na izlazu iz spremnika, na spojevima cijevi), brzine zvuka u tekućini u cjevi i sl.

Rješenje izloženog problema moguće je ako su za promatrani cjevovod ranije obavljena mjerenja nekih tranzijentnih pojava. Tada se može istražiti koje vrijednosti parametara modela daju najbolje podudaranje između izračunatih i mjerenih podataka. Zatim se s tako nađenim parametrima može obaviti bilo koji proračun za isti cjevovod postižući znatno veću uspješnost modela.

Ovaj je pristup odabran za određivanje parametara modela Hidroelektrane "Vinodol". Dana 28.09.1978. mjerene su oscilacije tlaka nastale nakon izbacivanja hidroelektrane iz pogona. Kako su mjerenja vršena svakih 10s prikupljeni podaci nisu dovoljno detaljni da se iz njih prouči širenje tlačnog poremećaja brzinom zvuka, pa dakle niti da se odredi brzine zvuka u vodi u pojedinim cijevima, već su ove drugačije procijenjene. No iz oscilacija vodenih masa i smirivanja uslijed gubitaka na trenju moguće je usmjeriti se na određivanje faktora trenja u svim dijelovima cjevovoda primjenom genetskog algoritma. Pri tome je razlika u odnosu na podatke izložene u točki 3.4 u tome što je kod ove tranzijentne pojave tlak kod jezera "Bajer" bio kao na sl. 68., a protok kod turbina kao na sl. 69.

Kako treba postići što bolje podudaranje između izmjenjenih i izračunatih vrijednosti, uzima se izmjerene vrijednosti tlaka kod vodne komore "Razromir"  $p_m = p_m(t)$  u vremenu od  $t_1 = 0s$  do  $t_2 = 1200s$  i uspoređuje ih se sa pomoću našeg modela izračunatim vrijednostima tlaka na istom mjestu  $p_r = p_r(t)$ . Tako je funkcija cilja:

$$\varphi = \max_{t \in [t_1, t_2]} |p_r(t) - p_m(t)|. \quad (5.15)$$

Promjenljive veličine za ovaj zadatak optimizacije su 5 faktora trenja: u tunelu Bajer – cjevovodu Lič, u tunelu Potkobiljak, u uzlaznoj cijevi vodne komore Razromir, u kratkom tunelu te u tlačnom cjevovodu Razromir. Pri tome se uzima ograničenje:

$$0,01 \leq \lambda_i \leq 0,04, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (5.16)$$

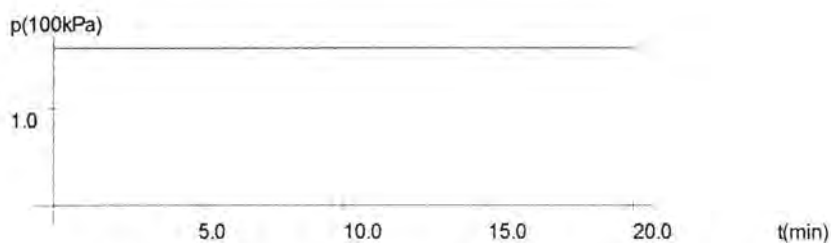
Genetskim algoritmom uz 10 gena po parametru, stohastički univerzalni odabir, dvotočkovno križanje, višebitnu mutaciju, kružnu inverziju i jednu populaciju te proračun za svaku pojedinu jedinku primjenom ENOLLF sheme reda  $r = 2$ , CFL koeficijentom  $c_{eff} = 0,5$

i prostornim korakom od  $\Delta x = 100m$  postiže se podudaranje između mjerenih (isprekidana crta) i računatih (puna crta) podataka prikazano na sl. 70. Tako nađeni faktori trenja su:

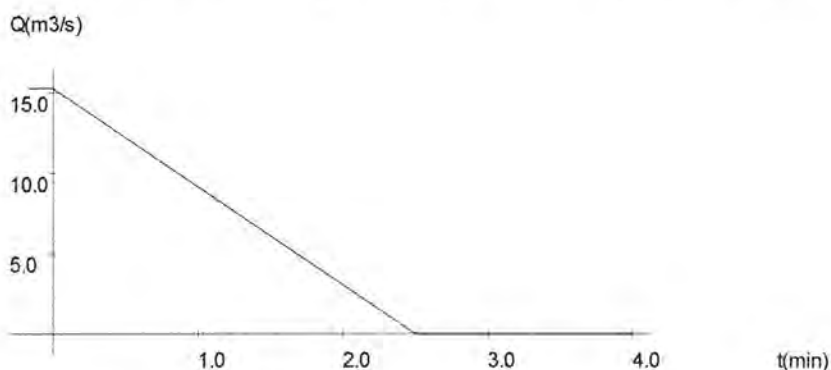
$$\lambda_1 = 0,025, \lambda_2 = 0,0195, \lambda_3 = 0,028, \lambda_4 = 0,033, \lambda_5 = 0,023 \quad (5.17)$$

i vrijednost funkcije cilja:

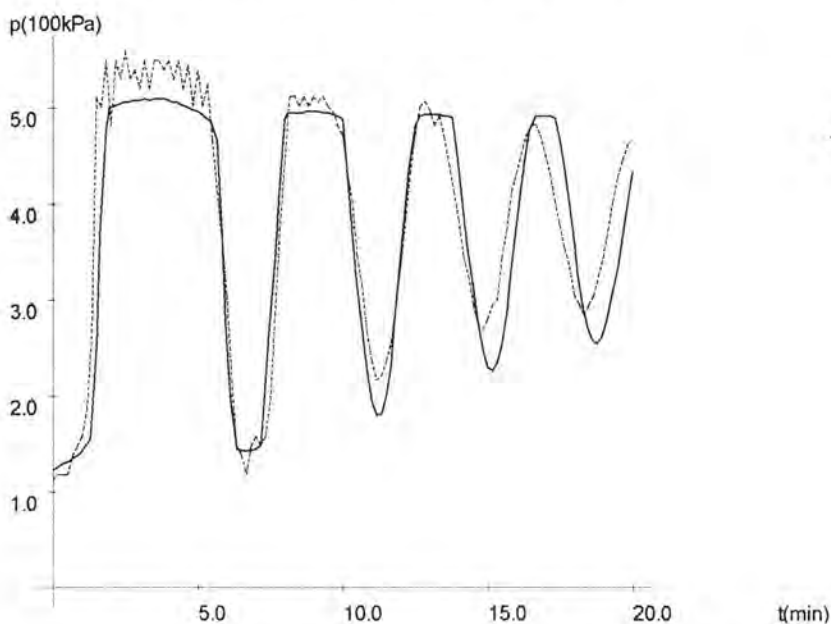
$$\varphi_{\min} = 257003Pa. \quad (5.18)$$



Sl. 68. Optimizacijski problem 5.4 - tlak kod jezera "Bajer"



Sl. 69. Optimizacijski problem 5.4 - protok kod turbina



Sl. 70. Optimizacijski problem 5.4 - tlak kod vodne komore



## 5.5 UPRAVLJANJE ZAUSTAVLJENJEM CRPKE U CJEVODU PLASE-OPATIJE

U točki 3.6 izložen je model cjevovoda Plase-Opatija i predviđanje posljedica naglog prestanka rada crpke. Sada se može proširiti primjenu postavljenog modela na optimalno upravljanje radom crpke.

Budući da je pojava kavitacije nepovoljna cilj optimalnog upravljanja treba biti smanjivanje te pojave na najmanju moguću mjeru. Točnije, neka je  $L_k(t)$  ukupna duljina onih djelova cjevovoda u kojima je izražena pojava kavitacije u nekom trenutku  $t$ . Ovisno o uzrocima i trajanju tranzijentnu pojavu pratimo u vremenu od  $t_1$  do  $t_2$  i želimo uočiti najveću raširenost kavitacije, odnosno vrijednost:

$$\varphi = \max_{t \in [t_1, t_2]} L_k(t). \quad (5.19)$$

Dakle,  $\varphi$  je funkcija cilja a zadatak je naći minimum te funkcije u ovisnosti o promjenama u radu crpke. Radi primjene genetskog algoritma, treba računati prilagođenost pomoću izraza (4.7) gdje je u ovome slučaju za konstantu  $C$  očitito dovoljno uzeti ukupnu duljinu cjevovoda. Nadalje, kako je crpka modelirana kao rubni uvjet s poznatim tlakom promjenljiva ovog optimizacijskog zadatka je krivulja tlaka kod crpke, ili kao i obično odabrane točke na toj krivulji.

Posebno, riješen je problem optimalnog zaustavljanja crpke u trajanju od najviše 1s. Budući da je tako nastalom poremećaju potrebno nešto malo manje od 12s da se proširi do spremnika u Opatiji i budući da su kasnija kavitacijska područja kraća od onog nastalog u prvom udaru, za uočavanje najšireg područja kavitacije potrebno je promatrati cjevovod od  $t_1 = 0s$  do  $t_2 = 13s$ . Zatim se bira vremenske trenutke  $t^{(1)} = 0,25s$ ,  $t^{(2)} = 0,5s$  i  $t^{(3)} = 0,75s$ , te su parametri optimizacijskog zadatka pripadne vrijednosti tlaka kod crpke:

$$150377,1Pa \leq p_t = p(t^{(i)}) \leq 951432Pa. \quad (5.20)$$

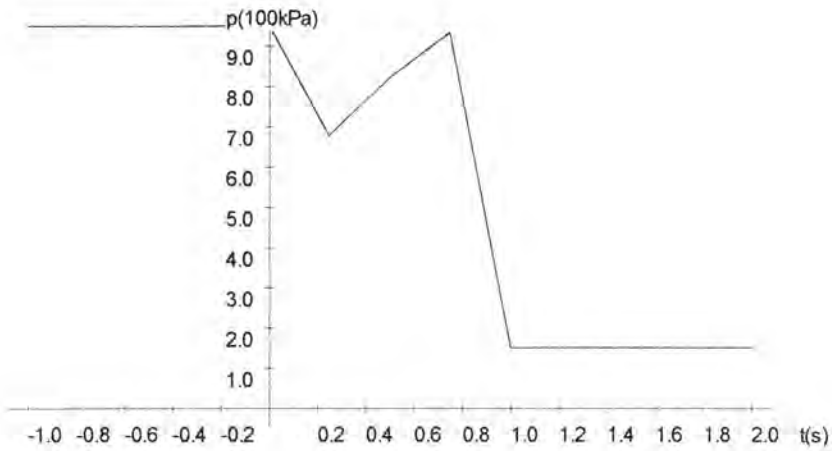
Rezultat dobiven genetskim algoritmom uz 10 gena po parametru, stohastički univerzalni odabir, dvotočkovno križanje, višebitnu mutaciju, kružnu inverziju i jednu populaciju te proračun za svaku pojedinu jedinku primjenom ENOLLF sheme reda  $r = 2$ , CFL koeficijentom  $c_{cfl} = 0,5$  i prostornim korakom od  $\Delta x = 50m$  pokazuje da se smanjenje zone kavitacije do duljine:

$$\varphi_{\min} = 1950m \quad (5.21)$$

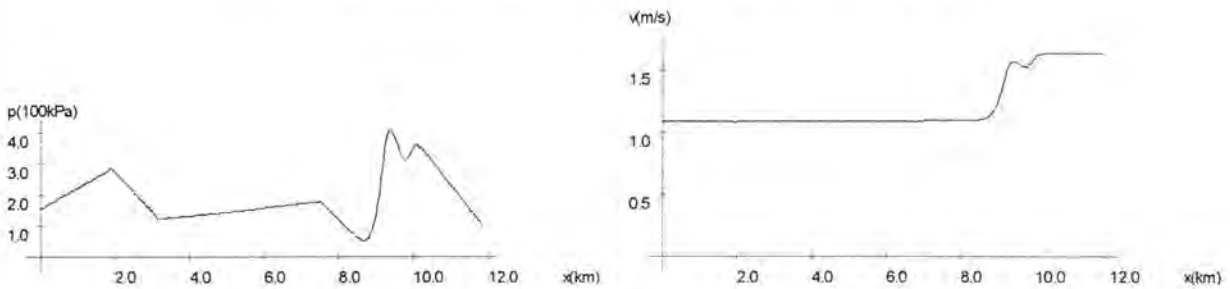
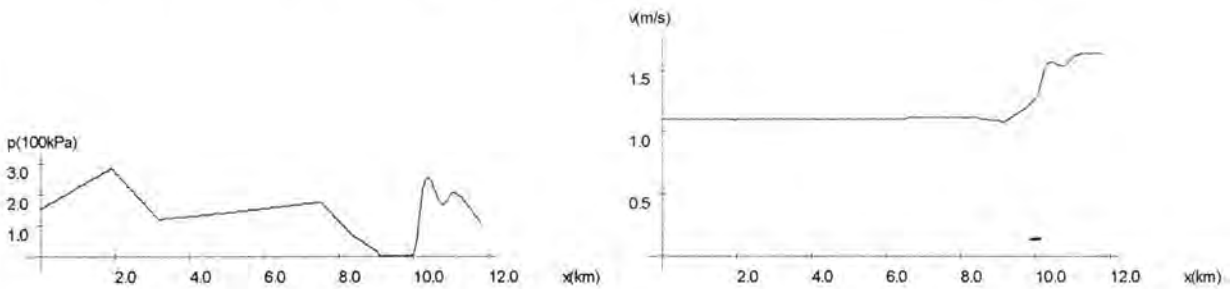
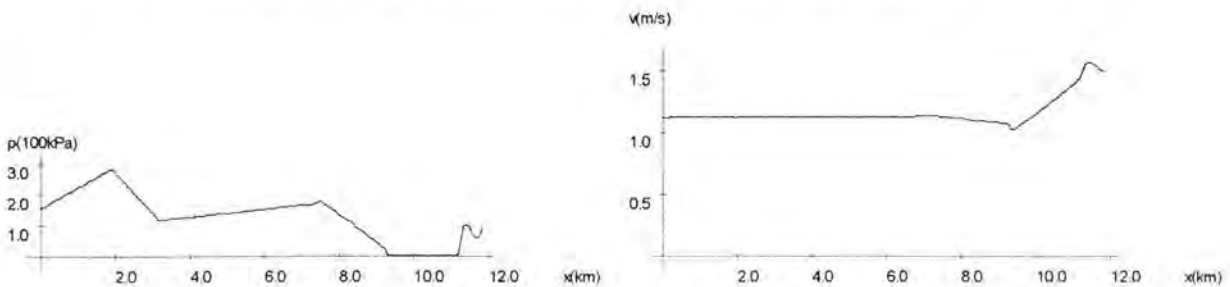
dobiva uz parametre:

$$p_1 = 679551Pa, p_2 = 820286Pa, p_3 = 935314Pa. \quad (5.22)$$

Tako dobiveni tlak kod crpke kao i strujanje u cjevovodu prikazano je na sl. 71. i 72.



Sl. 71. Optimizacijski problem 5.5 - najbolji tlak kod crpke

Sl. 72.i) Optimizacijski problem 5.5 - najkraće područje kavitacije,  $t = 10s$ Sl. 72.ii) Optimizacijski problem 5.5 - najkraće područje kavitacije,  $t = 11s$ Sl. 72.iii) Optimizacijski problem 5.4 - najkraće područje kavitacije,  $t = 12s$

## 6. RAČUNARSKI PROGRAM ZA PRORAČUN I OPTIMALNO UPRAVLJANJE NESTACIONARNIM STRUJANJEM U CJEVODU

Računarski je program, koji omogućava numeričke proračune nestacionarnih strujanja u cjevovodima i rješavanje odgovarajućih zadataka optimalnog upravljanja, razvijen pomoću Microsoft Visual C++ Developer Studio-a. Budući da je primijenjen objektni pristup, u ovom su poglavlju opisane razvijene klase u skladu s načelima objektnog programiranja.

### 6.1 MREŽA

Prva je razina problema koje rješava ovaj program potpuna proizvoljnost u rasporedu dijelova od kojih je cjevovod sastavljen. Radi toga je poopćenjem strukture proizvoljnog cjevovoda razvijena složena struktura podataka – mreža. Mreža se sastoji od pojedinih članova. Svaki član ima pokazivače na sebi susjedne članove te su tako članovi mreže povezani u cjelinu. Ne postoji nikakvo ograničenje na broj članova mreže niti unutarnji raspored u mreži. Zahvaljujući poopćenju ovaj dio koda može biti nositelj bilo koje druge strukture slične cjevovodu. Klase pomoću kojih se ostvaruje ova struktura podataka su CNetElement, CNetSingle, CNetJunction i CNet.

#### Klasa CNetElement

Ova je klasa apstraktni član mreže i nosi identifikator koji član jednoznačno određuje i pomoću kojega ga se razlikuje od bilo kojeg drugog člana mreže. Sadrži niz zaštićenih čisto virtualnih funkcija koje omogućavaju rad sa susjednim članovima:

**virtual void Visit(void);**

Omogućava posjećivanje člana mreže.

**virtual int UpNum(void)=0;**

**virtual int DownNum(void)=0;**

Vraća broj gornjih ( donjih ) susjednih članova mreže.

**virtual CNetElement \*Up(int At=0)=0;**

**virtual CNetElement \*Down(int At=0)=0;**

Vraća pokazivač na "At"-ti gornji ( donji ) susjedni član mreže.

**virtual void PutUp(CNetElement \*aNE,int At=0)=0;**

**virtual void PutDown(CNetElement \*aNE,int At=0)=0;**

Stavlja član na kojega pokazuje "aNE" kao "At"-ti gornji ( donji ) susjedni član mreže.

**virtual void AddUp(CNetElement \*aNE)=0;**

**virtual void AddDown(CNetElement \*aNE)=0;**

Dodaje član na kojega pokazuje "aNE" kao gornji ( donji ) susjedni član mreže.

**virtual int FindUp(CNetElement \*aNE)=0;**

**virtual int FindDown(CNetElement \*aNE)=0;**

Nalazi i vraća položaj člana na kojega pokazuje "aNE" među gornjim ( donjim ) susjednim članovima mreže.

**virtual void DelUp(int At=0)=0;**

**virtual void DelDown(int At=0)=0;**

Razbija vezu sa gornjim ( donjim ) susjednim "At"-tim članom mreže.

**virtual void SubstituteUp(CNetElement \*aNE,CNetElement \*forNE)=0;**

**virtual void SubstituteDown(CNetElement \*aNE,CNetElement \*forNE)=0;**

Na mjesto gornjeg ( donjeg ) susjednog člana mreže na kojeg pokazuje "aNE" stavlja član mreže na kojeg pokazuje "forNE".

Također ova klasa ima samo dvije javne funkcije:

**int Id(void);**

Vraća jedinstvenu oznaku – identifikator člana.

**virtual const char \*Name(void)=0;**

Vraća ime člana.

### **Klasa CNetSingle**

Ova je klasa podklasa klase CNetElement. Predstavlja član mreže koji ima točno jedan gornji i jedan donji susjedni član mreže. Nastala je poopćenjem dijelova cjevovoda kao što su cijev, spremnik, ventil, isl. Sve čiste virtualne funkcije apstraktne klase CNetElement u ovoj su klasi definirane.

### **Klasa CNetJunction**

Ova je klasa podklasa klase CNetElement. Za razliku od CNetSingle klase ovaj član mreže ima više gornjih i više donjih susjednih članova u mreži. Klasa je nastala poopćenjem točaka grananja cjevovoda odnosno spoja jedne ili više dovodnih sa jednom ili više odvodnih cijevi. Kao i klasa CNetSingle definira sve čiste virtualne funkcije apstraktne klase CNetElement.

### **Klasa CNet**

Ova je klasa podklasa klase CNetJunction. Predstavlja mrežu kao cjelinu i podklasa je CNetJunction-a jer sadrži pokazivače na sve početne članove mreže. Omogućava operacije nad čitavom mrežom, za razliku od operacija kod klase CNetElement koje su lokalne prirode. Ova klasa ima više zaštićenih funkcija:

**void Create(void);**

Stvara mrežu prema podacima iz ulaznog toka (tip istream) o strukturi mreže – redosljedu članova s njihovim identifikatorima, imenima i međusobnim vezama.

**void Save(void);**

Sprema podatke kojima se zadaje struktura mreže u izlazni tok (tip ostream).

**virtual void Connect(CNetElementList \*aL=NULL);**

Spaja članove mreže tako da članovi navedeni u listi "aL" postaju gornji susjedni članovi novog spoja mreže.

**virtual void Add(CString &aTypeName);**

Dodaje u mrežu član čiji je tip određen imenom "aTypeName". Mjesto dodavanja je ranije određeno kao aktivni član aktivne grane mreže.

**void Remove(void);**

Uklanja iz mreže član koji je ranije označen kao aktivan.

**CNetElement \*Visit(const char \*toDo="TOVISIT",int anId=0);**

Omogućuje posjećivanje svih članova mreže radi obavljanja "toDo" operacije. redosljed posjećivanja uvjetovan je strukturom mreže i vrstom operacije. Kod nekih operacija



obavljanje operacije nad članom mreže prethodi posjećivanju ostalih članova mreže (engl. preorder) a kod drugih je obratno (engl. postorder). Predstavlja najznačajniju funkciju ove strukture podataka. Pomoću nje su ostvareni različiti postupci: uništenje mreže ("TOEMPTY"), nalaženje člana mreže s identifikatorom "anId" ("TOFIND"), spremanje podataka članova mreže ("TOSAVE"), stvaranje popisa članova mreže ("TOREGISTER") ili obavljanje različitih drugih operacija ("TOVISIT"). Kod ove funkcije je:

```
CNetElement *CNet::Visit(const char *visitToDo,int ald)
{ CNetElementList aL(((CNetElement *)this)); CNetElement *aNE,*aNEd;
  CIntList visitNum(0); int toVisit=1; register int i,j,k;
  CString toDo,name; toDo=visitToDo;
  while ( toVisit>0 )
  { for ( i=0; i<aL.num(); i++ )
    { if ( (aL[i])>UpNum()==visitNum[i] )
      { if ( toDo=="TOVISIT" && (aL[i])>Id()!=ident ) (aL[i])>Visit();
        else if ( toDo=="TOSAVE" && (aL[i])>Id()!=ident ) (aL[i])>Save();
        else if ( toDo=="TOREGISTER" && (aL[i])>Id()!=ident ) reglist->add((aL[i]));
        for ( j=0; j<(aL[i])>DownNum(); j++ )
          { for ( aNE=(aL[i])>Down(j);aNE &&
                (name=aNE->Name(), name!="JUNCTION");aNE=aNEd)
              { aNEd=aNE->Down();
                if ( toDo=="TOEMPTY" ) delete aNE;
                else if ( toDo=="TOFIND" ) { if ( aNE->Id()==ald ) return aNE; }
                else if ( toDo=="TOVISIT" ) aNE->Visit();
                else if ( toDo=="TOSAVE" ) aNE->Save();
                else if ( toDo=="TOREGISTER" ) reglist->add(aNE);
              }
            if ( aNE )
              { if ( toDo=="TOFIND" ) { if ( aNE->Id()==ald ) return aNE; }
                if ( k=aL.find(aNE), k==aL.num() )
                  { aL.add(aNE); visitNum.add(1); }
                else ++visitNum[k];
              }
            }
          if ( toDo=="TOEMPTY" && (aL[i])>Id()!=ident ) delete aL[i];
          aL.delAt(i); visitNum.delAt(i); i--;
        }
      }
    for ( toVisit=0,i=0; i<aL.num(); i++ )
      if ( (aL[i])>UpNum()==visitNum[i] ) toVisit++;
  }
  return NULL; }
```

Klasa CNet također ima i više javnih funkcija od kojih su važnije:

**void SetActiv(CNetElement \*aNE,CNetElement \*aB=NULL);**

Postavlja aktivni element i aktivnu granu mreže.

**CNetElement \*Find(int anId);**

Nalazi i vraća pokazivač na član mreže s identifikatorom "anId"

**void Register(void);**

Stvara popis svih članova mreže.

## 6.2 ZAKONI OČUVANJA

Na drugoj se razini strukturu podataka – mrežu obogaćuje sposobnošću numeričkog rješavanja zakona očuvanja. Pojedinačne se elemente razdvaja na one kod kojih se implementacijom esencijalno neoscilirajućih shema rješava hiperbolički sustav jednadžbi i na one kod kojih se numeričkim metodama proračunava rubne uvjete, dok cjelina takvog sustava usklađuje operacije. Ova razina koda upotrebljiva je za bilo koji sustav zakona očuvanja i rubnih uvjeta sličnih onima kojima se modelira nestacionarna strujanja u cjevovodima jer kod ne donosi nikakvo ograničenje na oblik niti broj parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje čine hiperbolički zakon očuvanja. Također korisnik po volji bira red ENO sheme, inačicu ENO sheme ( ENORoe ili ENOLLF ) i prostorni korak.

Bitne klase ovog dijela koda su CCLNetInterface, CCLNetSinglePDE, CCLNetSingleBC, CCLNetJunctionBC i CConsLawNet.

### Klasa CCLNetInterface

Ova klasa omogućava usmjeravanje funkcije posjećivanja članova mreže na točno određene funkcije koji su potrebne za ovu razinu koda – numeričko rješavanje zakona očuvanja. Tako se posjećivanje može dogoditi radi izračunavanja početnog stanja, izračunavanja vremenskog koraka, izračunavanja približnih vrijednosti prostornog operatora, izračunavanja približne vrijednosti vremenskog operatora, izračunavanja sile, izračunavanja rubnih uvjeta, različitih čitanja ili pisanja podataka iz ulaznih ili u izlazne tokove, različitih grafičkih prikaza. Sve funkcije ove klase su čiste virtualne i klasa odgovara tipu interface programskog jezika Java. Svi su podaci i funkcije ove klase zaštićeni te će biti pojašnjeni kod odgovarajućih podklasa.

### Klasa CCLNetSinglePDE

Ova je klasa podklasa klasa CNetSingle i CCLNetInterface. Nositelj je numeričkog rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koji čine hiperboličke zakone očuvanja primjenom ENO shema. Svi podaci i funkcije ove klase su zaštićeni. Najvažnije funkcije su:

#### **virtual void TimeStep(void);**

Redefinicija funkcije naslijeđene od nadklase CCLNetInterface. Iz zadanog prostornog koraka sheme primjenom CFL-uvjeta (2.43) izračunava idući vremenski korak sheme.

Kod ove funkcije je:

```
void CCLNetSinglePDE::TimeStep(void)
{ double lambda=0.;
  k=r;
  for ( j=0; j<=J; j++ )
  { for ( p=0; p<m; p++ )
    { lambda=max(lambda,fabs(Eigenvalue(j))*dxi); } }
  if ( lambda==0. ) lambda=1.*dxi;
  if ( dT==0. ) dT=cfl/lambda;
  else      dT=min(dT,cfl/lambda); }
```

#### **virtual void SpaceOperator(void);**

Redefinicija funkcije naslijeđene od nadklase CCLNetInterface. Ovdje se mijenja tako da omogućuje računanje približnih vrijednosti prostornog operatora ENO sheme. Kod je:

```
void CCLNetSinglePDE::SpaceOperator(void)
```



```
{ for ( jdd=0; jdd<J; jdd++ )
  { DivDiffENO();
    FluxENO();
    FluxCompose();
    ComputeLU(); } }
```

### void DivDiffENO(void);

Računa tablicu konačnih razlika vektora stanja i vektora fluksa oko aktualne ćelije za koju treba izračunati vrijednost protornog operatora. Veličina tablice određena je širinom uzorka ENO sheme odnosno redom ENO sheme.

### void FluxENO(void);

Računa se približna vrijednost vektora fluksa kroz desni rub aktualne ćelije primjenom ENO sheme. Implementirane su obje inačice ENO sheme – ENORoe prema relaciji (2.67) i ENOLLF prema relaciji (2.68) kao što se vidi iz koda:

```
void CCLNetSinglePDE::FluxENO(void)
{ double Eval;
  if ( jdd==J-1 )
  { MidEigens(jdd+1,jdd+1);
    for ( p=0; p<m; p++ ) fp[p]=DQ(jdd+1); }
  else if ( jdd==J )
  { MidEigens(jdd,jdd);
    for ( p=0; p<m; p++ ) fp[p]=DQ(jdd); }
  else
  { MidEigens(jdd,jdd+1);
    for ( p=0; p<m; p++ )
      { if ( fdm=="ENORoe" )
        fp[p]=(eval[1][p]>=0.)? DQ(jdd):DQ(jdd+1);
        else if ( fdm=="ENOLLF" )
          { Eval=max(fabs(Eigenvalue(jdd)),fabs(Eigenvalue(jdd+1)));
            fp[p]=DQ(jdd,Eval)+DQ(jdd+1,-Eval); } } }
}
```

### double DQ(int kmin,double alpha);

### double DQ(int kmin);

Vraćaju vrijednost derivacije interpolacionog polinoma primitivne funkcije komponente u p-polju karakteristika vektora fluksa (2.60) ili linearnih kombinacija vektora fluksa i vektora stanja (2.61) u točki koja je desni rub aktualne ćelije. Kod je ovih funkcija srce ENO sheme i za ENOLLF inačicu glasi:

```
double CCLNetSinglePDE::DQ(int kmin,double alpha)
{ register int kk,km,n,jddr=jdd-r,jddk,ddi;
  double a,b,c,val;
  ddi=kmin-jddr;
  val=.5*((lev[1][p]*ddF[ddi][0])+alpha*(lev[1][p]*ddU[ddi][0]));
  for ( n=1; n<=r; n++ )
  { ddi=kmin-jddr;
    a=.5*((lev[1][p]*ddF[ddi][n])+alpha*(lev[1][p]*ddU[ddi][n]))/(n+1);
    b=.5*((lev[1][p]*ddF[ddi-1][n])+alpha*(lev[1][p]*ddU[ddi-1][n]))/(n+1);
    if ( fabs(a)>=fabs(b) ) { c=b; km=kmin-1; }
    else { c=a; km=kmin; }
    for ( kk=kmin; kk<=kmin+n; kk++ )
      { if ( jddk=jdd+1-kk, jddk!=0 ) c*=jddk*dx;
        }
    val+=c; kmin=km;
  }
  return val; }
```

Slično izgleda kod druge funkcije koja odgovara ENORoe inačici ENO sheme.

#### **void FluxCompose(void);**

Iz komponenti fluksa u p-polju karakteristika pomoću baze desnih svojstvenih vektora i prema relaciji (2.69) izračunava vektor fluksa kroz desni rub aktualne ćelije.

```
void CCLNetSinglePDE::FluxCompose(void)
{ for ( (*Fp[1])=0.,p=0; p<m; p++ )
  Fp[1]->AddLinCombination(fp[p],rev[1][p]); }
```

#### **void ComputeLU(void);**

Iz vektora fluksa na lijevom i desnom rubu aktualne ćelije računa primjenom konzervativne sheme (2.56) približnu vrijednost prostornog operatora. Kod je:

```
void CCLNetSinglePDE::ComputeLU(void)
{ j=jd; LU[k][j].AddVector(dxi,(*(Fp[1])),(*(Fp[0]))); }
```

#### **virtual void TimeOperator(void);**

Redefinicija je funkcije naslijeđene od nadklase CCLNetInterface. Iz izračunatih približnih vrijednosti prostornog operatora primjenom r-koračne Runge-Kutta metode prema relacijama (2.48)-(2.50) računa približnu vrijednost vremenskog operatora.

```
void CCLNetSinglePDE::TimeOperator(void)
{ register int kk;
  for ( j=0; j<=J; j++ )
  { for ( kk=0; kk<=k; kk++ )
    U[j].AddLinCombination(b[k][kk]*dT,LU[kk][j]); }
```

### **Klasa CCLNetSingleBC**

Podklasa je klase CNetSingle i CCLNetInterface te omogućava numeričko rješavanje rubnih uvjeta za zakone očuvanja. Objekt ove klase ima dva susjedna člana ( gornji i donji ) koji su oba tipa CCLNetSinglePDE, odnosno nositelj je rubnog uvjeta za dva sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Sve funkcije i podaci ove klase su zaštićeni. Najvažnije su funkcije:

#### **virtual void SpaceOperator(void);**

Redefinicija je funkcije naslijeđene od nadklase CCLNetInterface. Izračunava približnu vrijednost prostornog operatora na rubu domene za gornji i donji sustav zakona očuvanja.

```
void CCLNetSingleBC::SpaceOperator(void)
{ if ( uCL )
  { uCL->SetLastFace();
    uCL->DivDiffENO();
    uCL->FluxENO();
  }
  if ( dCL )
  { dCL->SetFirstFace();
    dCL->DivDiffENO();
    dCL->FluxENO(); }
  BoundCond();
  if ( uCL )
  { uCL->FluxCompose();
    uCL->ComputeLU(); }
  if ( dCL )
```

```
{ dCL->FluxCompose(); } }
```

### **virtual void TimeOperator(void);**

Redefinicija je funkcije naslijeđene od nadklase CCLNetInterface. Izračunava primjenom r-koračne Runge-Kutta metode rješenje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi po vremenu koje su dio nekih rubnih uvjeta (točka 2.3). Kod je:

```
void CCLNetSingleBC::TimeOperator(void)
{ register int kk,ii;
  for ( kk=0; kk<=k; kk++ )
    { for ( ii=0; ii<nEvol; ii++ ) evol[ii]+=b[k][kk]*dT*dEvol[ii][kk]; } }
```

### **Klasa CCLNetJunctionBC**

Podklasa je klasa CNetJunction i CCLNetInterface. Objekt ovog tipa ima više gornjih i više donjih susjednih članova mreže zakona očuvanja koji su svi tipa CCLNetSinglePDE. Svi podaci i funkcije ove klase su zaštićeni, a najvažnija je funkcija:

### **virtual void SpaceOperator(void);**

Redefinicija je funkcije naslijeđene od nadklase CCLNetInterface. Izračunava prostorni operator za sve zakone očuvanja koji se spajaju kod ovog objekta. Kod je sličan kodu iste funkcije klase CCLNetSingleBC.

### **Klasa CConsLawNet**

Ova je klasa podklasa klasa CNet i CCLNetInterface. Predstavlja mrežu zakona očuvanja i rubnih uvjeta, odnosno cjelinu sastavljenu od više međusobno povezanih sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i rubnih uvjeta. Obavlja sve globalne operacije nad tom cjelinom. Svi zakoni očuvanja u mreži pripadaju istom tipu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, ali nije ograničeno kojem, rješavaju se istom inačicom ENO sheme, istog reda točnosti i s istim prostornim korakom. Čitava se mreža uvijek nalazi u zajedničkom vremenskom trenutku pri čemu negativno vrijeme znači da promatrani proces nije započeo, vrijeme jednako 0s znači početno stanje procesa, a stanja s pozitivnim vremenima izračunavaju se primjenom ENO shema. Sve funkcije i podaci ove klase su zaštićeni, dakle vidljivi samo iz pripadnih podklasa. Najvažnija funkcija ove klase je:

### **void AtTime(double t);**

Izračunava vektor stanja u trenutku "t" za sve zakone očuvanja mreže, odnosno dovodi vrijeme mreže u argumentom zadanu vrijednost. Kod funkcije je:

```
void CConsLawNet::AtTime(double t)
{ if ( t<0. ) { T=t; }
  else
    { if ( T>t ) { T=-1.; }
      if ( T<0. ) { T=0.; f=&CCLNetInterface::InitCond; Visit(); }
      while ( dT=0., f=&CCLNetInterface::TimeStep, Visit(), (T+.5*dT)<=t )
        { for ( k=0; k<r; k++ )
          { f=&CCLNetInterface::Force; Visit();
            f=&CCLNetInterface::SpaceOperator; Visit();
              f=&CCLNetInterface::TimeOperator; Visit();
            }
          T+=dT;
        } }
}
```

### 6.3 OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Optimizacijsku se zadaću rješava pomoću GALOPPS (the Genetic Algorithm Optimized for Portability and Parallelism System) koda kojeg su razvili prof. E.D.Goodman i GARAGE (Genetic Algorithms Research and Applications Group), Michigan State University. Vežu između tog koda napisanog u standardnom C-u i ostalog objektnog koda stvara se pomoću nekoliko klasa koje čine treću razinu – razinu zadatka optimalnog upravljanja. Pored toga te klase omogućavaju veliku proizvoljnost u odabiru funkcije cilja i parametara optimizacije te odabir različitih opcija genetskog algoritma. Najvažnije klase ovog dijela koda su COptimTaskObject i COptimizationTask.

#### Klasa COptimTaskObject

Ova klasa je objekt optimizacijskog zadatka. Točnije jedan optimizacijski zadatak može imati više objekata ovog tipa i svaki pojedini takav objekt nositelj je varijabli funkcije cilja. Sve funkcije i podaci ove klase su zaštićeni, a najvažnije su:

```
void SetOptimizationVariables(double *x1,  
    double *x2=NULL,double *x3=NULL,double *x4=NULL,double *x5=NULL,  
    double *x6=NULL,double *x7=NULL,double *x8=NULL,double *x9=NULL);
```

Ovom se funkcijom određuje da su realne promjenljive funkcije cilja koje nosi ovaj objekt one na koje pokazuju pokazivači "x1", "x2", ..., "x9".

```
void SetOptimizationVariables(CPolyLine &aPL);
```

Ovom se funkcijom određuje da su realne promjenljive funkcije cilja koje nosi ovaj objekt prema nekom zadanom uzorku odabrane točke krivulje – polilinije "aPL". Klasa CPolyLine je pomoćna matematička klasa razvijena da bi predstavljala po dijelovima linearne funkcije.

#### Klasa COptimizationTask

Ovo je klasa samog zadatka optimalnog upravljanja i čini sučelje između ostalih klasa i koda GALOPPS. Pored zaštićenih podataka i funkcija, klasa ima sljedeće važne javne funkcije:

```
virtual void OptimizeByGalopps(void);
```

Rješava optimizacijski problem primjenom genetskog algoritma, tako što bira inačice operatora genetskog algoritma i poziva GALOPPS kod. Kod ove funkcije je:

```
void COptimizationTask::OptimizeByGalopps(void)  
{ set_selection(selectionChoice);  
  set_crossover(crossoverChoice);  
  set_mutation(mutationChoice);  
  set_inversion(inversionChoice);  
  set_mainpop(mainpopChoice);  
  galopps(this,infile); }
```

```
virtual void SetOptimizationVariables(unsigned *chrom);
```

U tijeku je rada genetskog algoritma potrebno za pojedinu jedinku populacije gene kodirane u kromosomu "chrom" dekodirati i tako dobivene vrijednosti pridružiti varijablama funkcije cilja. Tu zadaću obavlja ova funkcija.

```
void COptimizationTask::SetOptimizationVariables(unsigned *chrom)
```

```
{ for ( varInd=0; varInd<varNum; varInd++ )  
  { (*(var[varInd]))=indextoFloat(  
    ithruj2int(varInd*varCodeSize+1,(varInd+1)*varCodeSize,chrom),  
    maxlong,varmin[varInd],varmax[varInd]); } }
```

**virtual double Fitness(void);**

Izračunava sirovu prilagođenost aktualne jedinke populacije za potrebe genetskog algoritma. Svaka podklasa ove klase mora redefinirati ovu funkciju.

**void SetSelection(const char \*aSelection);**

Pomoću ove funkcije bira se inačica operatora odabira u genetskom algoritmu. Moguće vrijednosti argumenta "aSelection" su: "ROULETTE", "RANKBASED", "SHREMAINDER", "SHUNIVERSAL" i "TOURNAMENT".

**void SetCrossover(const char \*aCrossover);**

Pomoću ove funkcije bira se inačica operatora križanja u genetskom algoritmu. Moguće vrijednosti argumenta "aCrossover" su: "CYCLE", "PARTMATCHED", "ORDER", "ONEPOINT", "TWOPOINT", "UNIFORM" i "UNIFORMORDER".

**void SetMutation(const char \*aMutation);**

Pomoću ove funkcije bira se inačica operatora mutacije u genetskom algoritmu. Moguće vrijednosti argumenta "aMutation" su: "SINGLEBIT", "MULTIBIT", "SCRAMBLE" i "SWAP".

**void SetInversion(const char \*aInversion);**

Pomoću ove funkcije bira se inačica operatora inverzije u genetskom algoritmu. Moguće vrijednosti argumenta "aCrossover" su: "CLASSICAL" i "CIRCULAR".

**void SetMainpop(const char \*aMainpop);**

Pomoću ove funkcije bira se broj populacija. Moguće vrijednosti argumenta "aMainpop" su: "ONEPOP" i "MANYPOP".



## 6.4 CJEVOVOD

Na posljednjoj se – četvrtoj razini grade klase za cjevovod i njegove dijelove: cijevi, ventile, spremnike, itd. kao podklase klase iz viših razina sa dodatnim geometrijskim i fizikalnim podacima i operacijama. Najvažnije klase ovog dijela koda su CPipeFlowPDE, CPipeFlowSingleBC, CPipeFlowJunctionBC i CPipeFlowNet.

### Klasa CPipeFlowPDE

Podklasa je klasa CCLNetSinglePDE i COptimTaskObject. Odgovara cijevi u cjevovodu pa sadrži sve bitne geometrijske i fizikalne podatke o cijevi. Zahvaljujući nasljeđu od nadklase CCLNetSinglePDE, ova je klasa nositelj proračuna nestacionarnog strujanja mješavine tekućine i plina u cijevi. Tek kod ove klase apstraktni zakon očuvanja poprima oblik (1.1)-(1.2). Također zahvaljujući nadklasi COptimTaskObject pojedini podaci ove klase mogu ovisno o optimizacijskoj zadaći koja se rješava postati promjenljive veličine funkcije cilja optimizacijskog problema. Najvažnije funkcije ove klase su redefinicije funkcija klase CCLNetSinglePDE:

#### **virtual void Flux(CSVector &FV,int ii);**

Izračunava vektor fluksa za "ii"-tu ćeliju i sprema ga u vektor "FV" prema relaciji (2.3). CSVector je pomoćna matematička klasa razvijena radi lakšeg računanja s vektorima u konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru. Sadrži operatore zbrajanja vektora, računanja linearne kombinacije vektora, skalaranog množenja vektora itd.

#### **virtual void MidEigens(int jm,int jp);**

Izračunava svojstvene vrijednosti te lijeve i desne svojstvene vektore za sva polja karakteristika iz usrednjene vrijednosti vektora stanja za ćelije "jm" i "jp" prema relacijama (2.8), (2.9) i (2.10).

#### **virtual double Eigenvalue(int ii);**

Izračunava i vraća svojstvenu vrijednost u aktualnom p-polju karakteristika prema relaciji (2.8) za "ii"-tu ćeliju.

#### **virtual void InitCond(void);**

Iz zadanih početnih uvjeta ( početni tlak i početna brzina ) izračunava vektor stanja u svim ćelijama za vrijeme  $t = 0s$ .

#### **virtual void Force(void);**

Izračunava vektor sile za svaku ćeliju prema relaciji (2.4) i koji je dio vrijednosti prostornog operatora (2.45).

### Klasa CPipeFlowSingleBC

Podklasa je klasa CCLNetSingleBC, CEquations i COptimTaskObject. Klasa CEquations je pomoćna matematička klasa razvijena da bi predstavljala sustave nelinearnih jednadžbi koji se rješavaju različitim numeričkim metodama. Klasa CPipeFlowSingleBC odgovara rubnom uvjetu za dva zakona očuvanja nestacionarnog strujanja. Rješavanje rubnog uvjeta postiže se pomoću prvih dviju nadklasa redefinicijom funkcije:

#### **virtual void BoundCond(void);**

Rješava rubni uvjet tako da pomoću Newton-Raphosonove metode nadklase CEquations rješava sustav nelinearnih jednadžbi ovog rubnog uvjeta te zatim nalazi nepoznate komponente vektora fluksa pomoću relacija (2.73) i (2.75).

Zahvaljujući nadklasi `COptimTaskObject` neka geometrijska i fizikalna svojstva podklasa ove klase mogu postati varijable funkcije cilja optimalnog upravljanja. Podklase ove klase su `CAirChamberBC` (zračna komora), `CFrancisTurbineBC` (Franciseova turbina), `CPumpBC` (crpka), `CReservoirBC` (spremnik), `CSurgeTankBC` (vodna komora), `CEndValveBC` (ventil na kraju cijevi), `CMidValveBC` (ventil između dvije cijevi), `CDischargeBC` (rubni uvjet sa zadanom brzinom), `CPressureBC` (rubni uvjet sa zadanom tlakom). Svrha je ovih klasa sadržavati za svaki od tih dijelova cjevovoda specifične geometrijske i fizikalne podatke te zadati oblik nelinearnog sustava jednadžbi i sustava običnih diferencijalnih jednadžbi koji čine odgovarajući rubni uvjet.

### Klasa `CPipeFlowJunctionBC`

Podklasa je klasa `CCLNetJunctionBC`, `CEquations` i `COptimTaskObject` i odgovara zajedničkom rubnom uvjetu većeg broja zakona očuvanja nestacionarnog strujanja. Među više zaštićenih podataka i funkcija klase najvažnija je redefinicija funkcije nadklase `CCLNetJunctionBC`:

**virtual void BoundCond(void);**

Ova funkcija djeluje slično kao ista funkcije klase `CPipeFlowSingleBC`.

Jedina podklasa ove klase je `CPipeJunctionBC` koja odgovara spoju jedne ili više dovodnih cijevi sa jednom ili više odvodnih cijevi. Ova klasa nije nositelj nijedne varijable funkcije cilja.

### Klasa `CPipeFlowNet`

Podklasa je klasa `CConsLawNet` i `COptimizationTask` te predstavlja cjevovod. Ova klasa sadržava podatke zajedničke svim dijelovima cjevovoda, kao što je gustoća tekućine u odsustvu plina, tlak isparavanja tekućine, vanjski atmosferski tlak itd. Budući da je podklasa mreže zakona očuvanja omogućava proračun nestacionarnih strujanja u cjevovodu, a budući da je i podklasa optimizacijske zadaće omogućava i rješavanje proizvoljnog problema optimalnog upravljanja. Na razini čitavog cjevovoda zadaje se funkcija cilja optimizacijskog problema pa ova klasa implementira više različitih funkcija koje izračunavaju sirovu prilagođenost cjevovoda ovisno o tipu postavljenog optimizacijskog zadatka (najmanje tlačne oscilacije, najmanja odstupanja između izračunatih i izmjerenih vrijednosti tlaka ili brzine, najkraća kavitacijska zona itd.) Pored više zaštićenih podataka i funkcija najvažnije javne funkcije i operatori su:

**CPipeFlowNet & operator () (double t1, double t2=0., double dt=0.);**

Ovim se operatorom cjevovodu zadaje vremenski interval: od trenutka "t1" do trenutka "t2" s korakom "dt". Za taj će vremenski interval cjevovod pri pozivu operatora ispisa u izlazni tok prikazati rezultate proračuna u numeričkom ili grafičkom obliku.

**CPipeFlowNet & operator () (const char \*aOutType, int aOutId=-1, double aOutX=-1.);**

Ovim se operatorom cjevovodu zadaje vrsta prikaza "aOutType" rezultata proračuna, identifikator "aOutId" cijevi te položaj "aOutX" u cijevi kod kojeg će se promatrati rezultati.

**CPipeFlowNet & operator () (const char \*aOutType, const char \*aOutSF, int aOutId);**

Ovim se operatorom cjevovodu zadaje vrsta prikaza "aOutType" rezultata proračuna, skalrano polje "aOutSF" koje treba prikazati i identifikator "aOutId" cijevi kod koje će se rezultati proračuna promatrati.

**HENHMETAFILE ToMetaFile(void);**

Ova funkcije sprema grafički prikaz rezultata proračuna ovisno o odabranoj vrsti prikaza i vremeskom intervalu prikaza u emf datoteku (enhanced metafile) i vraća HENHMETAFILE te datoteke. Kod ove funkcije je:

```

HENHMETAFILE CPipeFlowNet::ToMetaFile(void)
{
    HENHMETAFILE aHemf;

    CMetaFileDC *pEMFDC=new CMetaFileDC;
    pEMFDC->CreateEnhanced(NULL,NULL,NULL,NULL);
    CDCGraphics emfGraph;
    emfGraph.Open(pEMFDC);
    CPen aPen;
    if ( outType=="OUTDATA" )
    { aPen.CreatePen(PS_SOLID,1,RGB(255,0,0)); }
    else if ( outType=="OUTSPACE" )
    { aPen.CreatePen(PS_SOLID,1,RGB(0,255,0)); }
    else if ( outType=="OUTTIME" || outType=="OUTSCALARFIELD" )
    { aPen.CreatePen(PS_SOLID,1,RGB(0,0,255)); }
    CPen* pOldPen=(CPen*)pEMFDC->SelectObject(&aPen);
    emfGraph<<(*this);
    if ( outType=="OUTTIME" )
    { CPen mpen(PS_DASH,1,RGB(255,0,0));
      pEMFDC->SelectObject(&mpen);
      emfGraph<<(*this)("OUTMEASUREMENT",outId,outX); }
    pEMFDC->SelectObject(pOldPen);
    emfGraph.Close();
    aHemf=pEMFDC->CloseEnhanced();
    delete pEMFDC;
    return aHemf;
}

```

Također klasa CPipeFlowNet ima i sljedeće prijateljske operatore:

**friend ostream & operator << (ostream &stream,CPipeFlowNet &aPL);**

U ulaznom toku "stream" trebaju biti ispisani po točno određenom formatu podaci kojima je zadan cjevovod: struktura cjevovoda, geometrijski i fizikalni podaci o svakom pojedinom dijelu cjevovoda, upute za grafičke prikaze te opis zadatka optimalnog upravljanja. Ovaj operator čita te podatke i izgrađuje cjevovod "aPL".

**friend istream & operator >> (istream &stream,CPipeFlowNet &aPL);**

Prema istom točno određenom formatu kao i kod prethodnog operatora, ovaj operator ispisuje u izlazni tok "stream" podatke kojima je cjevovod "aPL" zadan.

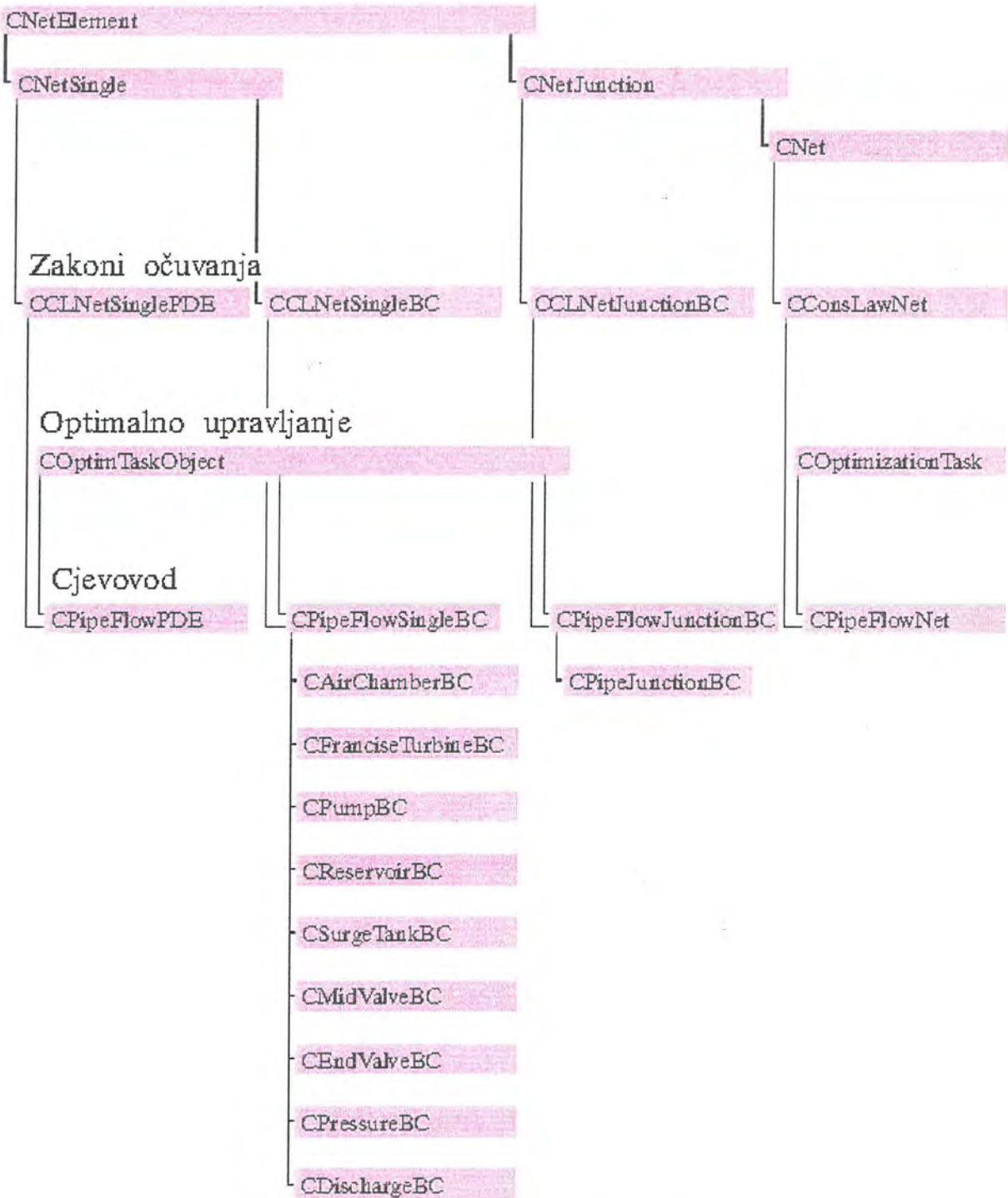
**friend CGraphics & operator << (CGraphics &graph,CPipeFlowNet &aPL);**

Ovisno o odabranom tipu prikaza rezultata proračuna u cjevovodu "aPL" ovaj operator sprema crtež u grafički izlazni tok "graph". Klasa CGraphics je razvijena kao pomoćna grafička klasa koja omogućava uniformni pristup crtanju u Device Context grafiku ili u AUTCAD grafici. Također ima implementirano odvojeno rukovanje pojedinim cjelinama – crtežima, automatsko crtanje koordinatnog sustava svakog crteža, translateranja, skaliranja i druga preslikavanja točaka te projekciju trodimenzionalnih objekata na dvodimenzionalne crteže primjenom po volji odabranog projektiviteta.

Hijerarhija najvažnijih razvijenih klasa prikazana je na sl. 73.



## Mreža

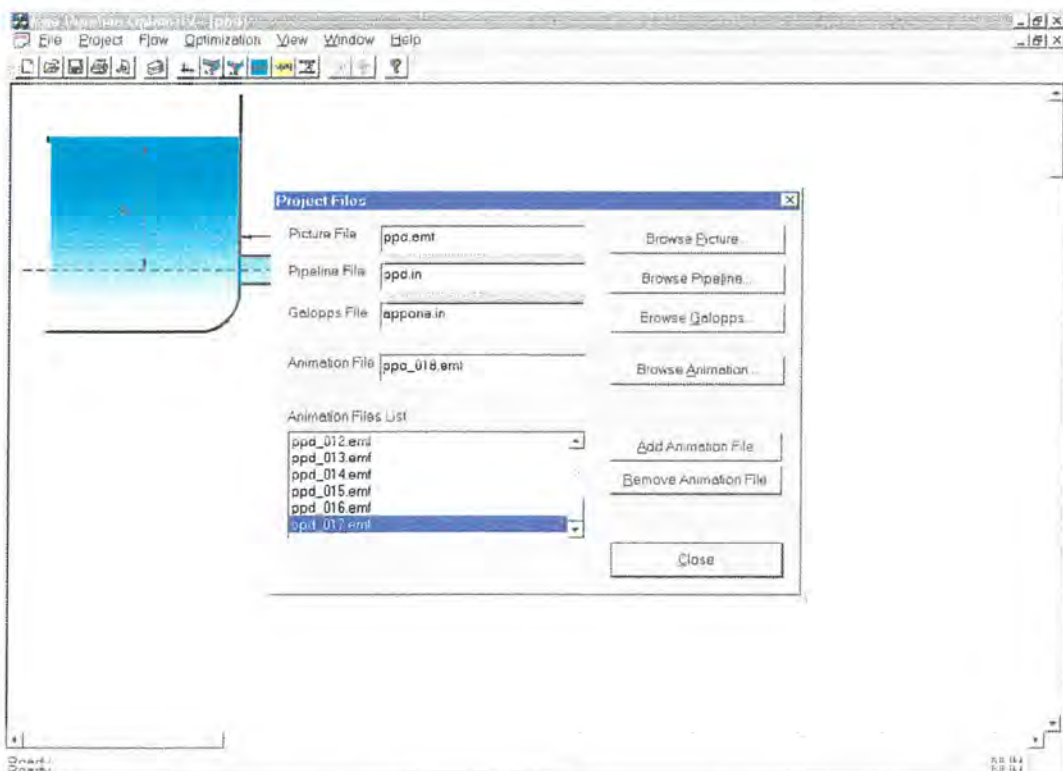


Sl. 73. Hijerarhija klasa u računarskom programu

## 6.5 KORISNIČKO SUČELJE

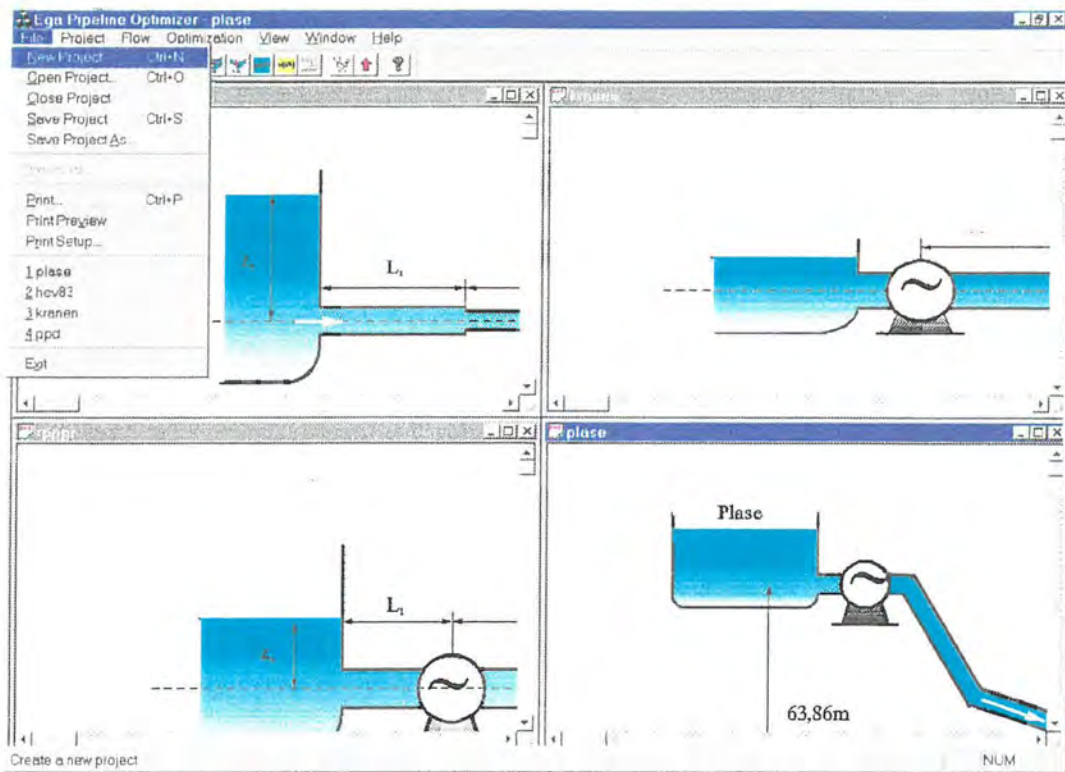
Razvijeni je računarski program "Egap" (ENO & GA Pipeline Optimizer) MFC (Microsoft Foundation Classes) aplikacija.

Ova aplikacija omogućava korisniku otvaranje projekta kojim je opisan proizvoljni cjevovod s pripadnim zadacima modeliranja i optimizacije (sl. 74. i 75.). Zatim korisnik može pregledati i izmijeniti različite podatke tog dokumenta te pregledati grafičke prikaze raspodjele tlakova i brzina duž čitavog cjevovoda u po volji odabranom trenutku, raspodjele tlakova i brzina unutar odabranog vremenskog intervala u odabranoj točki cjevovoda, tlakove i brzine u odabranoj cijevi unutar odabranog vremenskog intervala ili animaciju procesa (sl. 76.). Korisnik može saznati vrijednost funkcije cilja promatranog cjevovoda ili pronaći najbolji cjevovod s obzirom na postavljeni optimizacijski zadatak (sl. 77.). Sve rezultate numeričkog proračuna kao i optimizacije korisnik može spremiti u nove dokumente u obliku teksta ili grafike (sl. 78.).

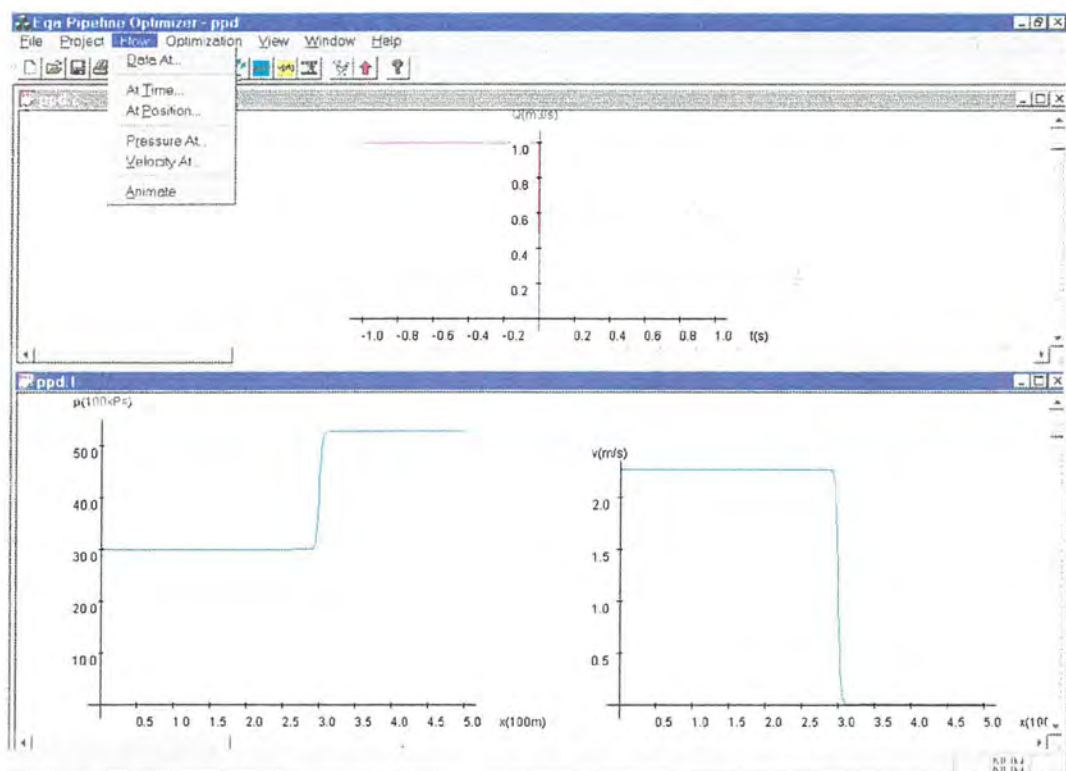


Sl 74. Datoteke projekta ppa.egg

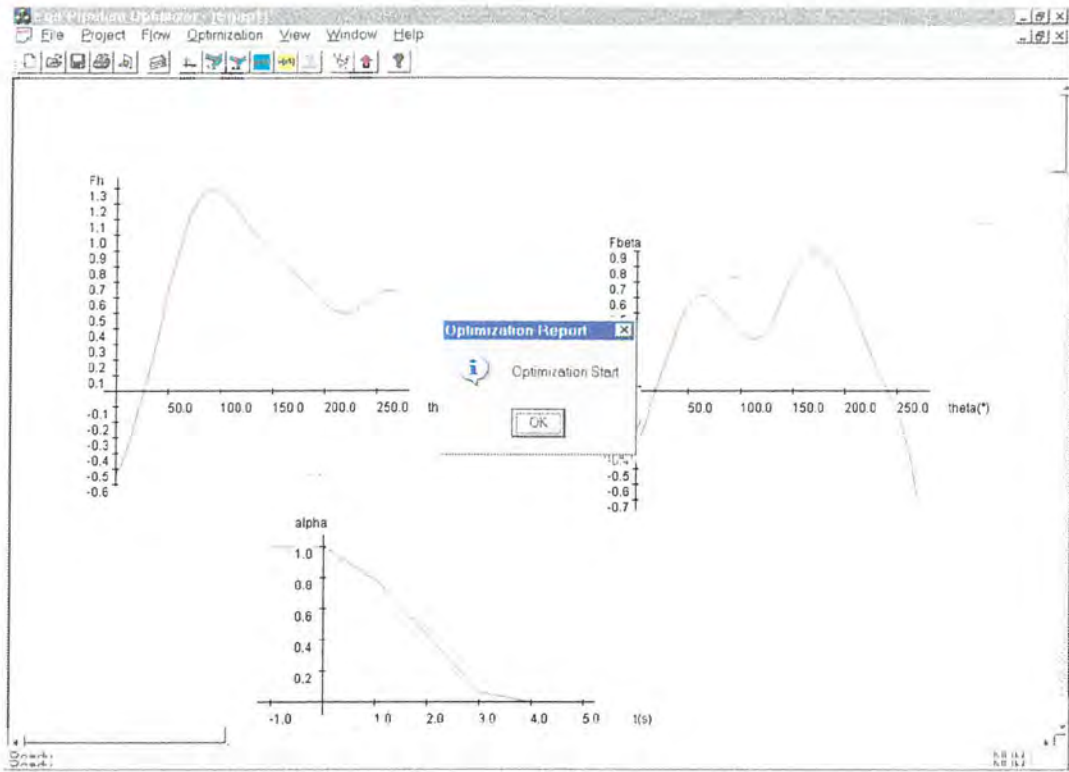




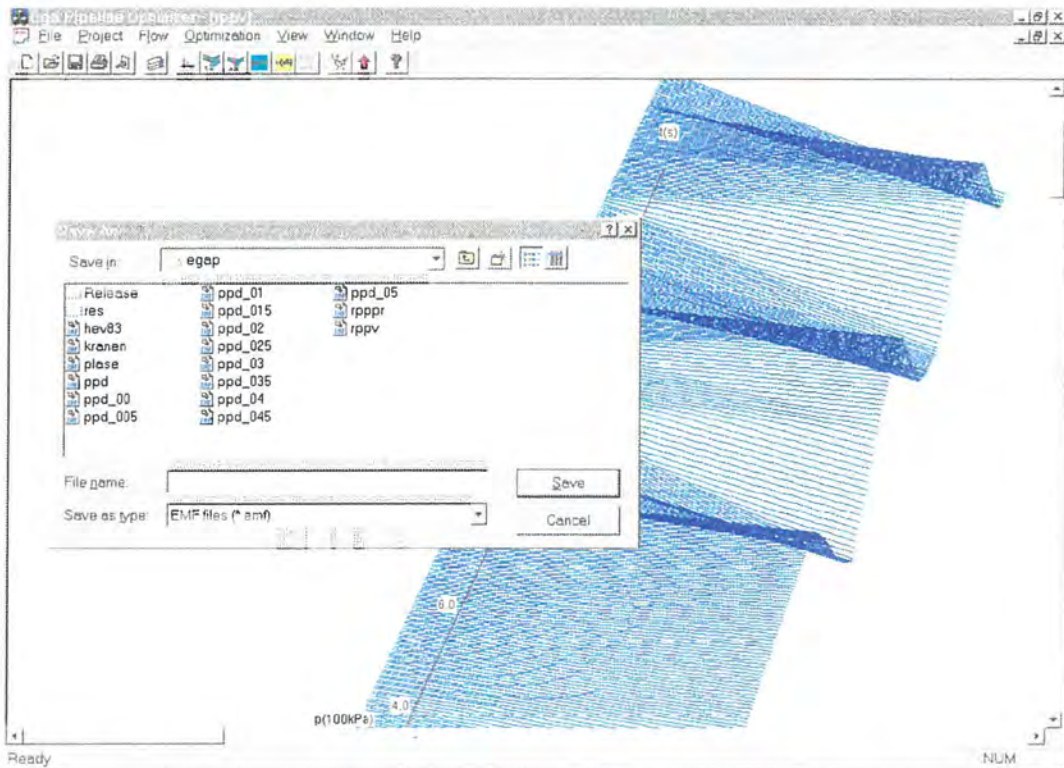
SI 75. "File" izbornik i 4 Egag projekta



SI 76. "Flow" izbornik



Sl 77. Rješavanje zadatka optimalnog upravljanja



Sl 78. Spremanje u EMF datoteku

## ZAKLJUČAK

U ovoj disertaciji novost je primjena esencijalno neoscilirajućih shema u proračunu nestacionarnog strujanja mješavine tekućine i plina u cjevovodima, te posebno formulacija u skladu s ENO shemama složenih rubnih uvjeta koji slijede iz matematičkog modela utjecaja ventila, spremnika, crpki, turbina, zračnih komora, vodnih komora itd. na strujanje. Također je novost primjena genetskog algoritma na optimalno upravljanje nestacionarnim strujanjima i u skladu s time formulacija i rješenje više problema optimalnog upravljanja ventilima, radom crpki itd.

Značenje rada je u postavljanju jasnog teoretskog okvira koji čini dobar i adekvatan matematički, numerički i optimizacijski model. Vrijednost ne čine samo riješeni pojedinačni problemi optimalnog upravljanja strujanjima već i razvijen računarski program koji se može primijeniti na bilo koji novi problem proračuna i optimizacije za cjevovode.

Izloženi rezultati proračuna strujanja pokazuju veliku točnost numeričke metode. Poznavajući svojstva genetskog algoritma, može se zaključiti da su dobivena rješenja optimizacijskih zadataka vrlo blizu točnih optimuma te da se isti zadaci zbog svoje složenosti i regularnosti ili uopće ne bi mogli riješiti nekom drugom metodom ili bi bili riješeni manje učinkovito i u manjoj općenitosti.

Kod proračuna gubici na trenje su manji od stvarnih što međutim ne utječe na vrijednosti početnih najjačih tlačnih udara već samo na kasniji razvoj pojave. Zato je sa stanovišta optimalnog upravljanja i predviđanja štetnih posljedica uočeno odstupanje nebitno, a prema literaturi nije jasno kakav bi model gubitaka na trenje (npr. uzimajući u obzir nestacionarne i dvodimenzionalne efekte) omogućio bitno poboljšanje bez smanjenja brzine i efikasnosti numeričkog proračuna. U budućim istraživanjima moglo bi se pokušati poboljšati taj dio modela. Pored toga svakako treba pratiti budući razvoj numeričkih shema za hiperboličke zakone očuvanja i razvoj naprednih operatora i novih mogućnosti genetskog algoritma te kvalitetnim novim rezultatima unapređivati računarski program.



## POPIS LITERATURE

- [1] Ferziger J. H., Perić M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [2] Chorin A. J., Marsden J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [3] Landau L. D., Lifšić E. M., *Mehanika neprekidnih sredina*, Građevinska knjiga, Beograd, 1965.
- [4] Chaudhry M. H., *Applied Hydraulic Transients*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1979.
- [5] Wylie E. B., Streeter V. L., *Fluid Transients in Systems*, Prentice-Hall, New Jersey, 1993.
- [6] Guargua R., Acosta A., Lorenzo E., *Dynamic Compression of Entrapped Air Pockets by Elastic Water Columns*, Hydraulic Machinery and Cavitation II, Kluwer Academic Publishers, 710-719, 1996.
- [7] Lee T. S., *Numerical Modelling and Computation of Fluid Pressure Transients with Air Entrainment in Pumping Instalations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol 19, 89-103, 1994.
- [8] Simpson A. R., Bergant A., *Developments in Pipeline Column Separation Experimentation*, Journal of Hydraulic Research, vol. 32, 183-194, 1994.
- [9] Kranenburg C., *Gas Release During Transient Cavitation in Pipes*, Journal of the Hydraulics Division, vol. 100, 1383-1397, 1974.
- [10] Brunone B., Golia U. M., Greco M., *Effects of Two-Dimensionality on Pipe Transients Modeling*, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 121, 906-912, 1995.
- [11] Martinez F., Izquierdo J., Pérez R., Vela A., *Simulation of Transients in Pressurized Hydraulic Systems with Visual Tools*, Hydraulic Machinery and Cavitation II, Kluwer Academic Publishers, 759-768, 1996.
- [12] Vennatrø R., *Unsteady Frictions in Pipelines*, Hydraulic Machinery and Cavitation II, Kluwer Academic Publishers, 819-826, 1996.
- [13] Pejović S., Boldy A. P., Obradović D., *Guidelines to Hydraulic Transient Analysis*, Gower Technical Press, Aldershot, 1987.
- [14] Jordan V., *Prehodni režimi v hidravličnih cevni sistemih*, Part. knjiga, Ljubljana, 1983.
- [15] Nielsen T. K., *Simulation of the Dynamic Behavior of Governing Turbines Sharing the Same Electrical Grid*, IAHR Work Group on the Behavior of Hydraulic Machinery under Steady Oscillatory Conditions, Ljubljana, 1995.
- [16] Nielsen T. K., *Dynamic Behavior of Governing Turbines Sharing the Same Electrical Grid*, Hydraulic Machinery and Cavitation II, Kluwer Academic Publishers, 769-778, 1996.
- [17] Stuksrud D. B., *Simulation of Turbine Governing in Time Domain*, Hydraulic Machinery and Cavitation II, Kluwer Academic Publishers, 799-808, 1996.
- [18] Izquierdo J., Iglesias P., Espert V., Fuertes V., *Generalization of Pump Station Boundary Condition in Hydraulic Transient Simulation*, Hydraulic Machinery and Cavitation II, Kluwer Academic Publishers, 720-728, 1996.

- [19] Krzyk M., Pemić A., *Primjena vrtložnog prigušivača u hidrotehničkim sistemima pod tlakom*, 1. Hrvatska konferencija o vodama, Dubrovnik 1995.
- [20] Alber H. D., Cooper J., *A Free Boundary Value Problem for a Quasilinear Hyperbolic System*, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, 1988.
- [21] Chikwendu S. C., Easwaran C. V., *Multiple-Scale Solution of Initial-Boundary Value Problems for Weakly Nonlinear Wave Equations on the Semi-Infinite Line*, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol 52, 946-958, 1992.
- [22] Glimm J., *Solutions in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XVIII, 697-715, 1965.
- [23] Luskin M., *On the Existence of Global Smooth Solutions for a Model Equation for Fluid Flow in a Pipe*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 84, 614-630, 1981.
- [24] Godlewski E., Raviart P.-A., *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [25] LeVeque R. J., *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [26] Larrouturou B., *Modelisation Mathematique et Numerique pour les Sciences de l'Ingenieur, Problemes Hyperboliques*, Ecole Polytechnique, Paris, 1995.
- [27] Courant R., Friedrichs K. O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [28] Spekreijse S. P., *Multigrid Solution of the Steady Euler Equations*, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1988.
- [29] Glaister P., *A Weak Formulation of Roe's Approximate Riemann Solver Applied to 'Barotropic' Flows*, Computers Mathematical Applications, vol. 27, 87-90, 1994.
- [30] Harten A., *On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 21, 1984.
- [31] Löhner R., Morgan K., Zienkiewicz O. C., *The Solution of Non-linear Hyperbolic Equation Systems by the Finite Element Method*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 4, 1043-1063, 1984.
- [32] Nessyahu H., Tadmor E., *Non-oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws*, Journal of Computational Physics 87, 408-463, 1990.
- [33] Roe P. L., *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes*, Journal of Computational Physics 43, 357-372, 1981.
- [34] Roe P. L., *Discrete Models for the Numerical Analysis of Time-Dependent Multidimensional Gas Dynamics*, Journal of Computational Physics 63, 458-476, 1986.
- [35] Osher S., *Riemann Solvers, the Entropy Condition, and Difference Approximations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol 21, 217-235, 1984.
- [36] Osher S., Shu C.-W., *High-Order Essentially Nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi Equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol 28, 907-922, 1991.
- [37] Harten A., Hyman J. M., Lax P. D., *On Finite-Difference Approximations and Entropy Conditions for Shocks*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XXIX, 297-322, 1976.
- [38] James A., *Positive Schemes and Shock Modelling for Compressible Flows*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 20, 743-776, 1995.
- [39] Arora M., Roe P. L., *On Postshock Oscillations Due to Shock Capturing Schemes in Unsteady Flows*, Journal of Computational Physics 130, 25-40, 1997.



- [40] Osher S., Solomon F., *Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Mathematics of Computation, vol. 38, 339-374, 1982.
- [41] Osher S., *Convergence of Generalized MUSCL Schemes*, SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 22, 947-961, 1985.
- [42] Van Leer B., *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme III. Upstream-Centered Finite-Difference Schemes for Ideal Compressible Flow*, Journal of Computational Physics 23, 263-275, 1977.
- [43] Lafon F., Osher S., *High Order Filtering Methods for Approximating Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Journal of Computational Physics 96, 110-142, 1991.
- [44] Harten A., Hyman J. M., *Self Adjusting Grid Methods for One-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws*, Journal of Computational Physics 50, 235-269, 1983.
- [45] Harten A., Osher S., *Uniformly High Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes I*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 24, 279-309, 1987.
- [46] Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S. R., *Uniformly High Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes III*, Journal of Computational Physics 71, 231-303, 1987.
- [47] Shu C.-W., Osher S., *Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes*, Journal of Computational Physics 77, 439-471, 1988.
- [48] Shu C.-W., Osher S., *Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes II*, Journal of Computational Physics 83, 32-78, 1989.
- [49] Jiang G.-S., Shu C.-W., *Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes*, Journal of Computational Physics 126, 202-228, 1996.
- [50] Sopta L., Vuković S., Sopta D., *Matematički model hidrauličkih tranzijenata u dovodnom sustavu CHE Fužine*, studija, Tehnički fakultet, Rijeka, 1996.
- [51] Sopta L., Vuković S., *Analiza hidrauličkog udara u cjevovodu Plase-Opatija*, studija, Rijeka, 1996.
- [52] Bellman R., *Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes*, Academic Press, New York, 1967.
- [53] Dreyfus S. E., *Dynamic Programming and the Calculus of Variations*, Academic Press, New York, 1965.
- [54] Fleming W. H., Rishel R. W., *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [55] Hestenes M., *Conjugate Direction Methods in Optimization*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [56] Lions J. L., *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [57] Saguez C., *Optimal Control of Gas Transportation Network*, Autumn Course on Variational Methods in Analysis and Mathematical Physics, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, 1981.
- [58] Goldberg E. D., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1989.
- [59] Goldberg E. D., *An Introduction to Genetic Algorithm Optimized for Portability and Parallelism System*, GARAGE Technical Report, Michigan State University, 1995.
- [60] Abreu J., Cabrera E., Garcia-Serra J., Lopez P. A., *Optimal Closure of a Valve for Minimizing Water Hammer*, Hydraulic Machinery and Cavitation II, Kluwer Academic Publishers, 661-670, 1996.
- [61] Diniz L. S., Góis R. S. S., Srinivasan V. S., *Application of a Genetic Algorithm for*

- Calibration and Structural Modification of Tank Model*, Hydraulic Engineering Software, 10-20, 1996.
- [62] Liong S.-Y., Chan W. T., ShreeRam J., *Peak-Flow Forecasting with Genetic Algorithm and SWMM*, Journal of Hydraulic Engineering, 613-617, 1995.

## POPIS OZNAKA

$A$	površina poprečnog presjeka, $m^2$
$a$	brzina zvuka, $ms^{-1}$
$a_t$	brzina zvuka u tekućini u cijevi, $ms^{-1}$
$c_{cfl}$	Courant-Friedrichs-Lewyjev koeficijent
$c_d$	koeficijent difuzije, $m^2s^{-1}$
$c_e$	konstatna proporcionalnosti u relaciji između tlaka plina i ravnotežne koncentracije otopljenog plina, $molN^{-1}m^{-1}$
$c_p$	univerzalna plinska konstanta, $JK^{-1}mol^{-1}$
$D$	promjer kružnog poprečnog presjeka cijevi, $m$
$e_p$	izlazna veličina prigušivača regulatora Franciseove turbine
$\vec{f}$	vektor fluksa u hiperboličkom zakonu očuvanja
$D\vec{f}$	Jacobijeva matrica fluksa
$f^{(p)}$	komponenta fluksa u p-polju karakteristika
$g$	ubrzanje sile teže, $ms^{-2}$
$\vec{g}$	vektor desne strane u hiperboličkom zakonu očuvanja
$g_j$	gen u kromosomu jedinke
$H$	piezometrička visina, $m$
$h$	skalirana piezometrička visina
$k$	faktor gubitaka
$k_s$	pojačanje otvora servomotora regulatora Franciseove turbine
$k_v$	pojačanje otvora razdjelnog ventila regulatora Franciseove turbine
$L$	duljina cijevi, $m$
$\vec{L}$	prostorni operator hiperboličkog zakona očuvanja
$\vec{l}^{(p)}$	lijevi svojstveni vektor u p-polju karakteristika
$M$	moment, $Nm$
$N$	brzina vrtnje, $s^{-1}$
$n_m$	broj mjehurića po jedinici duljine cijevi, $m^{-1}$
$P$	snaga, $W$
$P_{gen}$	snaga generatora, $W$
$P$	tlak, $Pa$
$p_{am}$	atmosferski tlak, $Pa$
$p_s$	tlak zasićenja tekućine plinom, $Pa$
$p_v$	tlak isparavanja tekućine, $Pa$
$Q$	protok, $m^3s^{-1}$
$q$	skalirani protok

$R^{(p)}$	Riemannova invarijanta u p-polju karakteristika
$\bar{r}^{(p)}$	desni svojstveni vektor u p-polju karakteristika
$T$	temperatura, $K$
$t$	vrijeme, $s$
$\Delta t_n$	vremenski korak ENO sheme, $s$
$t_a$	vremenska konstanta aktuatora regulatora Franciseove turbine, $s$
$t_p$	vremenska konstanta prigušivača regulatora Franciseove turbine, $s$
$t_v$	vremenska konstanta razdjelnog ventila regulatora Franciseove turbine, $s$
$\bar{u}$	vektor stanja hiperboličkog zakona očuvanja
$V$	obujam, $m^3$
$v$	brzina, $ms^{-1}$
$v_m$	brzina gibanja mjehurića u odnosu na tekućinu, $ms^{-1}$
$v_s$	brzina šoka, $ms^{-1}$
$WR^2$	moment inercije, $kgm^2$
$w_a$	izlazna veličina aktuatora regulatora Franciseove turbine
$w_v$	izlazna veličina razdjelnog ventila regulatora Franciseove turbine
$z$	visina mjerena od zadane razine, $m$
$x$	prostorna koordinata, $m$
$\Delta x$	prostorni korak ENO sheme, $m$
$\alpha$	skalirana brzina vrtnje
$\beta$	skalirani moment
$\chi$	jedinični protok, $m^{1/2}s^{-1}$
$\delta$	trenutačno smanjenje brzine vrtnje
$\eta_{gen}$	stupanj djelovanja generatora
$\phi$	jedinična brzina vrtnje, $m^{1/2}s^{-1}$
$\varphi$	funkcija cilja zadatka optimalnog upravljanja
$\Phi$	prilagođenost
$\tilde{\Phi}$	skalirana prilagođenost
$\kappa$	količina plina u pojedinom mjehuriću, $mol$
$\lambda$	faktor trenja
$\lambda^{(p)}$	svojstvena vrijednost u p-polju karakteristika
$\Psi$	jedinična snaga, $Wm^{-1/2}$
$\rho$	gustoća, $kgm^{-3}$
$\rho_t$	gustoća tekućine, $kgm^{-3}$
$\sigma$	trajno smanjenje brzine vrtnje
$\tau$	relativni otvor zakretnih lopatica

## POPIS SLIKA

Sl. 1. Jednodimenzionalno strujanje u cijevi	4
Sl. 2. Spoj cijevi	6
Sl. 3. Dovodni spremnik	7
Sl. 4. Ventil na kraju cijevi	7
Sl. 5. Ventil između dvije cijevi	8
Sl. 6. Zračna komora	8
Sl. 7. Vodna komora	9
Sl. 8. Crpka	10
Sl. 9. Turbina	11
Sl. 10. Proračun 3.1 – cjevovod spremnik-cijev-ventil	31
Sl. 11. Proračun 3.1 – tlak kod spremnika	31
Sl. 12. Proračun 3.1 – protok kod ventila	31
Sl. 13. Proračun 3.1 – tlak u cijevi	33
Sl. 14. Proračun 3.1 – brzina u cijevi	34
Sl. 15. Proračun 3.2 – cjevovod spremnik-cijev-cijev-ventil	35
Sl. 16. Proračun 3.2 – visina vode u spremniku	35
Sl. 17. Proračun 3.2 – zatvaranje ventila	35
Sl. 18. Proračun 3.2 – tlak u prvoj cijevi	37
Sl. 19. Proračun 3.2 – tlak u drugoj cijevi	38
Sl. 20. Proračun 3.2 – brzina u prvoj cijevi	39
Sl. 21. Proračun 3.2 – brzina u drugoj cijevi	40
Sl. 22. Proračun 3.3 – cjevovod spremnik-cijev-crpka-cijev-cijev-spremnik	41
Sl. 23. Proračun 3.3 – karakteristike crpke i brzina rada crpke	41
Sl. 24. Proračun 3.3 – visina vode kod uzvodnog spremnika	42
Sl. 25. Proračun 3.3 – visina vode kod nizvodnog spremnika	42
Sl. 26. Proračun 3.3 – tlak u drugoj cijevi	43
Sl. 27. Proračun 3.3 – tlak u trećoj cijevi	44
Sl. 28. Proračun 3.3 – brzina u drugoj cijevi	45
Sl. 29. Proračun 3.3 – brzina u trećoj cijevi	46
Sl. 30. Proračun 3.4 – dovodni sustav HE "Vinodol"	47
Sl. 31. Proračun 3.4 – nadmorska visina u tunelu Bajer i cjevovodu Lič	47
Sl. 32. Proračun 3.4 – nadmorska visina u tunelu Potkobiljak	47
Sl. 33. Proračun 3.4 – nadmorska visina u tlačnom cjevovodu Razromir	48
Sl. 34. Proračun 3.4 – poprečni presjeci vodne komore Razromir	48
Sl. 35. Proračun 3.4 – tlak kod jezera Bajer	48
Sl. 36. Proračun 3.4 – protok kod turbina	48
Sl. 37. Proračun 3.4 – izračunati (puna plava crta) i mjereni (isprekidana crvena crta) tlak kod vodne komore Razromir	50
Sl. 38. Proračun 3.4 – tlak i brzina kod jezera "Bajer"	51
Sl. 39. Proračun 3.4 – tlak i brzina na početku tlačnog cjevovoda	51
Sl. 40. Proračun 3.4 – tlak i brzina na početku tunela Potkobiljak	52
Sl. 41. Proračun 3.4 – tlak i brzina kod turbina	52



Sl. 42. Proračun 3.5 – cjevovod crpka-cijev-spremnik	53
Sl. 43. Proračun 3.5 – tlak kod crpke	53
Sl. 44. Proračun 3.5 – tlak kod spremnika	53
Sl. 45. Proračun 3.5 – tlak u cijevi	55
Sl. 46. Proračun 3.5 – brzina u cijevi	56
Sl. 47. Proračun 3.5 – proračun i mjerenje iz [9]	57
Sl. 48. Proračun 3.5 – tlak i brzina kod $x = 3m, \dots, x = 1168m$	58
Sl. 49. Proračun 3.6 – cjevovod Plase-Opatija	61
Sl. 50. Proračun 3.6 – tlak kod spremnika i crpke Plase	61
Sl. 51. Proračun 3.6 – nadmorske visine cjevovoda Plase-Opatije	61
Sl. 52. Proračun 3.6 – tlak u zadnjoj točki cjevovoda	61
Sl. 53. Proračun 3.6 – tlak u cijevi	63
Sl. 54. Proračun 3.6 – brzina u cijevi	64
Sl. 55. Linearno skaliranje prilagođenosti	67
Sl. 56. Križanje s jednom točkom reza	69
Sl. 57. Križanje s parnim brojem točaka reza	69
Sl. 58. Optimizacijski problem 5.1 - najbolji protok s 1 točkom	72
Sl. 59. Optimizacijski problem 5.1 - najmanje oscilacije tlaka s 1 točkom	72
Sl. 60. Optimizacijski problem 5.1 - najbolji protok s 3 točke	72
Sl. 61. Optimizacijski problem 5.1 - najmanje oscilacije tlaka s 3 točke	73
Sl. 62. Optimizacijski problem 5.1 - najbolji protok sa 7 točaka	73
Sl. 63. Optimizacijski problem 5.1 - najmanje oscilacije tlaka sa 7 točaka	73
Sl. 64. Optimizacijski problem 5.2 - najbolje zatvaranje ventila	74
Sl. 65. Optimizacijski problem 5.2 - najmanje oscilacije tlaka	74
Sl. 66. Optimizacijski problem 5.3 - najbolje zaustavljanje rada crpke	76
Sl. 67. Optimizacijski problem 5.3 - najmanje oscilacije tlaka	76
Sl. 68. Optimizacijski problem 5.4 - tlak kod jezera "Bajer"	78
Sl. 69. Optimizacijski problem 5.4 - protok kod turbina	78
Sl. 70. Optimizacijski problem 5.4 - tlak kod vodne komore	78
Sl. 71. Optimizacijski problem 5.5 - najbolji tlak kod crpke	80
Sl. 72. Optimizacijski problem 5.5 – najkraće područje kavitacije	80
Sl. 73. Hijerarhija klasa u računarskom programu	93
Sl. 74. Datoteke projekta ppd.egp	94
Sl. 75. "File" izbornik i 4 Egap projekta	95
Sl. 76. "Flow" izbornik	95
Sl. 77. Rješavanje zadatka optimalnog upravljanja	96
Sl. 78. Spremanje u EMF datoteku	96

## ŽIVOTOPIS

Senka Vuković je rođena 22. ožujka 1966. u Rijeci. Studij matematike i fizike na Pedagoškom fakultetu Sveučilišta u Rijeci upisala je 1984. godine. Školske 1986./87. godine dodijeljeno joj je priznanje Sveučilišta u Rijeci kao najboljem studentu Pedagoškog fakulteta, a 1988. i prva nagrada Sveučilišta za stručni rad "Banachove algebre". Tom diplomskom radnjom koju je obranila 6. lipnja 1988. stekla je zvanje profesora matematike i fizike.

Od 6. ožujka 1989. do 31. studenog 1990. bila je projektant CAD/CAM sistema u Brodogradilištu "3. maj" u Rijeci. U tijeku rada na računarskoj grafici i programiranju tehničkih aplikacija sudjelovala je s dva rada na IX simpoziju teorije i prakse brodogradnje in memoriam prof. Leopoldu Sorti 1900. godine u Dubrovniku.

Dana 1. prosinca 1990. je izabrana za mlađeg asistenta na Zavodu za Matematiku Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci. Iste je 1990. godine upisala Poslijediplomski studij iz matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Na tom je studiju odabrala Seminar iz numeričke analize i diferencijalnih jednadžbi, položila ispite s prosječnom ocjenom 5,0 te 21. rujna 1994. uspješno obranila magistarsku radnju pod naslovom "Metoda viskoznosti za rubne i inicijalno-rubne probleme" u izradi koje ju je vodio prof. dr. sc. Zvonimir Tutek sa Matematičkog odjela PMF-a.

U tijeku 1995. bila se priključila radu na tadašnjem znanstveno-istraživačkom projektu Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske "Numeričko modeliranje strujanja fluida", kojeg su bili nositelji prof. dr. sc. Luka Sopta i prof. dr. sc. Zoran Mrša sa Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, a od 1996. je suradnik na novom znanstveno-istraživačkom projektu Ministarstva "Kompjutersko modeliranje i optimizacija strujanja fluida" (br. 069002) kojeg je glavni istraživač prof. dr. sc. Luka Sopta. Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci dana 24. svibnja 1996. donijelo je odluku kojom joj se dopušta pristupiti izradi i obrani doktorske disertacije pod naslovom "Optimalno upravljanje nestacionarnim strujanjima u cjevovodima". Također je i mladi znanstvenik – predlagatelj odobrenog projekta Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske "Računarsko modeliranje i optimizacija hidrauličkih tranzijenata".

S. Vuković se aktivno služi engleski i talijanskim jezikom, a pasivno francuskim i ruskim.

## PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

### 1. AUTOR

Ime i prezime:

*Senka Vuković*

Datum i mjesto rođenja:

*22. ožujak 1966., Rijeka*

Naziv fakulteta, studija i godina završetka  
dodiplomskog studija:

*Pedagoški fakultet, Sveučilište u Rijeci, studij  
matematike i fizike, 1988.*

Naziv fakulteta, smjera i godina završetka  
poslijediplomskog studija:

*Matematički odjel Prirodoslovno-  
matematičkog fakulteta, Sveučilište u  
Zagrebu, smjer numeričke analize i  
diferencijalnih jednažbi, 1994.*

Sadašnje zaposlenje:

*asistent, Tehnički fakultet, Sveučilište u Rijeci*

### 2. DOKTORSKA DISERTACIJA:

Naslov:

*Optimalno upravljanje nestacionarnim  
strujanjima u cjevovodima*

Broj stranica, slika, tabela i bibliografskih  
podataka:

*105 stranica, 78 slika, 62 bibl. podataka*

Znanstveno polje i grana:

*polje: druge temeljne tehničke znanosti,  
grana: tehnička mehanika i mehanika fluida*

Voditelj rada:

*red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing.*

Fakultet na kojem je rad obranjen:

*Tehnički fakultet, Sveučilište u Rijeci*

### 3. OBRANA I OCJENA

Datum prijave teme:

*24. svibnja 1996.*

Datum predaje rada:

*22. svibnja 1998.*

Datum prihvaćanja ocjene rada:

Sastav Povjerenstva za ocjenu:

*red. prof. dr. sc. Zoran Mrša, dipl. ing.,  
red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing.,  
red. prof. dr. sc. Zvonimir Tutek, dipl. ing.,  
PMF Zagreb*

Datum obrane:

Sastav Povjerenstva za obranu:

Datum promocije:

Oznaka: DD

Tek. broj:

UDK 51-7:[532.5.01/.08+533.6.01/.08]:621.6.07:681.3.06(043.3)

OPTIMALNO UPRAVLJANJE  
NESTACIONARNIM STRUJANJIMA U CJEVOVODIMA

Senka Vuković

Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
Hrvatska

Ključne riječi: *nestacionarno strujanje mješavine tekućine i plina u cjevovodu  
hidraulički udar i kavitacija  
esencijano neoscilirajuće sheme za zakone očuvanja  
optimalno upravljanje pomoću genetskog algoritma*

Sažetak:

*Predstavljen je matematički model nestacionarnog strujanja mješavine tekućine i plina u cjevovodu sastavljenim od cijevi, spremnika, ventila, zračnih komora, vodnih komora, crpki, turbina itd. Tako dobiveni inicijalno-rubni problemi za nelinearne hiperboličke sustave riješeni su numerički uz pomoć esencijano neoscilirajućih shema. Optimizacijski problemi za nestacionarna strujanja u cjevovodima riješeni su rabljenjem genetskog algoritma. Razvijen je računarski program za proračun i optimizaciju strujanja u proizvoljnim cjevovodima. Program je primijenjen na više problema proračuna i optimalnog upravljanja. Rezultati su uspoređeni s analitičkim rješenjima, rezultatima iz literature i izmjerenim podacima.*

Rad nije objavljen.

Mentor: *red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing.*

Povjerenstvo za ocjenu: *red. prof. dr. sc. Zoran Mrša, dipl. ing.,*

*red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing.,*

*red. prof. dr. sc. Zvonimir Tutek, dipl. ing., PMF Zagreb*

Povjerenstvo za obranu:

Datum obrane:

Datum promocije:

rad je pohranjen na tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.  
(105 stranica, 78 slika, 62 bibliografskih podataka, hrvatski jezik)

DD

UDK 51-7:[532.5.01/.08+533.6.01/.08]:621.6.07:681.3.06(043.3)

I. Optimalno upravljanje  
nestacionarnim strujanjima  
u cjevovodima

I Senka Vuković

II Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
HRVATSKA

Ključne riječi:

nestacionarno strujanje mješavine tekućine  
i plina u cjevovodu  
hidraulički udar i kavitacija  
esencijano neoscilirajuće sheme za zakone očuvanja  
optimalno upravljanje pomoću genetskog algoritma



Code: DD No.

UDC 51-7:[532.5.01/.08+533.6.01/.08]:621.6.07:681.3.06(043.3)

OPTIMAL CONTROL  
OF NONSTATIONARY PIPELINE FLOWS

Senka Vuković

University of Rijeka  
Faculty of Engineering  
Croatia

Key words: *nonstationary liquid-gas mixture flow in a pipeline  
hydraulic transients and cavitation  
essentially nonoscillatory schemes for conservation laws  
genetic algorithm in optimal control problems*

Summary:

*A mathematical model for nonstationary liquid-gas mixture flow in a pipeline consisting of pipes, reservoirs, valves, air chambers, surge tanks, pumps, turbines etc. is presented. Thus obtained initial-boundary value problems for nonlinear hyperbolic systems are solved numerically with the aid of essentially nonoscillatory schemes. Optimization problems for nonstationary flows in pipelines are solved using genetic algorithm. A computer program for computation and optimization of flows in any pipeline is developed. The program is applied on several modeling and optimal control problems. Results are compared with analytical solutions, results in literature and measured data.*

This thesis has not been published.

Mentor: *Prof. D. Sc. Luka Sopta*  
Reviewers: *Prof. D. Sc. Zoran Mrša,  
Prof. D. Sc. Luka Sopta,  
Prof. D. Sc. Zvonimir Tutek, PMF Zagreb*

Examiners:

Oral examination:

Degree conferred:

This thesis is deposited at Technical Faculty of the University of Rijeka.  
(105 pages, 78 figures, 62 bibliographical items, Croatian language)

DD

UDC 51-7:[532.5.01/.08+533.6.01/.08]:621.6.07:681.3.06(043.3)

I. Optimal Control  
of Nonstationary  
Pipeline Flows

I Senka Vuković

II University of Rijeka  
Faculty of Engineering  
CROATIA

Key words:

nonstationary liquid-gas mixture flow in a pipeline  
hydraulic transients and cavitation  
essentially nonoscillatory schemes for conservation laws  
genetic algorithm in optimal control problems