

# Numeričke simulacije strujanja u vodotocima sa slobodnom površinom

---

**Družeta, Siniša**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2007**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:188:471140>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-01**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka Library - SVKRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

532.543 519.637 (043.3)  
627.512 519.637 (043.3)

NUMERIČKE SIMULACIJE STRUJANJA U VODOTOCIMA SA  
SLOBODNOM POVRŠINOM

Doktorska disertacija

Siniša Družeta

Mentor: doc. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic

Rijeka, 2007.

111105007



DCD 137  
2007

DUF-683

Sveučilište u Rijeci  
TEHNIČKI FAKULTET  
-Fakultetsko vijeće-  
Klasa: 602-04/06-02/28  
Ur. br.: 2170-57-43-06-22  
Rijeka, 26. lipnja 2006.

Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na svojoj 28. (11.) sjednici u akad. god. 2004./05./06./07., održanoj 26. lipnja 2006. donijelo je sljedeću

## ODLUKU

Sukladno izvješću Stručnog povjerenstva, u sastavu: red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing., red. prof. dr. sc. Senka Maćešić, prof., red. prof. dr. sc. Zvonimir Tutek, prof., Prirodno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, utvrđuje se da pristupnik *mr. sc. Siniša Družeta, dipl. ing. strojarstva* ispunjava Zakonom propisane uvjete za prijavu i izradu doktorske disertacije izvan doktorskog studija naslovljene: "Numeričke simulacije strujanja u vodotocima sa slobodnom površinom".

Mentorom se imenuje doc. dr. sc. Nelidu Črnjarić-Žic, dipl. ing.

Dekan



Red. prof. dr. sc. Tonči Mikac, dipl. ing.

### Dostaviti:

1. Mr. sc. Siniša Družeta, dipl. ing.
2. Mentor, doc. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing., ovdje
3. Služba studentske evidencije, ovdje
4. Pismohrana FV, ovdje

310924007 111105007

## Sažetak

Numeričke simulacije strujanja sa slobodnom površinom, uz razvoj numeričkih metoda i stalan porast mogućnosti računala, postaju dominantni alat za istraživanje i primjenu na problemima strujanja u otvorenim vodotocima. Jednodimenzionalni, dvodimenzionalni i trodimenzionalni numerički modeli strujanja sa slobodnom površinom opisani su, testirani i uspoređeni na dva test-primjera, od kojih je jedan temeljen na laboratorijskom eksperimentu namjenjenom upravo za testiranje numeričkih modela strujanja u otvorenim kanalima. Dodatno su opisani postupci napredne praktične primjene na zahtjevnim realnim problemima propagacije poplavnog vala nastalog uslijed pucanja brane, određivanja poplavnih linija, analize mogućih regulacija riječnog korita te optimalnog pokretanja crpke. Time je pokazana praktična upotrebljivost 1D i 2D modela plitkih voda. Saznanja dobivena ovako provedenom analizom i ocjenom korištenih numeričkih modela olakšavaju izbor primjerenog numeričkog modela strujanja sa slobodnom površinom i njegovu ispravnu upotrebu na zadanom inženjerskom ili istraživačkom problemu.

## Abstract

With recent development of numerical methods and increasing computational power, numerical simulations of free surface flow are becoming the main tool for open channel flow research and application. Numerical models of 1D, 2D and 3D free surface flow are described, tested and compared in two test-cases, one of which was based on a laboratory experiment designed precisely for the testing of the open channel flow models. Furthermore, advanced practical applications on difficult real problems of dam break flood wave propagation, river flood lines prediction, watercourse reconstruction effects analysis and optimal pump start up are demonstrated. With these examples the practical usability of 1D and 2D shallow water flow models is illustrated. The performed analysis and validation of the used numerical models make easier the selection of the most suitable numerical model for the free surface flow modeling and its proper employment on a given engineering or research problem.



## Predgovor

Zahvaljujem se mentorici doc. dr. sc. Nelidi Črnjarić-Žic na smjernicama i pomoći pri izradi ovog rada, kao i prof. dr. sc. Luki Sopti na trajnom vodstvu kroz znanstvena istraživanja na području mehanike fluida i numeričkog modeliranja.

Zahvalnost dugujem i dr. sc. Ladi Kranjčeviću te prof. dr. sc. Senki Maćešić na pomoći i savjetima, kao i mr. sc. Jerku Škifiću, Bojanu Crnkoviću te ostalim kolegama iz moje radne grupe na kontinuiranoj uspješnoj suradnji u znanstvenom i stručnom radu iz kojeg je proizašao ovaj rad.

Na kraju, posebno sam zahvalan mojoj supruzi Maji na potpori i pomoći pri izradi grafičkih sadržaja za potrebe ovog rada.

## Sadržaj

1. Uvod .....	1
2. Matematički modeli strujanja sa slobodnom površinom .....	3
2.1. Jednodimenzionalni matematički model strujanja plitkih voda .....	4
2.1.1. Zakoni očuvanja za strujanje u otvorenim kanalima .....	5
2.1.1.1. Zakon očuvanja mase .....	6
2.1.1.2. Zakon očuvanja količine gibanja .....	8
2.1.2. Modeliranje trenja .....	12
2.1.3. Sustav 1D jednadžbi plitkih voda .....	15
2.1.4. Rubni uvjeti u 1D modelu plitkih voda .....	17
2.2. Dvodimenzionalni matematički model strujanja plitkih voda .....	18
2.2.1. Sustav 2D jednadžbi plitkih voda .....	20
2.2.2. Rubni uvjeti za 2D model plitkih voda .....	22
2.3. Trodimenzionalni matematički model strujanja sa slobodnom površinom .....	23
2.3.1. Zakoni očuvanja u 3D jednadžbama strujanja .....	23
2.3.2. Sustav 3D jednadžbi strujanja nestišljivog fluida .....	24
2.3.3. Modeliranje turbulentnog strujanja .....	26
2.3.4. Modeliranje strujanja sa slobodnom površinom .....	28
2.3.4.1. Metoda <i>Volume of Fluid</i> (VOF) .....	30
2.3.5. Rubni uvjeti za 3D jednadžbe strujanja sa slobodnom površinom .....	31
3. Numerički modeli strujanja sa slobodnom površinom .....	33
3.1. Numeričko rješavanje jednadžbi očuvanja .....	33
3.1.1. Diskretizacijske metode .....	34
3.1.2. Numeričke sheme .....	36
3.2. Numerički model za 1D jednadžbe plitkih voda .....	38
3.2.1. Dobro balansirana Q-shema prvog reda točnosti za 1D model plitkih voda .....	38
3.2.2. Numeričko tretiranje rubnih uvjeta u 1D modelu plitkih voda .....	40
3.3. Numerički model za 2D jednadžbe plitkih voda .....	43
3.3.1. Dobro balansirana Q-shema prvog reda točnosti za 2D model plitkih voda .....	43
3.3.2. Numeričko tretiranje rubnih uvjeta u 2D modelu plitkih voda .....	45
3.4. Numerički model za 3D jednadžbe strujanja sa slobodnom površinom .....	47
3.4.1. Numeričke sheme za Navier-Stokes jednadžbe .....	47
3.4.1.1. SIMPLE metoda .....	49
3.4.2. Numeričke sheme za VOF metodu .....	51
3.4.3. Numeričko tretiranje rubnih uvjeta za 3D numerički model strujanja sa slobodnom površinom .....	52



4. Usporedba modela strujanja sa slobodnom površinom.....	55
4.1. Stacionarno transkritično strujanje na preljevu.....	55
4.1.1. Opis test-primjera.....	56
4.1.1.1. Analitičko rješenje za strujanje bez hidrauličkih gubitaka .....	56
4.1.2. Simulacija 1D modelom plitkih voda .....	57
4.1.3. Simulacija 2D modelom plitkih voda .....	59
4.1.4. Simulacija 3D modelom strujanja sa slobodnom površinom .....	60
4.1.5. Usporedba dobivenih rezultata.....	63
4.2. Pucanje brane u kanalu sa pregibom od 45° .....	64
4.2.1. Opis test-primjera.....	65
4.2.2. Simulacija 2D modelom plitkih voda .....	67
4.2.3. Simulacija 3D modelom strujanja sa slobodnom površinom .....	70
4.2.4. Usporedba dobivenih rezultata.....	73
5. Primjena modela strujanja sa slobodnom površinom .....	77
5.1. Propagacija poplavnog vala nastalog uslijed pucanja brane .....	78
5.1.1. Uvodno o pucanju brane .....	78
5.1.2. Akumulacija Tribalj .....	80
5.1.3. Izgradnja digitalnog modela poplavnog područja.....	82
5.1.4. Postavljanje 2D numeričkog modela .....	84
5.1.5. Simulacije propagacije poplavnog vala .....	87
5.1.6. Postprocesiranje rezultata i analiza .....	88
5.2. Određivanje poplavnih linija vodotoka.....	95
5.2.1. Svrha određivanja poplavnih linija vodotoka .....	96
5.2.2. Problematika poplavlivanja u dolini rijeke Čabranke.....	96
5.2.3. Postavljanje 1D numeričkog modela i provedba simulacija strujanja .....	99
5.2.4. Izrada karte rizika od poplava.....	102
5.3. Analiza učinaka moguće regulacije riječnog korita .....	105
5.3.1. Problem poplavlivanja u mjestu Kuželj .....	105
5.3.2. Postavljanje 2D numeričkog modela .....	107
5.3.3. Provedba simulacija za moguće varijante regulacije .....	111
5.3.3.1. Simulacije na postojećoj geometriji korita Kupe i V. Belice.....	111
5.3.3.2. Simulacije sa uklonjenim sprudom na Kupi .....	112
5.3.3.3. Simulacije sa uklonjenim sprudom na Kupi i korekcijom geometrije ušća V. Belice .....	112
5.3.3.4. Simulacije sa izgrađenim zidom na lijevoj obali V. Belice .....	113
5.3.4. Izbor optimalne varijante regulacije .....	114
5.4. Optimalno pokretanje crpke.....	114
5.4.1. Uvodno o problemu pokretanja crpke CHE Fužine.....	115

5.4.2. Postavljanje 1D modela i provedba simulacija strujanja.....	116
5.4.3. Zaključno o optimalnom pokretanju crpke CHE Fužine.....	119
6. Zaključak .....	121
Literatura .....	123
Popis oznaka i simbola .....	127



# 1. Uvod

Tradicionalno nezamjenjiva eksperimentalna ispitivanja u mehanici fluida ubrzano bivaju potisnuta od strane računalnih simulacija koje, uz razvoj numeričkih metoda i stalan porast mogućnosti računala, postaju dominantni način istraživanja i primjene. Time laboratorijski eksperimenti postaju bitno skuplja i vremenski dugotrajnija metoda kojoj se pribjegava samo kada je to zaista nužno.

Praktična upotreba numeričkih modela strujanja sa slobodnom površinom potvrdila se kao prikladna i opravdana, a brz razvoj numeričkog modeliranja uvodi sve moćnije modele u istraživačku praksu i praktičnu primjenu. Tako sve bolja praktična provjerenost dvodimenzionalnog modela plitkih voda te napredak u tehnologiji geodetskih mjerenja polako potiskuju u praksi još uvijek rašireniji jednodimenzionalni model plitkih voda, koji se sada smatra optimalnim jedino za opis izrazito jednodimenzionalnog strujanja na velikim domenama (rijeke i ostali veći vodotoci). Sa druge strane, trodimenzionalni modeli strujanja sa slobodnom površinom se već neko vrijeme koriste za probleme manjih skala, kao što su modeliranje mjehurića, mlazova i sl. No, u novije se vrijeme trodimenzionalni modeli uspješno afirmiraju i kao alati za simulacije strujanja u otvorenim kanalima na manjim ili jednostavnijim domenama (strujanje u spremnicima, na hidrotehničkim građevinama, u okolini *off-shore* objekata, itd.), gdje polako zamjenjuju prije eventualno korišteni dvodimenzionalni model plitkih voda.

S obzirom da ograničeni računalni resursi uvijek prisiljavaju na pažljiv izbor optimalnog numeričkog modela za zadani problem, poznavanje mogućnosti i ograničenja svakog od potencijalno primjenjivih modela postaje ključno. U tom smislu cilj ovog rada je pokazati i međusobno usporediti mogućnosti jednodimenzionalnih, dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih numeričkih modela strujanja sa slobodnom površinom.

Na početku ovog rada detaljno su opisani 1D, 2D i 3D matematički modeli strujanja sa slobodnom površinom odnosno zakoni očuvanja iz kojih oni proizlaze, nakon čega su opisane numeričke metode na temelju kojih su formirani upotrebljivi numerički modeli. Time su definirana cjelovita rješenja za modeliranje strujanja sa slobodnom površinom.

Opisani numerički modeli strujanja sa slobodnom površinom testirani su i uspoređeni na dva test-primjera, od kojih je jedan temeljen na laboratorijskom eksperimentu namjenjenom upravo za testiranje modela strujanja sa slobodnom površinom.

Značajan dio rada posvećen je praktičnoj primjeni gdje su opširno opisani postupci napredne primjene 1D i 2D modela strujanja sa slobodnom površinom na više raznovrsnih zahtjevnih realnih problema: propagacija poplavnog vala nastalog uslijed pucanja brane, određivanje poplavnih linija rijeke, analiza mogućih regulacija riječnog korita te optimalno pokretanje crpke.



Cjelokupna slika dobivena ovako provedenom analizom i ocjenom korištenih numeričkih modela služi kao njihova validacija te pridonosi izboru optimalnog numeričkog modela strujanja sa slobodnom površinom i njegovu pravilnu upotrebu na zadanom inženjerskom ili znanstveno-istraživačkom problemu.

## 2. Matematički modeli strujanja sa slobodnom površinom

Strujanje fluida sa slobodnom površinom se u svom najopćenitijem obliku može modelirati pomoću standardnih Navier-Stokesovih jednadžbi koje opisuju trodimenzionalno nestacionarno strujanje nestišljivog fluida. U cilju određivanja lokacije točaka slobodne površine nužno je modelirati dvofazno strujanje (tipično voda-zrak), za što je do danas razvijeno više numeričkih tehnika.

Trenutno najkorištenija među spomenutim tehnikama modeliranja strujanja sa slobodnom površinom je *Volume of Fluid* (VOF) metoda. Ova metoda je razvijena specijalno za probleme preciznog lociranja slobodne površine između dviju ili više faza i do danas se pokazala kao najpraktičnija.

S obzirom da se modeliranje strujanja sa slobodnom površinom pomoću 3D Navier-Stokesovih jednadžbi temelji na najopćenitijoj matematičkoj formulaciji strujanja fluida, može se očekivati i postizanje najveće moguće točnosti. No, praktični problemi kao što su vrlo visoki zahtjevi na računalne resurse i nestabilnost rješavača onemogućavaju primjenu ovakvih modela na većinu standardnih inženjerskih problema strujanja sa slobodnom površinom, gdje spadaju i hidrotehnički problemi strujanja u otvorenim vodotocima.

Stoga se u praktičnoj primjeni trodimenzionalno modeliranje strujanja sa slobodnom površinom najčešće koristi za simulacije strujanja na manjim domenama: u spremnicima (punjenje i pražnjenje, ljuljanje mase fluida, stratifikacija), segmentima otvorenih vodotoka (lokalni problemi poput preljeva i sl.), za simulacije mlazova, mjehurića itd.

U cilju dobivanja matematičkog modela strujanja sa slobodnom površinom veće praktične upotrebne vrijednosti moguće je Navier-Stokesove jednadžbe reducirati na dvodimenzionalni model uz uvjet slobodne površine i pretpostavku usrednjenja brzine po dubini. U tako postavljenom modelu tlak se aproksimira hidrostatskim tlakom, a brzina se smatra konstantnom po dubini sloja.

Ovakav model s dovoljnom točnošću opisuje nestacionarna strujanja obuhvaćena zajedničkim nazivom „strujanje plitkih voda“, pod čime se podrazumijeva takav tip strujanja vode kod kojeg je dubina vode relativno malena u usporedbi s valnom duljinom poremećaja (npr. poplavnog vala). Pod tako definirano strujanje plitkih voda mogu spadati: strujanje vode u rijekama i kanalima, širenje poplavnog vala, pa čak i propagacija plimnih valova.

Matematički model koji opisuje strujanje plitkih voda određen je tzv. jednadžbama plitkih voda ili Saint Venantovim jednadžbama, koje su temeljene na fizikalnim zakonima



očuvanja mase i količine gibanja. U prirodi postoji mnogo tipova strujanja koji se mogu dovoljno točno aproksimirati matematičkom teorijom plitkih voda, no ovaj se rad isključivo bavi problematikom strujanja u otvorenim kanalima i širenja poplavnog vala.

Jednodimenzionalni (1D) model strujanja ispravno je primijeniti na strujanje vode u rijekama i otvorenim kanalima, gdje fluid struji dominantno u jednom smjeru. Ako voda struji na način da se plošno razlijeva po terenu, tada se primjenjuje dvodimenzionalna (2D) analiza. U slučajevima kada je osim dominantnog smjera glavne struje u kanalu izraženo i sekundarno, dvodimenzionalno strujanje, nužno je analizu vršiti pomoću dvodimenzionalnog modela. Dvodimenzionalno strujanje nastaje iz više razloga: kao posljedica opstrujavanja raznih prepreka u vodi (npr. mosni stupovi, ade), zbog same geometrije kanala (npr. meandriranje zavojite rijeke, vrtloženje u proširenjima i akumulacijama), itd. Analogno tome, na mjestima u otvorenom kanalu gdje je strujanje izrazito trodimenzionalno (npr. u zoni snažnog miješanja neposredno ispod preljeva), model plitkih voda neće moći detaljno opisati danu fizikalnu pojavu, pa je strujanje potrebno modelirati 3D modelom strujanja sa slobodnom površinom.

Treba napomenuti da je uvijek potrebno izabrati onaj model koji je primjeren analizi koja se provodi. Dvodimenzionalni model je mnogostruko složeniji od jednodimenzionalnog te zahtijeva bitno veće proračunske resurse, no ponekad (npr. ovisno o dostupnosti prikladnih geodetskih podataka) može se pokazati i jednostavnijim za upotrebu. S druge strane, jednodimenzionalni model je još uvijek pouzdaniji i mnogo brži, mada u konačnici kroz rezultat daje manje informacija. U slučajevima kada se npr. istražuju globalne karakteristike strujanja u otvorenom kanalu, ali se na manjem broju lokacija pojavljuje i izlivanje, može se koristiti i tzv. hibridni 1D-2D model. Dakle, može se zaključiti da je potreban detaljan uvid u fizikalni problem i precizno definiranje cilja analize prije nego se izabere optimalni model.

S obzirom da jednadžbe matematičkog modela strujanja fluida sa slobodnom površinom predstavljaju mješoviti početno-rubni problem, problem je dobro postavljen tek ako su zadani i početni i rubni uvjeti. Kako promjena broja i vrste rubnih uvjeta može rezultirati snažnim promjenama u rješenju unutar proračunske domene, implementacija rubnih uvjeta u numeričkoj shemi predstavlja jednu vrlo delikatnu problematiku.

Također, pitanje izbora prikladnih rubnih uvjeta može se u praksi pokazati vrlo složenim. Ponekad čak i mogućnost proizvoljnog izbora lokacije ruba domene i rubnog uvjeta (npr. u slučaju modeliranja segmenta vodotoka koji nije fizički ograničen preljevom, branom, jezerom ili sl.) može uzrokovati probleme i nestabilnost pri modeliranju ([15]). Primjena numeričkog modeliranja na realne probleme pokazuje da je bez većeg iskustva često vrlo teško pravilno izabrati i upotrijebiti rubne uvjete.

## 2.1. Jednodimenzionalni matematički model strujanja plitkih voda

Jednadžbe plitkih voda moguće je izvesti pojednostavljenjem Navier-Stokesovih jednadžbi za trodimenzionalno strujanje sa slobodnom površinom. Jednodimenzionalne jednadžbe plitkih voda se tako mogu dobiti usrednjenjem Navier-Stokesovih jednadžbi po poprečnom presjeku kanala (okomito na smjer strujanja).

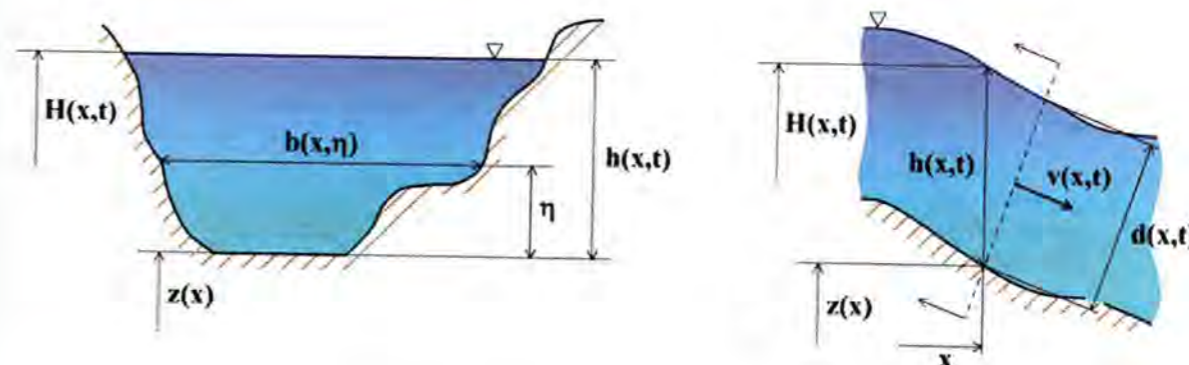
Ipak, jasniji način dobivanja jednadžbi plitkih voda je primjenom zakona očuvanja mase i zakona očuvanja količine gibanja na kontrolni volumen kanala.

Ovdje treba napomenuti da kod strujanja fluida treba razlikovati dva osnovna tipa gibanja: konvekcija i difuzija. Ukupni proces gibanja sastoji se od kombinacije fenomena čiste konvekcije i difuzije, s time da je potrebno imati na umu da je, s makroskopskog gledišta, proces konvekcije osnovni mehanizam, dok su efekti difuzije bitno nižeg reda veličine.

U nastavku opisani zakoni očuvanja stoga zanemaruju efekte viskoznosti i difuzije. Ovo pojednostavljenje pokazuje se kao opravdano, tim više što numerička greška nastala pri modeliranju konvekcije često može biti znatno veća od samog realnog upliva fizikalne difuzije.

### 2.1.1. Zakoni očuvanja za strujanje u otvorenim kanalima

Strujanje u otvorenim kanalima karakterizira slobodna površina koja je izložena atmosferskom tlaku. Ovdje izvedene jednadžbe opisuju jednodimenzionalno nestacionarno strujanje fluida u otvorenom kanalu promjenjivog poprečnog presjeka. U nastavku su prikazani poprečni i uzdužni presjeci sekcije kanala te osnovne veličine (Slika 2.1).



Slika 2.1. Poprečni i uzdužni presjek kanala

Nezavisne varijable su prostorna varijabla  $x$  i vremenska varijabla  $t$ . Brzina strujanja  $v(x,t)$  definira se kao prosječna brzina u presjeku kanala na mjestu  $x$  usmjerena okomito na poprečni presjek, dok se dubina toka  $h(x,t)$  definira kao vertikalna udaljenost najniže točke presjeka kanala na mjestu  $x$  od slobodne površine. (Ponekad je praktičnije koristiti razinu slobodne površine  $H(x,t)$  iznad određene referentne visine, gdje se obično kao referentna visina koristi nulta nadmorska visina.) Pretpostavlja se da je nagib kanala relativno mali, tako da je dubina mjerena normalno na smjer strujanja  $d(x,t)$  približno jednaka vertikalnoj dubini  $h(x,t)$ . Visina dna kanala označena je sa  $z(x)$ .

Omočena površina poprečnog presjeka kanala  $A = A(x,t)$  (tj. površina poprečnog presjeka strujne cijevi) definirana je kao:



$$A = \int_0^h b d\eta \quad (2.1)$$

gdje je  $b = b(x, \eta)$  širina kanala na mjestu  $x$  i visini  $\eta$ . Volumni protok kroz poprečni presjek  $Q = Q(x, t)$  definiran je kao:

$$Q = \int_0^h v \cdot b d\eta. \quad (2.2)$$

Za potrebe modeliranja jednodimenzionalnog strujanja za opis stanja u poprečnom presjeku kanala bit će dovoljne gore definirane dvije varijable: omočena površina poprečnog presjeka  $A$  i protok  $Q$ . (Iz ove dvije varijable u svakom se trenutku lako mogu rekonstruirati dubina vode i brzina strujanja.) Stoga su dovoljne dvije jednačbe za analizu strujanja i to su jednačba kontinuiteta s jednačbom očuvanja količine gibanja ili s jednačbom očuvanja energije. Jednačba očuvanja količine gibanja i jednačba očuvanja energije su ekvivalentne, ako su funkcije koje opisuju dubinu vode i brzinu strujanja neprekidne. No, s obzirom da strujanje može imati diskontinuitete (npr. hidraulički skok ili plimni val), bolje je koristiti jednačbu očuvanja količine gibanja jer kod nje, za razliku od energetske jednačbe, nije potrebno znati koliki su energetske gubici u diskontinuitetima.

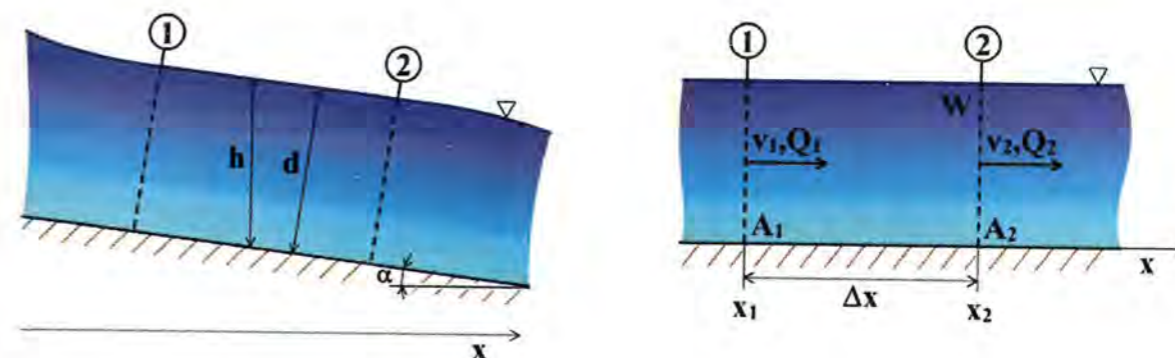
Kod izvođenja jednačbe kontinuiteta i jednačbe očuvanja količine gibanja za slučaj jednodimenzionalnog nestacionarnog strujanja u otvorenom kanalu koristit će se sljedeće pretpostavke:

- Raspodjela tlakova je hidrostatska. Ta pretpostavka vrijedi ukoliko strujnice nisu jako zakrivljene.
- Nagib dna kanala je dovoljno malen, tako da su dubine vode mjerene okomito na dno kanala i one mjerene vertikalno približno iste ( $h \approx d$ ).
- Brzina strujanja je konstantna po poprečnom presjeku kanala.
- Hidraulički gubici kod nestacionarnog toka mogu se uzeti jednakima onima kod stacionarnog pri istoj brzini, tako da se mogu koristiti jednačbe za otpore strujanja pri stacionarnom toku, kao što je npr. Manningova jednačba.

### 2.1.1.1. Zakon očuvanja mase

Promatra se fiksirani kontrolni volumen  $W$  između presjeka 1 i 2 (Slika 2.2), duljine  $\Delta x$ , na koji se primjenjuje zakon očuvanja mase u integralnom obliku:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dV + \int_S \rho v n dA = \rho Q_L. \quad (2.3)$$



Slika 2.2. Kontrolni volumen

Pretpostavljen je mali nagib dna  $S_b = \tan \alpha$ , tako da je  $h \approx d$  (Slika 2.2). Nadalje, pretpostavlja se da je fluid nestišljiv tako da se iz oba člana može izlučiti i pokratiti gustoća fluida ( $\rho = \text{const.}$ ).

Također se može pretpostaviti da, osim dotjecanja kroz presjek 1 i istjecanja kroz presjek 2, postoji i bočni dotok ili istjecanje, npr. uslijed kiše, ishlapljivanja ili prelijevanja preko obala rijeke. Takav doprinos definira se bočnim dotokom  $Q_L = Q_L(x, t)$  koji je pozitivan za utjecanje.

Prvi član jednačbe (2.3) predstavlja lokalnu promjenu mase u kontrolnom volumenu i s obzirom da se radi o jednodimenzionalnom strujanju uvodi se  $dV = A dx$ . Uzimajući u obzir da se vrši integracija po fiksiranom kontrolnom volumenu, prvi član gornje jednačbe transformira se na sljedeći način:

$$\frac{d}{dt} \int_W dV = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} A dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial t} dx.$$

Drugi član jednačbe (2.3) predstavlja protok mase kroz granicu kontrolnog volumena. Razmatranjem prosječnih brzina u presjecima 1 i 2 te uz uvođenje volumnog protoka  $Q = vA$  slijedi:

$$\int_S v n dA = A_2 v_2 - A_1 v_1 = Q_2 - Q_1,$$

tako da jednačba (2.3) prelazi u:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial t} dx + Q_2 - Q_1 = Q_L. \quad (2.4)$$

Ako su funkcije  $A = A(x, t)$  i  $Q = Q(x, t)$  i njihove derivacije neprekidne, tada se može primijeniti teorem o srednjoj vrijednosti čiji je opći oblik:



$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = f(\xi)(x_2 - x_1) \quad x_1 < \xi < x_2 \quad (2.5)$$

Sada se nakon uvrštavanja izraza

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} dx = (x_2 - x_1) \frac{\partial A(\xi_A, t)}{\partial t}$$

i

$$Q_2 - Q_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dx = (x_2 - x_1) \frac{\partial Q(\xi_Q, t)}{\partial x}$$

u jednadžbu (2.4) te dijeljenja sa  $(x_2 - x_1)$ , uz

$$x_1, x_2 \rightarrow x \Rightarrow \xi_A, \xi_B \rightarrow x$$

dobiva konačni izgled jednadžbe kontinuiteta u konzervativnom obliku:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L, \quad (2.6)$$

gdje je bočni dotok definiran dotokom po jedinici duljine kanala  $q_L = q_L(x,t)$ .

### 2.1.1.2. Zakon očuvanja količine gibanja

Prema drugom Newtonovom zakonu promjena količine gibanja  $M$  u kontrolnom volumenu  $W$  mora biti jednaka sumi svih sila koje djeluju na fluid:

$$\frac{dM}{dt} = \sum F. \quad (2.7)$$

Nadalje, prema transportnom teoremu vrijedi

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho v dV + \int_S \rho v \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Uz analogne transformacije kao kod zakona očuvanja mase, tj. poslije izlučivanja člana  $\rho = \text{const.}$  i uvođenja volumnog protoka  $Q = vA$ , volumni integral prelazi u

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho v dV = \rho \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} v A dx = \rho \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} Q dx = \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial t} dx,$$

dok član sa površinskim integralom, koji predstavlja protok količine gibanja kroz granicu kontrolnog volumena, nakon integracije prelazi u

$$\int_S \rho v \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \rho v_2 A_2 v_2 - \rho v_1 A_1 v_1 = \rho Q_2 v_2 - \rho Q_1 v_1.$$

Sada jednadžba (2.7) prelazi u

$$\sum F = \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial t} dx + \rho Q_2 v_2 - \rho Q_1 v_1$$

te nakon primjene teorema o srednjoj vrijednosti na isti način kao kod jednadžbe kontinuiteta

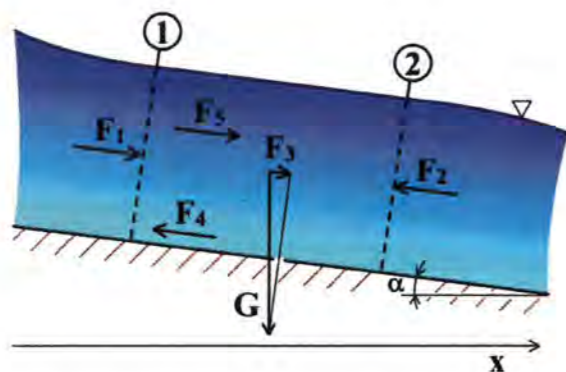
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} dx = (x_2 - x_1) \frac{\partial Q(\xi_Q, t)}{\partial t},$$

$$Q_2 v_2 - Q_1 v_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(Qv)}{\partial x} dx = (x_2 - x_1) \frac{\partial(Qv)}{\partial x},$$

slijedi

$$\frac{\sum F}{\rho(x_2 - x_1)} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Qv)}{\partial x}. \quad (2.8)$$





Slika 2.3. Sile na fluid u kontrolnom volumenu

Suma sila koje djeluju na fluid u kontrolnom volumenu predstavlja zbroj tlačne sile, sile teže, sile trenja i sile uslijed promjene poprečnog presjeka (Slika 2.3), uz zanemarivanje Coriolisovog ubrzanja i eventualnih naprezanja na slobodnoj površini uslijed vjetra i sl.

Tlačne sile predstavljaju umnožak hidrostatskog tlaka na dubini težišta površine poprečnog presjeka i površine poprečnog presjeka  $A$ , a na ulazu i izlazu kontrolnog volumena  $W$  možemo ih izraziti kao:

$$F_1 = \rho g I_{p,1}$$

$$F_2 = \rho g I_{p,2}$$

gdje je  $g$  ubrzanje sile teže, a  $I_p$  je zadan izrazom

$$I_p = \int_0^h (h - \eta) \cdot b(x, \eta) d\eta.$$

Zbog nagiba dna kanala  $S_b = S_b(x) = \tan \alpha$  postoji komponenta težine fluida u kontrolnom volumenu u smjeru osi  $x$  koja iznosi:

$$F_3 = \rho g \int_{x_1}^{x_2} A S_b dx, \quad (2.9)$$

gdje je nagib dna otvorenog vodotoka  $S_b$ :

$$S_b = -\frac{dz}{dx}.$$

Sila trenja fluida o dno i bočne stjenke kanala može se izraziti na analogan način kao i sila težine fluida preko tzv. nagiba trenja  $S_f = S_f(x)$  koji je jednak nagibu energetske linije nastalom uslijed trenja (tj. gradijentu hidrauličkog gubitka nastalog uslijed trenja):

$$F_4 = \rho g \int_{x_1}^{x_2} A S_f dx. \quad (2.10)$$

Nagib trenja  $S_f$  i sam pojam trenja detaljnije je obrađen u nastavku (podpoglavlje 2.1.2, str. 12).

Uslijed uzdužne promjene poprečnog presjeka kanala javlja se sila  $F_5$ :

$$F_5 = \rho g \int_{x_1}^{x_2} I_w dx,$$

gdje je  $I_w$  definirano izrazom

$$I_w = \int_0^h (h - \eta) \cdot b_x(x, \eta) \cdot d\eta,$$

a  $b_x$  izrazom:

$$b_x = \frac{\partial b}{\partial x}.$$

Uzmu li se u obzir prikazane orijentacije sila (Slika 2.3), suma svih sila iznosi:

$$\sum F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5$$

odnosno

$$\frac{\sum F}{\rho(x_2 - x_1)} = \frac{g(I_{p,1} - I_{p,2})}{x_2 - x_1} + \frac{g}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} [A(S_b - S_f) + I_w] dx. \quad (2.11)$$

Nakon primjene teorema o srednjoj vrijednosti, uz  $x_1, x_2 \rightarrow x$  slijedi:

$$\frac{\sum F}{\rho(x_2 - x_1)} = -g \frac{\partial I_p}{\partial x} + gA(S_b - S_f) + gI_w \quad (2.12)$$

Nakon uvrštavanja izraza (2.12) u (2.8) može se formulirati konzervativni oblik jednadžbe očuvanja količine gibanja:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + g \cdot I_p(x, A) \right) = g \cdot I_w(x, A) + gA \cdot (S_b - S_f) \quad (2.13)$$

Gornji izraz (2.13) kraće nazivamo jednadžba očuvanja količine gibanja.

### 2.1.2. Modeliranje trenja

U izrazu (2.10) uveden je pojam sile trenja koja ovisi o veličini tzv. nagiba trenja  $S_f$ . Nagib trenja definiran je izrazom:

$$S_f = \frac{\lambda |Q|}{8gA^2 R_H}$$

Ovdje  $R_H$  predstavlja hidraulički radijus definiran izrazom  $R_H = A/P$ , gdje je  $P$  omočeni opseg kanala. Za određivanje koeficijenta hrapavosti  $\lambda$  mogu se koristiti dva izraza:

a) Manning-Stricklerov izraz:

$$\lambda = \frac{8gn^2}{R_H^{1/3}}$$

gdje  $n$  predstavlja tzv. Manningov koeficijent trenja. Iz ovog izraza slijedi:

$$S_f = \frac{n^2 |Q|}{A^2 R_H^{4/3}} \quad (2.14)$$

b) Prandtl-Colebrookov izraz:

$$\frac{1}{\lambda} = -2 \log \left( \frac{C_1}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{e/D}{C_2} \right) \quad (2.15)$$

gdje je

$$\text{Re} = \frac{vD}{\nu} = \frac{4Q}{D\pi v}$$

Reynoldsov broj,  $D$  promjer cijevi (odnosno hidraulički promjer  $D_H = 4R_H$ ),  $\nu$  kinematička viskoznost fluida, a  $e/D$  relativna hrapavost. Ovaj izraz dobiven je eksperimentima provedenim na cijevima i vrijedi samo za turbulentno strujanje ( $\text{Re} > 2300$ ), dok kod laminarnog strujanja ( $\text{Re} < 2300$ ) koeficijent hrapavosti  $\lambda$  ovisi samo o Reynoldsovom broju i to po izrazu  $\lambda = 64/\text{Re}$ . Koeficijenti  $C_1$  i  $C_2$  ovise o tipu cijevi odnosno kanala, a razni autori predložili su različite vrijednosti za njih ([23]).

Kako je izraz (2.15) dan u implicitnom obliku, potrebno je do vrijednosti koeficijenta hrapavosti doći iteracijski. Kao početna vrijednost obično se koristi aproksimacija prema Nackabu:

$$\lambda_0 = 0,0053 + 0,4 \text{Re}^{-0,3}$$

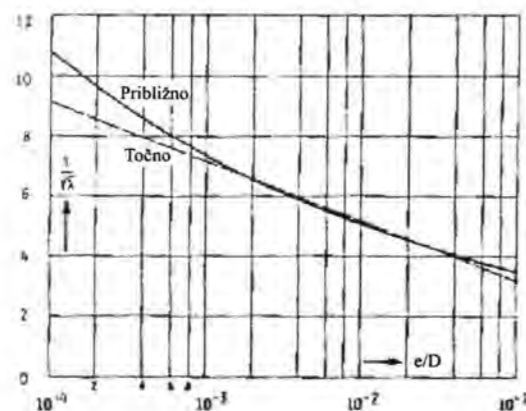
Mada već nakon nekoliko iteracija greška pada unutar granice od 1%, ipak ostaje činjenica da takvo računanje koeficijenta trenja zahtijeva duže proračunsko vrijeme.

Manning-Stricklerov izraz moguće je izvesti iz Prandtl-Colebrookove jednadžbe kao granični slučaj ( $\text{Re} = \infty$ , hidraulički hrapavo područje). Pri tome se koristi izraz za ekvivalentnu apsolutnu hrapavost odnosno ekvivalentnu veličinu zrna pijeska  $e$  prema formuli:

$$e^{1/6} = 5,87 \sqrt{2g} n,$$

a vrijednost koeficijenta  $C_2$  se uzima kao  $C_2 = 3,71$ . Na taj je način moguće koristiti Manning-Stricklerov izraz kao aproksimaciju fizikalno opravdanije Prandtl-Colebrookove jednadžbe, a njihov međusoban odnos prikazan je na dijagramu (Slika 2.4, [28]).





Slika 2.4. Otpor trenja u potpuno hrapavom području (prema Prandtl-Colebrookovom izrazu, aproksimiran upotrebom Manning-Stricklerovog izraza)

Slika 2.4 prikazuje da značajnije neslaganje krivulja postoji samo za kanale s pripadnom vrijednošću relativne hrapavosti  $e/D < 10^3$ . To neslaganje postaje to manje što je veći Reynoldsov broj. Manning-Stricklerovu formulu moguće je stoga u svakom slučaju koristiti, a posebno u slučaju velike hrapavosti, što je i najčešći slučaj pri npr. problemu širenja poplavnog vala po prirodnom tlu. Prandtl-Colebrookov izraz bilo bi bolje koristiti u slučaju simulacije strujanja po relativno glatkoj površini, mada se to u primjeni najčešće ne radi.

U praksi se za početno određivanje Manningovog koeficijenta hrapavosti mogu koristiti fotografije kanala s poznatim vrijednostima koeficijenta  $n$ , kakve se može naći u standardnoj literaturi ([11]). U nastavku su dani primjeri tipičnih vrsta vodotoka i pripadni im Manningov koeficijent (Tablica 2.1).

Tablica 2.1. Opis vodotoka i vrijednosti Manningovog koeficijenta

Opis vodotoka	Manningov koeficijent $n$
dno od pijeska i gline, obale glatke i bez vegetacije	0,030
dno od pijeska i blata, obale hrapave i jako zaraštene	0,070
dno od velikog kamenja ( $d_{50}=1,4$ m), obale od šljunka i stijena, obrasle drvećem i grmljem	0,041
dno od vrlo velikog kamenja ( $d_{50}=2,2$ m), obale također od velikog kamenja sa drvećem	0,075
dno od šljunka i kamenja ( $d_{50}=1,7$ m), lijeva obala ima grmlje koje zadire u vodu, a desna drveće	0,036
dno je uglavnom grubi pijesak i šljunak, obale su dosta strme i obrasle drvećem i grmljem	0,049

Detaljan prikaz izmjerenih i kalibriranih vrijednosti Manningovog koeficijenta u ovisnosti o vrsti i obliku kanala moguće je naći u literaturi. Pri odabiru Manningovog

koeficijenta potrebno je uzeti u obzir mnogo čimbenika: hrapavost dna vodotoka, obraslost korita, postojanje nanosa, godišnje doba, itd.

Potpuno precizno i konačno određivanje koeficijenta  $n$  moguće je tek na temelju višekratnih mjerenja razine vodene površine u danom vodotoku. Uspoređivanjem mjerenih i izračunatih vrijednosti razine vodene površine vrši se kalibracija Manningovih koeficijenata hrapavosti  $n$  duž čitavog korita. Tek nakon tako provedene kalibracije model se može smatrati potpuno dovršenim i daljnje simulacije na tom modelu mogu se smatrati izvorom pouzdanih predviđanja.

### 2.1.3. Sustav 1D jednadžbi plitkih voda

Jednadžba kontinuiteta (2.6) i jednadžba očuvanja količine gibanja (2.13) čine sustav nelinearnih hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje su poznate pod nazivom jednodimenzionalne Saint Venantove jednadžbe odnosno jednodimenzionalne jednadžbe plitkih voda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q_L \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + g \cdot I_p(x, A) \right) &= g \cdot I_w(x, A) + gA \cdot (S_b - S_f) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Napiše li se sustav u vektorskom obliku ([13], [20], [24]) nije teško pokazati da se doista radi o hiperboličkim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, x), \quad (2.17)$$

gdje su vektor stanja  $\mathbf{u}$ , fluks  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  te izvorni član  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, x)$  definirani kao:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + g I_p(x, A) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}, x) &= \begin{pmatrix} q_L \\ g I_w(x, A) + gA \left( -\frac{dz}{dx}(x) - \frac{n^2(x)Q|Q|}{A^2 R_H^{4/3}(x, A)} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Ovakva definicija sustava 1D jednadžbi plitkih voda omogućuje provođenje daljnje analize. Tako Jacobijeva matrica fluksa glasi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix},$$

gdje je brzina propagacije poremećaja (celeričnost):

$$c = \sqrt{g \frac{\partial I_p}{\partial A}(x, A)},$$

tj.

$$c = \sqrt{gh} \quad (2.18)$$

Kako su svojstvene vrijednosti Jacobijeve matrice  $\mathbf{A}$  realne i glase:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= v - c \\ \lambda^{(2)} &= v + c \end{aligned} \quad (2.19)$$

radi se o hiperboličkom sustavu. Pripadni desni svojstveni vektori su:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(2)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dok su pripadni lijevi svojstveni vektori:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^{(1)} &= \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} \lambda^{(2)} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{l}^{(2)} &= \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} -\lambda^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na kraju treba još napomenuti da je potrebno zadati početne i rubne uvjete da bi sustav uopće bio rješiv. Pod početnim uvjetom podrazumijevaju se početna (u trenutku  $t = 0$ ) dubina vode i početni protok:

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= h_0(x) \\ Q(x, 0) &= Q_0(x) \end{aligned} \quad (2.20)$$

duž cijele domene. Početno stanje može biti npr. stanje suhog terena ili stacionarno strujanje izračunato nekom prethodnom simulacijom i sl.

#### 2.1.4. Rubni uvjeti u 1D modelu plitkih voda

Da bi 1D matematički model bio potpun, nužno je definirati rubne uvjete na granicama proračunske domene. Najčešće to znači zadati rubne uvjete na otvorenoj granici odnosno na rubu numeričke mreže kroz koji voda utječe u proračunsku domenu (ulazna granica) ili pak istječe iz nje (izlazna granica).

Zadavanje rubnih uvjeta na takvoj granici ovisi o tome je li granica ulazna ili izlazna te o tipu strujanja na dotičnom rubu, koje može biti:

- podkritično ( $Fr \leq 1$ )
- nadkritično ( $Fr \geq 1$ )

$Fr$  predstavlja Froudov broj koji je definiran kao:

$$Fr = \frac{|v|}{c}$$

i predstavlja odnos intenziteta brzine strujanja i brzine propagacije poremećaja.

Sam tip strujanja ponekad je moguće predvidjeti uvidom u konfiguraciju terena (strmi padovi dna vodotoka tipično uzrokuju nadkritično strujanje), a ako to nije moguće, potrebno je provesti testne simulacije na osnovu kojih će se identificirati tip strujanja na granici.

Broj potrebnih rubnih uvjeta za jednodimenzionalni model strujanja, ovisno o tipu otvorene granice i tipu strujanja na granici, dan je u sljedećoj tablici:

Tablica 2.2. Potreban broj zadanih rubnih uvjeta u 1D modelu

Vrsta strujanja	Ulazna granica	Izlazna granica
Podkritično	1	1
Nadkritično	2	0



Stvaran broj poznatih rubnih uvjeta pri primjeni u numeričkom modelu često je veći ili manji od onog koji se smatra teoretski ispravnim (Tablica 2.2). U slučaju premalog broja zadanih informacija, najčešće se primjenjuje tzv. nulti gradijent na granici što rezultira istim vrijednostima varijabli stanja na granici i susjednim unutarnjim čvorovima. Ova metoda u najviše slučajeva vodi k dobrom i stabilnom rješenju.

U slučaju podkritičnog 1D strujanja na ulaznoj granici potrebno je definirati jedan rubni uvjet. Najprikladnije je definirati protok, a alternativno se na ulaznom rubu može zadati razinu vodnog lica.

U slučaju nadkritičnog strujanja potrebno je definirati dva rubna uvjeta na ulaznoj granici, tj. potrebno je zadati sve parametre strujanja. U praksi to znači da treba zadati protok i razinu vode, s time da se ponekad protok ili razina vode mogu uspješno aproksimirati na neki način.

Na istoku iz područja potrebno je, pri podkritičnom strujanju, definirati samo jedan rubni uvjet. Ako je moguće, najbolje je definirati razinu vode; alternativno se može zadati protok. Kompromisno rješenje je zadavanje tzv. konsumpcijske krivulje, tj.  $Q-H$  dijagrama.

Često su parametri strujanja na izlaznoj granici potpuno nepoznati, pa se tada izlazna granica definira kao „slobodni istok“. Tada je najčešće na izlaznoj granici najbolje zadati tzv. apsorpcijski rubni uvjet koji funkcionira na način da vrijednosti dubina i protoka u vanjskim fiktivnim elementima drži jednakima onima na unutrašnjoj strani granice. S obzirom da ovakav rubni uvjet na izlazu iz domene nameće uniformno strujanje, eksperimentalne simulacije iz [15] pokazuju da u slučajevima kada takvo strujanje nije realno ili sigurno (npr. kada domena modelira segment rijeke), izlazni rub treba znatno udaljiti od specifičnih interesnih područja u domeni.

U slučaju nadkritičnog strujanja na izlaznoj granici nije potrebno zadavati nikakav uvjet. U tom slučaju svi parametri strujanja dolaze iz unutrašnjosti domene, tj. informacije sa nizvodne (vanjske) strane istočnog ruba ne utječu na sliku strujanja uzvodno (u samoj domeni).

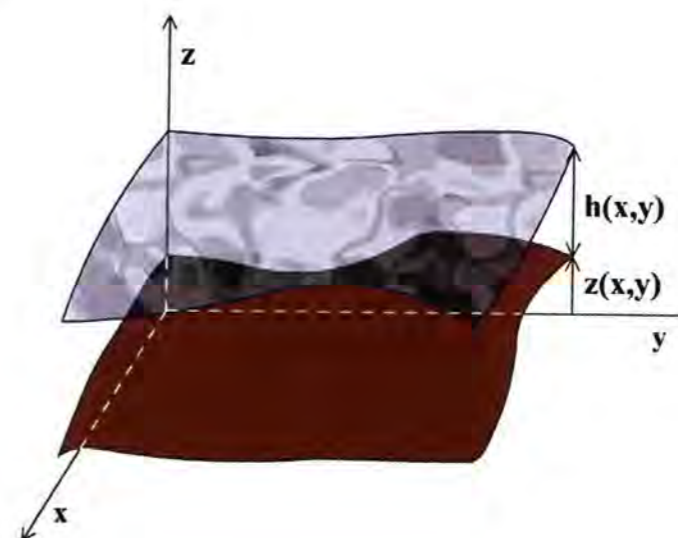
## 2.2. Dvodimenzionalni matematički model strujanja plitkih voda

U slučaju kada fluid ne struji dominantno u jednom smjeru (npr. prilikom poplavlivanja određenog područja), strujanje se ne može modelirati jednodimenzionalnim modelom. U tom slučaju, za široki spektar inženjerske upotrebe najčešće je ispravno izabrati dvodimenzionalni matematički model.

Dvodimenzionalni model strujanja u plitkim vodama temelji se na zakonu očuvanja mase i zakonu očuvanja količine gibanja za nestacionarno dvodimenzionalno strujanje plitke vode. Ove jednadžbe zapisane kao sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi nazivaju se dvodimenzionalnim jednadžbama plitkih voda ili dvodimenzionalnim Saint Venantovim jednadžbama ([3], [11], [41], [42]) i izgledaju ovako:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(v_1 h)}{\partial x} + \frac{\partial(v_2 h)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(v_1 h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( v_1^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right) + \frac{\partial(v_1 v_2 h)}{\partial y} &= g h (S_{bx} - S_{fx}) \\ \frac{\partial(v_2 h)}{\partial t} + \frac{\partial(v_1 v_2 h)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_2^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right) &= g h (S_{by} - S_{fy}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ovdje je  $z$  visina dna mjerena od zadane razine,  $h$  je dubina vode,  $t$  je vrijeme,  $x$  i  $y$  su prostorne koordinate,  $v_1$  i  $v_2$  su  $x$ - i  $y$ -komponenta vektora brzine  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , a  $g$  je ubrzanje sile teže (Slika 2.5).



Slika 2.5. Osnovne veličine kod dvodimenzionalnog strujanja u plitkim vodama

Nagibi dna u smjeru osi  $x$  i  $y$  definirani su izrazima:

$$\begin{aligned} S_{bx} &= -\frac{\partial z}{\partial x}, \\ S_{by} &= -\frac{\partial z}{\partial y}, \end{aligned}$$

dok su nagibi trenja u smjeru osi  $x$  i  $y$  definirani kao:



$$\begin{aligned} S_{fx} &= \frac{n^2 v_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{h^{4/3}} \\ S_{fy} &= \frac{n^2 v_2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{h^{4/3}}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

gdje je  $n$  Manningov koeficijent hrapavosti (Tablica 2.1).

### 2.2.1. Sustav 2D jednadžbi plitkih voda

Kao i kod jednodimenzionalnog modela, tako se i ovdje postavljeni sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (2.21) može kraće napisati u obliku koji bolje ilustrira njegovu hiperboličku prirodu ([3], [20], [24]):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{u})}{\partial y} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{x}), \quad (2.23)$$

gdje je  $\mathbf{u}$  vektor stanja,  $\mathbf{f}_1(\mathbf{u})$  komponenta fluksa u smjeru  $x$ -osi,  $\mathbf{f}_2(\mathbf{u})$  komponenta fluksa u smjeru  $y$ -osi te  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$  izvorni član. Njihove definicije izgledaju ovako:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} h \\ hv_1 \\ hv_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_1(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} hv_1 \\ hv_1^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ hv_1v_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} hv_2 \\ hv_1v_2 \\ hv_2^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{bx} - S_{fx}) \\ gh(S_{by} - S_{fy}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dvije komponente fluksa daju dvije Jacobijeve matrice, pa se promatra njihova linearna kombinacija:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \alpha_1 \mathbf{A}_1(\mathbf{u}) + \alpha_2 \mathbf{A}_2(\mathbf{u}),$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{u}) &= \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - v_1^2 & 2v_1 & 0 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{u}) &= \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 \\ c^2 - v_2^2 & 0 & 2v_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$c = \sqrt{gh}$  brzina propagacije poremećaja te  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  proizvoljan parametar.

Svojevrsne vrijednosti matrice  $\mathbf{A}$  glase:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= \alpha \cdot \mathbf{v} \\ \lambda^{(2)} &= \lambda^{(1)} + |\alpha|c, \\ \lambda^{(3)} &= \lambda^{(1)} - |\alpha|c \end{aligned} \quad (2.24)$$

iz čega se može zaključiti da se radi o hiperboličkom sustavu. Pripadni desni svojstveni vektori su:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(1)} &= \frac{1}{|\alpha|} \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha_1}{|\alpha|}c + v_1 \\ \frac{\alpha_2}{|\alpha|}c + v_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



$$\mathbf{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\alpha_1}{|\mathbf{a}|}c + v_1 \\ -\frac{\alpha_2}{|\mathbf{a}|}c + v_2 \end{pmatrix},$$

a pripadni lijevi svojstveni vektori su:

$$\mathbf{l}^{(1)} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \begin{pmatrix} \alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_2 \\ -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{l}^{(2)} = \frac{1}{2|\mathbf{a}|c} \begin{pmatrix} |\mathbf{a}|c - \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{l}^{(3)} = -\frac{1}{2|\mathbf{a}|c} \begin{pmatrix} -|\mathbf{a}|c - \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Kao i kod jednodimenzionalnih jednadžbi plitkih voda, i ovdje treba zadati početne i rubne uvjete da bi sustav bio rješiv. U ovom slučaju, početni uvjeti su inicijalna razina vode i vektori brzina:

$$\begin{aligned} h(x, y, 0) &= h_0(x, y) \\ \mathbf{v}(x, y, 0) &= \mathbf{v}_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.25)$$

po cijeloj računskoj domeni.

### 2.2.2. Rubni uvjeti za 2D model plitkih voda

Broj potrebnih rubnih uvjeta za dvodimenzionalni model strujanja, ovisno o tipu otvorene granice i tipu strujanja na granici (vidi podpoglavlje 2.1.4, str. 17), dan je u nastavku (Tablica 2.3).

Tablica 2.3. Potreban broj zadanih rubnih uvjeta u 2D modelu

Vrsta strujanja	Ulazna granica	Izlazna granica
Podkritično	2	1
Nadkritično	3	0

U slučaju podkritičnog strujanja na ulaznoj granici potrebno je definirati dva rubna uvjeta. Najprikladnije je definirati protok i smjer strujanja, s time da se smjer strujanja često može jednostavno zadati normalnim na uočnu granicu. Umjesto protoka, na ulaznom rubu moguće je zadati i razinu vodnog lica.

U slučaju nadkritičnog strujanja potrebno je definirati tri rubna uvjeta na ulaznoj granici, tj. potrebno je zadati sve parametre strujanja. U praksi to znači da treba zadati protok, razinu vode i smjer strujanja, s time da se ponekad protok ili razina vode mogu uspješno aproksimirati na neki način.

Na istoku iz područja potrebno je, pri podkritičnom strujanju, definirati jedan rubni uvjet: razinu vode ili brzinu istjecanja odnosno eventualno protok. Osim toga, moguće je zadati tzv. konsumpcijsku krivulju, tj.  $H(Q)$  dijagram.

Nametanje razine vode na izlaznoj granici zahtijeva da proračunska domena dovoljno duboko zadire u područje mirne razine vode (tipično more ili jezero), tako da se na samoj izlaznoj granici više ne osjeća propagacija poremećaja iz unutrašnjosti domene (Slika 5.9).

Ako su parametri strujanja na izlaznoj granici potpuno nepoznati, na izlaznoj granici može se nametnuti „slobodni istok“ odnosno apsorpcijski rubni uvjet koji definira nepromjenjivost varijabli na granici, tj. provodi ekstrapolaciju nultog reda.

## 2.3. Trodimenzionalni matematički model strujanja sa slobodnom površinom

Navier-Stokesove jednadžbe (Claude-Louis Navier, George Gabriel Stokes) zajedno sa jednadžbama zakona očuvanja mase i energije predstavljaju sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koji najopćenitije opisuje strujanje viskoznog fluida. U svom općem obliku i pomoću mnogih reduciranih modela ove jednadžbe koriste se za modeliranje strujanja u atmosferi, oceanskih strujanja, strujanja u cijevima, opstrujavanja tijela itd. Kao takve imaju široku primjenu u praksi: u konstrukciji prijevoznih sredstava (automobila, aviona, brodova i sl.), biotehnologiji i medicini (npr. modeliranje strujanja u krvnim žilama), hidraulici, ekologiji, itd.

### 2.3.1. Zakoni očuvanja u 3D jednadžbama strujanja

Trodimenzionalni matematički model strujanja izvodi se iz zakona očuvanja mase, količine gibanja i energije na kontrolnom volumenu. S obzirom da se u ovom radu ne tretiraju problemi vezani za jednadžbu očuvanja energije (tipično su to problemi stlačivog fluida i



termodinamički problemi prijenosa topline), u nastavku će se govoriti samo o jednadžbama očuvanja mase i količine gibanja.

Jednadžba zakona očuvanja mase obično se naziva i jednadžbom kontinuiteta, a u konzervativnom obliku glasi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = S_m, \quad (2.26)$$

gdje je  $\rho$  gustoća,  $t$  vrijeme, a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektor brzine ( $v_1, v_2$  i  $v_3$  su komponente brzine u smjeru prostornih koordinata  $x, y$  i  $z$ ) te  $S_m$  izvorni član koji modelira izvore mase.

Jednadžbe zakona očuvanja količine gibanja zovu se Navier-Stokesove jednadžbe i u konzervativnom obliku mogu se zapisati kao:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.27)$$

gdje je  $p$  tlak,  $\mathbf{g}$  vektor ubrzanja sile teže (odnosno totalni vektor masenih sila), a  $\boldsymbol{\tau}$  tenzor naprezanja, za newtonovski fluid zadan kao:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left[ (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} \right],$$

gdje je  $\mu$  dinamička viskoznost, a  $\mathbf{I}$  jedinična matrica. Desni član u ovom izrazu modelira dilatacije nastale uslijed stišljivosti fluida i kao takav nestaje pri modeliranju nestišljivog fluida.

Strujanje fluida sa slobodnom površinom najčešće podrazumijeva dvofazno strujanje vode i zraka. Voda je slabo stlačiv medij koji se gotovo uvijek modelira kao nestišljiv fluid, dok efekti kompresibilnosti kod zraka postaju značajni tek za veće brzine strujanja (Machov broj  $Ma > 0,1$ ). Unatoč tome, u slučaju strujanja mješavine nestišljivih fluida gustoća je promjenjiva u prostoru i vremenu, tj.  $\rho = \rho(x, y, z, t) \neq const.$ , a isto vrijedi i za viskoznost  $\mu$ . Stoga se jednadžbe (2.26)-(2.27) kod strujanja sa slobodnom površinom ne mogu pojednostaviti na način na koji se zbog uvjeta nestišljivosti pojednostavljaju kod strujanja jednog fluida.

### 2.3.2. Sustav 3D jednadžbi strujanja nestišljivog fluida

Nestacionarno strujanje nestišljivog fluida u kanalu opisano je sustavom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u konzervativnoj formi (2.26)-(2.27), koje možemo zapisati u vektorskom obliku ([1]):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{u}, p)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{u}, p)}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{f}_3(\mathbf{u}, p)}{\partial z} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (2.28)$$

gdje je  $\mathbf{u}$  vektor stanja,  $\mathbf{f}_1(\mathbf{u})$  komponenta fluksa u smjeru  $x$ -osi,  $\mathbf{f}_2(\mathbf{u})$  komponenta fluksa u smjeru  $y$ -osi,  $\mathbf{f}_3(\mathbf{u})$  komponenta fluksa u smjeru  $z$ -osi te  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  izvorni član. Njihove definicije izgledaju ovako:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{u}, p) = \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho v_1 v_2 - \tau_{xy} \\ \rho v_1 v_3 - \tau_{xz} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{u}, p) = \begin{pmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_2 v_1 - \tau_{yx} \\ \rho v_2^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho v_2 v_3 - \tau_{yz} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3(\mathbf{u}, p) = \begin{pmatrix} \rho v_3 \\ \rho v_3 v_1 - \tau_{zx} \\ \rho v_3 v_2 - \tau_{zy} \\ \rho v_3^2 + p - \tau_{zz} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} S_m \\ \rho g_1 \\ \rho g_2 \\ \rho g_3 \end{pmatrix}.$$

Iz gornjih izraza je vidljivo da se ovaj sustav jednadžbi ne može riješiti bez dodatnih uvjeta jer ni vektor stanja  $\mathbf{u}$  ni jednadžba kontinuiteta (2.26) ne sadrže osnovnu varijablu tlaka  $p$ . Taj problem rješava se na način da se jednadžba kontinuiteta modificira tako da postane zapravo jednadžba za određivanje tlaka.

Za to je nužno da se sustav rješava segregirano, tj. svaka jednadžba zasebno, što u ovom slučaju znači da se brzine preliminarno izračunate iz jednadžbe očuvanja količine gibanja u sljedećem koraku ubacuju u jednadžbu kontinuiteta. Preliminarno izračunate brzine ne zadovoljavaju u potpunosti jednadžbu kontinuiteta te se iz tako dobivenog disbalansa mase izračunava korekcija vrijednosti tlaka. Ovaj postupak detaljnije je opisan u podpoglavlju 3.4.1.1 (str. 49).



### 2.3.3. Modeliranje turbulentnog strujanja

Strujanje svake pojedine faze u višefaznom strujanju sa slobodnom površinom u općem slučaju nužno je modelirati nekim od turbulentnih modela. Do danas nije razvijen univerzalno primjenjiv turbulentni model, pa se za raznovrsne primjene najčešće koriste sljedeći modeli:

- $k$ - $\varepsilon$  model
- $k$ - $\omega$  model
- $v^2$ - $f$  model
- RSM (*Reynolds Stress Model*)
- LES (*Large Eddy Simulation*)

Izbor turbulentnog modela najčešće ovisi o fizikalnim specifičnostima problema koji se rješava, dostupnim računalnim resursima te zahtijevanoj točnosti.

Za potrebe simulacija provedenih u sklopu ovog rada korišten je  $k$ - $\varepsilon$  model, koji je dvojednadžbeni poluempirijski model turbulentnog strujanja definiran transportnim jednadžbama za kinetičku energiju turbulencije  $k$  i njenu stopu disipacije  $\varepsilon$ . Ovaj model je poznat po svojoj širokoj primjenjivosti, robusnosti, brzini, uglavnom zadovoljavajućoj točnosti i kao takav predstavlja jedan od do danas najšire primjenjenih turbulentnih modela.

Postoji više varijanti  $k$ - $\varepsilon$  modela, neke od kojih su:

- standardni  $k$ - $\varepsilon$  model
- RNG  $k$ - $\varepsilon$  model
- ostvarivi (eng. *realizable*)  $k$ - $\varepsilon$  model

Za potrebe ovog rada korišten je standardni  $k$ - $\varepsilon$  model koji je tradicionalno najkorišteniji u praksi i dobro testiran upravo za strujanje vode i zraka, što je upravo predmet razmatranja ovog rada.

Kod  $k$ - $\varepsilon$  modela pretpostavlja se da je strujanje potpuno turbulentno te da su efekti molekularnog viskoziteta zanemarivi, a varijable  $k$  i  $\varepsilon$  računaju se iz transportnih jednadžbi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (2.30)$$

U gornjim jednadžbama član  $G_k$  opisuje stvaranje kinetičke energije turbulencije, a definira se kao:

$$G_k = -\rho \overline{v_i' v_j'} \frac{\partial v_j}{\partial x_i},$$

a evaluira u skladu sa Boussinesqovom hipotezom po izrazu:

$$G_k = \mu_t S^2,$$

gdje je  $\mu_t$  dinamička turbulentna viskoznost, a  $S$  modul tenzora srednje brzine deformacije, definiran kao:

$$S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}.$$

Član  $G_b$  modelira stvaranje turbulentne kinetičke energije zbog uzgona i za idealan fluid određuje se kao:

$$G_b = -g_i \frac{\mu_t}{\rho \text{Pr}_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i},$$

gdje je  $\text{Pr}_t$  turbulentni Prandtlov broj, s time da je za slučaj strujanja nestlačivog fluida očito  $G_b = 0$ .

Član  $Y_M$  modelira utjecaj fluktuirajuće dilatacije disipacije energije za turbulentno strujanje stlačivog fluida. Definira se kao:

$$Y_M = 2 \rho \varepsilon \cdot \text{Ma}_t^2,$$

gdje je  $\text{Ma}_t$  turbulentni Machov broj, iz čega slijedi da se član  $Y_M$  zanemaruje u slučaju strujanja nestlačivog fluida.

Dinamička turbulentna viskoznost  $\mu_t$  računa se iz  $k$  i  $\varepsilon$ , po izrazu:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

gdje je  $C_\mu$  konstanta (za turbulentno strujanje vode i zraka iskustveno procijenjena na 0,09).

Konstante  $C_{1\varepsilon}$  i  $C_{2\varepsilon}$  su za turbulentno strujanje vode i zraka iskustveno procijenjene na 1,44 i 1,92, dok se konstanta  $C_{3\varepsilon}$  koristi samo kod modela višefaznog strujanja sa disperziranom fazom. Konstante  $\sigma_k$  i  $\sigma_\varepsilon$  predstavljaju turbulentne Prandtlove brojeve za  $k$  i  $\varepsilon$ , a za turbulentno strujanje vode i zraka procijenjene su na 1,0 i 1,3.



Za potrebe izrade ovog rada korišten je  $k-\varepsilon$  model implementiran u komercijalni softver Fluent, koji je jedan od svjetski najpoznatijih softvera za računalnu dinamiku fluida i kao takav se već duži niz godina u svijetu koristi za znanstvena istraživanja i praktičnu inženjersku primjenu te je vrlo dobro testiran i kalibriran.

### 2.3.4. Modeliranje strujanja sa slobodnom površinom

Modeliranje strujanja fluida sa slobodnom površinom temelji se na numeričkom rješavanju Navier-Stokesovih jednadžbi uz dodatni uvjet slobodne površine ([2]).

Tako je na slobodnoj površini tipično definiran jednostavni uvjet neklizanja (*no-slip*):

$$\mathbf{v}_{(i)}|_{sp} = \mathbf{v}_{(2)}|_{sp},$$

gdje je  $\mathbf{v}_{(i)}|_{sp}$  brzina  $i$ -te faze na slobodnoj površini. S obzirom da promatramo jedinstveno polje brzina, ovaj uvjet se može zapisati i kao:

$$[\mathbf{v}] = 0, \quad (2.31)$$

gdje  $[\varphi]$  predstavlja promjenu odnosno „skok“ veličine  $\varphi$  na slobodnoj površini, tj.

$$[\varphi] = \varphi_{(1)}|_{sp} - \varphi_{(2)}|_{sp}.$$

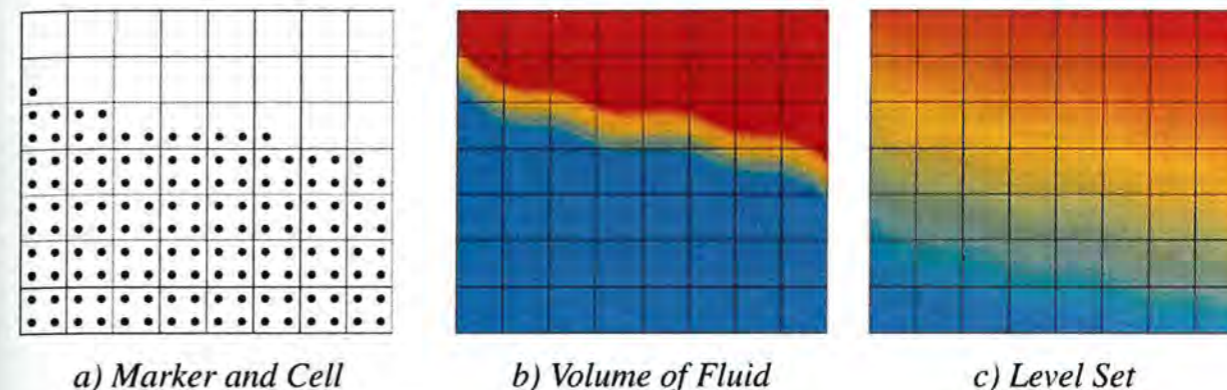
Osim toga, na slobodnoj površini vrijedi uvjet površinske napetosti, koji za konstantnu površinsku napetost izgleda ovako:

$$[p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{n}_{sp} = \sigma \cdot \kappa \cdot \mathbf{n}_{sp},$$

gdje je  $\mathbf{n}_{sp}$  normala slobodne površine,  $\sigma$  površinska napetost, a  $\kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n}_{sp}$  zakrivljenost slobodne površine.

Mada se efekti površinske napetosti često zanemaruju, a preostali uvjet (2.31) ne predstavlja suštinsko ograničenje na polje brzina, nužno je dodatno provesti neku od numeričkih tehnika praćenja slobodne površine. Za tu je potrebu do danas razvijeno više metoda, najvažnije od kojih su:

- *Marker and Cell*
- *Volume of Fluid*
- *Level Set*



Slika 2.6. Metode praćenja slobodne površine

*Marker and Cell* metoda ([21]) modelira slobodnu površinu tako da prati točkaste Lagrangeovske čestice bez mase koje plutaju unutar domene po strujnicama iz proračunatog polja brzina (Slika 2.6a). Čelije numeričke mreže u kojima se ne nalaze označiteljske (*marker*) čestice smatraju se „suhim“ odnosno praznim, a ostale se smatraju „mokrim“ odnosno ispunjenim fluidom. Označiteljske čestice sudjeluju u numeričkom modeliranju strujanja fluida u toliko što indiciraju koje čelije su uključene, a koje isključene iz aktivne („mokra“) domene. Jedan od glavnih nedostataka ove metode leži u činjenici da je i uz upotrebu velikog broja označiteljskih čestica vrlo teško rekonstruirati orijentaciju slobodne površine unutar čelije.

*Volume of Fluid* (VOF) metoda ([22]) modelira slobodnu površinu računanjem skalarnog polja koncentracije teže faze, koja se u tom smislu naziva i disperziranom fazom. Za tu potrebu računa se transportna jednadžba koncentracije koja uvjetuje da se koncentracija ne mijenja duž strujnice. Čelije s koncentracijom jednakom nuli ispunjene su lakšom fazom (tipično zrakom), a one s koncentracijom jednakom jedan ispunjene su težom fazom (tipično vodom). Unutar čelija sa koncentracijom u intervalu  $<0,1>$  nalazi se slobodna površina, a njena orijentacija (normala) određuje se iz gradijenta koncentracije. Ovaj pristup ima za posljedicu tzv. „pjenjenje“, odnosno stvaranje sloja „dvofaznih“ čelija na slobodnoj površini (Slika 2.6b). VOF metoda se do danas pokazala kao vrlo uspješna, pa uz nekoliko razvijenih modifikacija predstavlja najkorišteniju metodu modeliranja strujanja sa slobodnom površinom. VOF metoda pobliže je opisana u podpoglavlju 2.3.4.1 (str. 30).

*Level Set* metoda ([25]) najmlađa je od spomenutih metoda i omogućuje vrlo preciznu rekonstrukciju slobodne površine. Metoda se temelji na uvođenju funkcije  $\Phi$  koja u svakoj točki domene predstavlja udaljenost od slobodne površine (Slika 2.6c), što znači da se slobodna površina nalazi u točkama  $\Phi = 0$ . Funkcija  $\Phi$  je dodatno uvjetovana na način da je gotovo posvuda glatka, a u blizini slobodne površine izrazito, čime se omogućava precizno praćenje slobodne površine uz malo numeričke difuzije. Osim u računarskoj dinamici fluida, *Level Set* metoda koristi se i za računalnu grafiku i obradu slika.



S obzirom da VOF metoda predstavlja svojevrsni industrijski i istraživački standard, korištena je i u simulacijama trodimenzionalnog strujanja sa slobodnom površinom provedenima u sklopu ovog rada.

### 2.3.4.1. Metoda *Volume of Fluid* (VOF)

VOF metoda temelji se na uvođenju skalarnih polja koncentracije svakog pojedinog fluida u domeni i počiva na pretpostavci da je kontrolni volumen u svakom trenutku potpuno ispunjen fluidima, odnosno da je suma koncentracija svih faza u svakoj točki domene uvijek jednaka jedan.

Tipični slučaj strujanja sa slobodnom površinom predstavlja dvofazno strujanje vode u ambijentu ispunjenom zrakom, što znači da je:

$$f_v + f_z = 1,$$

gdje je  $f_v$  koncentracija vode (općenito teže, tj. disperzirane faze), a  $f_z$  koncentracija zraka (općenito lakše, tj. kontinuirane faze).

S obzirom da se promatra strujanje samo dvije faze (voda-zrak), očito je dovoljno računati samo koncentraciju vode odnosno  $f = f_v$ , dok se koncentracija zraka uvijek može dobiti kao  $f_z = 1 - f_v$ . Slobodna površina nalazi se u dvofaznom sloju u kojem je  $0 < f < 1$ .

Ako voda i zrak ne mogu mijenjati faze, tj. ako nema promjene agregatnih stanja, kemijskih reakcija i sl., transport koncentracije vode računa se iz jedinstvenog polja brzina po advekcijskoj jednadžbi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}f) = 0. \quad (2.32)$$

Ovaj izraz uvjetuje da koncentracija  $f(\mathbf{x}, t)$  ostaje konstantna duž strujnice, što drugim riječima znači da čestica ne može promijeniti fazu duž svoje putanje. S obzirom da se koncentracija vode računa iz jedinstvenog polja brzina, velika razlika brzina pojedinih faza (npr. vjetar na površini vode) može uzrokovati značajan pad točnosti u području oko slobodne površine ([18]).

Iz jednadžbe (2.32) dobiva se polje koncentracije  $f$ , na temelju kojeg se računaju jedinstvena polja gustoće i viskoznosti:

$$\begin{aligned} \rho &= f\rho_v + (1-f)\rho_z, \\ \mu &= f\mu_v + (1-f)\mu_z, \end{aligned} \quad (2.33)$$

putem kojih se „prenosi“ utjecaj prostorne razdiobe faza natrag u jednadžbu očuvanja količine gibanja (2.27).

Ostali parametri strujanja (tlak  $p$ , turbulentne veličine  $k$  i  $\varepsilon$ ) tretiraju se kao i brzina, tj. računaju se kao jedinstvena polja po cijeloj domeni.

Dobivena slobodna površina je relativno grubo definirana „pjenastim“ dvofaznim slojem, zbog čega se ponekad provode i posebne interpolacijske metode na samoj slobodnoj površini. Ove interpolacijske metode detaljnije su opisane u podpoglavlju 3.4.2 (str. 51).

### 2.3.5. Rubni uvjeti za 3D jednadžbe strujanja sa slobodnom površinom

Da bi trodimenzionalni matematički model strujanja sa slobodnom površinom bio potpun, potrebno je zadati i rubne uvjete.

Tipično je potrebno zadati rubne uvjete na otvorenoj granici odnosno na površini numeričke mreže kroz koju voda utječe u proračunsku domenu (ulazna granica, eng. *inlet*) ili pak istječe iz nje (izlazna granica, eng. *outlet*). Tako se na ulaznoj granici tipično zadaje rubni uvjet poznate brzina strujanja ili tlak, dok se na izlaznoj granici tipično zadaje rubni uvjet poznatog tlaka. Preostale veličine na rubu računaju se iz sustava diferencijalnih jednadžbi.

Alternativa ovakvom načinu definiranja rubnih uvjeta na izlaznoj granici je upotreba rubnog uvjeta slobodnog istjecanja (*outflow*), koji definira konstantnu normalnu brzinu kroz izlaznu granicu, odnosno:

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{\text{izlaz}} = 0,$$

gdje je  $\mathbf{n}$  vektor normale na plohu izlazne granice. Na ovaj se način varijable na rubu direktno ekstrapoliraju iz stanja unutar domene, što ujedno znači da strujanje nizvodno od izlazne granice ne utječe na strujanje unutar domene.

Na čvrstoj granici domene primjenjuje se rubni uvjet *no-slip* zida, što za nepomični zid znači:

$$\mathbf{v}|_{\text{zid}} = 0.$$

Strujanje sa slobodnom površinom na otvorenoj granici zahtijeva upotrebu posebnih rubnih uvjeta ([18]) gdje način zadavanja ovisi o tipu otvorene granice i tipu strujanja na granici (vidi podpoglavlje 2.1.4, str. 17) i definira se analogno kao i kod 1D i 2D modela plitkih voda (Tablica 2.4).

Tablica 2.4. Potreban broj zadanih rubnih uvjeta u 3D modelu

Vrsta strujanja	Ulazna granica	Izlazna granica
Podkritično	3	1
Nadkritično	4	0



Kod modeliranja strujanja sa slobodnom površinom pomoću VOF modela potrebno je osim osnovnih varijabli računati i vrijednost funkcije koncentracije teže faze (vode) po otvorenoj granici, u svim slučajevima osim kod nadkritičnog izlaza. Osim toga, standardno se orijentacija slobodne površine na ulazu zadaje normalno na smjer gravitacije.

Zbog toga se na ulaznoj granici u slučaju podkritičnog strujanja najčešće zadaje brzina vode, dok se hidrostatski tlak računa po izrazu:

$$p = (\rho - \rho_0) \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h} ,$$

gdje je  $\rho_0$  gustoća lakše faze (zraka),  $\rho$  gustoća u danoj točki na ulaznom rubu, a  $\mathbf{h}$  vektor dubine vode u istoj točki:

$$\mathbf{h} = h \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} ,$$

gdje je  $h$  dubina, odnosno udaljenost od slobodne površine do dane točke na rubu u smjeru vektora  $\mathbf{g}$ . U VOF modelu se gustoća  $\rho$  i dubina  $h$  dobivaju iz koncentracije teže faze na rubu, koja se dobiva ekstrapolacijom iz unutrašnjosti domene.

U slučaju nadkritičnog strujanja na ulazu potrebno je zadati sve parametre strujanja. U praksi to znači da treba zadati i položaj slobodne površine odnosno dubinu vode na ulaznoj granici, iz čega se dobiva koncentracija vode po ulaznoj granici, što omogućuje direktno zadavanje hidrostatskog tlaka na ulazu.

Na istoku iz domene se kod podkritičnog strujanja tipično zadaje dubina vode, dok u slučaju nadkritičnog strujanja na izlaznoj granici nije potrebno zadavati nikakav uvjet jer svi parametri strujanja dolaze iz unutrašnjosti domene.

## 3. Numerički modeli strujanja sa slobodnom površinom

Opisani matematički modeli predstavljaju nelinearne sustave parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, za koje je analitičko rješenje moguće samo za mali broj idealiziranih slučajeva i zbog toga nema značajniju praktičnu vrijednost. Stoga za praktičnu primjenu ovog modela preostaje jedino numeričko rješavanje problema.

Do danas je razvijen veliki broj numeričkih shema za rješavanje Navier-Stokes jednadžbi i jednadžbi plitkih voda. Iz osnovnih verzija numeričkih shema razvijen je čitav niz varijanti i popravaka s ciljem dobivanja što veće točnosti, stabilnosti i sposobnosti rješavanja sve težih problema strujanja fluida sa slobodnom površinom.

Izbor pouzdane numeričke sheme i softvera vrlo je važan jer neprikladno odabrana numerička shema, osim što može onemogućiti dobivanje rezultata, može djelovati kao generator numeričke nestabilnosti, što će rezultirati nepouzdanim numeričkim modelom. Tako se upotrebom numeričke sheme višeg reda točnosti najčešće gubi na robusnosti numeričkog modela, zbog čega se često u praksi koriste jednostavnije i pouzdanije sheme prvog reda točnosti.

Simulacije strujanja plitkih voda provedene su za potrebe ovog rada na softveru Stripp12, koji je afirmiran kroz dugogodišnju upotrebu na raznim znanstveno-stručnim studijama i znanstvenim istraživanjima (između ostalog u [15], [16], [17]). Simulacije strujanja fluida pomoću Navier-Stokes jednadžbi uz uvjet slobodne površine provedene su za potrebe ovog rada na komercijalnom softveru Fluent, koji je jedan od vodećih svjetskih softvera za ovu namjenu i kao takav se intenzivno koristi za industrijsku primjenu, kao i za znanstvena istraživanja.

### 3.1. Numeričko rješavanje jednadžbi očuvanja

Pod numeričkim rješavanjem sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi zakona očuvanja podrazumijeva se računanje pomoću numeričkih shema, za što je preduvjet diskretizacija jednadžbi zakona očuvanja. Pri tome je potrebno posebno provesti prostornu i vremensku (temporalnu) diskretizaciju, dok primjena određene numeričke sheme u principu slijedi nakon izbora odgovarajuće diskretizacijske metode.



### 3.1.1. Diskretizacijske metode

Osnovne i najraširenije diskretizacijske metode za rješavanje sustava jednadžbi zakona očuvanja su:

- metoda konačnih razlika
- metoda konačnih volumena
- metoda konačnih elemenata

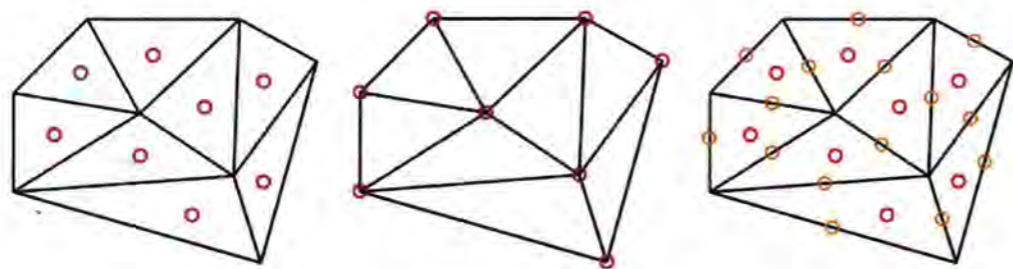
Prostorna diskretizacija provodi se definiranjem numeričke mreže, a u skladu sa odabranom diskretizacijskom metodom koja uvjetuje vrstu (kvadratični, linearni) i tip mreže (strukturirana, nestrukturirana). Tako je npr. za metodu konačnih razlika najprikladnija ekvidistantna kartezijska numerička mreža.

Numerička mreža mora načelno biti što gušća u cilju minimizacije diskretizacijske pogreške i postizanja maksimalne točnosti u računanju jednadžbi matematičkog modela. Unatoč tome, iskustva kod modela plitkih voda pokazuju da za određene primjene i relativno rijetke numeričke mreže mogu dati izvrstan rezultat ([14]).

Vremenska diskretizacija provodi se najčešće metodom konačnih razlika, koja se temelji na aproksimaciji pomoću razvoja u Taylorov red. Vremenska diskretizacija može biti eksplicitna ili implicitna (vidi podpoglavlje 3.1.2, str. 36), s time da se za izrazito nestacionarne događaje u principu daje prednost korištenju eksplicitne vremenske diskretizacije.

Kod metode konačnih volumena domena je podijeljena na konačan broj kontrolnih volumena, za svaki od kojih se računaju jednadžbe očuvanja. U težištu svakog kontrolnog volumena nalazi se proračunski čvor u kojem se računaju vrijednosti varijabli stanja, dok se stanja na granicama kontrolnog volumena dobivaju interpolacijom.

Metoda konačnih volumena kao osnovu koristi integralnu formu jednadžbe očuvanja. Integracija se provodi po kontrolnom volumenu s time da se volumni integrali primjenom Gaussovog integralnog teorema transformiraju u plošne. Tako se dobivaju plošni integrali koji predstavljaju konvekcijske i difuzijske fluksove, odnosno opisuju strujanje kroz granicu kontrolnog volumena. Dobiveni plošni integrali približno se rješavaju uvođenjem polinoma željenog stupnja u tzv. diskretnoj formi.



Slika 3.1. Tipovi dvodimenzionalne numeričke mreže konačnih volumena

Moguće je razlikovati tri tipa metode konačnih volumena s obzirom na smještaj numeričkog čvora u kontrolnom volumenu (Slika 3.1). Numerički čvorovi se tako mogu nalaziti:

- u centru konačnog volumena
- na vrhovima konačnog volumena
- u centru i na stranicama konačnog volumena

Treba napomenuti da ova podjela prvenstveno opisuje način na koji diskretizacijska metoda interpretira i koristi jednom izrađenu numeričku mrežu. Drugim riječima, različita vrsta diskretizacije ne podrazumijeva i različit postupak izrade numeričke mreže.

Numerička mreža sa čvorovima u centru i na stranicama konačnog volumena naziva se *staggered grid*, a njeni elementi se nazivaju kvadratičnima. U ovom slučaju neke varijable stanja smještene su na stranice konačnog volumena, a neke u centar konačnog volumena.

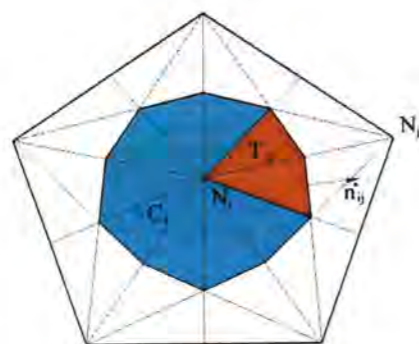
Pri metodi konačnih elemenata rješenje se također aproksimira polinomima određenog stupnja. Polinomi se definiraju lokalno za svaki pojedini element numeričke mreže, tj. od elementa do elementa se koeficijenti polinoma odabiru na način da se postigne najbolje približenje za pojedini element. Koeficijenti polinoma za pojedine elemente mogu se određivati po više različitih kriterija, što vodi k više različitih formulacija metoda konačnih elemenata.

Metoda konačnih elemenata je najopćenitija metoda u smislu da se formulacije metode konačnih razlika i konačnih volumena mogu dobiti specijalizacijom metode konačnih elemenata.

Metoda konačnih volumena i metoda konačnih elemenata imaju vrlo važno svojstvo da u principu ne uvjetuju strukturiranost numeričke mreže. Ta osobina je u praktičnoj primjeni vrlo korisna jer omogućuje lakšu i točniju prilagodbu numeričke mreže na realnu geometriju terena.

Za rješavanje jednadžbi matematičkih modela strujanja sa slobodnom površinom koriste se sve tri diskretizacijske metode. Kod hiperboličkih sustava jednadžbi, pa tako i jednadžbi plitkih voda, najviše se koriste metode konačnih razlika i konačnih volumena, s time da je metoda konačnih volumena najprirodnija zbog integralne forme zakona očuvanja. U tom smislu se kod diskretizacije 2D modela plitkih voda postižu bolji rezultati upotrebom sekundarne, tzv. medijanske dvodimenzionalne mreže. Sekundarna mreža nema ćelije iz početne triangulacije već se iz početnih trokutastih ćelija spajanjem segmenata težišnica elemenata oko njihovog zajedničkog vrha formiraju nove, tzv. medijanske ćelije (Slika 3.2).





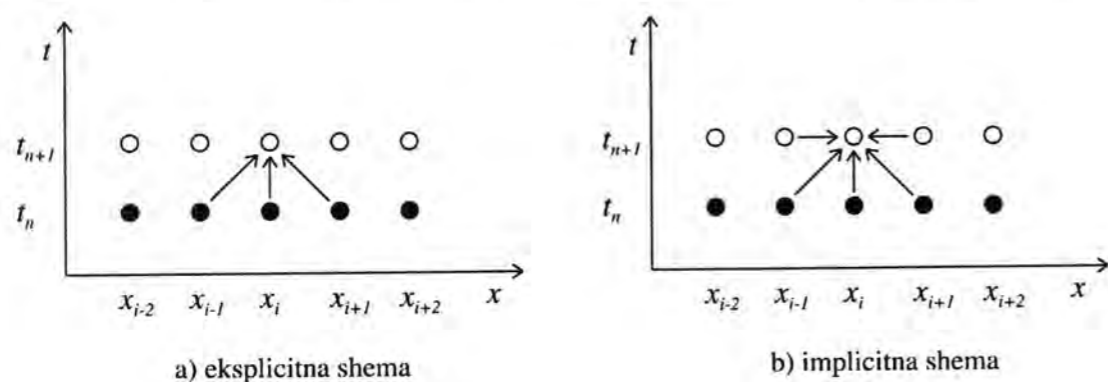
Slika 3.2. Dualna mreža: primarne ćelije i sekundarna medijanska ćelija

Upotreba ovakve dualne medijansko-trokutaste mreže omogućava postavljanje numeričkih čvorova u centar konačnog volumena, što se pokazalo kao najprirodnije rješenje za numeričko modeliranje strujanja plitkih voda. (Stoga je dualna mreža i korištena za sve dvodimenzionalne simulacije strujanja plitkih voda provedene u sklopu ovog rada.)

Kod numeričkih modela za rješavanje Navier-Stokes jednadžbi najčešće se koristi metoda konačnih elemenata, no koriste se i ostale dvije diskretizacijske metode, s time da je u novije vrijeme u porastu upotreba metode konačnih elemenata.

### 3.1.2. Numeričke sheme

Numeričke sheme za rješavanje diskretiziranih sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi mogu biti eksplicitne i implicitne. Eksplicitne sheme određuju stanje u novom vremenskom trenutku isključivo iz proračunatih stanja za prethodni vremenski trenutak (Slika 3.3a), dok implicitne sheme za to uzimaju u obzir i još nepoznata stanja u novom vremenskom trenutku (Slika 3.3b), što je moguće jedino rješavanjem sustava jednadžbi.



Slika 3.3. Eksplicitna i implicitna numerička shema

Za stabilnost i točnost numeričkih shema važna je bezdimenzionalna pozitivna veličina  $C_{cfl}$ , koja se naziva Courantov broj ili Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) broj:

$$C_{cfl} = \frac{\text{max. apsolutna brzina propagacije poremećaja}}{\text{"brzina numeričke mreže"}} \quad (3.1)$$

Najveća apsolutna brzina propagacije poremećaja jednaka je najvećoj svojstvenoj vrijednosti:

$$\lambda_{\max} = |\mathbf{v}\mathbf{n} \pm c|_{\max} = |\mathbf{v}\mathbf{n}| + c,$$

gdje je  $\mathbf{n}$  normala na rub ćelije,  $c$  brzina propagacije poremećaja, a „brzina numeričke mreže“ predstavlja odnos prostornog i vremenskog koraka ( $\Delta x/\Delta t$ ). Uzme li se navedeno u obzir, Courant-Friedrichs-Lewy broj može se napisati kao:

$$C_{cfl} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (|\mathbf{v}\mathbf{n}| + c). \quad (3.2)$$

Courant-Friedrichs-Lewyjev uvjet za eksplicitne numeričke sheme propisuje da brzina propagacije poremećaja mora u svakom trenutku i po cijeloj domeni biti manja od „brzine mreže“. To znači da ni u jednoj ćeliji numeričke mreže nema poremećaja koji u vremenu  $\Delta t$  prođe udaljenost veću od  $\Delta x$ . Drugim riječima, prostorno-vremenska diskretizacija za eksplicitne numeričke sheme mora biti takva da vrijedi:

$$C_{cfl} \leq 1.$$

Gornji uvjet naziva se Courant-Friedrichs-Lewyjev uvjet stabilnosti i kao takav je nužan (mada ne i dovoljan) za stabilnost eksplicitne numeričke sheme. On, zapravo, uvjetuje da gušća numerička mreža (tj. manji prostorni korak) zahtijeva i gušću vremensku diskretizaciju (tj. manji vremenski korak) te je ovako izrečen i intuitivno razumljiv.

U izrazu za CFL broj (3.2) vidljivo je da je on lokalnog karaktera. U slučaju nestrukturirane numeričke mreže, prostorni korak (tj. udaljenost između numeričkih čvorova) mijenja se po domeni, dok se brzina propagacije poremećaja mijenja kako po domeni tako i u vremenu. S druge strane, vremenski korak  $\Delta t$  nije lokalnog karaktera, već je jedinstven i mora zadovoljavati Courant-Friedrichs-Lewyjev uvjet uvijek i svuda. Stoga se svaki sljedeći vremenski korak određuje na osnovu brzina i dubina vode izračunatih u prethodnom vremenskom koraku i to iz CFL uvjeta na kritičnoj ćeliji numeričke mreže:

$$\Delta t^{n+1} = C_{cfl} \left( \frac{\Delta x_{ij}}{|\mathbf{v}_i^n \mathbf{n}_{ij}| + c_i^n} \right)_{\min}, \quad (3.3)$$

gdje se podindeksi odnose na ćeliju numeričke mreže, a nadindeksi na vremenski trenutak.



Može se reći da je restrikcija u smislu stabilnosti po CFL uvjetu zapravo restrikcija na vremenski korak.

Načelno vrijedi da je numerička shema tim efikasnija čim je CFL broj bliži jedinici. Praktična iskustva govore da se optimalne vrijednosti CFL broja za eksplicitne numeričke metode pri primjeni na realne probleme kreću u intervalu od 0,6 do 0,9.

Za razliku od eksplicitnih shema, CFL broj kod implicitnih shema nema utjecaj na izbor vremenskog koraka, pa je moguće korištenje proizvoljno velikog vremenskog koraka, s time da jedinu restrikciju na njegovu veličinu postavlja činjenica da se točnost numeričke sheme smanjuje s povećanjem vremenskog koraka. U praksi se kod stacionarnih ili skoro-stacionarnih problema mogu koristiti relativno veliki CFL brojevi (5, 10 i više) uz zadržavanje visoke točnosti. Upotreba implicitnih shema na taj način može značajno smanjiti vrijeme trajanja proračuna, što predstavlja njihovu najveću prednost.

## 3.2. Numerički model za 1D jednadžbe plitkih voda

Za rješavanje jednodimenzionalnih jednadžbi plitkih voda, dominantno se koriste eksplicitne sheme, neke od kojih su:

- Q-shema
- Hubbardova shema
- ENO sheme
- WENO sheme
- MUSCL sheme
- centralne sheme
- RHR shema
- LCI implicitna shema

### 3.2.1. Dobro balansirana Q-shema prvog reda točnosti za 1D model plitkih voda

Radi ilustracije, u nastavku je izložena dobro balansirana Q-shema prvog reda točnosti za jednadžbe jednodimenzionalnog strujanja u plitkim vodama ([4], [9], [39], [40]). Između mnogih do danas razvijenih numeričkih shema izabrana je baš Q-shema jer se ona kroz ekstenzivno testiranje i primjenu na realnim problemima pokazala kao jedna od najrobustnijih i najpouzdanijih. Balansirana verzija te sheme omogućuje kvalitetno i pouzdano modeliranje vrlo zahtjevnih geometrija, kao što su npr. tereni sa velikim gradijentima visine dna.

Formulacija ove sheme glasi:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2}^n - \mathbf{f}_{i-1/2}^n) + \Delta t (\mathbf{g}_{i+1/2}^{n,L} + \mathbf{g}_{i-1/2}^{n,R}), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{f}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_i^n + \mathbf{f}_{i+1}^n) - \frac{1}{2} |\mathbf{Q}_{i+1/2}^n| (\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n) - \frac{1}{2} |\mathbf{Q}_{i+1/2}^n| |\mathbf{Q}_{i+1/2}^{n,-1}| \mathbf{V}_{i+1/2}^n \Delta x \quad (3.5)$$

$$\mathbf{g}_{i+1/2}^{n,L} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - |\mathbf{Q}_{i+1/2}^n| |\mathbf{Q}_{i+1/2}^{n,-1}|) \mathbf{G}_{i+1/2}^n, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{g}_{i+1/2}^{n,R} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + |\mathbf{Q}_{i+1/2}^n| |\mathbf{Q}_{i+1/2}^{n,-1}|) \mathbf{G}_{i+1/2}^n. \quad (3.7)$$

U gornjim izrazima podindeksi se odnose na prostornu, a nadindeksi na vremensku diskretizaciju. Točnije, podindeks  $i$  označava srednju vrijednost neke veličine u  $i$ -toj ćeliji  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ ,  $i = 0, \dots, N$ , a podindeks  $i+1/2$  vrijednost neke veličine na mjestu  $x_{i+1/2} = (i+1/2)\Delta x$ , gdje je  $\Delta x$  prostorni korak. Nadindeks  $n$  znači da je neka veličina evaluirana u vremenskom trenutku  $t^n$ . Pored toga nadindeks  $L$  (odnosno  $R$ ) označava lijevi (odnosno desni) *upwind* dio numeričke aproksimacije izvornog člana  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, x)$ .

U jednakostima (3.5)-(3.7) matrica  $\mathbf{Q}_{i+1/2}^n$  numerička je aproksimacija Jacobijeve matrice fluksa  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  i to u usrednjenom stanju  $\mathbf{u}_{i+1/2}^n$  definiranom proširenim Roeovim uvjetom:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_{i+1/2}^n) \cdot (\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(\mathbf{u}_{i+1/2}^n) (x_{i+1} - x_i) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n). \quad (3.8)$$

U istim izrazima rabi se i oznaka:

$$|\mathbf{Q}_{i+1/2}^n| = \mathbf{R}_{i+1/2}^n |\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}^n| \mathbf{R}_{i+1/2}^{n,-1},$$

gdje je  $\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}^n$  matrica svojstvenih vrijednosti, a  $\mathbf{R}_{i+1/2}^n$  matrica desnih svojstvenih vektora matrice  $\mathbf{Q}_{i+1/2}^n$ .

Konačno, vektor  $\mathbf{V}_{i+1/2}^n$  u (3.5) numerička je aproksimacija za:

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(I_2 - hD) \end{pmatrix},$$

a  $\mathbf{G}_{i+1/2}^n$  u izrazima (3.6) i (3.7) numerička je aproksimacija za izvorni član  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, x)$  u istom usrednjenom stanju (3.8). Točnije, za numeričku aproksimaciju dijela izvornog člana koji



modelira trenje dovoljno je uzeti evaluaciju u  $i$ -toj ćeliji, dok se za preostalo, da bi se dobilo svojstvo egzaktnog očuvanja mirne vode, uzima:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{i+1/2}^n &= \begin{pmatrix} 0 \\ g(I_{2,i+1/2}^n - h_{i+1/2}^n D_{i+1/2}^n) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{G}_{i+1/2}^n &= \begin{pmatrix} 0 \\ gI_{2,i+1/2}^n - gA_{i+1/2}^n \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta x} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

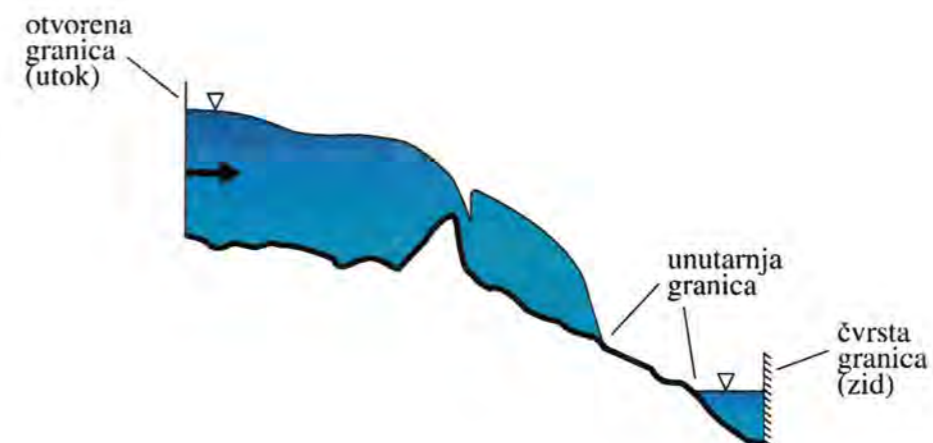
gdje je:

$$\begin{aligned} I_{2,i+1/2}^n &= \frac{I_{1,i+1}^n - I_{1,i}^n}{\Delta x} - A_{i+1/2}^n \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x}, \\ D_{i+1/2}^n &= \frac{A_{i+1}^n - A_i^n}{\Delta x} - b(x_{i+1/2}, h_{i+1/2}^n) \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x}. \end{aligned}$$

### 3.2.2. Numeričko tretiranje rubnih uvjeta u 1D modelu plitkih voda

Numeričko tretiranje rubnih uvjeta u 1D modelu plitkih voda ovisi o uvjetima strujanja na granici domene te o samoj vrsti granice (Tablica 2.2). Granice domene za modeliranje 1D strujanja plitkih voda općenito možemo podijeliti na sljedeće osnovne tipove (Slika 3.4):

- otvorena granica (utok, istok)
- čvrsta granica (zid)
- unutarnja granica (granica između „mokrog“ i „suhog“ dijela domene)



Slika 3.4. Mogući izgled 1D domene i raspored njenih granica

Nametanje rubnih uvjeta na otvorenoj granici primarno ovisi o načinu definicije numeričkih fluksova kroz rub tj. vanjsku stranicu elementa numeričke mreže. Za tu se potrebu, kod većine numeričkih shema, domenu proširuje s fiktivnim vanjskim (*ghost*) ćelijama. Određivanje vrijednosti u tim vanjskim ćelijama ovisi o vrsti rubnog uvjeta.

Nakon implementacije rubnih uvjeta na otvorenoj granici potrebno je ispitati njihov utjecaj na rezultat proračuna. Često je pogodnije granicu utoka ili istoka iz domene nešto udaljiti od izvornog područja interesa kako bi se na taj način smanjio njen nerealan utjecaj na rješenje. Udaljavanje numeričke granice, drugim riječima, znači povećanje numeričke domene, što opet rezultira povećanjem potrebnog proračunskog vremena. Stoga je potrebno lokaciju granice odrediti optimalno.

Osim zadavanjem istočnih ili utočnih rubnih uvjeta na otvorenoj granici, rub domene je moguće definirati i kao čvrstu granicu. Čvrsta granica služi za modeliranje neprostrujivih objekata kao što su brane, zatvorene zapornice i slično. Kroz čvrstu granicu nema protoka, što znači da se ona u 1D modelu plitkih voda zadaje kao:

$$Q(0, t) = 0,$$

odnosno zadavanjem nultog protoka na rubu otvorenog kanala.

Pod pojmom unutarnje granice podrazumijeva se granica između „suhog“ i „poplavljenog“ dijela domene. Tijekom numeričke simulacije ta se granica pomiče, pa tako, u određenom vremenskom trenutku, do tada „suha“ (neaktivna) ćelija numeričke mreže postaje „poplavljena“ (aktivna).

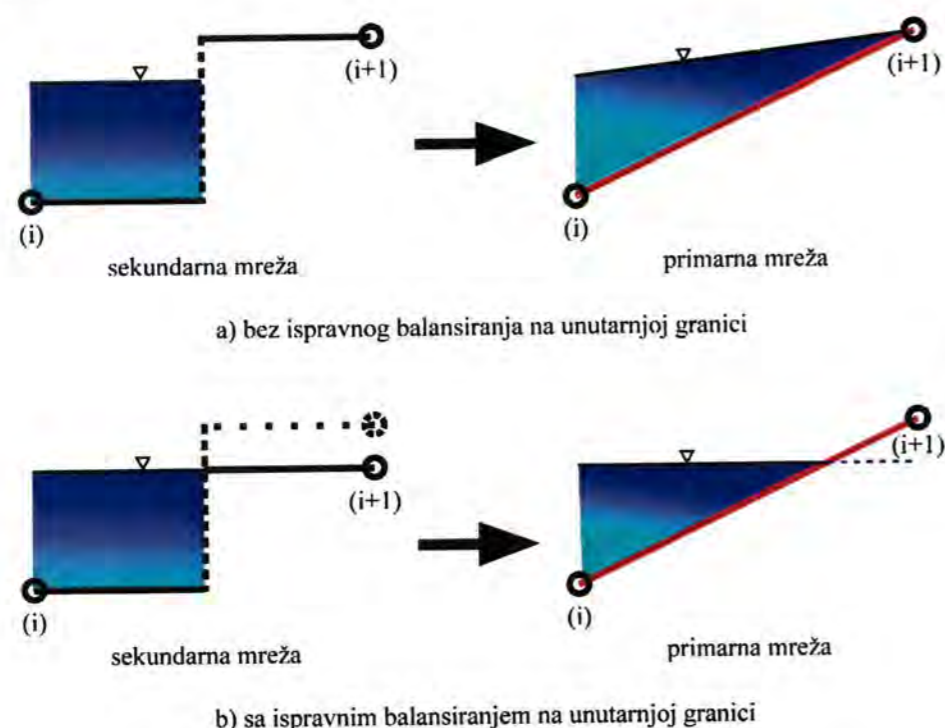
Tehnike modeliranja plavljenja i sušenja ćelija numeričke mreže (*wetting-drying*) mogu biti vrlo zahtjevne i delikatne, a posebne teškoće se javljaju kod simulacija poplavljanja jako varirajućeg terena. Mada je moguće propagirajuću vodenu frontu definirati upotrebom pomične numeričke mreže (*moving mesh*), takvu metodu izuzetno je teško programski implementirati i njena upotrebna vrijednost je ograničena. Stoga se pribjegava relativno jednostavnoj metodi koja se temelji na dvjema fazama propagacije unutarnje granice:



- 1) Kad god je minimalna dubina vode na poplavljenom elementu manja od predefiniране minimalne (granične) dubine vode  $h_{gr}$ , numerički element puni se vodom, ali se brzina strujanja vode u njemu drži jednakom nuli.
- 2) Kada minimalna dubina vode na poplavljenom elementu prelazi graničnu dubinu  $h_{gr}$ , protok kroz poplavljeni element računa se slobodno, tj. dopušta se vodi u dotičnom elementu da se pokrene.

Izbor vrijednosti za graničnu dubinu ovisi o obliku terena i veličini numeričkih elemenata, pa tako gušća numerička mreža i ravniji teren omogućuju zadavanje manje vrijednosti  $h_{gr}$ . Olakotna okolnost leži u činjenici da prevelika vrijednost  $h_{gr}$  najčešće samo donekle usporava napredovanje vodene fronte, a ne kviri pouzdanost dobivenih brzina i razina vode. Praktična iskustva pokazuju da je za jako neravan teren dovoljno da granična dubina vode bude oko 5 cm. Ako je moguće, poželjno je smanjivati tu vrijednost do granice izdržljivosti korištene numeričke sheme.

Dodatni problem javlja se kada se unutarnja granica formira na uzbrdici gdje se uslijed interpolacije dubine vode u rubnoj ćeliji može pojaviti nefizikalna „adhezija“ odnosno podizanje razine vode uz obalu. Naime, u slučaju kada je dno „suhe“ ćelije više od razine vode u susjednoj „mokroj“ ćeliji, linearna interpolacija dubine vode na primarnoj mreži ima za posljedicu formiranje nefizikalnog vodnog lica, što se rješava privremenim spuštanjem visine „suhog“ ruba (Slika 3.5). Kasnije, kada razina vode potpuno nadvisi dno ćelije odnosno kada ćelija postane potpuno potopljena, ova korekcija geometrije numeričke mreže prestaje biti potrebna.



Slika 3.5. Ispravno balansiranje na unutarnjoj granici

Opisani se postupak u numeričkom modelu provodi tako da se modificira tehnika balansiranja na unutarnjoj granici na način da se u slučaju kada je  $h_i > 0$ ,  $h_{i+1} = 0$  i  $h_i + z_i < z_{i+1}$  izraz (3.9) mijenja tako da se privremeno visina „suhe“ ćelije definira kao  $z_{i+1} = h_i + z_i$ .

### 3.3. Numerički model za 2D jednadžbe plitkih voda

Neke od do sada razvijenih numeričkih shema za dvodimenzionalne jednadžbe plitkih voda su:

- Q-shema
- Hubbardova shema
- MUSCL shema
- kinetička shema
- LCI implicitna shema

#### 3.3.1. Dobro balansirana Q-shema prvog reda točnosti za 2D model plitkih voda

Kao ilustracija, u nastavku je opisana Q-shema prvog reda točnosti za 2D jednadžbe plitkih voda s Van Leerovim usrednjenjem i egzaktnim očuvanjem mirne vode, uz balansiranje izvornog člana ([4], [7], [8]). Osnovna formulacija ove numeričke sheme glasi:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{j \in K_i} |\mathbf{n}_{ij}| \mathbf{F}_{ij}^n + \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{j \in K_i} |T_{ij}| \mathbf{g}_{ij}^n, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{F}_{ij}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i^n \cdot \mathbf{n}_{ij} + \mathbf{F}_j^n \cdot \mathbf{n}_{ij}) - \frac{1}{2} |\mathbf{Q}_{ij}^n| (\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{g}_{ij}^n = (\mathbf{I} - |\mathbf{Q}_{ij}^n| \mathbf{Q}_{ij}^{n-1}) \mathbf{G}_{ij}^n. \quad (3.12)$$

U skladu sa standardnom notacijom, podindeksi se odnose na prostornu, a nadindeksi na vremensku diskretizaciju. Točnije, podindeks  $i$  znači srednju vrijednost neke veličine u  $i$ -toj ćeliji  $C_i$ , koja ima središte u čvoru  $N_i$ , a podindeks  $ij$  vrijednost neke veličine na rubu između  $i$ -te i  $j$ -te ćelije. Nadindeks  $n$  znači da je neka veličina evaluirana u trenutku  $t^n$ .

Pored toga, u izrazima (3.10)-(3.12) uvedene su sljedeće veličine (vidi Slika 3.2):



$K_i$  – skup svih susjednih ćelija  $i$ -te ćelije,

$T_{ij}$  –  $j$ -ta podćelija  $i$ -te ćelije,

$|C_i|$  – površina ćelije  $C_i$ ,

$|T_{ij}|$  – površina podćelije  $T_{ij}$ ,

$\mathbf{n}_{ij}$  – normalni vektor na rub između  $i$ -te i  $j$ -te ćelije te

$|\mathbf{n}_{ij}|$  – duljina ruba između  $i$ -te i  $j$ -te ćelije.

U jednakostima (3.11)-(3.12) matrica  $\mathbf{Q}_{ij}^n$  numerička je aproksimacija Jacobijeve matrice fluksa:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = (\mathbf{A}_1(\mathbf{u}), \mathbf{A}_2(\mathbf{u})),$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - v_1^2 & 2v_1 & 0 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 \\ c^2 - v_2^2 & 0 & 2v_2 \end{pmatrix}.$$

Točnije,

$$\mathbf{Q}_{ij}^n = \mathbf{A}(\mathbf{u}_{ij}^n) \cdot \mathbf{n}_{ij},$$

gdje je  $\mathbf{u}_{ij}^n$  Roeovo usrednjenje:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_{ij}^n) \cdot (\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_j^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n). \quad (3.13)$$

Ovdje treba napomenuti da je  $\mathbf{G}_{ij}^n$  u izrazu (3.12) numerička aproksimacija za izvorni član  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$  u istom usrednjenom stanju (3.13). To znači da je za numeričku aproksimaciju dijela izvornog člana koji modelira trenje dovoljno uzeti evaluaciju u  $i$ -toj ćeliji. Da bi se dobilo svojstvo egzaktnog očuvanja mirne vode, za preostali dio uzima se:

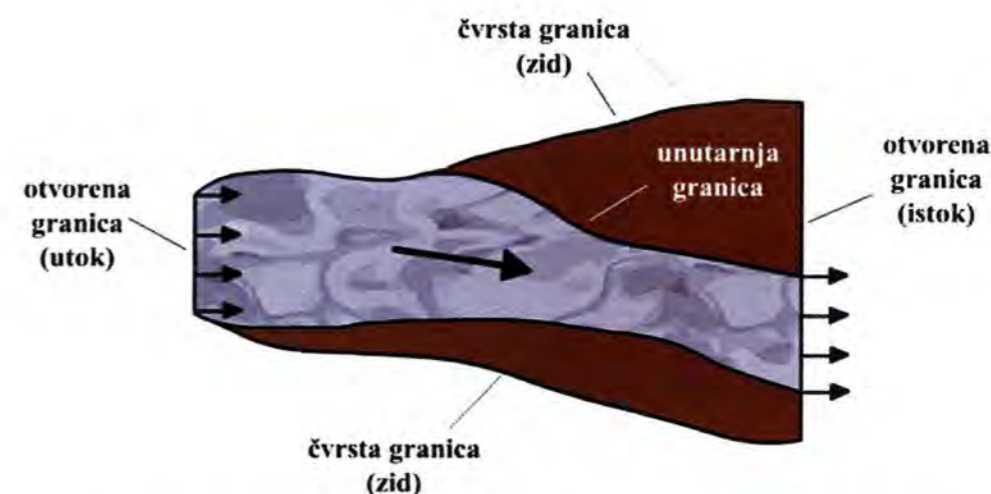
$$\mathbf{G}_{ij}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_{ij}^n \frac{z_j - z_i}{l_{ij}} n_{ij,1} \\ -gh_{ij}^n \frac{z_j - z_i}{l_{ij}} n_{ij,2} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

gdje je  $l_{ij}$  visina podćelije  $T_{ij}$ .

### 3.3.2. Numeričko tretiranje rubnih uvjeta u 2D modelu plitkih voda

Kao i kod rubnih uvjeta u 1D modelu plitkih voda, tako i numeričko tretiranje rubnih uvjeta u 2D modelu plitkih voda ovisi o uvjetima strujanja na granici domene te o samom tipu granice (Tablica 2.3). Granice domene za modeliranje 2D strujanja plitkih voda općenito možemo podijeliti na sljedeće osnovne tipove (Slika 3.4):

- otvorena granica (utok, istok)
- čvrsta granica (zid)
- unutarnja granica (granica između „mokrog“ i „suhog“ dijela domene)



Slika 3.6. Mogući izgled 2D domene i raspored njenih granica



Kod nametanja rubnih uvjeta na otvorenim granicama u 2D modelu plitkih voda treba poštivati ista pravila i smjernice kao kod 1D modela plitkih voda (vidi podpoglavlje 3.2.2, str. 40).

Za modeliranje neprostrujivih objekata kao što su brane, nasipi, zidovi (građevine), itd. služi čvrsta granica. Kroz čvrstu granicu nema protoka, što znači da je normalna brzina jednaka nuli svugdje po čvrstoj granici. Dodatno treba definirati tangencijalnu brzinu, tangencijalno (smično) naprezanje ili odnos između tangencijalne brzine i tangencijalnog naprezanja primjenom *slip*, *semi-slip* ili *no-slip* uvjeta.

*Slip* uvjet na rubnom numeričkom čvoru dopušta samo tangencijalnu komponentu brzine uz nulto smično naprezanje. Time se ujedno pretpostavlja da na čvrstoj granici nema trenja. Ovaj uvjet se obično primjenjuje u slučaju kada čvrsta granica modelira vertikalni zid uz koji su dubine vode male ili čija je površina zanemarive hrapavosti. Takav rubni uvjet se, za potrebe praktičnog modeliranja plitkih voda, pokazuje kao potpuno primjeren, pa se najčešće i koristi pod nazivom „rubni uvjet zida“.

*Semi-slip* uvjet primjenjuje se na čvrstoj granici na način da dopušta strujanje tangencijalno na granicu (kao i kod *slip* uvjeta), ali se dodatno definira trenje na granici prema nekom izrazu za trenje. Jedan mogući način zadavanja trenja na čvrstoj granici ([6]) je sljedećom modifikacijom izraza (2.22) za nagib trenja:

$$S_{fx} = v_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \left( \frac{n^{3/2}}{h} + \frac{n_w^{3/2} l_w}{S} \right)^{4/3} \quad (3.15)$$

$$S_{fy} = v_2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \left( \frac{n^{3/2}}{h} + \frac{n_w^{3/2} l_w}{S} \right)^{4/3}$$

gdje je  $n_w$  Manningov koeficijent trenja na čvrstoj granici,  $l_w$  duljina stranice rubnog elementa na kojoj je zadan rubni uvjet čvrste granice i  $S$  površina dotičnog rubnog elementa na čijoj je stranici zadan rubni uvjet čvrste granice.

*Semi-slip* uvjet koristi se kada se u modelu želi zadržati utjecaj na fluid koji zid vrši trenjem, pa se on može nazvati „rubni uvjet hrapavog zida“. Najčešće je upotreba *semi-slip* rubnog uvjeta ipak suvišna, jer je za realne slučajeve strujanja u otvorenim vodotocima utjecaj hrapavosti zida na sliku strujanja obično potpuno zanemariv.

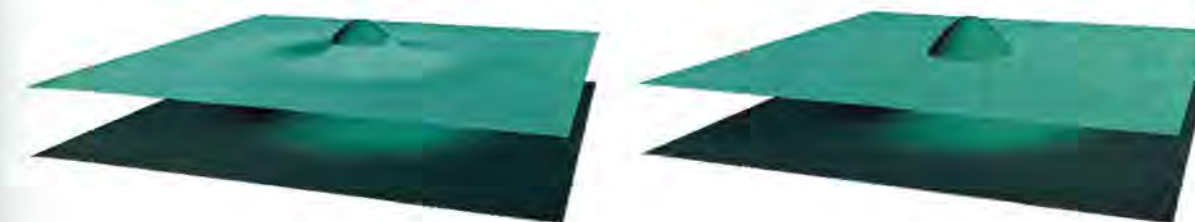
*No-slip* uvjet postiže se postavljanjem brzine u rubnom čvoru na nulu, čime je zadovoljen i uvjet neprotjecanja kroz granicu. Ovaj uvjet obično se koristi kada je poznato da su brzine strujanja uz granicu jako malene te, kao takav, nema širu primjenu u modeliranju strujanja u plitkim vodama.

Tretiranje unutarnje granice između „mokrog“ (aktivnog) i „suhog“ (neaktivnog) dijela 2D numeričke domene vrši se tako da se metoda korištena u 1D numeričkom modelu plitkih voda (vidi podpoglavlje 3.2.2, str. 40) primjeni na 2D model plitkih voda ([7], [8]).

Kao što je spomenuto u podpoglavlju 3.2.2, ovakav način tretiranja unutarnje granice donekle usporava propagaciju vodnog vala. Praktična iskustva, kao što su npr. rezultati međunarodnog istraživačkog projekta za numeričko modeliranje pucanja brana CADAM, pokazuju sustavno kašnjenje numeričkih modela plitkih voda u usporedbi sa realnim propagacijama vodnih valova ([31]), što je vjerojatno dijelom uzrokovano i nesavršenom

tehnikom tretiranja unutarnje granice. Stoga se može zaključiti da je, u nedostatku bolje metode modeliranja propagacije unutarnje granice, minimalnu dubinu vode  $h_{gr}$  načelno potrebno zadati što manjom.

Problem nefizikalnog vodnog lica u slučaju formiranja unutarnje granice na uzbrdici opisan za 1D numerički model plitkih voda (podpoglavlje 3.2.2) puno je izraženiji u 2D numeričkom modelu plitkih voda (Slika 3.7).



Slika 3.7. Proračunato vodno lice bez ispravnog balansiranja na unutarnjoj granici (lijevo) i sa ispravnim balansiranjem na unutarnjoj granici (desno)

Opisani se problem rješava kako je to obrazloženo u [5] odnosno na isti način kao i u 1D modelu (Slika 3.5). U numeričkom modelu to znači da se tehnika balansiranja na unutarnjoj granici modificira na način da se u slučaju kada je  $h_i > 0$ ,  $h_j = 0$  i  $h_i + z_i < z_j$  izraz (3.14) mijenja tako da se privremeno visina „suhe“ ćelije definira kao  $z_j = h_i + z_i$ .

## 3.4. Numerički model za 3D jednadžbe strujanja sa slobodnom površinom

Postoje dva osnovna načina numeričkog rješavanja 3D jednadžbi strujanja: rješavanje sustava i sekvencijalno rješavanje po algoritmu tzv. segregiranog rješavača. Za numeričko modeliranje strujanja sa slobodnom površinom koristi se sekvencijalno rješavanje pomoću numeričkih shema za diskretno rješavanje zakona očuvanja.

S obzirom da jednadžba kontinuiteta ne sadrži varijablu tlaka, pri sekvencijalnom rješavanju potrebno je uvesti i numerički postupak koji će nadoknaditi ovaj fundamentalni problem matematičkog modela.

### 3.4.1. Numeričke sheme za Navier-Stokes jednadžbe

Navier-Stokes jednadžbe zakona očuvanja rješavaju se zasebno, numerički u diskretnoj integralnoj formi, po svakom pojedinom konačnom volumenu.

Kako se vrijednosti varijabli čuvaju u centru ćelija, nužno je rekonstruirati ih na stranicama konačnih volumena da bi jednadžbe bile rješive. Ova rekonstrukcija se provodi pomoću implicitnih *upwind* numeričkih shema koje vrijednosti varijabli na stranicama



određuju zavisno od smjera strujanja fluida. Neke od implicitnih *upwind* shema za sekvencijalno rješavanje Navier-Stokes jednadžbi su sljedeće:

- *upwind* shema prvog reda
- *upwind* shema drugog reda
- QUICK shema
- MUSCL shema

Za rekonstrukciju vrijednosti tlaka na stranicama konačnih volumena razvijene su posebne numeričke sheme, neke od kojih su:

- linearna shema
- shema drugog reda
- *body-force-weighted* shema
- *pressure staggering option* (PRESTO) shema

Osim definiranja numeričke sheme za rekonstrukciju varijabli na stranicama konačnih volumena nužno je povezati jednadžbu kontinuiteta i jednadžbe očuvanja količine gibanja. U tu svrhu razvijene su tri osnovne metode:

- rješavanje jednadžbe vrtložnosti
- rješavanje modificirane jednadžbe kontinuiteta za pseudostlačivi fluid
- korekcija tlaka iz jednadžbe kontinuiteta

Metode rješavanja jednadžbe vrtložnosti počivaju na uvođenju vektora vrtložnosti definiranog kao:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} ,$$

čime se eliminira tlak iz jednadžbe očuvanja količine gibanja. Ove metode su vrlo složene za numeričko rješavanje i rijetko se koriste.

Metode uvođenja pseudostlačivosti temelje se na rješavanju modificirane jednadžbe kontinuiteta:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 ,$$

gdje  $\beta$  predstavlja parametar umjetne kompresibilnosti koji se kreće u intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ . Ove metode imaju fizikalno rješenje samo za stacionarno strujanje, a zbog slabe konvergencije nisu se pokazale atraktivnim u primjeni.

Metode korekcije tlaka iz jednadžbe kontinuiteta omogućavaju sekvencijalno rješavanje jednadžbi, što predstavlja numerički jednostavniji i robusniji način. Ove metode su se pokazale najboljima za široku primjenu i stoga se najčešće koriste, a dijele se u dvije osnovne grupe:

- SIMPLE (*Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation*) metode
- *predictor-corrector* metode

SIMPLE metode su izvorno definirane za modeliranje stacionarnog strujanja, ali su naknadno kasnije uspješno proširene za nestacionarno strujanje. *Predictor-corrector* metode koriste se za modeliranje nestacionarnog strujanja, a nazivaju se još i *fractional step* metode.

### 3.4.1.1. SIMPLE metoda

Sve varijante SIMPLE metode ([26]) koncipirane su na sljedećem postupku:

- 1) Polje brzina računa se iz jednadžbi očuvanja količine gibanja koje se rješavaju za trenutne vrijednosti tlakova i brzina.
- 2) Preliminarno izračunate brzine ne zadovoljavaju u potpunosti jednadžbu kontinuiteta i iz tako dobivenog disbalansa mase izračunava se korekcija vrijednosti tlaka.
- 3) Iz dobivenih vrijednosti brzina i tlakova računaju se skalari turbulencije, koncentracija teže faze, i dr.
- 4) Provjerava se konvergencija rješenja i po potrebi ponavlja postupak.

U prvom koraku ovakvog načina rješavanja jednadžbi modela svaka pojedina varijabla računa se zasebno po cijeloj domeni. Za tu svrhu svaka od jednadžbi linearizira se po nekoj od implicitnih shema.

U drugom koraku se koristi Poissonova jednadžba za tlak koju se dobiva tako da se cijelu jednadžbu očuvanja količine gibanja (2.27) parcijalno derivira po prostornim koordinatama. Time se, uz uvjet zadovoljenja jednadžbe kontinuiteta (2.26) i konstantnu gustoću  $\rho$  dobiva:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \mathbf{x}^2} = -\rho \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[ \frac{\partial(\mathbf{v}\mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right] .$$

Ovaj izraz se u SIMPLE metodama koristi za računanje popravka tlaka  $p'$  kojim se korigira vrijednost tlaka u jednadžbi očuvanja količine gibanja. Tako dobiveno polje brzina



ima za posljedicu bolje zadovoljenje jednadžbe očuvanja mase. Ovaj postupak zahtijeva najveći dio od ukupno utrošenog proračunskog vremena, što ga dodatno čini posebno važnim.

Konkretna diskretna implementacija SIMPLE metode ([18]) počiva na integralnoj formi 3D jednadžbi strujanja, koje za slučaj stacionarnog strujanja izgledaju ovako:

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (3.16)$$

$$\oint \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = -\oint p \mathbf{I} \cdot d\mathbf{A} + \oint \boldsymbol{\tau} d\mathbf{A} + \int \mathbf{g} dV, \quad (3.17)$$

gdje je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica, a  $\mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{n}$  usmjerena površina oplošja kontrolnog volumena.

Diskretizira li se jednadžba (3.16) po konačnom volumenu dobije se:

$$\sum_k J_i^{(k)} A_i^{(k)} = 0, \quad (3.18)$$

gdje je  $A_i^{(k)}$  površina  $k$ -tog lica (stranice)  $i$ -te ćelije, a  $J_i^{(k)}$  fluks mase kroz isto lice:

$$J_i^{(k)} = \rho \mathbf{v}_i^{(k)} \cdot \mathbf{n}_i^{(k)}.$$

S obzirom da se brzine računaju u centrima ćelija, brzine na  $k$ -tom licu  $\mathbf{v}_i^{(k)}$  nisu poznate, a ne mogu se uspješno rekonstruirati interpolacijom. Zbog toga je potrebno definirati novi izraz za fluks  $J$ , koji se temelji na diskretizaciji jednadžbe očuvanja količine gibanja i za lice između  $i$ -te ćelije i  $j$ -te ćelije izgleda ovako:

$$J_{ij} = \hat{J}_{ij} + d_{ij}(p_i - p_j),$$

gdje je  $d_{ij}$  težinski faktor dobiven iz diskretizacije jednadžbe očuvanja količine gibanja,  $p_i$  i  $p_j$  su tlakovi u ćelijama sa obje strane lica odnosno u  $i$ -toj i  $j$ -toj ćeliji, dok je  $\hat{J}_{ij}$  fluks nastao kao posljedica brzina u promatranim ćelijama.

Ako se iz jednadžbe očuvanja količine gibanja za preliminarno izračunate tlakove  $p_i^*$  i  $p_j^*$  (tj. tlakove iz prethodne iteracije postupka) dobije preliminarni fluks  $J_{ij}^*$  koji ne zadovoljava jednadžbu kontinuiteta (3.18) te ako se definira da je  $\hat{J}_{ij} = J_{ij}^*$ , onda vrijedi:

$$J_{ij} = J_{ij}^* + d_{ij}(p_i' - p_j'),$$

gdje su  $p_i'$  i  $p_j'$  korekcija tlakova u  $i$ -toj i  $j$ -toj ćeliji. Ove korekcije računaju se ubacivanjem gornjeg izraza u jednadžbu kontinuiteta (3.18) (koja će time biti zadovoljena) te se koriste za računanje točnih vrijednosti tlaka:

$$p_i = p_i^* + \alpha_p p_i',$$

gdje je  $\alpha_p$  podrelaksacijski faktor za tlak koji služi za kontroliranje numeričke stabilnosti ( $0 < \alpha_p < 1$ ).

Postupak računanja korekcija tlaka se ponavlja dok god se ne ostvari zadovoljenje i jednadžbe kontinuiteta i jednadžbe očuvanja količine gibanja odnosno stabilizacija vrijednosti tlakova i brzina. Osim što je dosta nestabilan, ovakav postupak je proračunski vrlo skup, što je iniciralo razvoj mnogih poboljšanih varijanti ove metode: SIMPLEST, SIMPLEC, SIMPLER, PISO, itd.

### 3.4.2. Numeričke sheme za VOF metodu

*Volume of Fluid* (VOF) metoda (vidi podpoglavlje 2.3.4.1, str. 30) u matematički model strujanja uvodi dodatnu varijablu koncentracije disperzirane (teže) faze odnosno vode  $f = f_v$ . Koncentracija  $f$  računa se iz transportne jednadžbe (2.32), a slobodna površina nalazi se unutar ćelija u kojima je  $0 < f < 1$ .

Transportna jednadžba (2.32) računa se po eksplicitnoj ili implicitnoj numeričkoj shemi, s time da se u ćelijama unutar kojih se nalazi slobodna površina mogu provesti preciznije metode za rekonstrukciju slobodne površine.

Eksplicitna shema za rješavanje jednadžbe (2.32) izgleda ovako:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{V_i} \sum_k (U_i^{(k),n} f_i^{(k),n}) = 0,$$

gdje nadindeksi  $n$  i  $n+1$  označavaju vremenski trenutak, podindeksi  $i$  ćeliju, a nadindeksi  $(k)$   $k$ -to lice (stranicu)  $i$ -te ćelije.  $V$  označava volumen ćelije, a  $U$  protok kroz stranicu ćelije. Vrijednosti koncentracije na stranici ćelije  $f_i^{(k)}$  računaju se po nekoj od implicitnih *upwind* shema (vidi podpoglavlje 3.4.1, str. 47).

Implicitna shema za rješavanje iste jednadžbe (2.32), uz istu notaciju, izgleda ovako:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{V_i} \sum_k (U_i^{(k),n+1} f_i^{(k),n+1}) = 0,$$

a koristi se najčešće za simulacije stacionarnog strujanja.



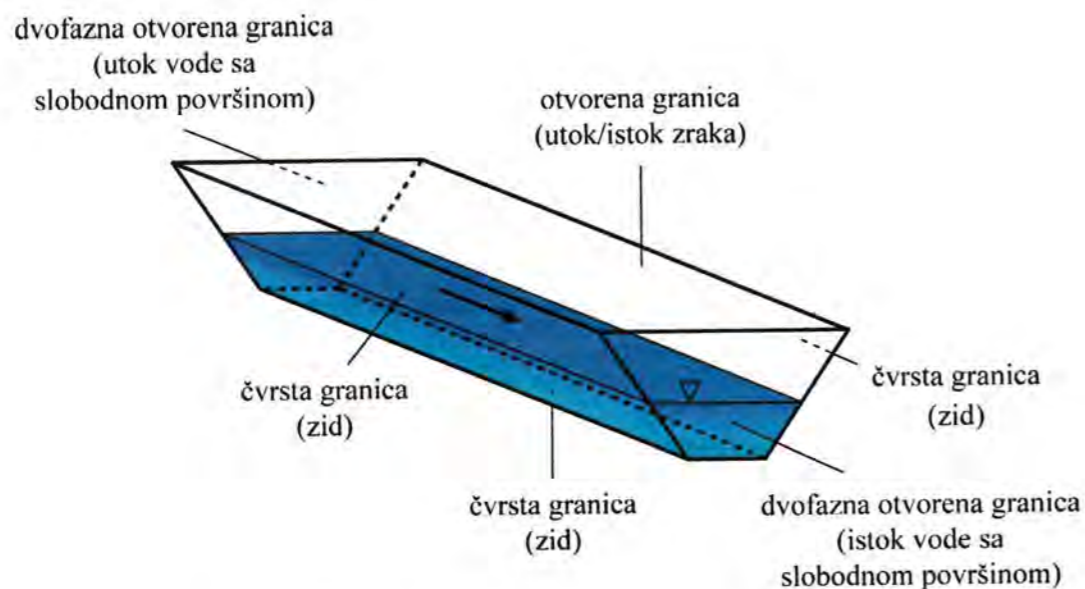
Gore opisane sheme imaju za rezultat slobodnu površinu relativno grubo definiranu „pjenastim“ dvofaznim ćelijama. U cilju dobivanja preciznije rekonstrukcije slobodne površine, provode se posebne interpolacijske metode u ćelijama unutar kojih je  $0 < f_i < 1$ .

U tom smislu se precizno određivanje slobodne površine može vrlo uspješno provesti metodom geometrijske rekonstrukcije koja slobodnu površinu određuje linearnom interpolacijom po dijelovima. Nagib slobodne površine unutar svake ćelije definira se na temelju gradijenta koncentracije, a njena pozicija u ćeliji određuje se iz same vrijednosti koncentracije.

### 3.4.3. Numeričko tretiranje rubnih uvjeta za 3D numerički model strujanja sa slobodnom površinom

Kao i kod rubnih uvjeta za modele plitkih voda, tako i numeričko tretiranje rubnih uvjeta za 3D model strujanja sa slobodnom površinom ovisi o uvjetima strujanja na granici domene te o samom tipu granice (Tablica 2.4). Granice domene za modeliranje 3D strujanja sa slobodnom površinom općenito možemo podijeliti na sljedeće osnovne tipove (Slika 3.8):

- dvofazna otvorena granica (utok ili istok vode sa slobodnom površinom)
- jednofazna otvorena granica (najčešće utok ili istok zraka uz zadani tlak)
- čvrsta granica (zid)



Slika 3.8. Mogući izgled 3D domene i raspored njenih granica

Treba napomenuti da kod trodimenzionalnog strujanja sa slobodnom površinom ne postoji unutarnja granica koja u numeričkom modelu plitkih voda razgraničava „mokra“

područje (tj. područje proračunske domene) od „suhog“ područja (tj. područja van proračunske domene). Ovdje je cjelokupna numerička domena ispunjena fluidom, što znači da ona ujedno uvijek predstavlja proračunsku (aktivnu) domenu, što znači da se ne može govoriti o „unutarnjoj granici“ kao kod 1D i 2D modela plitkih voda.

Na čvrstoj granici domene primjenjuje se rubni uvjet *no-slip* zida, s time da je ovaj rubni uvjet posebno značajan za modeliranje turbulentnog strujanja zbog kompleksnih mehanizama nastajanja vrtložnja i turbulencije u području do zida koji utječu na cjelokupni turbulentni profil strujanja. Turbulentni modeli strujanja (vidi podpoglavlje 2.3.3, str. 26) većinom uspješno modeliraju strujanje van zone izravnog utjecaja zida, dok se za rubni sloj uza zid (*boundary layer*) primjenjuju tzv. „zakoni zida“ odnosno funkcije koje aproksimiraju profil brzina u području od zida do razvijenog turbulentnog strujanja. Alternativni pristup nekih turbulentnih modela (npr. *k- $\omega$*  model) omogućuje modeliranje cijelog područja do zida, što daje veću točnost, ali zahtijeva gušću numeričku mrežu uza zid i smanjuje robusnost.

Na otvorenoj granici rubni uvjeti zadaju se kako je to opisano u podpoglavlju 2.3.5 (str. 31), s time da je potrebno zadati i tlak zraka na granici. Zadavanje rubnih uvjeta na ulaznoj granici u softverskoj je implementaciji obično izvedeno tako da se zadaju i dubina i brzina strujanja neovisno o tipu strujanja (nadkritično ili podkritično). Računalni program određuje kakvo je strujanje i zadaje samo brzinu strujanja za podkritično strujanje ili obje varijable za nadkritično strujanje. Na izlaznoj granici zadaje se dubina vode za podkritično strujanje ili samo izlazni tlak zraka za nadkritično strujanje.

Turbulentne veličine (npr. *k* i  $\epsilon$ ) se također moraju zadati na otvorenoj granici, a korekcije tlaka  $p'$  (vidi podpoglavlje 3.4.1.1, str. 49) se u fiktivnim ćelijama s vanjske strane otvorene granice drže jednakim nuli.



## 4. Usporedba modela strujanja sa slobodnom površinom

U sklopu ovog rada provedena je usporedba opisanih numeričkih modela strujanja fluida sa slobodnom površinom na dva test-primjera:

- 1) stacionarno transkritično strujanje na preljevu (1D, 2D, i 3D model)
- 2) laboratorijski test pucanja brane u kanalu sa pregibom od  $45^\circ$  (2D i 3D model)

Test stacionarnog transkritičnog strujanja na preljevu koncipiran je tako da omogućava uspješnu upotrebu reduciranih modela strujanja s obzirom da je strujanje fizikalno jednodimenzionalno (zanemare li se turbulentni efekti). Realno je očekivati dobru rekonstrukciju slike strujanja od sva tri modela, što čini ovaj test dobrim izborom za usporedbu modela.

Drugi test-primjer je numerička rekonstrukcija laboratorijskog testa pucanja brane, gdje se zbog koljena u kanalu ne može očekivati uspješan rezultat od 1D modela plitkih voda. Stoga je ovaj test iskorišten za usporedbu 2D modela plitkih voda (za testiranje kojeg je test i osmišljen) i 3D modela strujanja sa slobodnom površinom.

Unatoč fundamentalnim razlikama navedenih numeričkih modela, njihova usporedba na ovakvim test-primjerima može se smatrati adekvatnom jer se sva tri modela upotrebljavaju u istraživanjima i inženjerskoj praksi za simulacije strujanja vode sa slobodnom površinom.

### 4.1. Stacionarno transkritično strujanje na preljevu

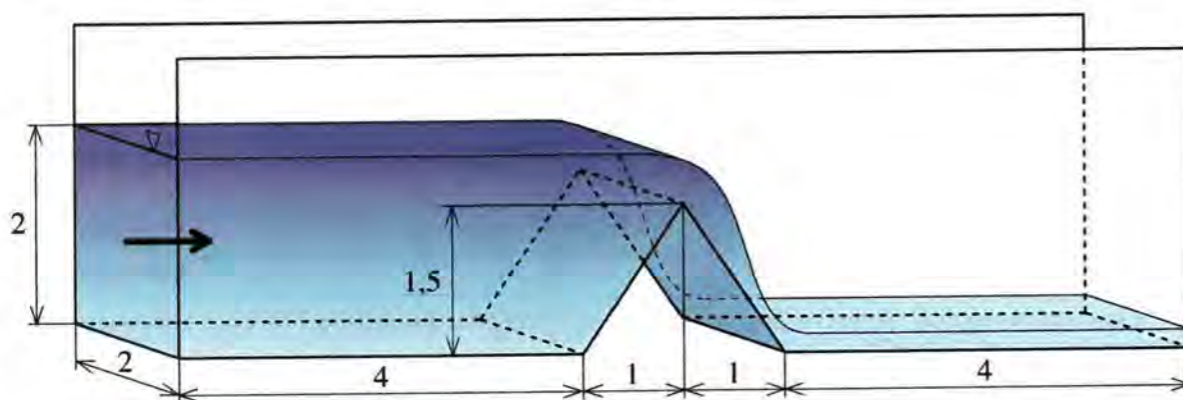
Kao prvi test-primjer za usporedbu modela strujanja sa slobodnom površinom definiran je test stacionarnog transkritičnog strujanja na preljevu. Ovaj test-primjer procijenjen je kao pogodan za usporedbu sva tri modela strujanja sa slobodnom površinom iz sljedećih razloga:



- jednostavna simetrična geometrija preljeva omogućuje relativno veliku točnost reduciranih (1D i 2D) modela strujanja
- moguće je izračunati analitičko rješenje za strujanje bez hidrauličkih gubitaka
- nadkrično strujanje od krune preljeva do izlazne granice eliminira moguće probleme sa zadavanjem rubnog uvjeta na izlazu

#### 4.1.1. Opis test-primjera

Numerički test stacionarnog transkričnog strujanja na preljevu zasnovan je na otvorenom pravokutnom kanalu duljine 10 m i širine 2 m koji na polovici svoje dužine ima na dnu smještenu trokutastu „grbu“ visine 1,5 m i duljine 2 m (Slika 4.1).



Slika 4.1. Test-primjer stacionarnog transkričnog strujanja na preljevu

Na ulaznoj granici zadana je razina vode  $h_0 = 2$  m koja za zadanu ulaznu brzinu  $v_0 = 0,3$  m/s daje podkrično strujanje. Strujanje ostaje podkrično do krune preljeva gdje dubina vode naglo pada pa strujanje prelazi u nadkrično i takvo ostaje do izlazne granice. Dno i zidovi (obale) kanala su zadani kao potpuno glatki (tj. na njima nema trenja), što omogućuje očuvanje stabilnog nadkričnog strujanja na nizvodnoj polovici domene.

S obzirom da modeli plitkih voda (1D i 2D), za razliku od 3D Navier-Stokes modela, ne pokrivaju viskozne efekte, za očekivati je pojavu specifičnih razlika u rezultatima uzrokovanih upravo time. Uzme li se još u obzir zadani uvjet strujanja bez trenja na zidovima, vidljivo je da u ovom test-primjeru modeli plitkih voda zapravo modeliraju strujanje bez hidrauličkih gubitaka i kao takvi se mogu uspoređivati sa analitičkim rješenjem.

##### 4.1.1.1. Analitičko rješenje za strujanje bez hidrauličkih gubitaka

Osnovni parametri strujanja u ovom test-primjeru mogu se jednostavno aproksimirati Bernoullijevom jednačinom uz uvjet brzine usrednjene po dubini, hidrostatske razdiobe tlaka te zanemarivanja efekata viskoznosti odnosno hidrauličkih gubitaka. Uz ove uvjete se ukupna energija fluida duž strujnice ne gubi, tj. energetska linija je ravna.

Računa li se energetska visina po strujnici na slobodnoj površini za jednodimenzionalno strujanje, izraz za nju je:

$$\frac{\bar{v}(x)^2}{2g} + h(x) + z(x) = E, \quad (4.1)$$

gdje je  $\bar{v}$  po dubini usrednjena brzina vode,  $h$  dubina vode, a  $z$  visina dna. S obzirom da su na ulazu u domenu ( $x = 0$  m) poznati svi parametri strujanja, možemo jednoznačno odrediti energetska visinu  $E = const.$

Nadalje, iz jednačbe kontinuiteta slijedi:

$$\bar{v}(x) = v_0 \frac{h_0}{h(x)},$$

čime se uz (4.1) za poznate visine dna kanala  $z(x)$  mogu dobiti srednje brzine i dubine za svaki  $x$  odnosno u svakom poprečnom profilu kanala.

Zadana energija fluida  $E$  u dijelu kanala uzvodno i nizvodno od preljeva ( $z = 0$  m) dopušta samo jednu podkričnu i jednu nadkričnu dubinu za dani protok (strujanje je stacionarno): moguća podkrična dubina je  $h_0$ , a moguća nadkrična dubina je  $h_{iz} = 0,098$  m. Iznad samog preljeva dešava se glatki transkrični prijelaz iz područja  $h = h_0$  u područje  $h = h_{iz}$ .

Ovako dobiveno rješenje može se koristiti za validaciju 1D i 2D modela plitkih voda bez efekata trenja, jer se temelji na istim pojednostavljenjima kao i modeli plitkih voda. Rezultati numeričkog modela Navier-Stokes jednačbi mogu se pak samo okvirno uspoređivati s ovim rješenjem jer taj model ne zanemaruje viskoznost fluida i ne sadrži navedena ograničenja na distribucije brzina i tlakova.

#### 4.1.2. Simulacija 1D modelom plitkih voda

Simulacije pomoću jednodimenzionalnog modela plitkih voda provedene su u računalnom programu Stripp12.

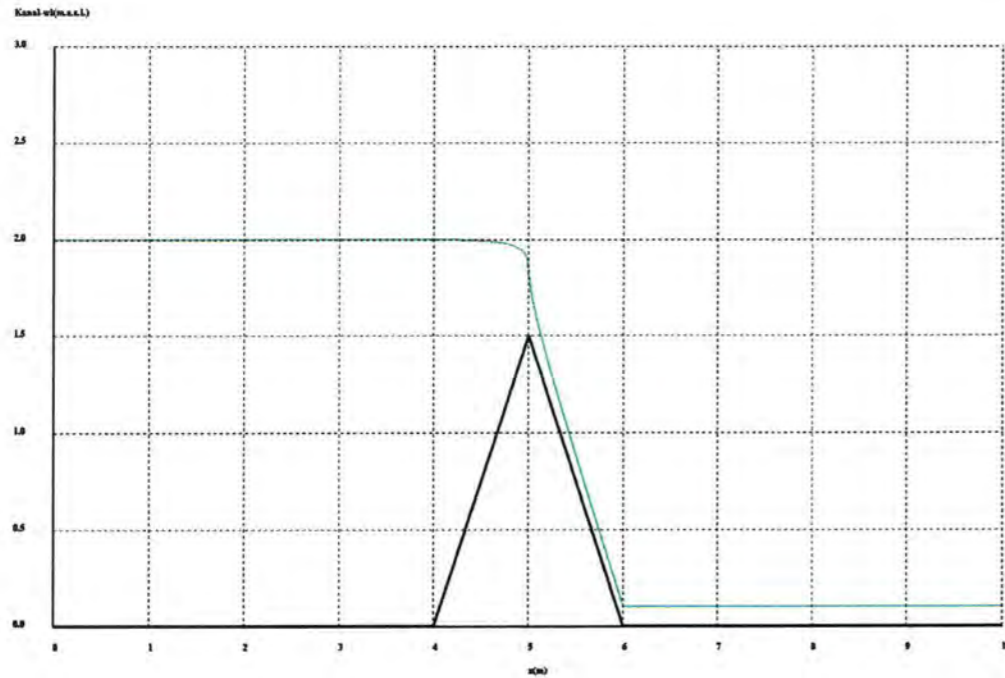
Domena je definirana pomoću pet poprečnih profila na temelju kojih je interpolacijom dobivena 1D numerička mreža sa korakom  $\Delta x = 0,02$  m. S obzirom da test-primjer predviđa strujanje bez trenja na dnu i obalama (tj. zidovima), Manningov koeficijent trenja definiran je po cijeloj domeni kao  $n = 0$ .

Kako je na ulaznoj granici strujanje definirano kao podkrično, zadan je rubni uvjet poznate dubine vode  $h_0 = 2$  m koji rezultira proračunatom brzinom  $v_0 = 0,3$  m/s. Na izlaznoj granici strujanje je nadkrično, pa nije zadan nikakav rubni uvjet nego voda slobodno istječe.

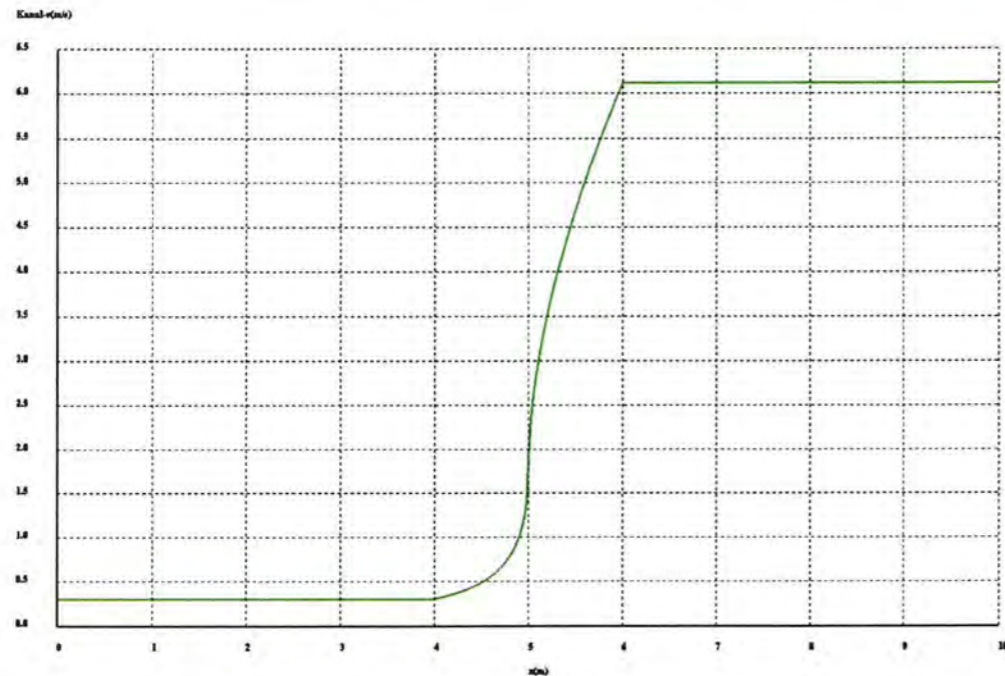
Rezultat je dobiven pomoću dobro balansirane Q-scheme prvog reda točnosti (vidi podpoglavlje 3.2.1, str. 38).



Slika 4.2 i Slika 4.3 prikazuju proračunato vodno lice i brzine strujanja na uzdužnom presjeku kanala.



Slika 4.2. Vodno lice dobiveno 1D modelom plitkih voda



Slika 4.3. Brzine strujanja dobivene 1D modelom plitkih voda

#### 4.1.3. Simulacija 2D modelom plitkih voda

Simulacije pomoću dvodimenzionalnog modela plitkih voda također su provedene u računalnom programu Stripp12.

Domena je definirana trokutastom 2D numeričkom mrežom sa korakom  $\Delta x = 0,02$  m iz koje je kreirana dualna mreža. Na lijevoj i desnoj obali nametnut je rubni uvjet zida, a Manningov koeficijent trenja definiran je po cijeloj domeni kao  $n = 0$ .

Na ulaznoj granici strujanje je podkritično, pa je zadan rubni uvjet poznate dubine vode  $h_0 = 2$  m koji rezultira proračunatom brzinom  $v_0 = 0,3$  m/s. Na izlaznoj granici nije zadan nikakav rubni uvjet radi nadkritičnog strujanja.

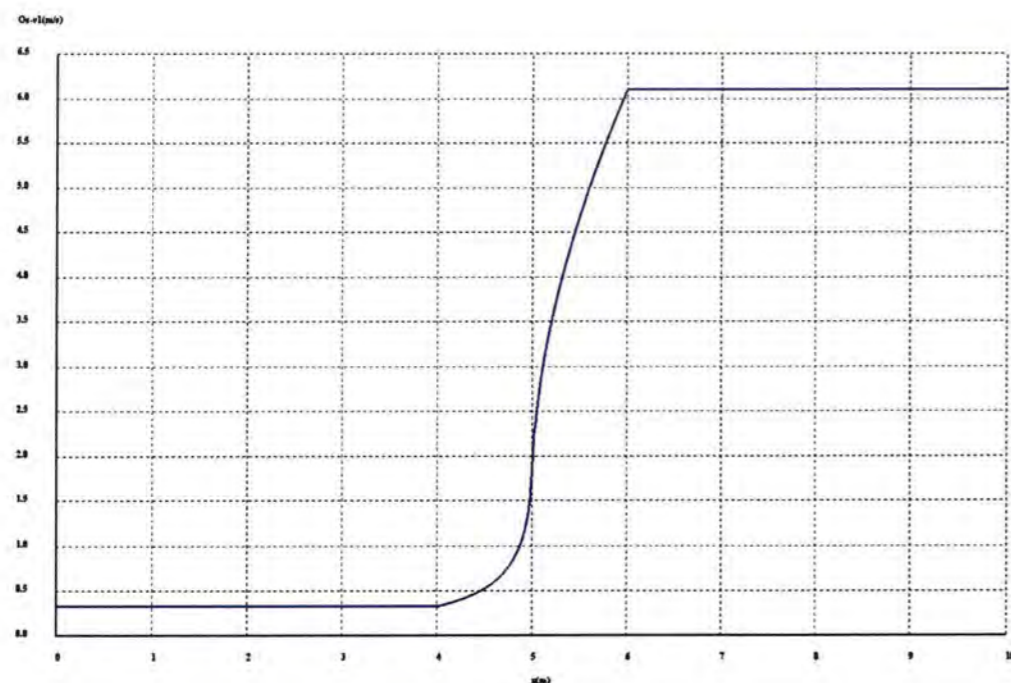
Rezultat je dobiven pomoću dobro balansirane Q-scheme prvog reda točnosti (vidi podpoglavlje 3.3.1, str. 43).

Slika 4.4 prikazuje proračunato vodno lice u prostornom prikazu, a Slika 4.5 prikazuje brzine u uzdužnom smjeru u osi kanala.



Slika 4.4. Vodno lice dobiveno 2D modelom plitkih voda





Slika 4.5. Uzdužne brzine strujanja dobivene 2D modelom plitkih voda

#### 4.1.4. Simulacija 3D modelom strujanja sa slobodnom površinom

Simulacije pomoću trodimenzionalnog modela strujanja sa slobodnom površinom provedene su u računalnom programu Fluent.

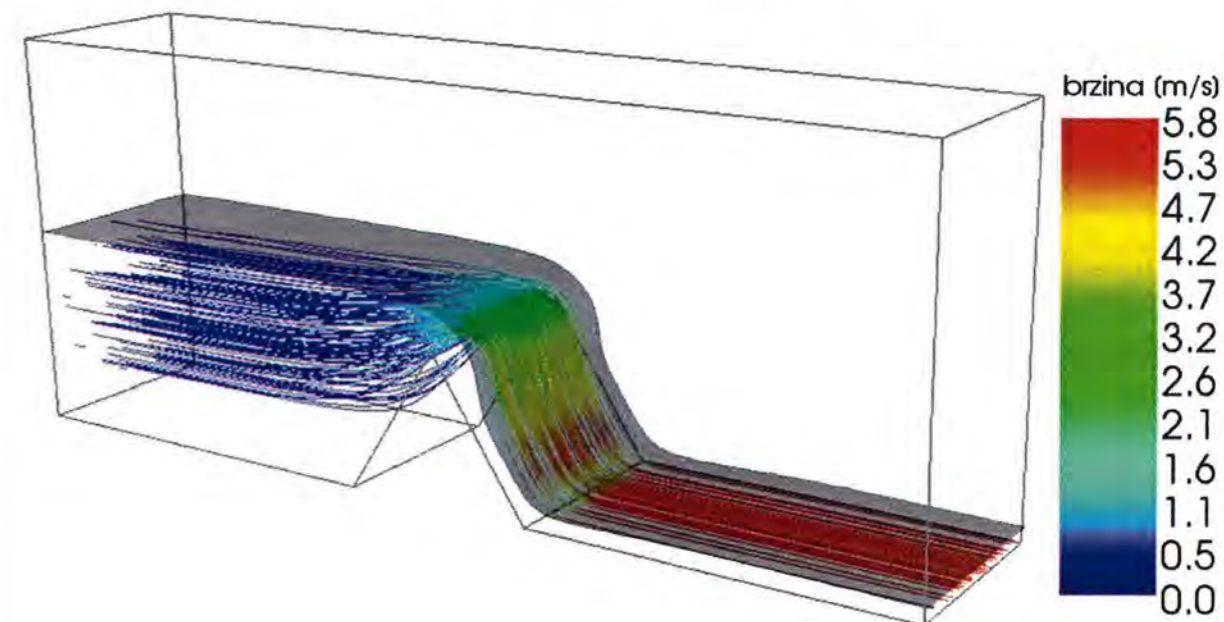
Domena je definirana 3D numeričkom mrežom prizmi i tetraedara sa prosječnim korakom  $\Delta x = 0,05$  m i ugušćenjem uz dno kanala (oko 900.000 ćelija ukupno). Na lijevom i desnom zidu (obali) zadani su rubni uvjeti potpuno glatkog zida (visina neravnina jednaka nuli), a na isti način definiran je i rubni uvjet zida na dnu kanala. Na gornjoj granici domene nametnut je rubni uvjet poznatog tlaka zraka  $p_0 = 101325$  Pa, što okvirno odgovara atmosferskom tlaku.

Na ulaznoj granici nametnuta je poznata brzina ulaska vode  $v_0 = 0,3$  m/s i poznata dubina vode  $h_0 = 2$  m uz atmosferski tlak zraka  $p_0$ . Na izlaznoj granici je zbog nadkritičnog strujanja zadan samo atmosferski tlak zraka  $p_0$ .

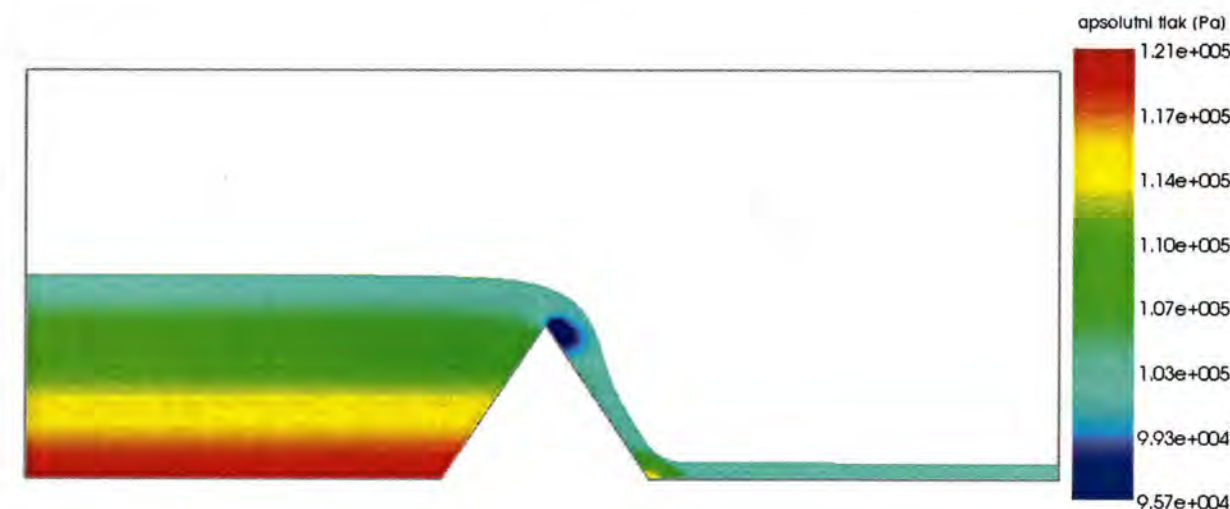
Gustoća i dinamička viskoznost vode definirane su kao  $\rho_v = 998,2$  kg/m<sup>3</sup> i  $\mu_v = 1,003 \cdot 10^{-2}$  kg/ms, dok su gustoća i dinamička viskoznost zraka definirane kao  $\rho_z = 1,225$  kg/m<sup>3</sup> i  $\mu_z = 1,789 \cdot 10^{-5}$  kg/ms.

Rekonstrukcija varijabli na stranicama ćelija provedena je pomoću PRESTO i QUICK numeričkih shema, uz korekciju tlaka prema PISO metodi (vidi podpoglavlje 3.4.1, str. 47). Transportna jednačina koncentracije vode rješavana je po implicitnoj numeričkoj shemi (vidi podpoglavlje 3.4.2, str. 51).

Slika 4.6 prikazuje dobiveno vodno lice (za koncentraciju vode  $f = 0,5$ ) i strujnice obojane brzinom strujanja, a Slika 4.7 prikazuje dobiveno polje tlaka.



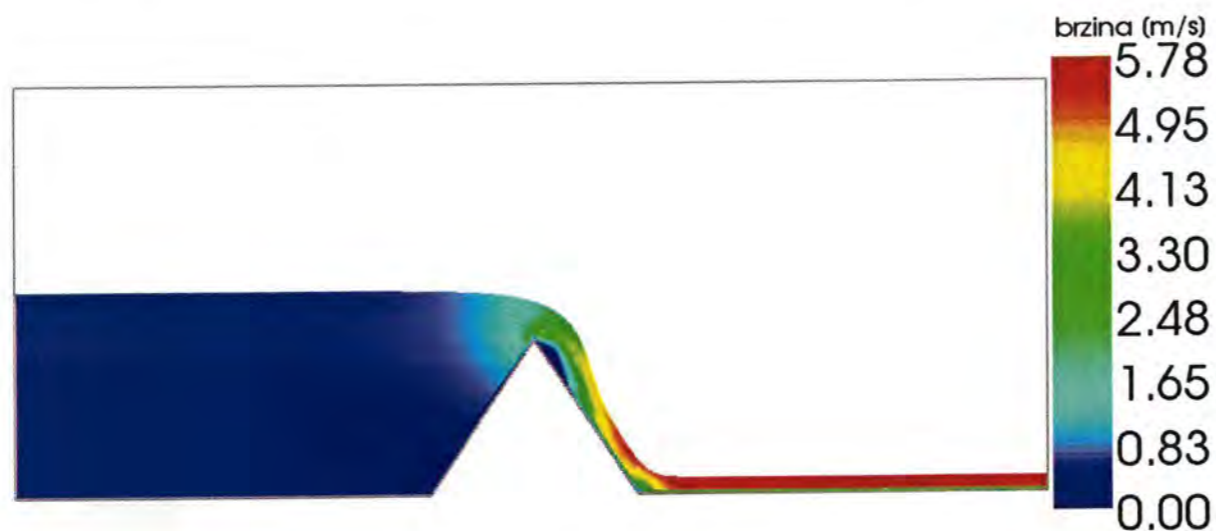
Slika 4.6. Slobodna površina i strujnice vode dobivene 3D modelom strujanja sa slobodnom površinom



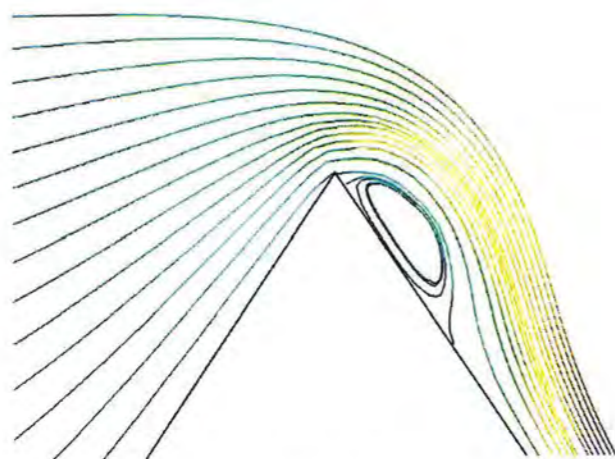
Slika 4.7. Polje tlaka vode u osi kanala dobiveno 3D modelom strujanja sa slobodnom površinom

Prikazani rezultati pokazuju da razdioba tlaka na nizvodnoj strani preljeva nije hidrostatska (Slika 4.7), što je i očekivana posljedica viskoznosti fluida. Također, viskoznost odnosno nehidrostatska razdioba tlaka u vezi su s promjenama brzina po dubini (Slika 4.8) i pojavama vrtloga ispod površine vode (Slika 4.9).





Slika 4.8. Polje intenziteta brzine vode u osi kanala dobiveno 3D modelom strujanja sa slobodnom površinom



Slika 4.9. Vrtložna zona iza krune preljeva

Iz prikazanih rezultata 3D modela strujanja sa slobodnom površinom može se zaključiti da viskozni efekti u ovom test-primjeru vidljivo utječu na strujanje. Time se mogu objasniti razlike između ovog rezultata i rezultata dobivenih 1D i 2D modelima plitkih voda koji pretpostavljaju brzine usrednjene po dubini uz hidrostatsku razdiobu tlaka.

Mada se slobodna površina standardno određuje kao ploha koncentracije vode  $f=0,5$ , treba napomenuti da je razinu vode na nizvodnoj (nadkritičnoj) strani domene donekle teško odrediti s većom sigurnošću radi nedovoljno precizno definirane granice između vode i zraka (Slika 4.10).



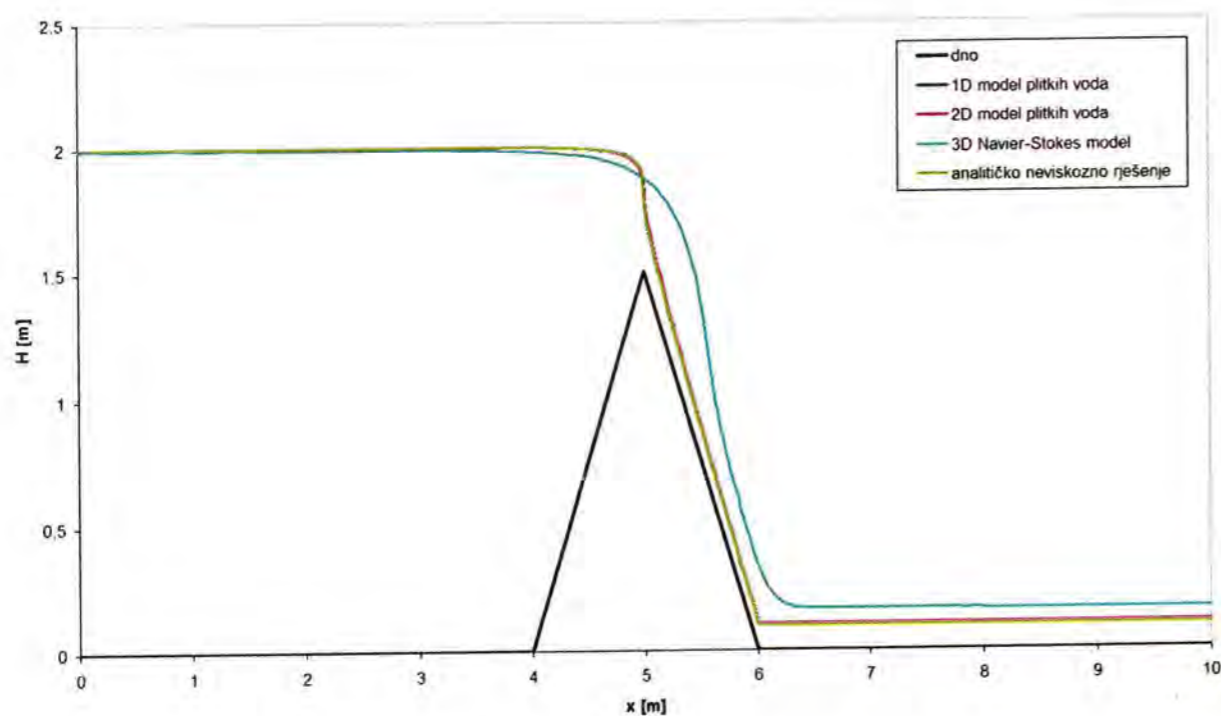
Slika 4.10. Distribucija faza (voda-zrak) u osi kanala

Dvofazne („pjenaste“) ćelije koje sadrže i vodu i zrak (Slika 4.10, žuto-zeleni pojas) na nizvodnoj se strani nalaze u sloju od 0,09 m do 0,23 m višem od dna, što daje odnos  $d_{\text{mix}}/h \approx 0,9$  (gdje je  $d_{\text{mix}}$  visina sloja dvofaznih ćelija). Ovaj podatak ilustrira spomenutu nesigurnost s obzirom da je u principu  $d_{\text{mix}}/h < 2$ , a precizno određena slobodna površina zahtijeva  $d_{\text{mix}}/h \approx 0$ .

#### 4.1.5. Usporedba dobivenih rezultata

Rezultate simulacija strujanja na ovom test-primjeru za 1D model plitkih voda, 2D model plitkih voda i 3D model strujanja sa slobodnom površinom najprimjerenije je usporediti na proračunatim razinama vodnog lica, tj. obliku slobodne površine. Slika 4.11 prikazuje dobivene razine slobodne površine ( $H = h + z$ ) u osi kanala za sva tri modela, zajedno s analitičkim rješenjem za po dubini usrednjeno strujanje bez hidrauličkih gubitaka.





Slika 4.11. Usporedba proračunatih vodnih lica u osi kanala

Slika 4.11 zorno prikazuje visoku točnost oba modela plitkih voda; proračunate razine vode vrlo uspješno rekonstruiraju analitičko rješenje koje se temelji na istim redukcijama kao i modeli plitkih voda. Nadalje, poklapanje rezultata 1D i 2D modela plitkih voda pokazuje da se 2D model u slučaju jednodimenzionalnog strujanja očekivano svodi na 1D model i to bez vidljivih numeričkih teškoća. U tom smislu je od oba modela plitkih voda u ovom test-primjeru dobiven maksimum.

Vodno lice proračunato 3D modelom strujanja viskoznog fluida pokazuje vrlo prirodan i očekivan oblik, a odstupanje od ostalih rezultata uzrokovano je viskoznim efektima punog trodimenzionalnog strujanja. Odvajanje „slapa“ od preljeva na njegovoj nizvodnoj strani povezano je sa vrtloženjem ispod krune preljeva (Slika 4.9), dok povišena razina vode nizvodno od preljeva predstavlja očekivanu posljedicu viskoznosti vode.

Ukupno gledano, može se zaključiti da su modeli korišteni na ovom test-primjeru potvrđeni kao primjenjivi i uspješni numerički alati za simulaciju stacionarnog strujanja u otvorenim kanalima.

## 4.2. Pucanje brane u kanalu sa pregibom od 45°

Kao drugi test-primjer za usporedbu modela strujanja sa slobodnom površinom izabran je laboratorijski test pucanja brane u kanalu sa pregibom od 45°. Ovaj test-primjer izabran je za usporedbu modela strujanja sa slobodnom površinom zbog sljedećih razloga:

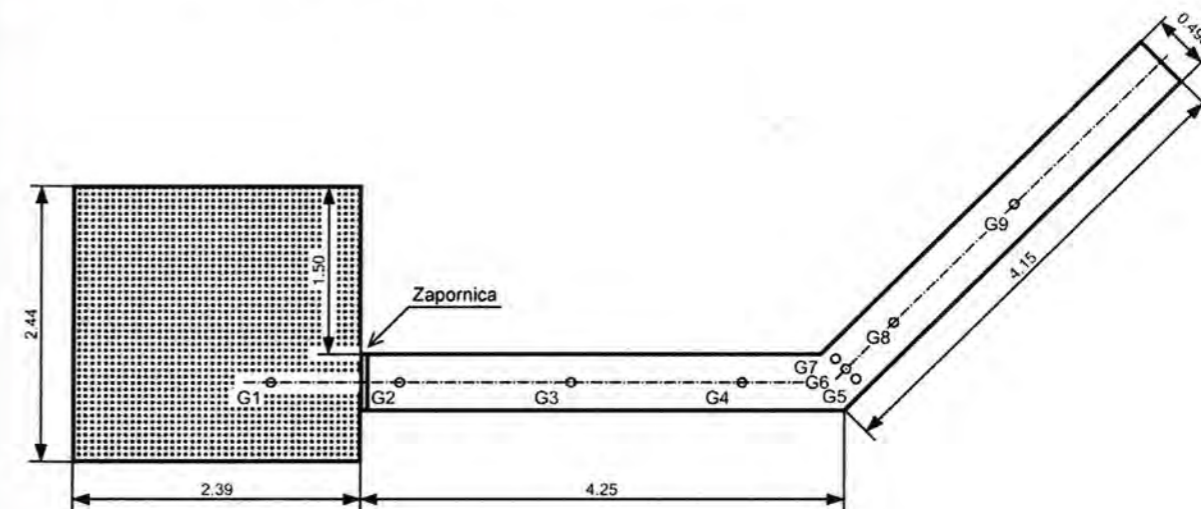
- radi se o relevantnom eksperimentalnom testu koji je u novije vrijeme postao jedan od standardnih test-primjera za validaciju numeričkih modela pucanja brane
- priroda strujanja omogućuje postizanje dobrih rezultata pomoću 2D modela plitkih voda
- jednostavno definirane granice domene (cijela domena obrubljena je zidovima, osim izlaza na kojemu je strujanje nadkritično) minimiziraju opasnost od pojave numeričkih nestabilnosti uzrokovanih rubnim uvjetima

### 4.2.1. Opis test-primjera

Laboratorijski test pucanja brane u kanalu sa pregibom od 45° preuzet je iz kolekcije testova za numeričko modeliranje pucanja brane definiranih u sklopu međunarodnog CADAM projekta (*Concerted Action on Dambreak Modelling*, 1998.-2000.). Unutar CADAM projekta proveden je niz laboratorijskih eksperimenata koji su naknadno korišteni za validaciju numeričkih modela. Nakon završetka CADAM projekta, započeti rad nastavljen je na međunarodnom projektu IMPACT (*Investigation of Extreme Flood Processes & Uncertainty*, 2001.-2005.).

U svrhu dobivanja pouzdanih podataka na temelju kojih će se ocijeniti numerički modeli za modeliranje strujanja vode pri pucanju brane, u sklopu projekta CADAM proveden je i eksperiment na laboratorijskom kanalu s pregibom od 45°.

Eksperiment je proveden na kanalu s pregibom na čijem početku se nalazi kvadratni spremnik dimenzija 2,44 m × 2,39 m (Slika 4.12). Brana je predstavljena zapornicom, pa je pucanje brane simulirano naglim otvaranjem zapornice.



Slika 4.12. Izgled kanala s pregibom od 45°

Spremnik i kanal su potpuno ravni, s time da je dno rezervoara 0,33 m niže od dna kanala. Inicijalna razina vode u spremniku je 0,25 m iznad razine dna kanala.



Stjenke kanala su izvedene od stakla, dok je dno čelično (Slika 4.13). U cilju otklanjanja mogućih loših procjena Manningovih koeficijenata trenja u matematičkim modelima, eksperimentalno su određene njihove vrijednosti. Tako su dobiveni Manningovi koeficijenti trenja od 0,0095 za dno te 0,0195 za stjenke kanala ([30]).

Na mjernim točkama G1-G9 (Slika 4.12, Tablica 4.1) postavljeni su instrumenti za mjerenje koji bilježe razinu vode u vremenskim intervalima od 0,1 sekunde. Tako prikupljeni podaci o razinama vode na mjernim točkama priloženi su na CADAM CD-ROM-u ([10]).

Tablica 4.1. Mjerne točke za test-primjer pucanja brane u kanalu sa pregibom od  $45^\circ$  (ishodište u donjem lijevom kutu domene)

Mjerna točka	x [m]	y [m]
G1	1,59	0,69
G2	2,74	0,69
G3	4,24	0,69
G4	5,74	0,69
G5	6,74	0,72
G6	6,65	0,80
G7	6,56	0,89
G8	7,07	1,22
G9	8,13	2,28

Kada tok vode prolazi pregibom korita, razina vode podiže se na desnoj obali te se spušta na lijevoj. Kako brzina poplavnog vala ovisi o obliku korita, takva nagla promjena toka može izazvati značajno usporenje propagacije vala. Stoga ovakva geometrija definira slučaj pucanja brane pri kojem dolazi do izražaja problematika predviđanja brzine poplavnog vala koji nastaje prilikom istjecanja vode iz rezervoara u korito. Dodatni zanimljiv učinak pregiba u kanalu je formiranje povratnog vala koji se kreće uzvodno.



Slika 4.13. Strujanje kroz kanal i reflektirani val koji se formira na pregibu (pogled nizvodno)

Eksperiment počinje u trenutku kada se zapornica naglo odstrani. Voda tada poteče inicijalno suhim kanalom i stiže do pregiba nakon približno 3 s, gdje se reflektira od stjenke kanala i formira val koji putuje uzvodno prema rezervoaru (Slika 4.13, Slika 4.14). Reflektirani val stiže do rezervoara za oko 20 s gdje nestaje, nakon čega se tok vode smiruje i razina vode se posvuda postupno smanjuje.



Slika 4.14. Smjer strujanja vode ( $U$ ) i smjer propagacije reflektiranog vala ( $a$ )

Zbog asimetrične pozicije zapornice s obzirom na spremnik, u samom rezervoaru pojavljuju se složeni dvodimenzionalni efekti reflektiranja i oscilacija u valu razrjeđenja. Eksperiment je pokazao da ti fenomeni ne utječu znatno na tok vode u samom kanalu. Tok u kanalu između zapornice i pregiba kanala je dominantno jednodimenzionalan, dok se nizvodno od pregiba pojavljuju mnogi manji valovi koji se odbijaju od zidova kanala (Slika 4.15). Ovi valovi nastaju kao posljedica refleksije frontalnog vala od stijenki nizvodnog dijela kanala i zbog njih se strujanje u ovom dijelu kanala mora smatrati dominantno dvodimenzionalnim ili čak trodimenzionalnim.



Slika 4.15. Valovi u kanalu nizvodno od pregiba

#### 4.2.2. Simulacija 2D modelom plitkih voda

Simulacije pomoću dvodimenzionalnog modela plitkih voda provedene su u računalnom programu Stripp12.

Domena je definirana trokutastom 2D numeričkom mrežom sa korakom  $\Delta x = 0,02$  m iz koje je kreirana dualna mreža. S obzirom da je u eksperimentu strujanje na izlazu iz kanala bilo nadkrično, na izlaznoj granici domene dodan je još kratki niz elemenata sa vrlo strmim



padom. (Time na izlazu iz domene nije bilo potrebno zadavati nikakav rubni uvjet jer strmi pad dodanih ćelija na izlaznoj granici osigurava nadkrično strujanje.)

Po cijelom preostalom opsegu domene nametnut je rubni uvjet hrapavog zida koji je implementiran na način kako je opisano u podpoglavlju 3.3.2 (str. 45). Vrijednosti Manningovog koeficijenta trenja za zid i dno kanala preuzete su od autora samog eksperimenta ([30]).

Za početne uvjete postavljene su nulte brzine strujanja po cijeloj domeni te razina vode u rezervoaru na 0,25 m, u skladu sa inicijalnim uvjetima u eksperimentu.

S obzirom da vrijednost granične dubine vode  $h_{gr}$  (vidi podpoglavlje 3.2.2, str. 40) utječe na brzinu propagacije vodnog vala u numeričkom modelu (veća vrijednost  $h_{gr}$  ima za posljedicu sporije napredovanje vode), usvojena je vrijednost  $h_{gr} = 0,0006$  m kao najniža granična dubina vode koja ne narušava numeričku stabilnost modela.

Rezultat je dobiven pomoću dobro balansirane Q-scheme prvog reda točnosti (vidi podpoglavlje 3.3.1, str. 43).

Izgled vodnog lica u nekoliko karakterističnih trenutaka prikazan je u nastavku (Slika 4.16-Slika 4.20).



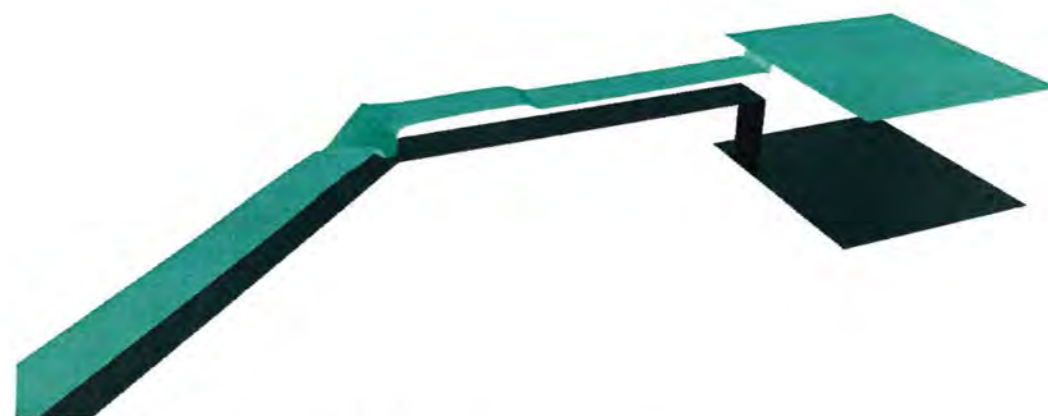
Slika 4.16. Početak propagacije vodnog vala ( $t = 1$  s) u 2D modelu



Slika 4.17. Prolazak poplavnog vala kroz pregib kanala ( $t = 3$  s) u 2D modelu

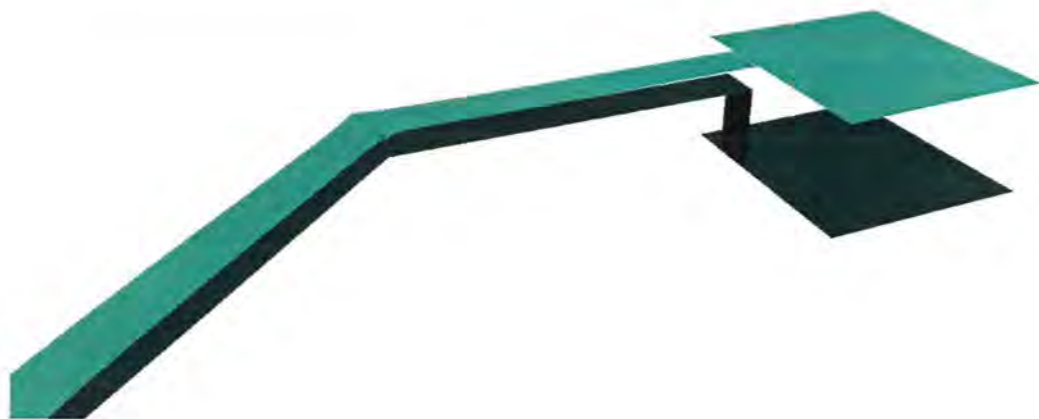


Slika 4.18. Poplavljenost cijelog kanala i formiranje povratnog vala ( $t = 5$  s) u 2D modelu



Slika 4.19. Uzvodno kretanje povratnog vala ( $t = 10$  s) u 2d modelu



Slika 4.20. Izravnanje vodnog lica ( $t = 20$  s) u 2D modelu

Gornje slike prikazuju uspješnu rekonstrukciju glavnih karakteristika propagacije vala nastalog uslijed pucanja brane na spremniku. Između ostalog, reflektirani val koji u eksperimentu nastaje uslijed pregiba u kanalu (Slika 4.14) uspješno je rekonstruiran (Slika 4.19).

### 4.2.3. Simulacija 3D modelom strujanja sa slobodnom površinom

Simulacije pomoću trodimenzionalnog modela strujanja sa slobodnom površinom provedene su u računalnom programu Fluent.

Domena je definirana 3D numeričkom mrežom prizmi i tetraedara sa korakom  $\Delta x = 0,02$  m u kanalu i  $\Delta x = 0,03$  m u spremniku, uz ugušćenje uza zidove kanala (oko 900.000 ćelija ukupno). Radi ispravne rekonstrukcije eksperimenta u numeričkoj je domeni na izlazu iz kanala spojen još jedan dublji pomoćni spremnik čime je na tom mjestu osigurano nadkritično strujanje. (Time na izlazu iz domene nije bilo potrebno zadavati nikakav rubni uvjet, već se voda prelijeva iz kanala i zadržava u pomoćnom spremniku.)

S obzirom da ovaj test-primjer podrazumijeva simulaciju nestacionarnog strujanja u periodu od 40 sekundi, vrijeme trajanja proračuna bilo je iznimno dugo (nekoliko tjedana paralelnog računanja na osam 64-bitnih AMD 2,2 GHz procesora). Testne simulacije provedene na numeričkim mrežama sa manjim brojem ćelija zahtijevale su manje proračunskog vremena, ali su dobiveni rezultati pokazali da numerička mreža sa većim ćelijama ne omogućuje dovoljno preciznu definiciju slobodne površine.

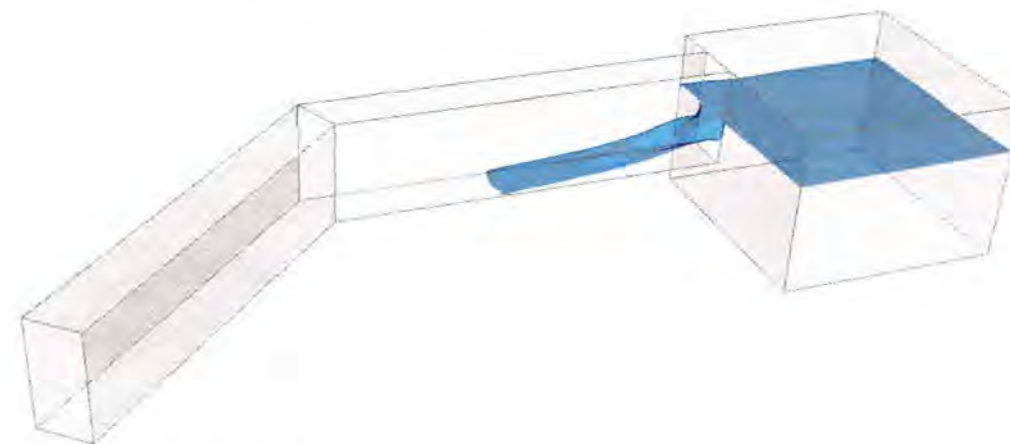
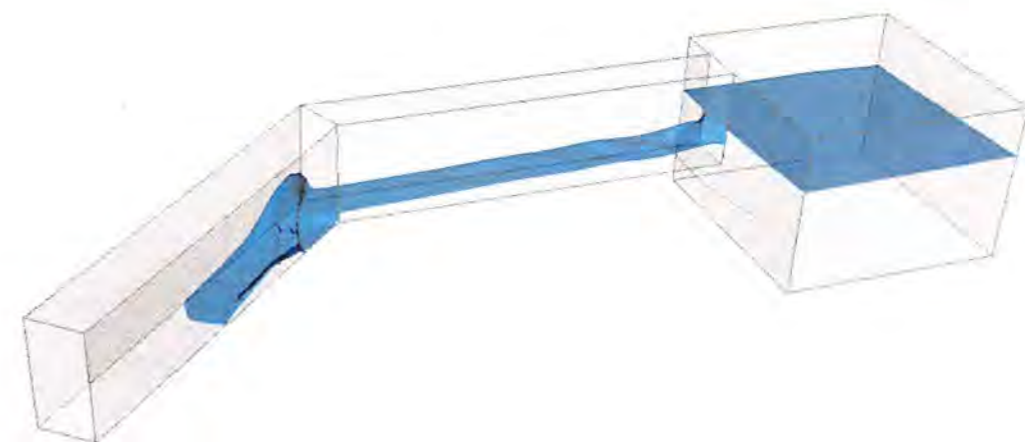
Na dnu domene zadan je rubni uvjet zida sa visinom neravnina  $e_{\text{dno}} = 0,1$  mm, dok je po opsegu bočnih zidova zadan rubni uvjet zida sa visinom neravnina  $e_{\text{zid}} = 0,2$  mm. Time je postignuta određena aproksimacija efekata trenja opisanih od strane autora samog eksperimenta ([30]). Na gornjoj granici („poklopcu“) domene nametnut je rubni uvjet poznatog tlaka zraka  $p_0 = 101325$  Pa, što okvirno odgovara atmosferskom tlaku.

Za početne uvjete postavljene su nulte brzine strujanja po cijeloj domeni te razina vode u rezervoaru na 0,25 m, u skladu sa inicijalnim uvjetima u eksperimentu.

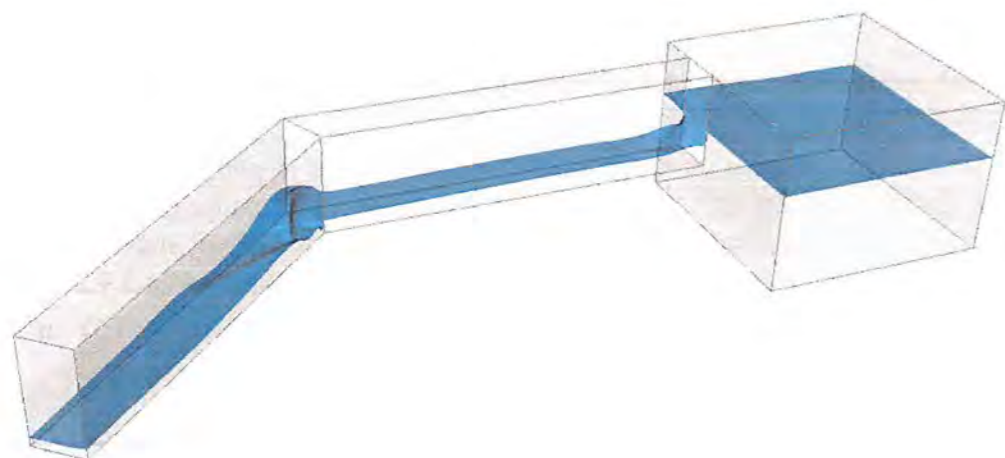
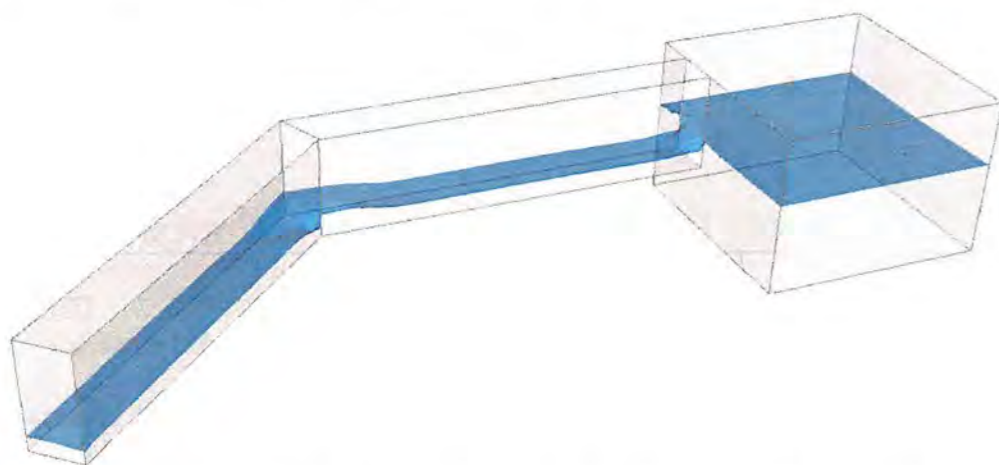
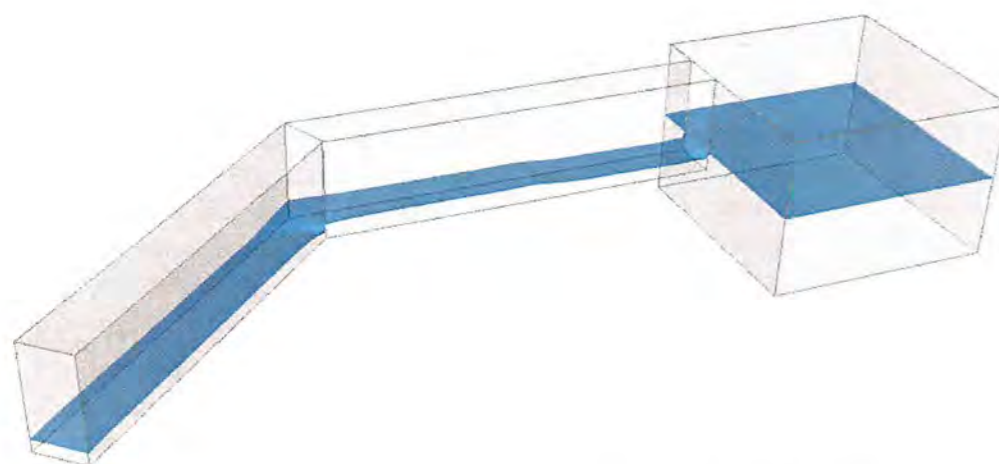
Gustoća i dinamička viskoznost vode zadane su kao  $\rho_v = 998,2$  kg/m<sup>3</sup> i  $\mu_v = 1,003 \cdot 10^{-2}$  kg/ms, dok su gustoća i dinamička viskoznost zraka definirane vrijednostima  $\rho_z = 1,225$  kg/m<sup>3</sup> i  $\mu_z = 1,789 \cdot 10^{-5}$  kg/ms.

Rekonstrukcija varijabli na stranicama ćelija provedena je pomoću PRESTO i QUICK numeričkih shema, uz korekciju tlaka prema PISO metodi (vidi podpoglavlje 3.4.1, str. 47). Transportna jednačina koncentracije vode rješavana je po implicitnoj numeričkoj shemi uz preciznu geometrijsku rekonstrukciju slobodne površine (vidi podpoglavlje 3.4.2, str. 51).

Izgled proračunatog vodnog lica (za koncentraciju vode  $f = 0,5$ ) u nekoliko karakterističnih trenutaka prikazan je u nastavku (Slika 4.21-Slika 4.25).

Slika 4.21. Početak propagacije vodnog vala ( $t = 1$  s) u 3D modeluSlika 4.22. Prolazak poplavnog vala kroz pregib kanala ( $t = 3$  s) u 3D modelu

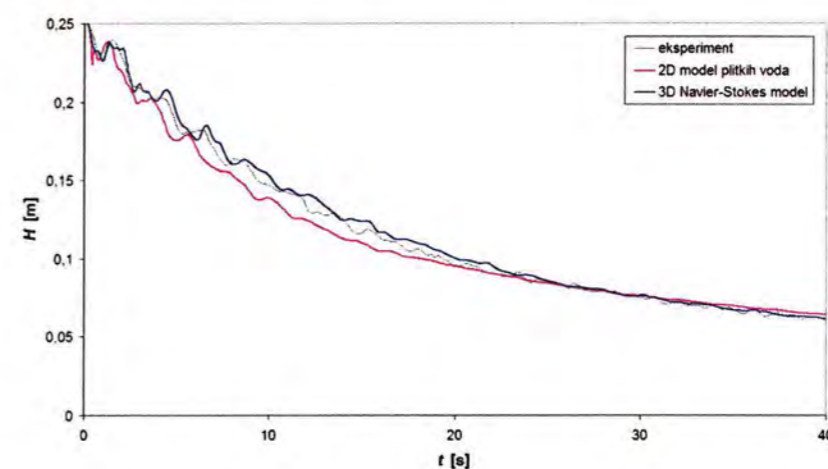


Slika 4.23. Poplavljenost cijelog kanala i formiranje povratnog vala ( $t = 5$  s) u 3D modeluSlika 4.24. Uzvodno kretanje povratnog vala ( $t = 10$  s) u 3D modeluSlika 4.25. Izravnanje vodnog lica ( $t = 20$  s) u 3D modelu

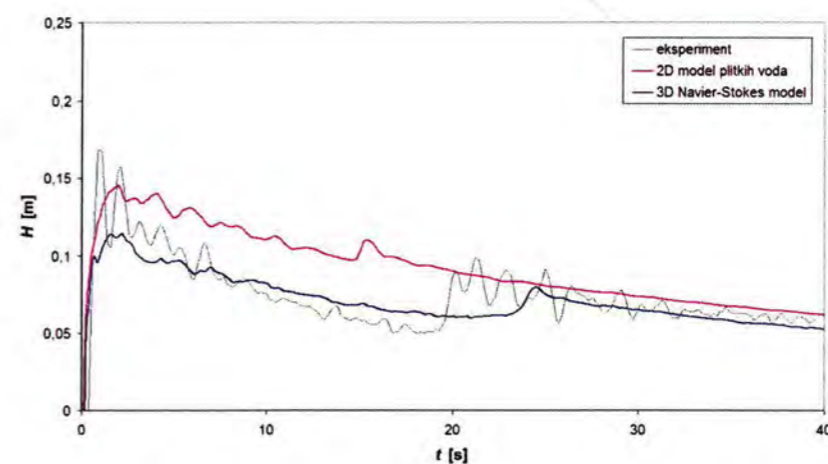
Rezultati prikazani na gornjim slikama ilustriraju uspješnu rekonstrukciju vodnog lica za provedeni eksperiment. Očekivani reflektirani val u dijelu kanala uzvodno od pregiba također je prisutan u dobivenim rezultatima (Slika 4.24).

#### 4.2.4. Usporedba dobivenih rezultata

Usporedba rezultata dobivenih 2D modelom plitkih voda i 3D modelom strujanja sa slobodnom površinom provedena je analizom proračunatih razina vode na mjernim mjestima G1-G9 (Tablica 4.1) za koje postoje eksperimentalni podaci. Za tu potrebu su iz proračunatih razina vodnog lica na danim mjernim mjestima konstruirani hidrogrami koji pokazuju promjenu razine vodnog lica u vremenu. Dobiveni hidrogrami po mjernim mjestima za korištene modele prikazani su u nastavku (Slika 4.26-Slika 4.34).

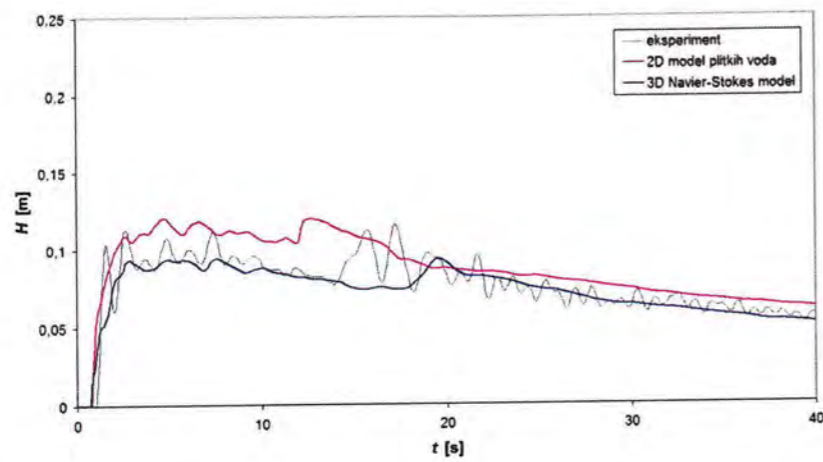


Slika 4.26. Proračunate razine vode na mjernom mjestu G1

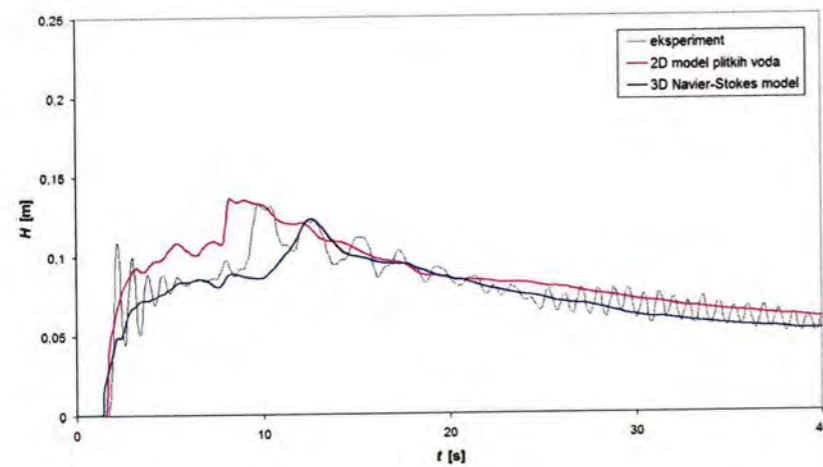


Slika 4.27. Proračunate razine vode na mjernom mjestu G2

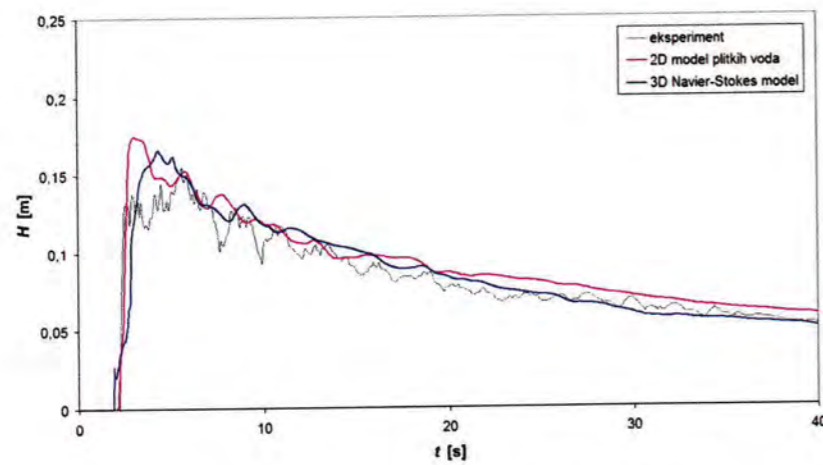




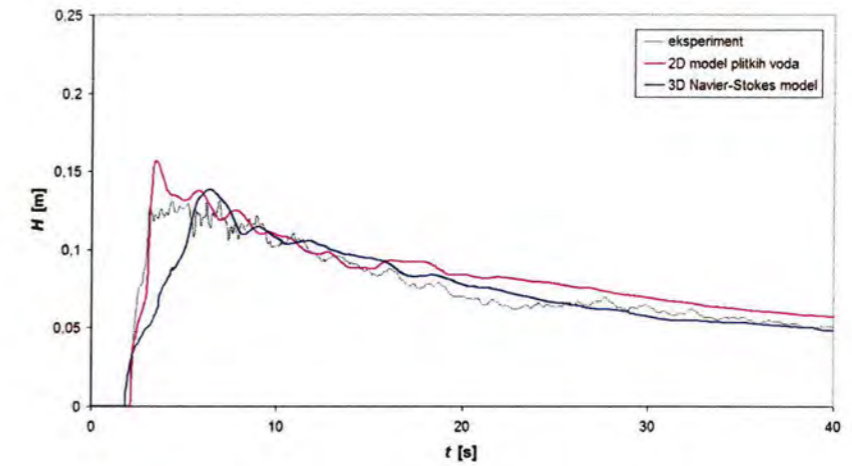
Slika 4.28. Proračunate razine vode na mjernom mjestu G3



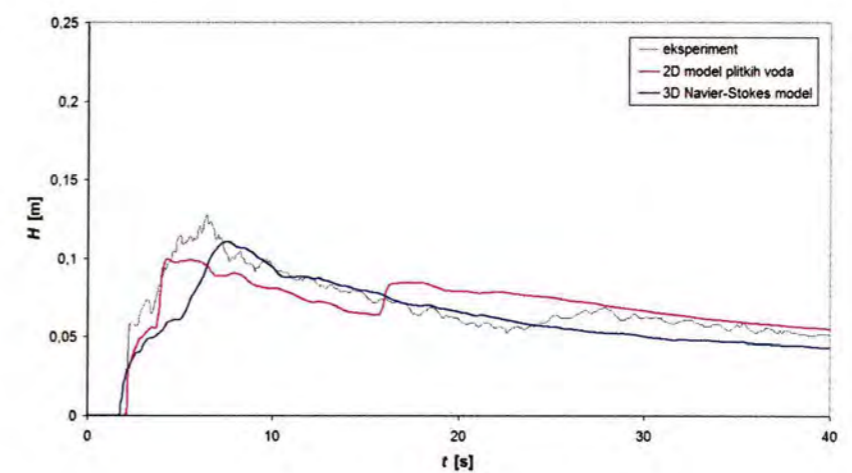
Slika 4.29. Proračunate razine vode na mjernom mjestu G4



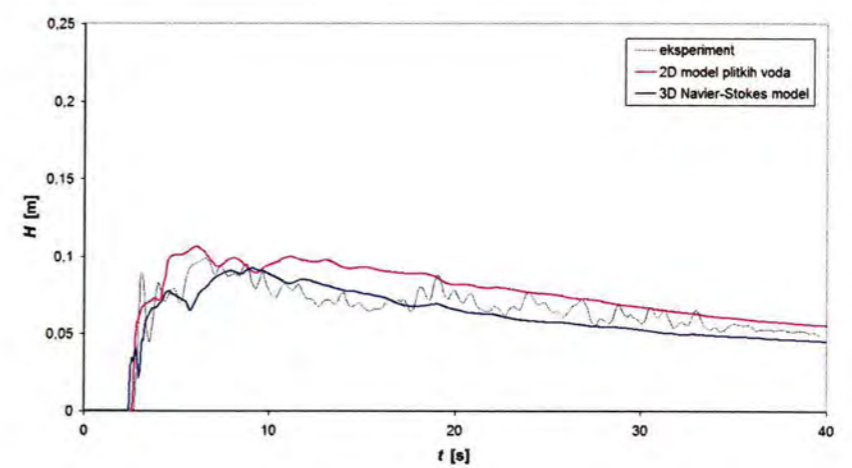
Slika 4.30. Proračunate razine vode na mjernom mjestu G5



Slika 4.31. Proračunate razine vode na mjernom mjestu G6

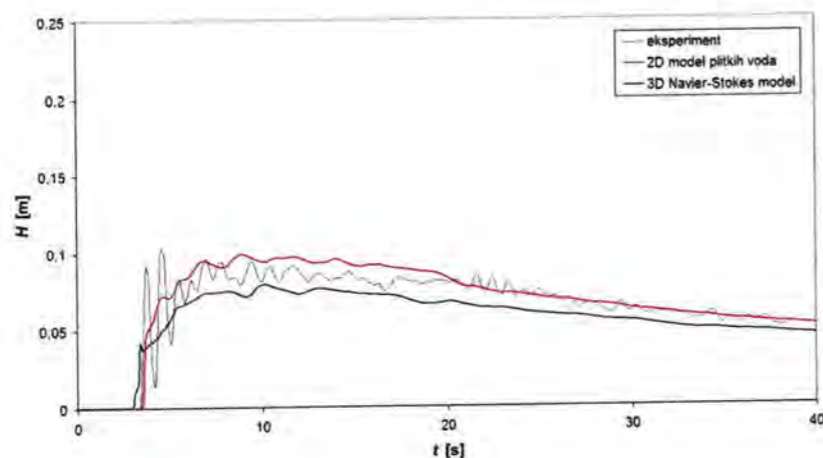


Slika 4.32. Proračunate razine vode na mjernom mjestu G7



Slika 4.33. Proračunate razine vode na mjernom mjestu G8





Slika 4.34. Proračunate razine vode na mjernom mjestu G9

Rezultati simulacija dani u vidu hidrograma razine vode na zadanim mjernim mjestima (Slika 4.26-Slika 4.34) demonstriraju primjerenost i uspješnost oba modela u modeliranju ovako zahtjevnog tranzijentnog strujanja sa slobodnom površinom.

Detaljniji uvid u prikazane hidrograme pokazuje da su razine vode dobivene 3D modelom strujanja sa slobodnom površinom uglavnom nešto točnije od onih dobivenih 2D modelom plitkih voda.

Propagacija vode se kod 3D modela strujanja sa slobodnom površinom odvija nešto brže nego kod 2D modela plitkih voda, dok je povratni val podjednako uspješno rekonstruiran u oba modela. Testne simulacije pokazale su da je kod oba ovdje korištena modela dinamika propagacije poremećaja pod značajnim utjecajem prostornog koraka te da bi se korištenjem optimalne numeričke mreže moglo dobiti bolje modeliranje propagacije poremećaja.

Nadalje, vidljivo je da su proračunata vodna lica prema kraju mjerenog intervala točnija te da pokazuju tendenciju približavanja. Iz toga se može zaključiti da su kod sporijih tranzijenata odnosno skoro-stacionarnog strujanja korišteni modeli još pouzdaniji te da se ponašaju slično, što između ostalog potvrđuje i fizikalnu opravdanost pretpostavki reduciranog modela plitkih voda.

## 5. Primjena modela strujanja sa slobodnom površinom

S obzirom na postignuti stupanj usavršenosti, numeričke simulacije strujanja u vodotocima sa slobodnom površinom postaju vrlo atraktivna alternativa tradicionalno nezamjenjivom laboratorijskom eksperimentu. Glavne prednosti numeričkog modeliranja strujanja u otvorenim vodotocima u odnosu na fizikalne modele su sljedeće:

- Numerički model omogućuje detaljni prikaz varijabli (dubina, brzina, tlak vode) u svim točkama domene i svim vremenskim trenucima.
- Velika fleksibilnost u izmjenama scenarija simulacije (tj. početnih i rubnih uvjeta) te geometrije čini numerički model bitno ekonomičnijim.
- Numerički model je trajan, tj. može se koristiti i nadograđivati kroz neograničeni vremenski period. Jednostavno ga je arhivirati, a naknadno simuliranje dodatnih scenarija numeričkim modelom bitno je jeftinije od fizikalnog modela.

Iz navedenih razloga numeričke simulacije strujanja sa slobodnom površinom intenzivno se koriste, kako u znanstvenim istraživanjima, tako i u inženjerskoj praksi. Pod praktičnom primjenom se ovdje najčešće smatraju simulacije strujanja u rijekama, poplavljanja uslijed izlivanja rijeka iz korita, pucanja brana i sl., strujanja u zaljevima, propagacije plime i oseke, itd.

Pri tome je važno koristiti onaj matematički model koji je najprimjereniji fizikalnom problemu koji se modelira. Tako se u praksi najčešće 1D model plitkih voda primjenjuje na strujanje vode u rijekama i otvorenim kanalima, dok se u slučajevima gdje se voda plošno prostire po poplavnom području koristi 2D model plitkih voda. Radi složenosti i velikih zahtjeva po pitanju računalnih resursa, 3D model strujanja sa slobodnom površinom koristi se za lokalne probleme s jednostavnijim geometrijama i malim domenama, kao što su problemi opstrujavanja ili strujanja na segmentima otvorenih kanala kao što su preljevi, bučnice i sl. Za ove probleme može biti korisno ako je promatrani 3D problem moguće reducirati na dvije dimenzije tako da se otvoreni kanal promatra uzdužno presječen vertikalnom ravninom, što omogućava upotrebu 2D modela strujanja sa slobodnom površinom bez usrednjavanja brzine po dubini, tj. rješavanje Navier-Stokesovih jednadžbi, a ne jednadžbi plitkih voda.



U ovom radu su mogućnosti primjene numeričkih simulacija plitkih voda ilustrirane na više primjera vezanih na strujanje u rijekama i otvorenim kanalima te poplavljanje.

U primjerima praktične primjene izloženim u ovom poglavlju korišten je računalni program Stripp12 (Simulacije tečenja u rijekama i pojava poplavljanja 1D/2D) koji omogućava simulacije strujanja u složenim sustavima otvorenih vodotoka uključujući i plavljenja okolnih terena. Temeljen je na nestacionarnim jednodimenzionalnim i dvodimenzionalnim matematičkim modelima plitkih voda s velikim izborom različitih rubnih uvjeta. Osim osnovnih rubnih uvjeta (zid, rubni uvjet protoka, razine vodnog lica i sl.), omogućava korištenje i rubnih uvjeta koji modeliraju brojne moguće objekte na takvim sustavima vodotoka (preljevi, ispusti, brane, zapornice, čvorišta itd.).

U program Stripp12 ugrađene su najrecentnije numeričke sheme objavljene u vrhunskim svjetskim znanstvenim časopisima i kao takav je testiran na svim relevantnim akademskim test-primjerima. Osim toga, Stripp12 primijenjen je u izradi mnogih znanstvenih i stručnih studija (između ostalog u [32], [33], [34], [35], [36], [37]).

## 5.1. Propagacija poplavnog vala nastalog uslijed pucanja brane

Kao primjer problema poplavljanja uslijed pucanja brane ovdje je izložen provedeni postupak 2D simulacije propagacije poplavnog vala nastalog kao posljedica pucanja brane Tribalj, smještene oko 7,5 km uzvodno od ušća rijeke Dubračine u Crikvenici.

### 5.1.1. Uvodno o pucanju brane

Mada povijesni podaci iz posljednjih stotinjak godina pokazuju da je broj umrlih od posljedica rušenja brana znatno opao, havarije brana još uvijek predstavljaju realnu opasnost čije moguće posljedice zahtijevaju analize i istraživanja. Jedan od načina definiranja mjera zaštite od posljedica pucanja brane su upravo računalne simulacije propagacije poplavnog vala nastalog pucanjem brane.

Za ilustraciju važnosti ovog problema ovdje je dan popis nekih nesreća sa ljudskim žrtvama uzrokovanim pucanjem brana (Tablica 5.1, [19]). Slika 5.1 prikazuje nekontrolirano izlivanje kroz branu Teton (Idaho, SAD) koja se urušila 1976. godine, pri čemu je poginulo 11 ljudi uz veliku materijalnu štetu nastalu ispuštanjem 300 milijuna m<sup>3</sup> vode.

Tablica 5.1. Neke od nesreća sa ljudskim žrtvama nastalim uslijed pucanja brane

Brana	Visina (m)	Broj smrtnih slučajeva	Godina
Dale Dyke (V. Britanija)	-	250	1864.
Iruka (Japan)	-	1200	1868.
Puentes (Španjolska)	21,9	2000-4000	1889.
Bouzey (Francuska)	15	86-100	1895.
Gleno (Italija)	22	100-600	1923.
Eigiano (V. Britanija)	10,5	16	1925.
Vega de Terra (Španjolska)	34	144-400	1959.
Malpasset (Francuska)	66,5	421	1959.
Babu Yar (URSS)	<15	145	1961.
Vaiont (Italija)	265	2600	1963.
Nanaksagar (Indija)	15,6	100	1967.
Shivaj i Sakar (Indija)	103	180	1967.
Sempor (Indonezija)	-	200	1967.
Del Monte (Kolumbija)	-	80	1976.
Santo Thomas (Filipini)	-	80	1976.
Belci (Rumunjska)	18	78	1991.



Slika 5.1. Nekontrolirano istjecanje vode kroz propust u brani Teton

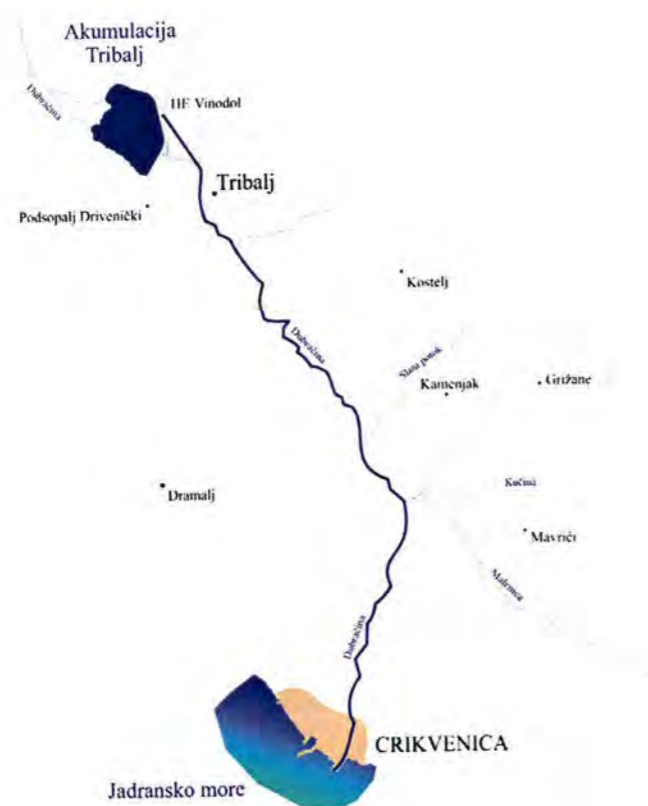
U cilju unaprjeđenja računalnog modeliranja pucanja brane provedeni su i veliki međunarodni znanstveni projekti CADAM (*Concerted Action on Dam-break Modelling*, 1998.-2000.) i IMPACT (*Investigation of Extreme Flood Processes & Uncertainty*, 2001.-2005.). U sklopu ovih projekata objavljeni su rezultati većeg broja laboratorijskih eksperimenata, simulacija i ispitivanja na fizikalnim modelima. Neki od njih vremenom su postali standardni testovi za razvoj numeričkog modeliranja pucanja brane i poplavljanja, pa



su i korišteni za validaciju numeričkog modela propagacije poplavnog vala nastalog uslijed pucanja brane Tribalj.

### 5.1.2. Akumulacija Tribalj

Akumulacija Tribalj nalazi se u dolini rijeke Dubračine uz mjesto Tribalj, oko 7,5 km uzvodno od ušća Dubračine u Jadransko more u Crikvenici (Slika 5.2). Voda u akumulaciju dotiče iz uzvodnog toka rijeke Dubračine, a zadržana voda se upotrebljava kao tehnološka voda za Petrokemiju u Omišlju na otoku Krku. Neposredno uz branu smještena je HE Vinodol, koja svoju hidraulički iskorištenu vodu ispušta u korito rijeke Dubračine, nizvodno od brane Tribalj.



Slika 5.2. Situacijski pregled akumulacije Tribalj i nizvodnog sliva rijeke Dubračine

Branu akumulacije je nasuta, sa kamenim nasipom na uzvodnoj strani i s glinenom jezgrom i glinenim materijalom na nizvodnoj strani. Evakuacija viška vode vrši se pomoću kružnog pomičnog preljeva koji osigurava stalni vodostaj u bazenu.

Tablica 5.2 daje osnovne podatke o akumulaciji i brani Tribalj dani su u nastavku.

Tablica 5.2. Osnovni podaci o akumulaciji i brani Tribalj

Građevinska visina	8,9 m
Visina od terena	7,4 m
Duljina krune	875 m
Kota krune	61,2 m n. m.
Kota maksimalne razine vode	60,4 m n. m.
Kota dna akumulacije	53,8 m n. m.
Maksimalni volumen akumulacije	$1,5 \cdot 10^6 \text{ m}^3$
Površina akumulacije	$0,4 \text{ km}^2$
Površina sliva	$13,43 \text{ km}^2$

Na putu prema ušću u Jadransko more rijeka Dubračina prolazi kroz centar grada Crikvenice. To je područje vrlo urbanizirano i gusto naseljeno, pogotovo u ljetnim mjesecima za vrijeme turističke sezone. Zbog toga je vrlo važno ispitati i analizirati mogućnosti eventualnog oštećenja ili rušenja brane akumulacije Tribalj. Dobiveni rezultati pokazali bi posljedice prolaska vodnog vala kroz dolinu Dubračine i grad Crikvenicu, na temelju čega bi se moglo pristupiti izradi plana obavještanja i uzbunjivanja stanovništva u zoni ugroženosti od poplave.

U nastavku su dane fotografije akumulacije Tribalj (Slika 5.3) i karakterističnih dijelova vodotoka rijeke Dubračine (Slika 5.4 i Slika 5.5).



Slika 5.3. Akumulacija Tribalj (pogled s brane)





Slika 5.4. Rijeka Dubračina nizvodno od akumulacije Tribalj



Slika 5.5. Rijeka Dubračina u centru Crikvenice

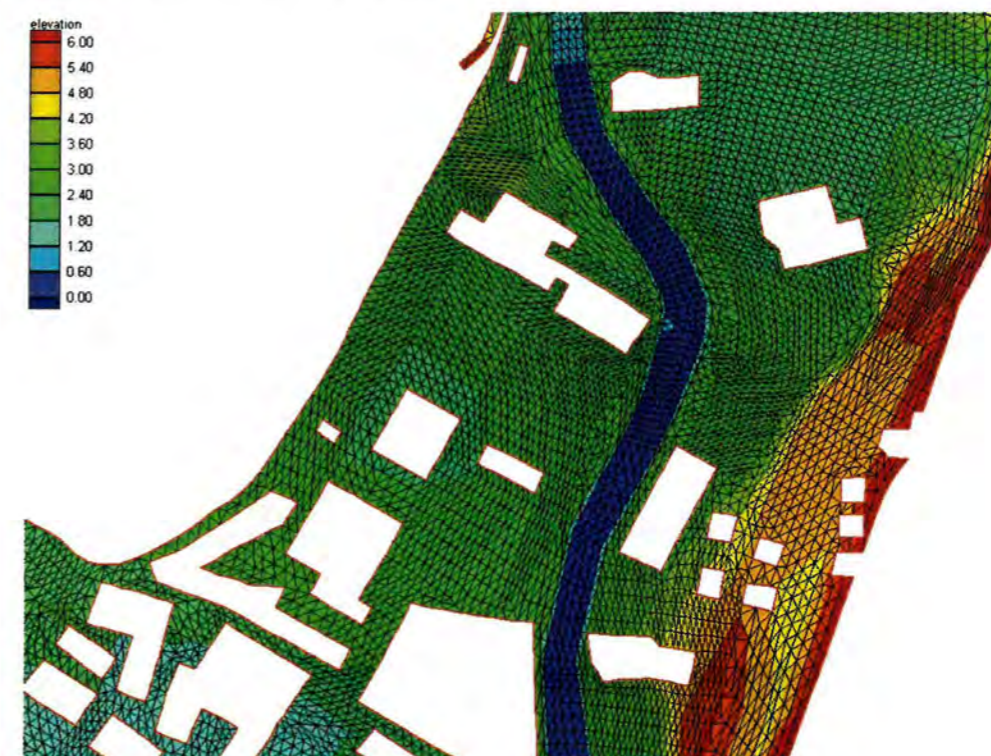
### 5.1.3. Izgradnja digitalnog modela poplavnog područja

Izgradnja svakog dvodimenzionalnog numeričkog modela poplavlivanja počinje definiranjem digitalnog modela poplavnog područja u vidu numeričke mreže koja u svakom čvoru sadrži informaciju o visini terena. Numeričke mreže za potrebe ovog rada izgrađene su u komercijalnom softveru SMS (*Surface Water Modeling System*).

Prvotna osnova za izradu digitalnog modela terena bile su geodetske karte područja mjesta Tribalj, doline rijeke Dubračine i grada Crikvenice (M 1:2000 i M 1:1000). Da bi mogle biti korištene za izradu dvodimenzionalne numeričke mreže, dotične karte su digitalizirane i vektorizirane. Dodatno su pribavljene ortofoto karte modeliranog područja na osnovu kojih je ažuriran i dopunjen izgrađeni digitalni model, posebno po pitanju modeliranja novih građevinskih objekata i sl. Za konačnu provjeru tako dobivenog digitalnog modela, kao i u svrhu dodatne definicije određenih područja, provedena su dodatna geodetska mjerenja. Zbog dodatnih informacija o akumulaciji i brani Tribalj te stanju korita i zaobalja rijeke

Dubračine, provedena su opsežna fotografska snimanja širom modeliranog područja. Tako dobivena baza fotomaterijala također je korištena za izradu digitalnog modela terena.

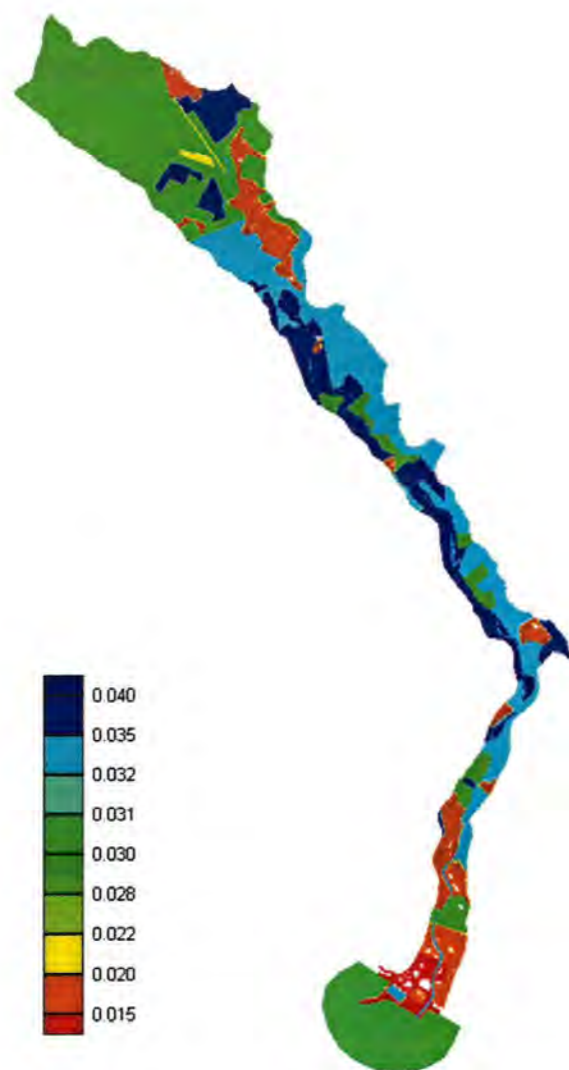
Konačno dobivena dvodimenzionalna nestrukturirana numerička mreža obuhvaćala je akumulaciju Tribalj i korito Dubračine od akumulacije do ušća sa okolnim poplavnim područjem, uključujući dio urbanog područja grada Crikvenice i njegovog predgrađa (Slika 5.6). Posebna pažnja pri izradi numeričke mreže je posvećena koritu rijeke Dubračine te građevinskim objektima kao što su kuće.



Slika 5.6. Dio numeričke mreže u području Crikvenice

Osim pripadne nadmorske visine, svakom čvoru izgrađene dvodimenzionalne numeričke mreže pridružen je i Manningov koeficijent hrapavosti (Slika 5.7). Koeficijenti hrapavosti određeni su po standardnoj literaturi (Tablica 2.1, [11]), a na temelju ortofotokarata i obilaska poplavnog područja.





Slika 5.7. Manningovi koeficijenti hrapavosti u proračunskoj domeni

Na samom kraju postupka izrade numeričke mreže trebalo je još identificirati točke na kojima će se kasnije zadavati rubne uvjete. Točke koje pripadaju određenom rubnom uvjetu se tako povezuju u niz (*nodestring*), što u konačnici znači da u numeričkoj mreži ujedno treba biti definirano i točno onoliko nizova točaka koliko će naknadno biti zadano rubnih uvjeta. U tom smislu, numerička mreža bila je dopunjena podacima o nizovima čvorova mreže na ulaznoj i izlaznoj granici te zidovima objekata.

#### 5.1.4. Postavljanje 2D numeričkog modela

Akumulacija Tribalj, vodotok Dubračine te sva okolna područja zahvaćena poplavlivanjem, zadani su kao jedna proračunska domena u kojoj se strujanje vode modelira dvodimenzionalnim St.Venantovim jednadžbama (2.21).

Pri zadavanju modelske domene u programu Stripp12 potrebno je unijeti triangulaciju područja sa visinom terena u svakom čvoru triangulacije (Slika 5.6) i Manningov koeficijent hrapavosti na svakom čvoru triangulacije (Slika 5.7).

Kao napredna mogućnost, u programu Stripp12 implementirana je opcija promjene visine terena u vremenu (tj. u toku simulacije), što je u ovom praktičnom primjenu korišteno za simulaciju postupnog urušavanja brane. Ova mogućnost implementirana je na način da se za različite vremenske trenutke zadaju različite visine terena na definiranoj poddomeni, da bi se zatim u svakom vremenskom trenutku simulacije računala odgovarajuća visina za svaku točku poddomene kao linearna interpolacija između unesenih visina. Slika 5.8 prikazuje izgled brane u numeričkoj mreži u dva različita vremenska trenutka.



Slika 5.8. Početak i kraj širenja propusta u brani Tribalj pomoću zadavanja vremenski promjenjive numeričke mreže

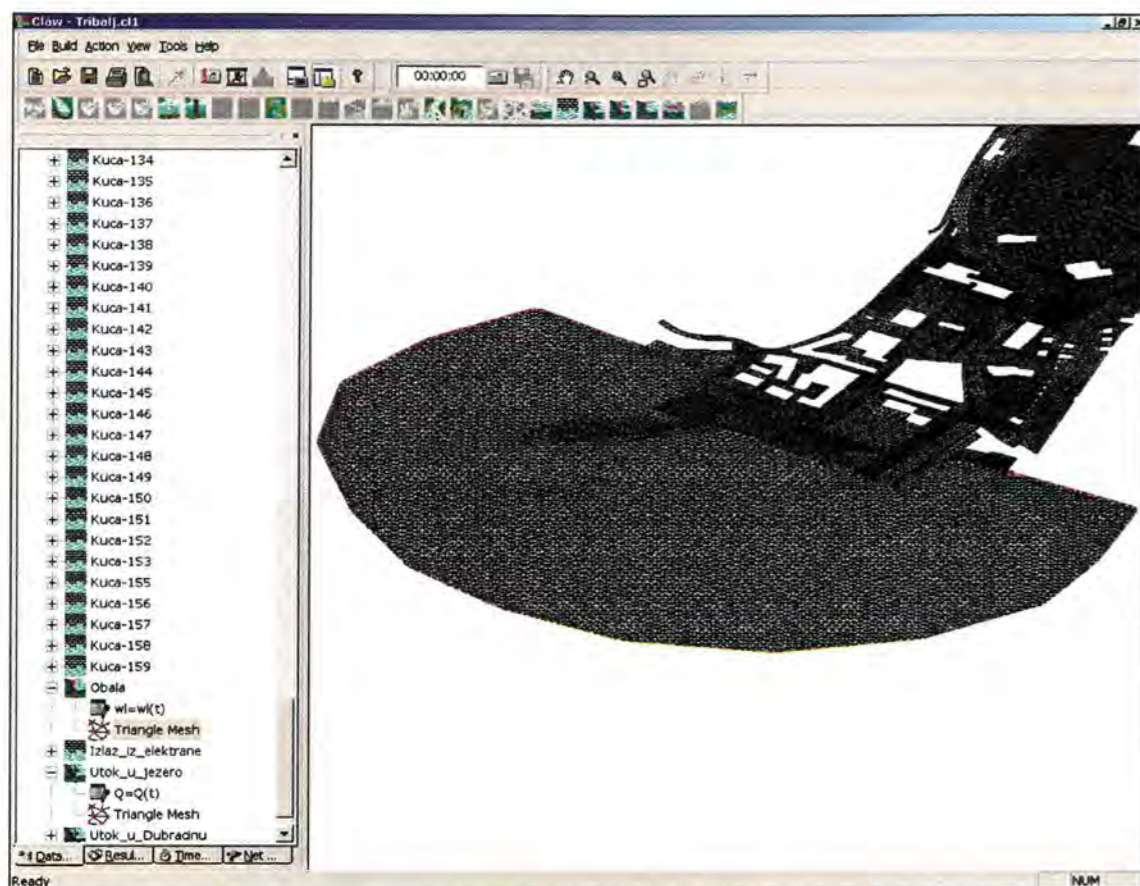
Sljedeći korak je zadavanje početnih uvjeta. Za dvodimenzionalno strujanje u plitkim vodama potrebno je zadati početnu razinu vode i početne vektore brzina po cijeloj domeni. Za potrebe simulacija pucanja brane Tribalj početno stanje bilo je izračunato prethodnom simulacijom kao stanje suhog terena i pune akumulacije Tribalj uz stacionarno strujanje u Dubračini nizvodno od brane.

Osim početnih uvjeta, potrebno je zadati i rubne uvjete. Za svaki pojedini rubni uvjet potrebno je identificirati niz točaka na koje se dotični rubni uvjet želi primijeniti te parametri koji se na taj rubni uvjet odnose. Nizovi točaka unaprijed su određeni prilikom izrade numeričke mreže.

Za potrebe ovog praktičnog primjera korišteni su sljedeći rubni uvjeti:

- rubni uvjet zadane razine vode (za modeliranje istjecanje vode iz domene na rubu mora na ušću Dubračine, Slika 5.9),
- rubni uvjet zadanog protoka (za modeliranje strujanja u Dubračini i dotoka u akumulaciju Tribalj),
- rubni uvjet zida (za modeliranje građevinskih objekata u proračunskoj domeni)





Slika 5.9. Izlazni rub domene na ušću rijeke Dubračine u more u programu Stripp12

Radi fizikalno ispravnog efekta nametanja zadane razine vode na izlaznom rubu domene, u model je uključeno manje područje mora. Tim udaljavanjem rubnog uvjeta od područja interesa omogućena je slobodna propagacija poplavnog vala do same obale mora bez numerički uzrokovanih refleksija od ruba domene.

Za rubne uvjete protoka i razine vodnog lica potrebno je zadati pripadne im hidrograme. Hidrogrami se zadaju tablično, tj. po točkama koje opisuju zavisnost protoka odnosno razine vodnog lica o vremenu ( $Q(t)$ ,  $H(t)$ ).

Svi građevinski objekti unutar poplavnog područja modelirani su kao područja isključena iz proračunske domene i omeđena rubnim uvjetom zida. To znači da je strujanje vode na zidovima građevinskih objekata modelirano tako da se dopušta isključivo strujanje tangencijalno na pripadni rub.

Nakon što su zadani svi početni i rubni uvjeti, potrebno je bilo još zadati globalne parametre za simulaciju, kao što su izabrana numerička shema, CFL broj, duljina prvog vremenskog koraka, itd. Za potrebe ovog primjera, korištena je dobro balansirana dvodimenzionalna Q-shema prvog reda točnosti, detaljno opisana u podpoglavlju 3.3.1 (str. 43).

### 5.1.5. Simulacije propagacije poplavnog vala

Na izgrađenom numeričkom modelu provedene su razne simulacije rušenja brane Tribalj i propagacije poplavnog vala. Korištena su dva tipa modela rušenja brane: model trenutnog rušenja segmenta brane te model postepenog rušenja segmenta brane.

Pod pojmom trenutnog rušenja segmenta brane smatra se trenutno nestajanje dijela brane u početnom trenutku simulacije ( $t = 0$ ), što omogućava pražnjenje akumulacije kroz nastali propust. Izabrani segment brane uklonjen je iz numeričke mreže, a visine na tom dijelu domene postavljene su na visinu najbližih nizvodnih odnosno uzvodnih točaka.

Postepeno rušenje brane modelirano je promjenom visine određenog segmenta brane u toku simulacije (Slika 5.8), na način kako je opisano u podpoglavlju 5.1.4. (str. 84).

Simulirani su sljedeći događaji:

- 1) trenutno rušenje segmenta brane
  - a) segment širine 500 m
  - b) segment širine 100 m
  - c) segment širine 50 m
- 2) postepeno rušenje segmenta brane

Varijanta trenutnog rušenja segmenta brane širine 500 m odgovara gotovo potpunom nestanku brane (brana je ukupno duga oko 800 m).

Za potrebe simulacije sa postepenim rušenjem segmenta brane izgrađeno je 8 numeričkih mreža sa različitim geometrijama u poddomeni područja brane, koje se učitavaju u nizu tijekom vremenskog perioda od 20 minuta (Tablica 5.3).

Tablica 5.3. Dinamika otvaranja propusta u brani

Geometrija poddome br.	Širina propusta [m]	Vrijeme pune aktivacije [s]
1	12	0
2	25	150
3	50	300
4	74	450
5	99	600
6	124	750
7	161	960
8	198	1200

Kao početni uvjeti za sve simulacije postavljeni su:



- stacionarni protok u Dubračini:  $Q_0 = 6 \text{ m}^3/\text{s}$
- razina vode u akumulaciji Tribalj:  $H_{T0} = 60 \text{ m n. m.}$

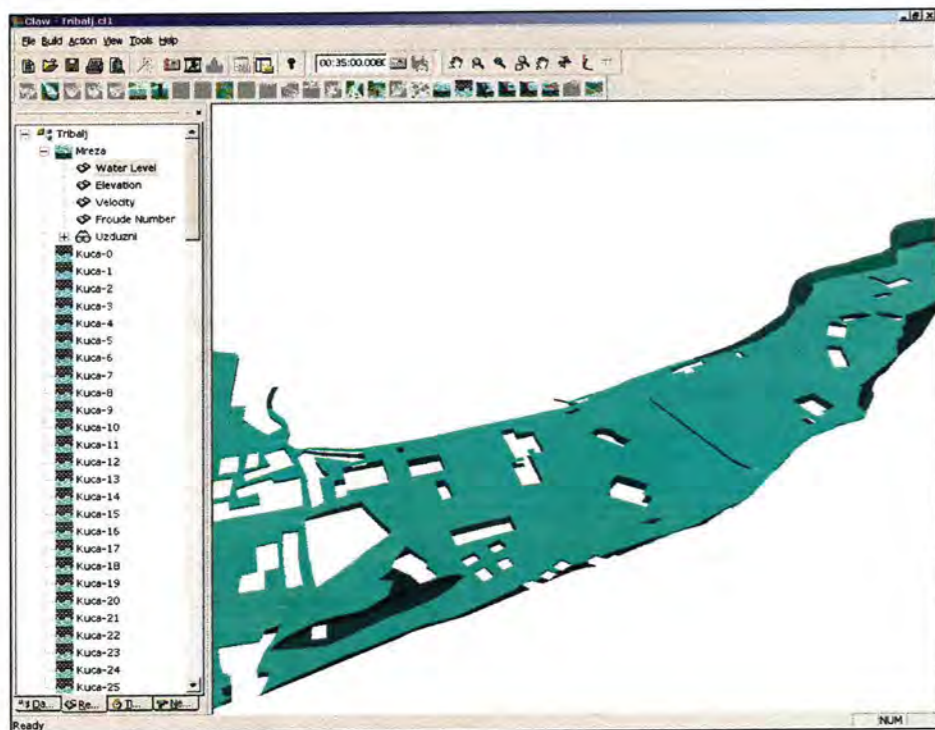
Zasebnim simulacijama proračunato je stacionarno strujanje datim protokom  $Q_0$  u Dubračini, a dobiveno vodno lice korišteno je kao početni uvjet stacionarnog protoka u Dubračini.

Kao rubni uvjeti na ulazu i izlazu vode u domenu postavljeni su:

- stacionarni dotok u akumulaciju Tribalj:  $Q_T = 6 \text{ m}^3/\text{s}$
- razina mora na izlazu vode iz domene:  $H_M = 1,5 \text{ m n. m.}$

Ovako definirana razina mora  $H_M$  predstavlja slučaj ekstremno velike plime na ušću Dubračine u more u gradu Crikvenici.

Rezultat jedne od provedenih simulacija u računalnom programu Stripp12 prikazan je u nastavku (Slika 5.10).

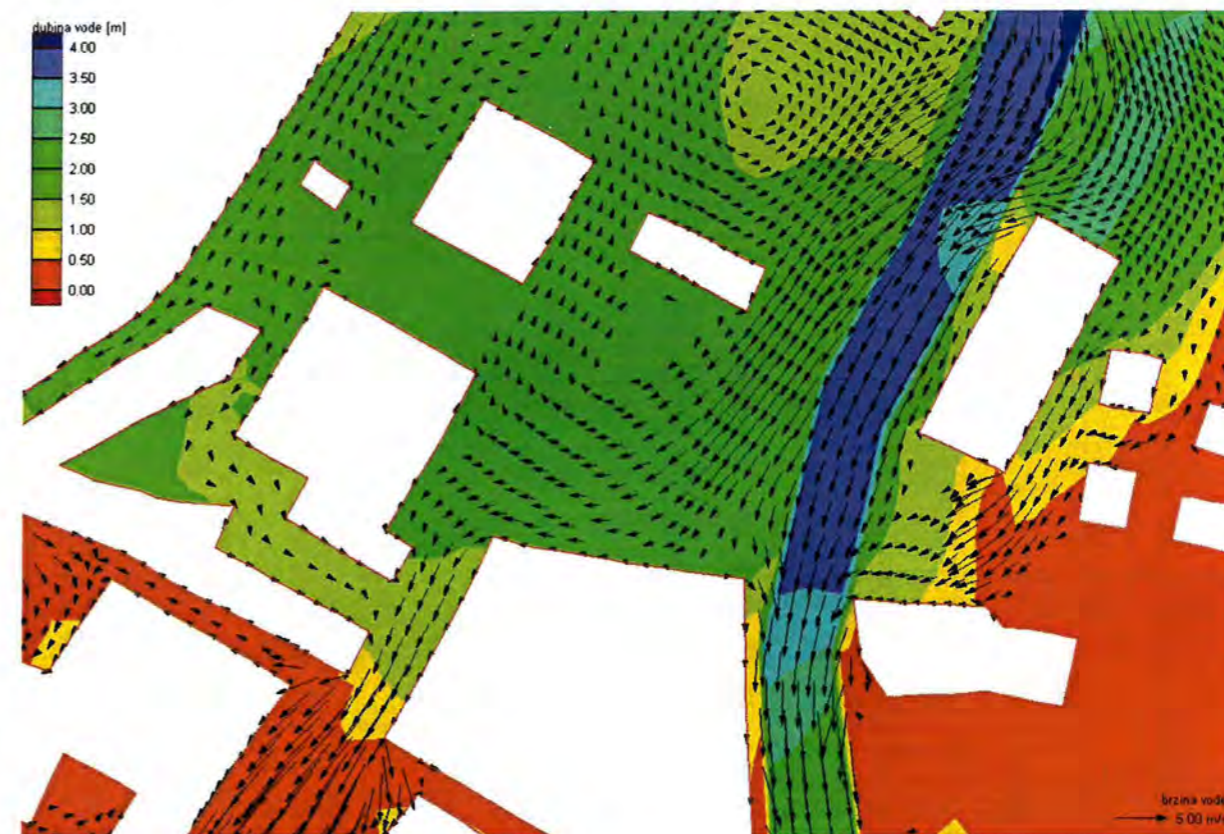


Slika 5.10. Proračunata razina vode u plastičnom 3D prikazu programa Stripp12

### 5.1.6. Postprocesiranje rezultata i analiza

Nakon provođenja proračuna za cijelo vrijeme trajanja propagacije poplavnog vala, dobiveni rezultati (dubine i brzine vode po cijeloj domeni, u diskretnim vremenskim

trenucima – primjer Slika 5.11) obrađeni su i na temelju njih provedena je daljnja analiza šteta od poplave.



Slika 5.11. Proračunate dubine i brzine vode u području grada Crikvenice, scenarij trenutnog rušenja segmenta brane širine 500 m,  $t = 24 \text{ min}$

Rezultati simuliranih scenarija pucanja brane najčešće se prikazuju u vidu karata poplavnih linija i dijagrama dubine i brzine vode na izabranim mjernim mjestima. Radi racionalnog korištenja prostora, za potrebe ovog praktičnog primjera prikazani su samo dijagrami dubina i brzina vode. Ovi dijagrami se dobivaju iz rezultata simulacija pomoću instaliranja virtualnih mjernih stanica na posebnim mjestima u domeni. Na tim mjestima se konstruiraju dijagrami koji prikazuju standardne izračunate veličine u vremenu. Za potrebe ovog praktičnog primjera definirano je pet mjernih točaka u najinteresantnijem području – središtu grada Crikvenice (Tablica 5.4, Slika 5.12).

Tablica 5.4. Mjerne točke u gradu Crikvenici

Mjerna točka	Lokacija
C1	križanje Vinodolske i Frankopanske ulice, kod trga S. Radića
C2	Vinodolska ulica, kod "Aquariuma"
C3	Ulica braće Brožičević, kod križanja sa Frankopanskom ulicom
C4	kod Tržnice, uz korito Dubračine
C5	Vinodolska ulica, kod Vatrogasne stanice



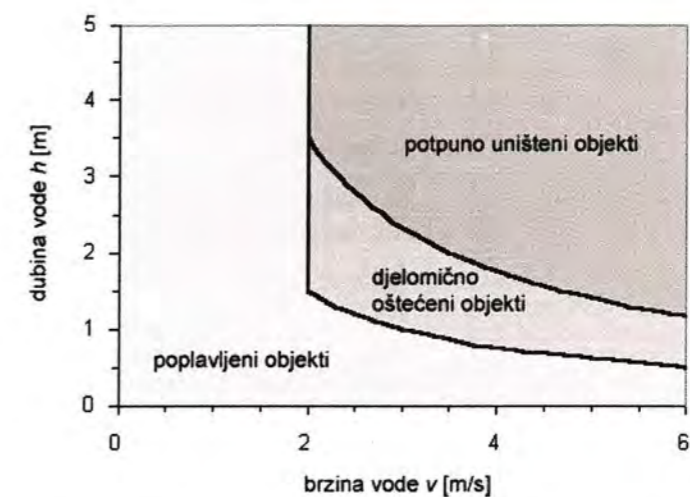


Slika 5.12. Mjerne točke na području središta grada Crikvenice

Dodatno, na temelju proračunatih podataka o brzini i dubini vode može se provesti okvirna procjena štete. Neki od prikladnih razvijenih kriterija za razornu moć poplave su Clausen-Clarkov kriterij za rušenje objekata od kamena i cigle ([12]) te Smithov kriterij za kamene i betonske objekte ([29]). S obzirom na preporuke relevantnih studija ([27]), ovdje je korišten Clausen-Clarkov kriterij.

Clausen-Clarkov kriterij je razvijen 1990. godine, a na temelju podataka o pucanju brane Dale Dyke (UK, 1864.). On poplavljeno područje dijeli u tri kategorije, zavisno o dubinama i brzinama strujanja vode (Slika 5.13):

- područje poplavljenih objekata – materijalna šteta slična onoj nastaloj uslijed izlivanja spore rijeke; ne nastupa trenutna šteta na građevinskim objektima
- područje djelomično oštećenih objekata – djelomična šteta na građevinskim objektima, npr. izbijeni prozori i vrata, mala šteta na samoj strukturi građevina
- područje potpuno uništenih objekata – rušenje ili potpuno uništenje građevinskih objekata

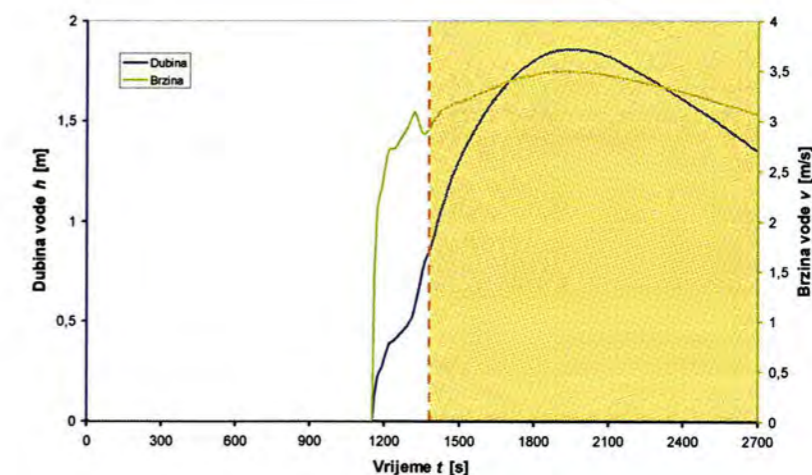


Slika 5.13. Clausen-Clarkov kriterij štete od poplave na građevinskim objektima

U nastavku su dani dijagrami dubine i brzine vode na mjernim točkama C3 i C5. Na istim dijagramima prikazani su i vremenski trenuci nastupanja uvjeta za djelomično oštećenje (žutom bojom) odnosno potpuno uništenje građevinskih objekata (narančastom bojom), određeni po opisanom Clausen-Clarkovom kriteriju.

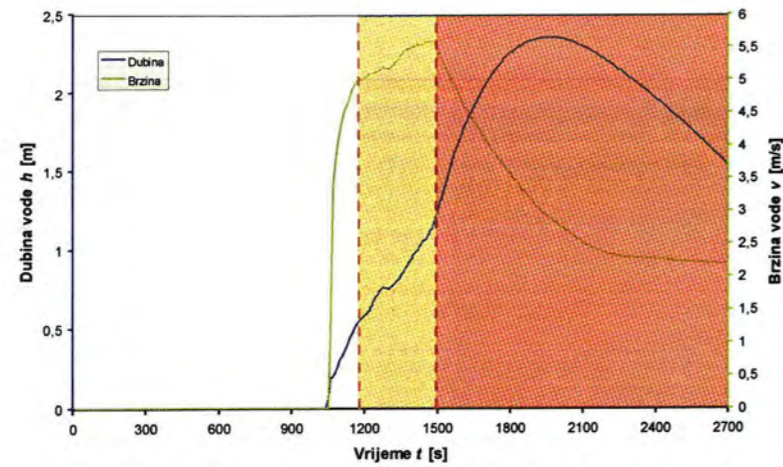
Dijagrami su dani sljedećim redom:

- 1) trenutno rušenje segmenta brane (Slika 5.14-Slika 5.19)
  - a) segment širine 500 m (Slika 5.14-Slika 5.15)
  - b) segment širine 100 m (Slika 5.16-Slika 5.17)
  - c) segment širine 50 m (Slika 5.18-Slika 5.19)
- 2) postepeno rušenje segmenta brane (Slika 5.20-Slika 5.21)

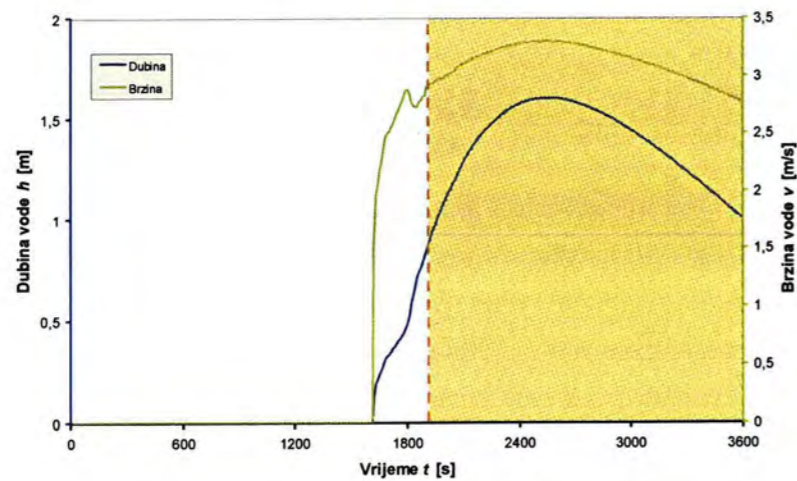


Slika 5.14. Mjerna točka C3, scenarij trenutnog rušenja segmenta brane širokog 500 m

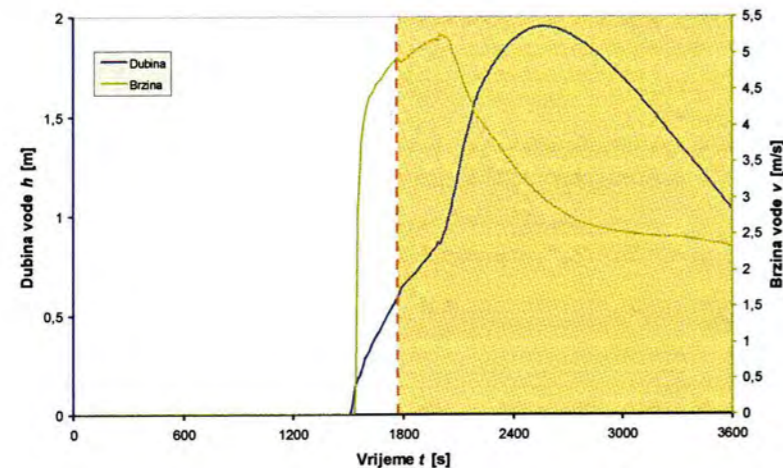




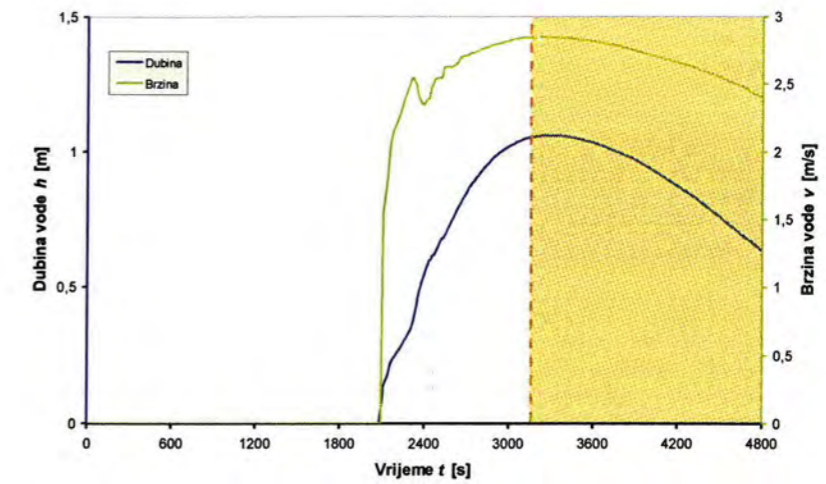
Slika 5.15. Mjerna točka C5, scenarij trenutnog rušenja segmenta brane širokog 500 m



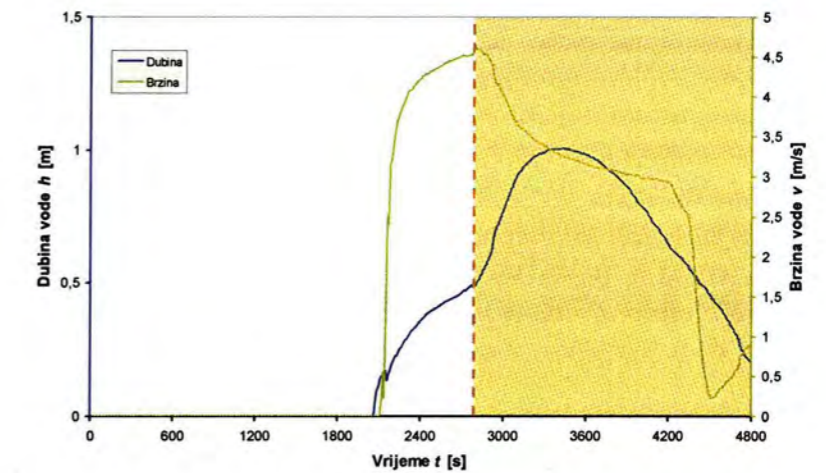
Slika 5.16. Mjerna točka C3, scenarij trenutnog rušenja segmenta brane širokog 100 m



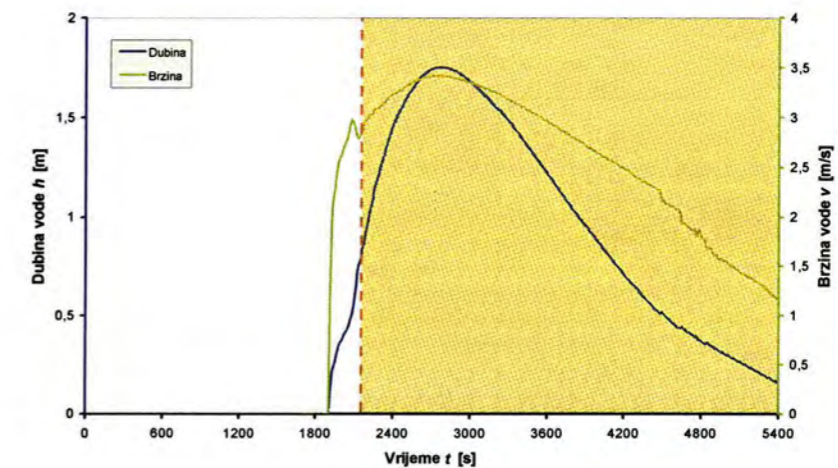
Slika 5.17. Mjerna točka C5, scenarij trenutnog rušenja segmenta brane širokog 100 m



Slika 5.18. Mjerna točka C3, scenarij trenutnog rušenja segmenta brane širokog 50 m

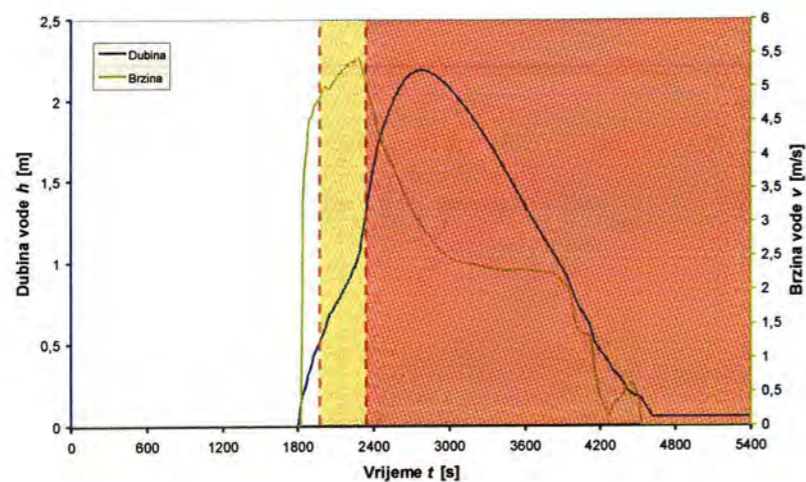


Slika 5.19. Mjerna točka C5, scenarij trenutnog rušenja segmenta brane širokog 50 m



Slika 5.20. Mjerna točka C3, scenarij postepenog rušenja segmenta brane

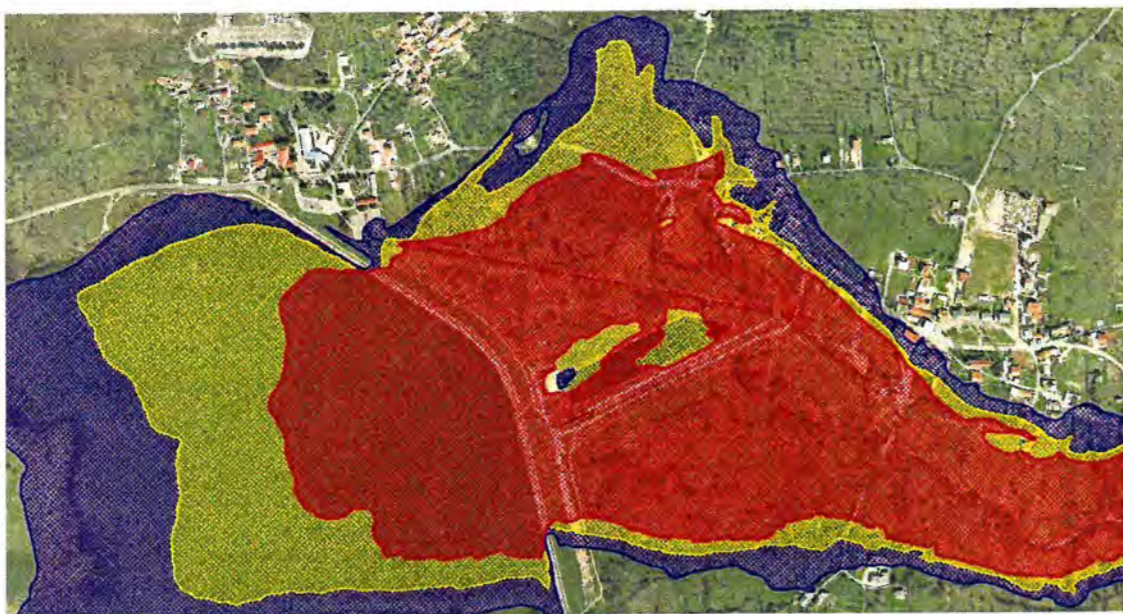




Slika 5.21. Mjerna točka C5, scenarij postepenog rušenja segmenta brane

Rezultati simulacija trenutnog rušenja segmenta brane pokazuju da bi poplavni val nastao takvim rušenjem dijela brane uzrokovao snažnu poplavu u gradu Crikvenici. Za propust širi od 50 m poplavni val prouzročio bi i ozbiljna oštećenja građevinskih objekata u gradu. Simulacija sa propustom koji se otvara u vremenu pokazuje najrazornije posljedice u gradu Crikvenici nakon scenarija sa trenutnim rušenjem segmenta brane od 500 m.

Iskustvo pokazuje da same poplavne zone ne daju potpunu informaciju o ugroženosti poplavljenog područja jer u sebi ne sadrže informacije o brzinama strujanja vode ([35]), zbog čega je bolje analizu temeljiti na kartama rizika štete. Slika 5.22 i Slika 5.23 prikazuju dva detalja jedne takve karte, gdje plavo područje predstavlja zonu poplavljenih objekata, žuto područje zonu djelomično oštećenih objekata, a crveno područje zonu potpuno uništenih objekata.



Slika 5.22. Karta zona rizika štete na građevinskim objektima, scenarij trenutnog rušenja segmenta brane širine 500 m (detalj kod akumulacije Tribalj)



Slika 5.23. Karta zona rizika štete na građevinskim objektima, scenarij trenutnog rušenja segmenta brane širine 500 m (detalj u gradu Crikvenici)

Može se zaključiti da se modeliranje pucanja brane 2D matematičkim modelom plitkih voda pokazalo vrlo uspješnim i optimalnim s obzirom na računalne kapacitete i numeričku „dimenziju“ problema (broj proračunskih točaka, veličina modeliranog područja, trajanje modeliranog vremenskog perioda).

Naprednije modeliranje pucanja brane zahtijevalo bi neke od sljedećih zahvata u numerički model:

- dinamičko mijenjanje gustoće fluida uslijed „ispiranja“ terena (poplavni val na svom putu pokuplja materijal tla, ostatke srušenih objekata, stabala i slično),
- proširivanje matematičkog modela na model transporta sedimenata (poplavni valovi sadrže vučeni nanos),
- ažuriranje numeričke mreže u vremenu (objekti koji se procijene kao srušeni uslijed rušilačke snage poplavnog vala automatski se isključuju iz domene kao takvi i pripadne ćelije numeričke mreže postaju aktivni dio proračunske domene).

## 5.2. Određivanje poplavnih linija vodotoka

Postupak izrade poplavnih linija pomoću 1D matematičkog modela plitkih voda prikazan je u ovom podpoglavlju na primjeru rijeke Čabranke u Gorskom kotaru ([17], [33]). Treba naglasiti da su za tu potrebu provedene simulacije nestacionarnog strujanja, tj. simulacije dinamike poplavljanja kroz cjelokupni vremenski period propagacije poplavnog vala. Drugim riječima, provedene su simulacije propagacije poplavnih valova na osnovu definiranih hidrograma, za razliku od do sada uobičajene prakse simuliranja stacionarnog strujanja maksimalnih protoka.



### 5.2.1. Svrha određivanja poplavnih linija vodotoka

Rječne doline oduvijek su bile značajni komunikacijski pravci, područja intenzivnog razvoja poljoprivrede, a u novije vrijeme i područja razvoja velikih urbanih i industrijskih sredina. Povećanjem građevinama, asfaltom i betonom prekrivenih dijelova rječnih dolina došlo je do bitnog smanjenja prirodnih inundacijskih površina vodotoka, a otjecanje iz sliva se koncentriralo i ubrzalo, što ima za posljedicu povećanje vršnih protoka i brzine podizanja vodnih valova. Povećana razorna moć poplava, u kombinaciji sa povećanom urbaniziranošću i gustoćom naseljenosti u rječnim dolinama, ima za posljedicu ogromne ljudske i materijalne gubitke, što zahtijeva strateško planiranje obrane od poplava.

Pod strategijom obrane od poplava obično se podrazumijeva poduzimanje nekih od sljedećih mjera:

- 1) konstruktivne mjere
  - a) kontrolirano zadržavanje vode poplavnog vala u retencijama, akumulacijama i inundacijama
  - b) izgradnje nasipa, obaloutvrda i sl.
- 2) nekonstruktivne mjere
  - a) definiranje planova obrane od poplava
  - b) propisivanje obaveznog osiguranja od štete od poplava za imovinu u potencijalno ugroženim područjima
  - c) ograničavanje prava građenja u potencijalno ugroženim područjima

Jednu od mjera obrane od poplava predstavlja i izrada karata ugroženosti od poplava pojedinih područja. Takve su karte zasnovane na rezultatima simulacija propagacija poplavnih valova 1D i na lokacijama od posebnog interesa eventualno 2D numeričkim modelima koje se u obliku poplavnih linija uključuje u GIS baze podataka (topografske, katastarske, prostorno-planske i druge podloge). Na taj način stvaraju se mogućnosti za određivanje rizika ugroženosti pojedinih područja od poplava, što pak omogućuje definiranje prioriteta i strategije obrana od poplava.

### 5.2.2. Problematika poplavljanja u dolini rijeke Čabranke

Rijeka Čabranka duga je 13,4 km i praktički cijelom svojom dužinom predstavlja granicu između Slovenije i Hrvatske. Izvor Čabranke smješten je u neposrednoj blizini grada Čabra, koji je ujedno i najveće naseljeno mjesto uz rijeku. Ostala značajnija naselja duž riječnog toka Čabranke su sela Mandli, Plešće i Zamost. Nizvodno od sela Zamost rijeka Čabranka utječe u rijeku Kupu.

U gradu Čabru s desne (hrvatske) obale vodotoka nalaze se gusto postavljeni stambeni objekti dok je sama obala djelomično stabilizirana obaloutvrdama. U dijelu između grada Čabra i naselja Mandli riječno korito prolazi kroz usku dolinu, koja se na nekim lokacijama

sužava u klanac. Na ovoj dionici u koritu rijeke ugrađen je niz vodnih stuba, dok je prometnica koja prolazi duž cijelog toka zaštićena od poplave obaloutvrdama (Slika 5.24).



Slika 5.24. Obaloutvrde u funkciji zaštite prometnice uz rijeku Čabranku

Na dionici Mandli-Zamost izlivanje iz korita rijeke Čabranke obično se zadržava unutar poljoprivrednih površina uz rijeku Čabranku, koje kod većih voda funkcioniraju kao prirodna inundacijska površina. U mjestu Zamost je izgradnjom obaloutvrde na lokaciji graničnog prijelaza uglavnom uspješno riješen problem učestalih plavljenja nižih površina uz vodotok.

Pojava poplava na rijeci Čabranki nastaje kao posljedica propagacije većih vodnih valova koji su tipično uzrokovani višednevnim intenzivnim oborinama u slivu. Snažne oborine rezultiraju pojačanom izdašnošću izvorne zone, što u kombinaciji s intenzivnim površinskim otjecanjem stvara velike vodne valove u koritu rijeke Čabranke. Tako nastali vodni valovi obično traju najviše 24 sata, a karakteriziraju ih velike brzine strujanja uz snažan pronos sedimenata i plutajućeg materijala. Posljedica ovakvog strujanja je stvaranje barijera na mjestima suženih poprečnih presjeka (mostovi, suženja), čije naknadno rušenje dodatno povećava razornost poplave.

Primjer jednog od takvih događaja je poplava na rijeci Čabranki koja se desila dana 5. 9. 1998. godine, kada su samo štete na vodnogospodarskim objektima iznosile 5 milijuna kuna, a oštećenja su registrirana na 30-ak lokacija duž vodotoka. Osim ovih šteta registrirane su štete na gospodarskim objektima, prometnicama te poljoprivrednim površinama smještenim uz korito rijeke Čabranke (Slika 5.25-Slika 5.27).





Slika 5.25. Poplavom oštećena obaloutvrda



Slika 5.26. Poplavom oštećena prometnica Čabar-Zamost



Slika 5.27. Naplavine na poljoprivrednim površinama uz rijeku Čabranke nakon poplave

### 5.2.3. Postavljanje 1D numeričkog modela i provedba simulacija strujanja

Digitalni model vodotoka Čabranke i okolnih poplavnih područja za potrebe 1D matematičkog modela strujanja u otvorenim vodotocima izgrađen je na temelju dostupne geodetske snimke korita Čabranke i karata u mjerilu 1:5000. Fotodokumentacija sakupljena na fizičkim obilascima vodotoka korištena je kao nadopuna osnovnim geodetskim podacima. Na temelju obrade ovih podataka dobiveni su poprečni profili koji su ubačeni u program Stripp12 gdje je na temelju njih formirana 1D numerička domena.

Manningovi koeficijenti hrapavosti određeni su po standardnoj literaturi (Tablica 2.1, [11]) na temelju obilaska doline rijeke Čabranke i pridruženi svakom pojedinom poprečnom profilu.

Kao početno stanje u vodotoku duž cijele domene definirano je stanje stacionarnog strujanja:

$$Q(x,0) = Q_0(x) = 5 \text{ m}^3/\text{s} ,$$

$$H(x,0) = H_0(x) .$$

Na prvom poprečnom profilu u modelu nametnut je rubni uvjet zadanog protoka sa konstantnim protokom:

$$Q_0 = 5 \text{ m}^3/\text{s} ,$$

a na nizvodnom kraju domene (tj. na ušću Čabranke u Kupu) zadana je poznata razina vode:

$$H_{Kupa} = 291,5 \text{ m n. m.} ,$$

što je u skladu sa dostupnim hidrološkim podacima o velikim vodostajima Kupe na mjestu utoka Čabranke.

Nakon što su zadani osnovni početni i rubni uvjeti, izabrana je numerička shema, CFL broj, prostorni korak ( $\Delta x = 10 \text{ m}$ ), duljina prvog vremenskog koraka i ostali globalni parametri. Za potrebe ovog primjera, korištena je dobro balansirana jednodimenzionalna Q-shema prvog reda točnosti, detaljno opisana u podpoglavlju 3.2.1 (str. 38).

S obzirom da se propagacija poplavnog vala duž rijeke Čabranke ne može realno modelirati ako sav volumen poplavnog vala u modelu počinje teći od izvora, za potrebe provedenih simulacija bilo je nužno koristiti i bočne dotoke. To su dotoci zadani na određenim mjestima u domeni (točkasti bočni dotok), odnosno na određenim segmentima domene, tj. između dviju točaka gdje se bočni protok ravnomjerno raspoređuje po proračunskim ćelijama koje se nalaze na zadanom intervalu (distribuirani bočni dotok).



Točkasti bočni dotoci modelirani su tako da se na desnu stranu jednadžbe (2.16) dodaje član:

$$q_L(x,t) = \begin{cases} Q_L(t) & \text{za } x = x_L \\ 0 & \text{za } x \neq x_L \end{cases}$$

dok su distribuirani bočni dotoci su modelirani tako da se na desnu stranu iste jednadžbe dodaje član:

$$q_L(x,t) = \begin{cases} \frac{Q_L(t)}{x_{L_2} - x_{L_1}} & \text{za } x_{L_1} \leq x \leq x_{L_2} \\ 0 & \text{za } x \leq x_{L_1} \text{ ili } x \geq x_{L_2} \end{cases}$$

Ovdje je:

$Q_L(t)$  – hidrogram bočnog dotoka,

$x_L$  – položaj točkastog bočnog dotoka na vodotoku,

$x_{L_1}$  – početna točka distribuiranog bočnog dotoka na vodotoku,

$x_{L_2}$  – završna točka distribuiranog bočnog dotoka na vodotoku,

Za potrebe modeliranja propagacije poplavnog vala rijeke Čabranke korišteni su sljedeći bočni dotoci:

1) točkasti bočni dotoci:

- Črni potok ( $x_L = 9814,5$  m od ušća)
- Belica ( $x_L = 5960,4$  m od ušća)
- Gerovčica ( $x_L = 911,0$  m od ušća)

2) distribuirani bočni dotoci:

- Izvor – Črni potok ( $x_{L_1} = 13830$  m od ušća,  $x_{L_2} = 10173,7$  m od ušća)
- Črni potok – Zamost ( $x_{L_1} = 10173,7$  m od ušća,  $x_{L_2} = 1762,2$  m od ušća)

Izgled hidrograma točkastih bočnih dotoka utvrđen je na temelju dostupnih hidroloških podataka o protocima vodotoka Črni potok, Belica i Gerovčica ([33]), s time da su ti hidrogrami u modelu odgođeni u vremenu tako da im maksimalni protoci koincidiraju sa trenutkom maksimalnog protoka poplavnog vala Čabranke u datoj točki vodotoka.

Izgled hidrograma bočnih dotoka definiran je pomoću testnih simulacija u kojima su rezultati uspoređivani sa hidrološkom analizom dobivenim hidrogramima protoka na dvjema kontrolnim točkama (Tablica 5.5, [33]).

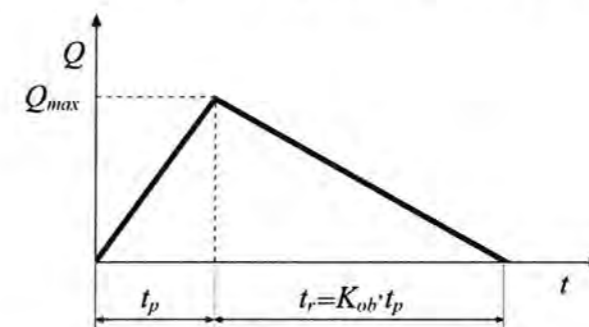
Tablica 5.5. Hidrološki podaci za definiranje hidrograma protoka na kontrolnim točkama

Profil	Koef. oblika hidrogr. $K_{ob}$	Maksimalni protok $Q_{max}$ [m <sup>3</sup> /s] i vrijeme podizanja hidrograma $t_p$ [h] za dani povratni period						
		2 god.	5 god.	10 god.	20 god.	50 god.	100 god.	1000 god.
Črni potok	2,0	35,9 m <sup>3</sup> /s	45,8 m <sup>3</sup> /s	53,5 m <sup>3</sup> /s	63,8 m <sup>3</sup> /s	72,3 m <sup>3</sup> /s	78,5 m <sup>3</sup> /s	102,1 m <sup>3</sup> /s
		10,8 h	9,20 h	8,56 h	8,01 h	7,23 h	6,45 h	4,75 h
Zamost	2,0	74,0 m <sup>3</sup> /s	100,9 m <sup>3</sup> /s	119,0 m <sup>3</sup> /s	130,0 m <sup>3</sup> /s	149,4 m <sup>3</sup> /s	160,1 m <sup>3</sup> /s	180,0 m <sup>3</sup> /s
		20,48 h	18,21 h	15,94 h	14,80 h	13,67 h	12,53 h	10,26 h

Na temelju podataka dobivenih hidrološkom obradom (Tablica 5.5) definirani su hidrogrami protoka na profilima Črni potok (9814,5 m od ušća) i Zamost (1762,2 m od ušća), za svaki od navedenih povratnih perioda. Ovi kontrolni hidrogrami su definirani kao pojednostavljeni trokutasti hidrogrami, gdje je trajanje vremenskog perioda pada protoka  $t_r$  zadano kao:

$$t_r = K_{ob} \cdot t_p$$

gdje je  $K_{ob}$  – koeficijent oblika hidrograma, a  $t_p$  vrijeme podizanja hidrograma (Slika 5.28).



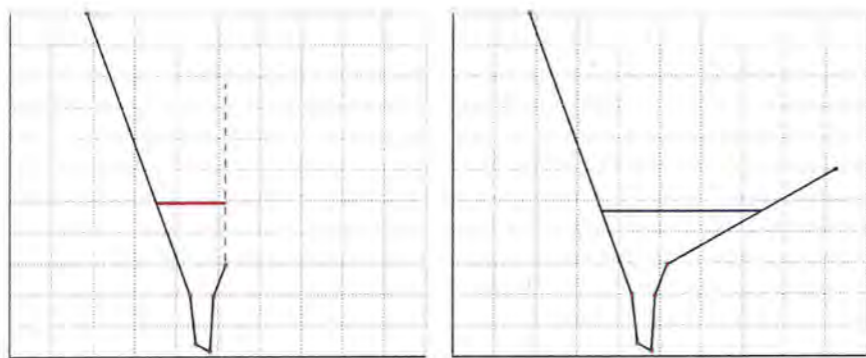
Slika 5.28. Pojednostavljeni trokutasti hidrogram protoka

Nakon višestrukih testnih simulacija, bočni dotoci su konačno određeni tako da hidrogrami na svim kontrolnim profilima dovoljno odgovaraju protocima dobivenim iz hidroloških proračuna. Ovaj postupak je proveden za svaki pojedini povratni period, čime su dobiveni konačni scenariji strujanja u vodotoku za svaki pojedini povratni period.

Opisani postupak određivanja bočnih dotoka proveden je najprije za scenarij 1000-godišnjeg povratnog perioda da bi se provođenjem testnih simulacija utvrdila mjesta izlivanja iz korita vodotoka. Tako utvrđena mjesta izlivanja identificirana su na dostupnim

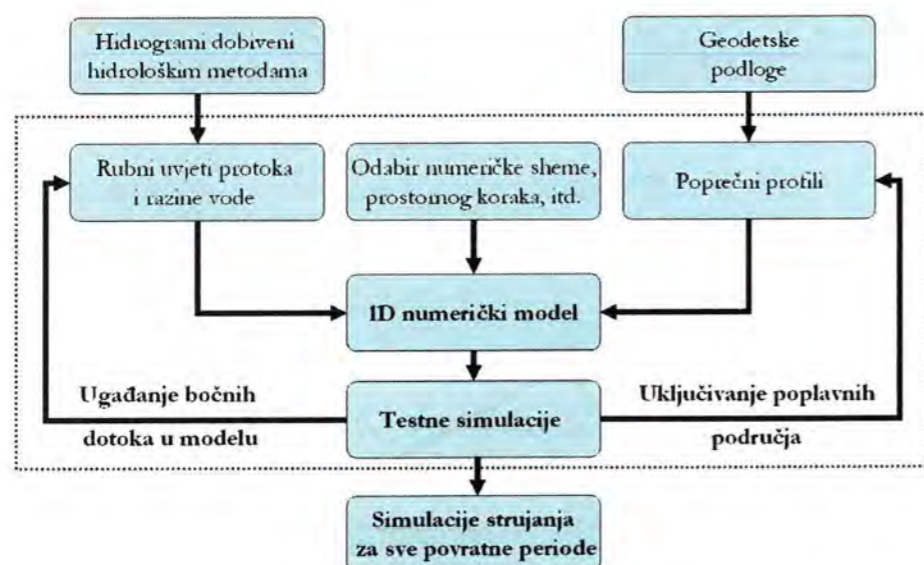


geodetskim podlogama te su profili tih područja prošireni da bi se njima obuhvatila poplavna područja (Slika 5.29).



Slika 5.29. Izvorni i prošireni profil i pripadno proračunato vodno lice

Nakon što je proveden opisani postupak (Slika 5.30 ga prikazuje dijagramom hoda), dobiven je 1D model vodotoka koji u sebi sadrži sve poplavne zone i ima dobro ugođene bočne dotoke te su na tako definiranom modelu provedene simulacije strujanja za scenarij svakog pojedinog povratnog perioda.



Slika 5.30. Metodologija pripreme 1D numeričkog modela i provedbe simulacija poplavljanja rijeke Čabranke

#### 5.2.4. Izrada karte rizika od poplava

Na temelju rezultata 1D numeričkog modela propagacije vodnih valova rijekom Čabrankom formirane su poplavne linije za povratne periode od 2, 5, 10, 20, 50, 100 i 1000 godina koje predstavljaju sastavne elemente karte rizika od poplava.

Iz rezultata nestacionarnih simulacija strujanja scenarija danog povratnog perioda izlučene su maksimalne vrijednosti proračunatih razina vode duž vodotoka. Time je dobivena tablična baza podataka uzdužnih profila velikih voda svih simuliranih povratnih perioda.

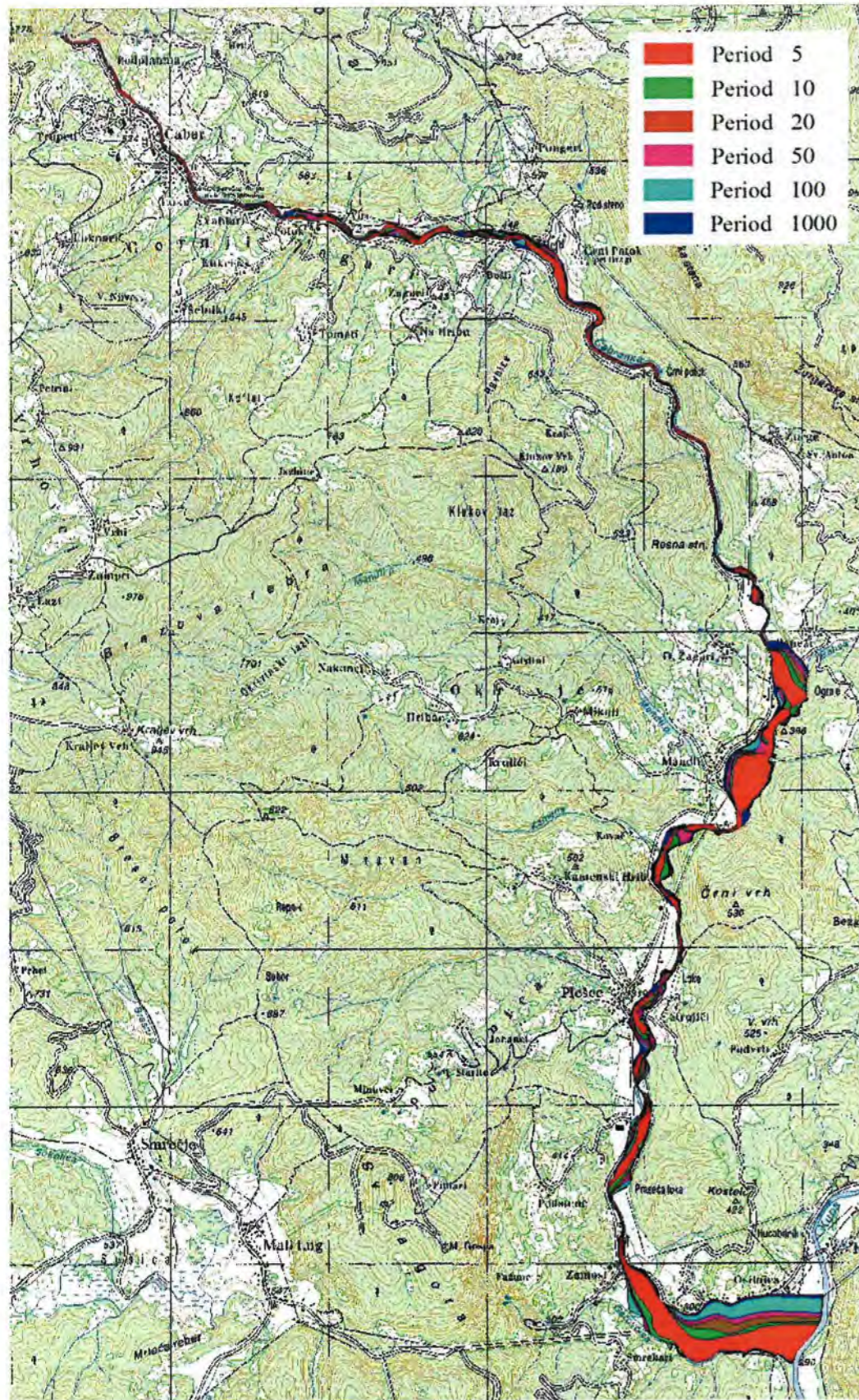
U sljedećoj fazi su maksimalne razine vodnog lica dobivene u obliku uzdužnih profila prenesene u dvodimenzionalni geoinformacijski sustav (GIS). Prenošenje je izvedeno tako da su prvo na geodetskim kartama i drugim digitalnim geodetskim podlogama identificirana mjesta koja odgovaraju pripadnom poprečnom profilu (tj.  $x$ -koordinati) u vodotoku. Zatim su na svakoj pojedinoj lokaciji na temelju proračunate maksimalne razine vode za pripadni poprečni profil i geodetskih karata (M 1:5000) utvrđene točke poplavne linije na lijevoj i desnoj obali. Provođenjem takvog postupka po cijeloj dužini vodotoka rijeke Čabranke dobivena je poplavna linija za određeni povratni period (detalj prikazan na Slika 5.31).



Slika 5.31. Poplavna linija rijeke Čabranke za 1000-godišnji povratni period na dionici od sela Zamost do Osilnice

Nakon što su konstruirane poplavne linije za sve povratne periode, one su sistematizirane kao zasebni slojevi u GIS-u (ArcView *shapefile* datoteke). Poplavne linije za sve analizirane povratne periode preklopljene su s topografskim kartama čime je konačno dobivena karta rizika od poplava za rijeku Čabranku (Slika 5.32).





Slika 5.32. Karta rizika od poplava rijeke Čabranke

Na temelju ovakvih karata moguće je provesti okvirne procjene potencijalnih šteta od poplave koje putem *cost-benefit* analize mogu predstavljati temelj strategije razvoja sustava obrane od poplava. Osim toga, ovakve karte predstavljaju jedan od temeljnih elemenata prostornog planiranja.

S obzirom na suštinska ograničenja 1D modela strujanja u otvorenim vodotocima, očito je da bi fundamentalni napredak metodologije izrade poplavnih linija odnosno karata rizika od poplava predstavljala jedino primjena 2D matematičkog modela strujanja. To bi pak zahtijevalo znatno veću količinu geodetskih podataka, pa se iz iskustva na ovdje opisanom primjeru može preporučiti upotreba 2D modela barem na područjima potencijalno najvećih šteta od poplave.

### 5.3. Analiza učinaka moguće regulacije riječnog korita

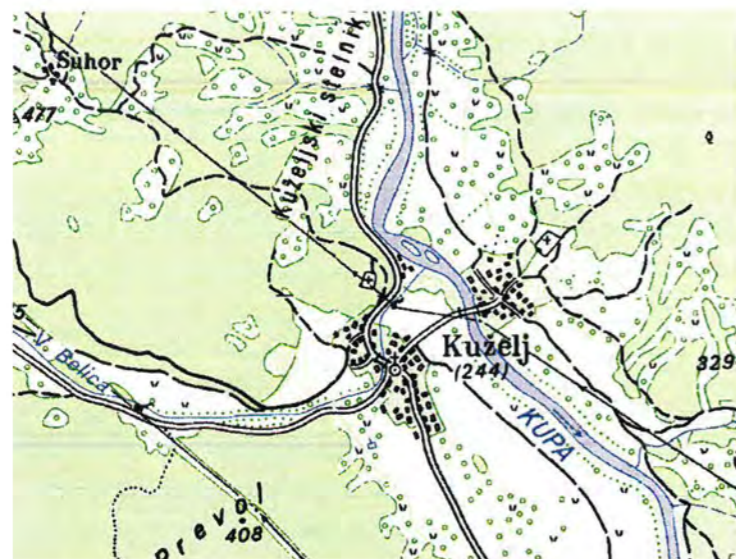
Kao primjer primjene 2D numeričkog modela strujanja sa slobodnom površinom u rješavanju konkretnog problema poplavlivanja ovdje je prikazana numerička analiza posljedica moguće rekonstrukcije riječnog korita rijeke Kupe i pritoke Velike Belice u mjestu Kuželj u Gorskom kotaru ([34]).

#### 5.3.1. Problem poplavlivanja u mjestu Kuželj

S obzirom da je korito rijeke Kupe većinom neregulirano, tijekom godine i to tipično u jesenjim i proljetnim mjesecima dolazi do izlivanja vode i pojave poplava unutar inundacijskih područja duž toka. Zbog relativno uske doline i malih raspoloživih površina većina prometnica kao i dijelovi naselja koji se nalaze unutar navedenih inundacija izloženi su poplavama.

U naselju Kuželj u rijeku Kupu utječe Velika Belica kao jedna od njenih jačih desnih pritoka (Slika 5.33). U okolici samog ušća V. Belice u Kupu smjestio se dio naselja Kuželj koji je kao i ostatak prometnice Brod na Kupu – Čabar učestalo izložen poplavama.





Slika 5.33. Smještaj ušća V. Belice u rijeku Kupu i mjesta Kuželj

Kod nailaska vodnog vala koritom V. Belice, koji često koincidira sa visokim vodostajem rijeke Kupe, dolazi do izlivanja vode iz korita Belice što rezultira plavljenjem prometnice i prizemnih dijelova stambenih objekata u mjestu Kuželj. Slika 5.34 prikazuje tragove poplave na fasadi kuće u mjestu Kuželj što zorno ilustrira visinu vodnog lica za vrijeme velikih poplava.



Slika 5.34. Tragovi poplave na fasadi kuće u naselju Kuželj

Korito V. Belice na ovom dijelu ima neizražene blage obale obrasle raslinjem (Slika 5.35), a na samom ušću V. Belice formiran je oveci rječni sprud u koritu Kupe, većinom prekriven vegetacijom (Slika 5.36). Podložnost V. Belice usporu Kupe, okomitost utoka V. Belice u Kupu te sprud koji se nalazi na ušću V. Belice zajedno utječu na visinu vodnog lica V. Belice i doprinose pojavi poplava u mjestu Kuželj.



Slika 5.35. Korito V. Belice u mjestu Kuželj (pogled od ušća uzvodno)



Slika 5.36. Riječni sprud na Kupu (pogled nizvodno)

Simulacijama numeričkim modelom precizno je određen utjecaj navedenih faktora na poplavljanje uslijed propagacije velikih voda rijeke Kupe i V. Belice. Drugim riječima, provedena je analiza učinaka mogućih regulacijskih radova kao što su korekcija položaja ušća V. Belice, uklanjanje spruda na Kupu i regulacija korita V. Belice.

### 5.3.2. Postavljanje 2D numeričkog modela

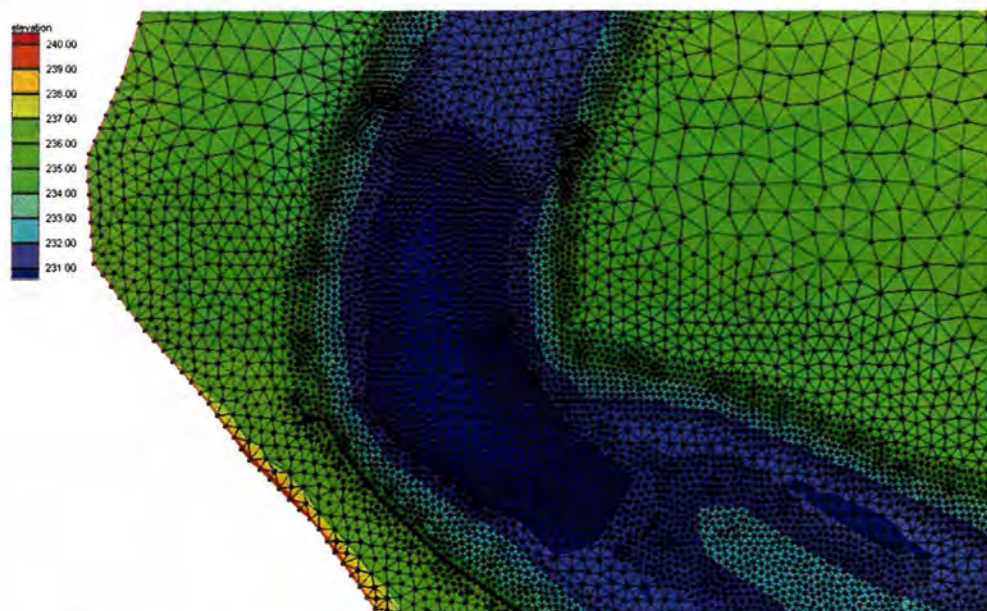
Segmenti rijeke Kupe i V. Belice zajedno sa okolnim poplavnim područjima definirani su kao jedna proračunska domena u kojoj se strujanje vode modelira dvodimenzionalnim



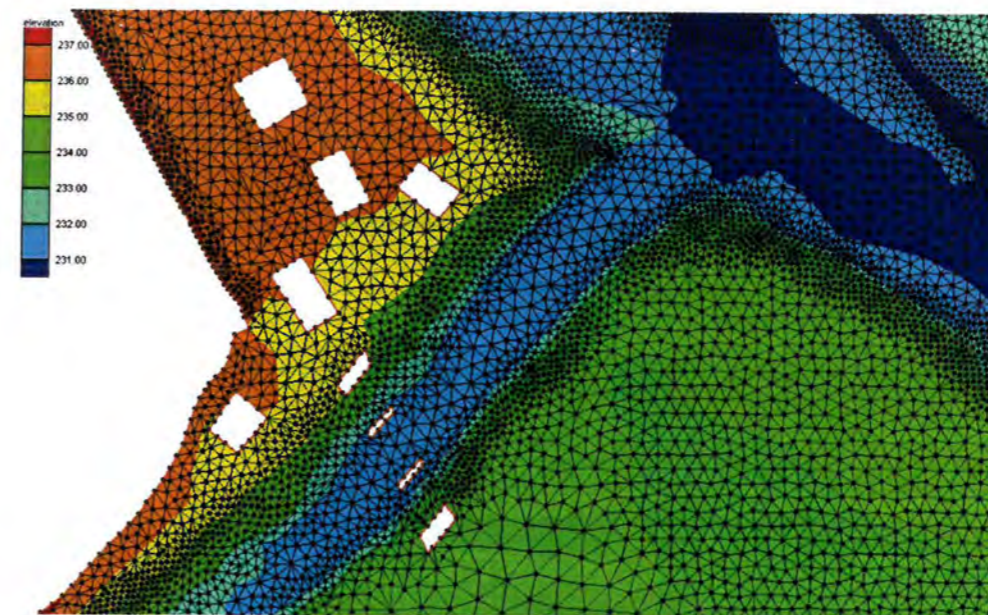
jednadžbama plitkih voda (2.21). Konkretno, model obuhvaća korito Kupe od stac. km. 272+751,05 do stac. km. 270+823,79 i V. Belice od stac. km. 0+000,00 do stac. km. 0+982,56 te okolni poplavni teren.

Osnova za izradu digitalnog modela terena bila je geodetska snimka dijela korita rijeke Kupe i V. Belice. Zbog dodatnih informacija o stanju korita i zaobalja Kupe i V. Belice, provedena su opsežna fotografska snimanja duž korita V. Belice i Kupe u selu Kuželj. Time dobivena baza fotomaterijala također je korištena za izradu digitalnog modela terena.

Proračunska domena definirana je dvodimenzionalnom nestrukturiranom trokutastom numeričkom mrežom (Slika 5.37, Slika 5.38) gdje su svakom čvoru mreže pridruženi pripadna nadmorska visina i Manningov koeficijent hrapavosti. Posebna pažnja pri izradi numeričke mreže posvećena je mjestima većih gradijenata visine terena, te oko karakterističnih građevinskih objekata kao što su kuće i mostovi (Slika 5.38). Plastični prikaz proračunske domene u cjelini prikazuje Slika 5.39.



Slika 5.37. Numerička mreža u području korita Kupe neposredno uzvodno od spruda



Slika 5.38. Numerička mreža u području ušća V. Belice u Kupu



Slika 5.39. Plastični prikaz proračunske domene

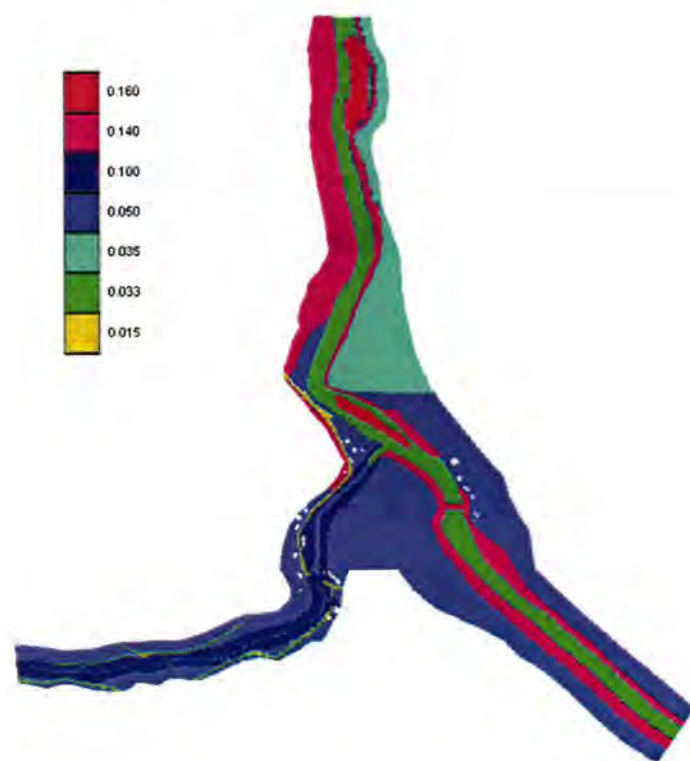
Numerički model sadržava i proračunu potrebne podatke o rubovima domene. Tako su zidovi kuća i stupovi mostova (Slika 5.38) uneseni u model kao rubni uvjet zida, dok su ulazi u domenu (utoci Kupe i V. Belice) modelirani kao rubni uvjeti zadanih protoka, a izlaz iz domene (istok Kupe) kao apsorpcijski rubni uvjet.

Preliminarne simulacije pokazale su da je rezultat vrlo osjetljiv na izbor lokacije izlaznog profila na kojemu se nameće apsorpcijski rubni uvjet. Naime, s obzirom da je efekt



ovakvog rubnog uvjeta ekvivalentan istjecanju u beskonačno dugi fiktivni produžetak domene sa konstantnim nagibom dna, slabo padajuća kota dna na izlazu iz domene uvjetuje pojavu uspora koji može dramatično povisiti razinu vode daleko natrag uzvodno u domeni. Treba napomenuti da bi se ovaj problem moglo u potpunosti izbjeći jedino kada bi se domena mogla produžiti dalje nizvodno u korito rijeke Kupe do mjesta poznatih parametara strujanja ili eventualno preljeva ili sličnog hidrotehničkog objekta, što u ovom slučaju nije bilo moguće. Stoga se može zaključiti da je kod apsorpcijskog rubnog uvjeta udaljavanje izlaznog ruba od područja interesa ili eventualno određivanje izlaznog ruba sa prikladnim gradijentom dna presudno za ispravan rezultat ([15]).

Prije provedbe simulacija mogućih varijanti regulacije proveden je postupak kalibracije višekratnim simulacijama uz variranje Manningovih koeficijenata hrapavosti i uspoređivanje proračunatih razina vode sa informacijama o razinama vode prikupljenim u razgovoru s mještanima Kuželja. Konačno usvojene vrijednosti koeficijenata hrapavosti (Slika 5.40) nisu se bitno udaljile od inicijalno postavljenih ([11]), s tim da je na lokacijama mostova na Kupi i V. Belici koeficijent hrapavosti povišen na vrijednost  $n = 0,1$  radi modeliranja hidrauličkih gubitaka uslijed opstrujavanja oko stupova mosta.



Slika 5.40. Konačno usvojene vrijednosti Manningovog koeficijenta hrapavosti

S obzirom da je analiza provedena na temelju simulacija stacionarnog strujanja, početno stanje definirano je jednostavno kao stanje suhog terena.

Nakon što su zadani svi početni i rubni uvjeti, definirani su još globalni parametri za simulaciju, kao što su CFL broj, duljina prvog vremenskog koraka, itd. Kao numerička shema korištena je dobro balansirana dvodimenzionalna Q-shema prvog reda točnosti, detaljno opisana u podpoglavlju 3.3.1 (str. 43).

### 5.3.3. Provedba simulacija za moguće varijante regulacije

Nakon provedenih preliminarnih i kalibracijskih simulacija, proveden je niz simulacija strujanja u cilju rješavanja problema jakog izlivanja Kupe i V. Belice u mjestu Kuželj. Provedene su simulacije za sljedeće varijante geometrije korita Kupe i V. Belice:

- 1) postojeća geometrija korita Kupe i V. Belice
- 2) regulirana korita Kupe i V. Belice
  - a) uklanjanje spruda na Kupi
  - b) uklanjanje spruda na Kupi sa korekcijom geometrije ušća V. Belice
  - c) izgradnja zida na lijevoj obali V. Belice

Za navedene varijante provedene su simulacije stacionarnog strujanja za protoke velikih voda povratnih perioda od 2, 25, 50, 100 i 1000 godina, koji su dobiveni na temelju dostupnih hidroloških podataka mjerenih na hidrološkoj stanici Petrina – Brod na Kupi ([34]).

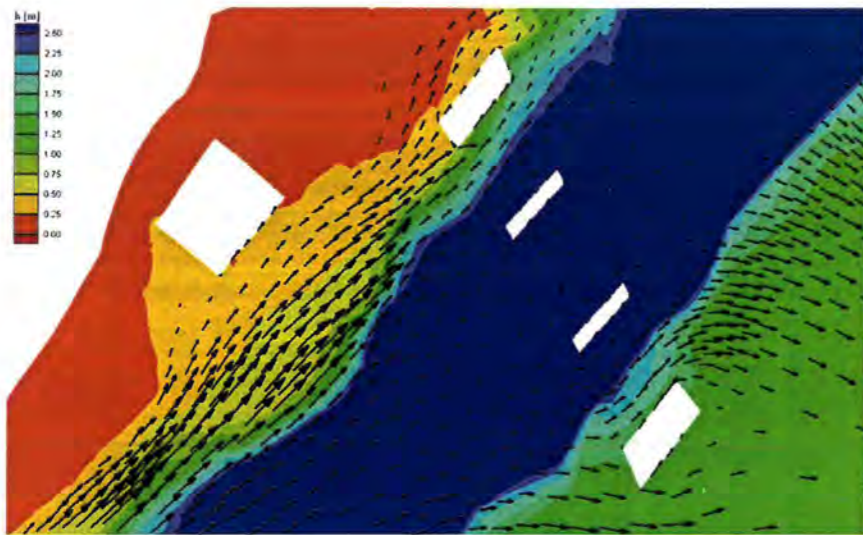
#### 5.3.3.1. Simulacije na postojećoj geometriji korita Kupe i V. Belice

Izgled proračunatog poplavnog područja na postojećoj geometriji za stacionarno strujanje 100-godišnjeg protoka Kupe i V. Belice prikazuje Slika 5.41. Detalj proračunatih dubina i vektora brzina kod najugroženijeg objekta u mjestu Kuželj (Slika 5.34) prikazuje Slika 5.42.



Slika 5.41. Proračunato poplavno područje nastalo uslijed poplavnog vala 100-godišnjeg povratnog perioda





Slika 5.42. Proračunate dubine vode i vektori brzina za poplavni val 25-godišnjeg povratnog perioda

### 5.3.3.2. Simulacije sa uklonjenim sprudom na Kupi

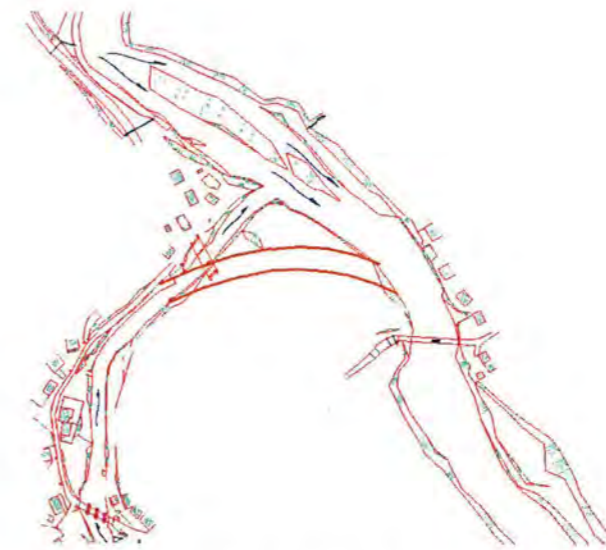
Kao prva varijanta izmjene geometrije Kupe predloženo je uklanjanje spruda na Kupi. Sprud je uklonjen iz numeričke mreže na način da je dno Kupe zaravnato od stac. km. 272+057,09 do stac. km. 271+703,98 tako da je zadržan realni pad dna između ta dva profila. Ovakvom intervencijom željelo se postići snižavanje vodnog lica Kupe u tom dijelu vodotoka, a time i snižavanje vodnog lica na ušću V. Belice. Pošto se vodno lice V. Belice najčešće nalazi pod usporom Kupe, time bi se smanjio i intenzitet plavljenja V. Belice.

Rezultati simulacija nakon uklanjanja spruda na Kupi pokazali su gotovo zanemarivu promjenu razine vodnih lica na okolnim poplavnim područjima (do 5 cm).

### 5.3.3.3. Simulacije sa uklonjenim sprudom na Kupi i korekcijom geometrije ušća V. Belice

Jedna od ideja za smanjenje intenziteta poplavlivanja Kupe i V. Belice temelji se na skretanju ušća V. Belice nizvodno prema mostu na Kupi. Zbog nižeg vodnog lica Kupe na novom mjestu utjecanja V. Belice smanjio bi se usporni utjecaj Kupe na V. Belicu.

U tom smislu u numeričkoj mreži izvedena je rekonstrukcija korita V. Belice tako da je izveden zavoj u desno, počevši od stac. km. 0+108,18 pa do ulaska u korito Kupe. Time je kao završni dio V. Belice izveden kanal širine 18 m, trapeznog poprečnog presjeka (nagib stranica oko 1:1) i prirodnog pada (Slika 5.43).



Slika 5.43. Shematski prikaz korekcije geometrije ušća V. Belice

Rezultati ovih simulacija dali su nešto niže vodno lice na poplavnim područjima od prethodne varijante (ukupno sniženje do 10 cm), ali su također potvrdili nedovoljnost ovakvih intervencija za uspješno smanjenje plavljenja.

### 5.3.3.4. Simulacije sa izgrađenim zidom na lijevoj obali V. Belice

Pošto rezultati simulacija za prethodne varijante nisu dali zadovoljavajuće rezultate u smislu zaštite mjesta Kuželj od poplave, testirana je mogućnost izgradnje zida na lijevoj obali V. Belice (Slika 5.44). Izgradnjom ovakvog zida osigurala bi se zaštita prometnice i kuća na lijevoj obali V. Belice koje su najugroženije poplavama (Slika 5.34).



Slika 5.44. Shematski prikaz zida na lijevoj obali V. Belice



Visina predloženog zida može se dimenzionirati na veliku vodu željenog povratnog perioda čime se u potpunosti rješava problem poplavlivanja na lijevoj obali V. Belice. No, radi osiguranja od eventualnog povišenja vodnog lica na poplavnom području uz desnu obalu V. Belice uslijed izgradnje zida, uspoređene su proračunate dubine vode na tom području za varijantu sa izgrađenim zidom sa dubinama dobivenim na postojećoj geometriji. Rezultati usporedbe pokazali su da povišenje vodnog lica postoji, ali je potpuno zanemarivog reda veličine, tj. ne prelazi 1 cm.

### 5.3.4. Izbor optimalne varijante regulacije

Proračunate dubine vode uz objekt najugroženiji poplavama (Slika 5.34) korištene su za kvantitativnu usporedbu uspješnosti opisanih varijanti zaštite mjesta Kuželj od poplavlivanja (Tablica 5.6).

Tablica 5.6. Usporedba učinaka mogućih regulacija korita Kupe i V. Belice

Povr. period	Protok $Q$ [m <sup>3</sup> /s]		Dubina vode na izabranoj lokaciji $h$ [cm]		
	Kupa uzvodno od ušća V. Belice	V. Belica	Postojeća geometrija korita (varijanta 1)	Bez spruda na Kupi (varijanta 2a)	Bez spruda na Kupi uz korekciju ušća V. Belice (varijanta 2b)
25 g.	426	89	41,8	41,8	37,5
50 g.	441	100	48,3	47,9	44,1
100 g.	456	108	53,6	53,5	49,2
1000 g.	512	120	67,4	66,2	62,1

Opisani rezultati simulacija pokazuju da se uklanjanjem spruda u koritu Kupe ili korekcijom geometrije ušća V. Belice problem poplavlivanja mjesta Kuželj ne može riješiti. Izgradnjom zida (varijanta 2c) odnosno nadvišenjem prometnice na lijevoj obali V. Belice, uspješno bi se mogao riješiti problem poplavlivanja područja uz lijevu obalu V. Belice. Dodatno je pokazano da se time ne bi dodatno povećalo poplavno područje na desnoj obali V. Belice.

Može se zaključiti da je prikazani numerički model uspješno primjenjen za analizu mogućih konstruktivnih mjera zaštite od poplava mjesta Kuželj. Uspostavljeni model omogućuje dodatnu provedbu simulacija za bilo koje novo projektno stanje odnosno daljnje ispitivanje učinkovitosti predloženih ili nekih novih projektnih rješenja.

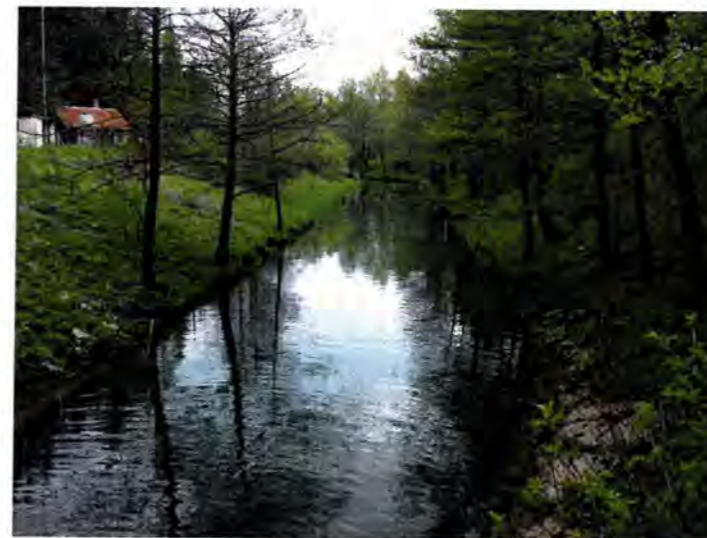
## 5.4. Optimalno pokretanje crpke

Kao posljednji primjer primjene numeričkih modela strujanja sa slobodnom površinom prikazan je postupak primjene 1D modela plitkih voda u određivanju optimalnog režima pokretanja crpke crpne hidroelektrane Fužine.

### 5.4.1. Uvodno o problemu pokretanja crpke CHE Fužine

Crpna hidroelektrana (CHE) Fužine izgrađena je za potrebe prebacivanja viška vode rijeke Ličanke odnosno jezera Bajer u gornje jezero Lokvarka te eksploataciju vode iz jezera Lokvarka. Voda iz jezera Lokvarka energetska iskorištena u crpnoj hidroelektrani Fužine otječe u jezero Bajer i dalje u HE Vinodol.

CHE Fužine povezuje sa jezerom Bajer tzv. odvodni/dovodni kanal koji vrši ulogu dovodnog kanala kada elektrana radi u crpnom režimu. Odvodni/dovodni kanal je cijelom svojom dužinom trapeznog poprečnog presjeka (Slika 5.45), s time da je unutar kruga postrojenja elektrane kanal potpuno betonski (Slika 5.46). Rijeka Ličanka izvire u neposrednoj blizini CHE Fužine i direktno se spaja na odvodni/dovodni kanal.



Slika 5.45. Odvodni/dovodni kanal, pogled od CHE Fužine nizvodno prema jezeru Bajer



Slika 5.46. Odvodni/dovodni kanal u krugu CHE Fužine, pogled od izvora Ličanke nizvodno



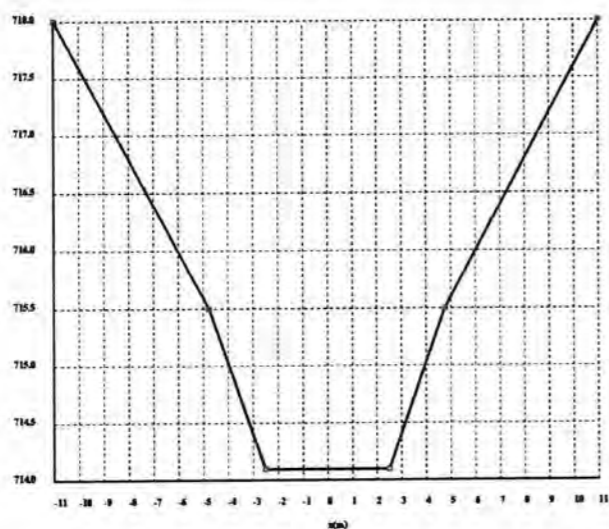
Neadekvatna konstrukcija odvodnog/dovodnog kanala uzrokuje nagli pad vodnog lica u prvih 10 minuta od početka pokretanja crpke. Iz tog se razloga u slučaju inicijalno niskih vodostaja u odvodnom/dovodnom kanalu razina vodnog lica pred crpkom spušta ispod crpki dopuštene granice, što rezultira pojavom kavitacije i potrebom za hitnim prekidanjem crpljenja ([32]).

U svrhu analize utjecaja brzine pokretanja crpke na razinu vode u odvodnom/dovodnom kanalu provedene su simulacije strujanja u kanalu pomoću 1D numeričkog modela plitkih voda.

#### 5.4.2. Postavljanje 1D modela i provedba simulacija strujanja

Jednodimenzionalni numerički model obuhvaća odvodni/dovodni kanal CHE Fužine od crpke do spoja kanala sa jezerom Bajer. Geometrija odvodnog/dovodnog kanala definirana je pomoću podataka iz dostupne projektne dokumentacije.

Vodotok je u modelu definiran 1D proračunskom domenom dobivenom iz poprečnih profila modeliranog vodotoka (Slika 5.47). Ukupna dužina 1D domene je 3074 m, sa prostornim korakom  $\Delta x = 2$  m. Manningovi koeficijenti hrapavosti inicijalno su zadani po standardnoj literaturi ([11]) te naknadno u postupku kalibracije u manjoj mjeri korigirani.



Slika 5.47. Poprečni profil odvodnog/dovodnog kanala u dijelu od cestovnog mosta do jezera Bajer

Jezero Bajer uključeno je u proračunsku domenu kao pojednostavljeni modelski rezervoar vode, što omogućuje realno ponašanje modela po pitanju refleksije vodnih valova od jezera.

Na početku kanala odnosno na spoju kanala sa jezerom Bajer (kanal promatramo kao dovodni) nametnut je rubni uvjet otvorene granice sa poznatom razinom vode  $H_{Bajer} = 716,2$  m. Na izlaznoj strani domene nametnut je rubni uvjet otvorene granice sa zadanim hidrogramom protoka  $Q_{crp} = Q_{crp}(t)$  koji pojednostavljeno definira rad crpke.

Rubni uvjet protoka na izlaznoj granici definira pokretanje crpke linearnim rastom protoka od početnog  $Q_{crp}(0) = 0$  m<sup>3</sup>/s do punog protoka crpljenja  $Q_{crp}(t_{start}) = 9$  m<sup>3</sup>/s u zadanom vremenskom periodu  $t_{start}$ . Od trenutka  $t = t_{start}$  dalje crpka radi konstantnom snagom, tj. protok se drži konstantnim sve do trenutka početka zaustavljanja crpke  $t = 1940$  s, kada se protok počinje linearno snižavati do  $Q_{crp}(1950) = 0$  m<sup>3</sup>/s.

Kao početno stanje u vodotoku duž cijele domene definirano je stanje mirne vode:

$$Q(x,0) = Q_0(x) = 0 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$H(x,0) = H_0(x) = H_{Bajer}.$$

Osim početnih i rubnih uvjeta, izabran je CFL broj, duljina prvog vremenskog koraka i ostali globalni parametri. Kao numerička shema korištena je dobro balansirana 1D Q-shema prvog reda točnosti, detaljno opisana u podpoglavlju 3.2.1 (str. 38).

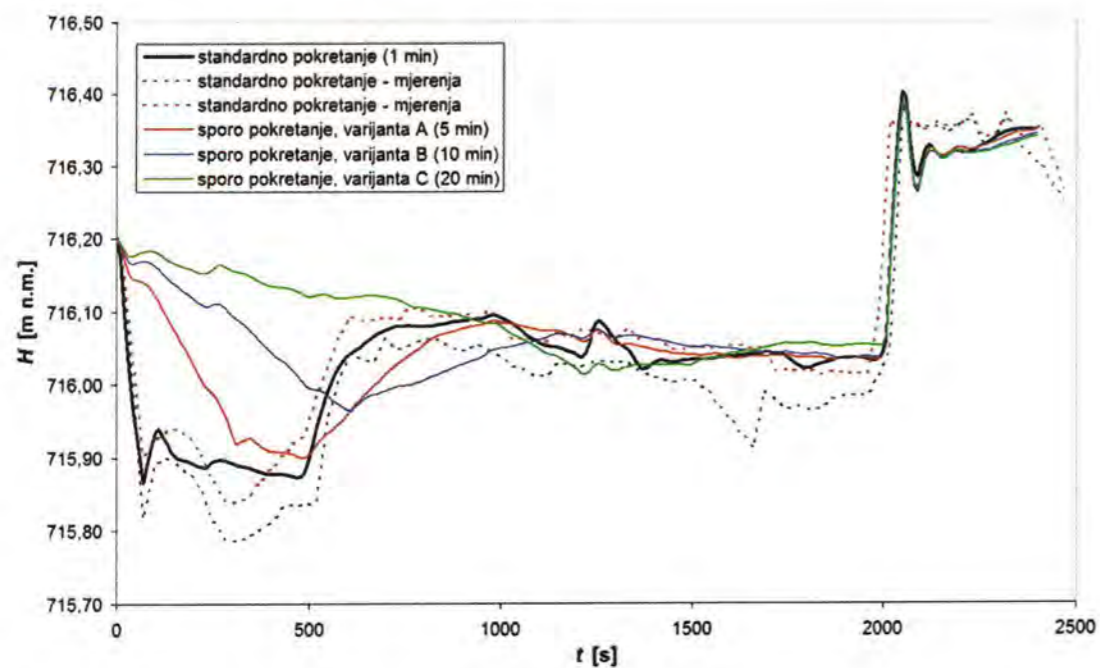
U cilju istraživanja utjecaja dinamike pokretanja crpke na razine vode u odvodnom/dovodnom kanalu, definirana su četiri simulacijska scenarija sa različitim vremenima pokretanja crpke (Tablica 5.7, [16]). Za potrebe testiranja i kalibracije numeričkog modela korišteni su podaci iz hidrauličkih mjerenja provedenih za potrebe izrade studije [32].

Tablica 5.7. Simulacijski scenariji sa različitim vremenima pokretanja crpke

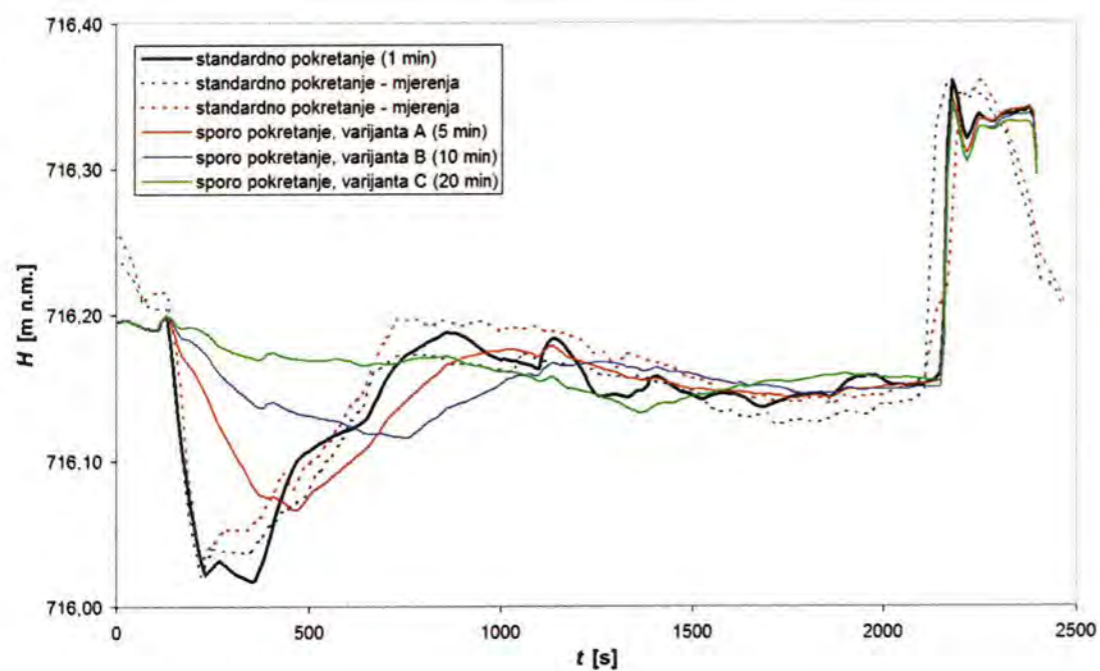
Scenarij	Vrijeme pokretanja crpke $t_{start}$ [s]
standardno pokretanje	60
sporo pokretanje, varijanta A	300
sporo pokretanje, varijanta B	600
sporo pokretanje, varijanta C	1200

Rezultati 1D simulacija strujanja u odvodnom/dovodnom kanalu za opisane scenarije pokretanja crpke dani su u vidu hidrograma razina vode na poprečnim profilima za koja postoje podaci iz mjerenja (Slika 5.48, Slika 5.49).





Slika 5.48. Razine vodnog lica na kontrolnom mjestu neposredno pred ulazom u crpku



Slika 5.49. Razine vodnog lica na kontrolnom mjestu približno jednako udaljenom od CHE Fužine i jezera Bajer

Prikazani rezultati (Slika 5.48, Slika 5.49) pokazuju dobro poklapanje rezultata numeričkog modela i mjerenja, čime je potvrđena primjerenost primjene 1D numeričkog modela plitkih voda na ovaj problem.

Uspjeh korištenog numeričkog modela dodatno dobiva na značaju ako se naglasi da se ovdje modelira nestacionarno kontrolirano istjecanje gdje je dinamički rubni uvjet zadanog protoka nametnut na izlaznoj granici, što donekle predstavlja svojevrsno proširenje standardne primjene modela. Testne simulacije opisanog strujanja provedene pomoću 2D numeričkog modela plitkih voda nisu dale tako uspješan rezultat i u tom smislu 2D modeliranje nestacionarnog kontroliranog istjecanja ostaje otvoren problem.

### 5.4.3. Zaključno o optimalnom pokretanju crpke CHE Fužine

Rezultati numeričkog modela jasno ilustriraju dominantan utjecaj dinamike pokretanja crpke na nagli pad vodnog lica u dovodnom/odvodnom kanalu (Slika 5.48, Slika 5.49) i nameću zaključak da je standardno upuštanje crpke u rad prebrzo. To ima za posljedicu nagli pad vodnog lica kod ulaza u crpku koji pri nižim kotama vode u odvodnom/dovodnom kanalu uzrokuje pojavu transkritičnog strujanja i formiranje hidrauličkog skoka koji pak onemogućuje daljnju brzu evakuaciju vode iz jezera Bajer ([32]).

U tom smislu pokazano je da sporije pokretanje crpke ima za posljedicu manji pad vodnog lica odnosno višu najmanju razinu vode. Pokretanje crpke kroz period od 20 minuta (simulacijska varijanta C) gotovo potpuno eliminira pojavu naglog pada vodnog lica; razina vode se u tom slučaju spušta bitno manje nego kod brzog starta crpke ( $\Delta H < 20$  cm), a samo spuštanje je sporo i kontinuirano, što je hidraulički poželjan režim rada cijelog sustava. Osim toga, sporo upuštanje crpke omogućuje crpljenje s nižih inicijalnih razina vode u kanalu, čime se postiže maksimalni kapacitet crpljenja i veća učinkovitost CHE Fužine.

Može se zaključiti da je 1D numerički model plitkih voda uspješno primjenjen na problemu određivanja optimalnog pokretanja crpke CHE Fužine. Ovakav numerički model može se koristiti i za provedbu simulacija za eventualno izmjenjenu geometriju odvodnog/dovodnog kanala ili neka druga projektna rješenja povećanja učinkovitosti CHE Fužine.



## 6. Zaključak

Simulacije strujanja sa slobodnom površinom predstavljaju zahtjevno i atraktivno područje računarske dinamike fluida koje se intenzivno razvija unaprjeđenjem numeričkih shema i napretkom informatičke tehnologije.

Provedeni opis i usporedba 1D, 2D i 3D numeričkih modela strujanja sa slobodnom površinom pokazali su njihove mogućnosti i specifičnosti.

Primjeri napredne primjene numeričkih simulacija strujanja u vodotocima sa slobodnom površinom ilustriraju njihovu veliku upotrebljivost u praksi. Činjenica da su bitno jeftiniji i jednostavniji za provedbu od eksperimenata na tradicionalnim fizikalnim modelima čini ih još atraktivnijim i praktičnijim. Iz tih razloga upotreba računalnih alata za numeričke simulacije strujanja sa slobodnom površinom postaje standard za modeliranje strujanja u rijekama i kanalima, poplavlivanja i drugih hidrotehničkih problema.

Na temelju provedenih istraživanja i praktične primjene numeričkog modeliranja strujanja sa slobodnom površinom upotrebom numeričkih shema visoke točnosti može se, između ostalog, rezimirati sljedeće:

- numeričke sheme modela strujanja u vodotocima sa slobodnom površinom dovoljno su robusne i pouzdane za uspješnu primjenu na zahtjevnim istraživačkim i inženjerskim problemima
- kod primjene modela plitkih voda na modeliranje strujanja na zahtjevnim geometrijama nužna je upotreba balansiranih numeričkih shema
- 2D i 3D numerički modeli strujanja sa slobodnom površinom kod modeliranja nestacionarnog strujanja pokazuju vidljivu osjetljivost dinamike propagacije poremećaja na numeričku mrežu odnosno pad točnosti rezultata kroz duži vremenski period; ovaj problem značajno otežava postupak kalibracije modela
- jednodimenzionalni model plitkih voda pokazuje se kao najpouzdaniji i najrobusniji te se zbog toga može uspješno primijeniti na probleme na kojima 2D i 3D modeli imaju teškoće
- dvodimenzionalni model plitkih voda ne daje zadovoljavajuće rezultate u slučaju nestacionarnog istjecanja gdje je dinamički rubni uvjet poznatog protoka zadan na izlaznoj granici
- rubni uvjeti mogu imati nefizikalni utjecaj na strujanje u domeni, što u praksi može predstavljati ozbiljan problem ako ne postoji mogućnost upotrebe drukčijih rubnih



uvjeta; pouzdano rješenje dobiva se udaljavanjem granice (proširivanjem domene) u cilju minimizacije utjecaja rubnog uvjeta na područje interesa

Unatoč određenim otvorenim problemima, može se zaključiti da su jednodimenzionalni i dvodimenzionalni numerički modeli plitkih voda razvijeni do vrlo visokog stupnja upotrebljivosti s obzirom na danas dostupne računalne resurse. Trodimenzionalni Navier-Stokes model strujanja sa slobodnom površinom također se pokazuje kao vrlo uspješan i obećavajući, no njegovi bitno veći zahtjevi po pitanju računalnih resursa u ovom trenutku ograničavaju njegovu širu primjenu u praksi. Po pitanju točnosti može se općenito reći da su sva tri modela uspješna i primjenjiva na realne probleme.

Daljnji razvoj numeričkog modeliranja strujanja sa slobodnom površinom rezultirat će postupnim proširenjem područja primjene višedimenzionalnih modela. Tako će 2D model plitkih voda preuzeti dio dosadašnjeg područja primjene 1D modela plitkih voda, kao što su tipično problemi strujanja u rijekama i kanalima. Nereducirani 3D model strujanja sa slobodnom površinom uskoro će pak postati primjeren za inženjersku primjenu u analizi hidrotehničkih i drugih lokalnih problema na manjim proračunskim domenama.

Znanstveni doprinos ove disertacije dan je u testiranju, validaciji i proširenju praktične primjenjivosti numeričkih modela strujanja sa slobodnom površinom temeljenih na najnovijim numeričkim shemama visoke točnosti.

## Literatura

- [1] Anderson, J. D., *Computational Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, Singapore, 1995.
- [2] Bothe, D., *VOF-Simulation of fluid particle dynamics*, Proc. 11th Workshop on two-phase flow predictions, ed. M. Sommerfeld, Merseburg, 2005.
- [3] Bermudez, A., Dervieux, A., Desideri, J.-A., Vazquez, M. E., *Upwind Schemes for the Two-Dimensional Shallow Water Equations with Variable Depth Using Unstructured Meshes*, Rapport de recherche No 2738, INRIA, Sophia Antipolis, 1995.
- [4] Bermudez, A., Vazquez, M. E., *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*, Computers & Fluids, 23 (8), pp. 1049, 1994.
- [5] Brufau, P., Garcia-Navarro, P., *Unsteady free surface flow simulation over complex topography with a multidimensional upwind technique*, Journal of Computational Physics, 186, pp. 503-526, 2003.
- [6] Brufau, P., Garcia-Navarro, P., *Two-dimensional Dam Break Flow Simulation*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 33, pp. 35-57, 2000.
- [7] Brufau, P., Garcia-Navarro, P., Vazquez-Cendon, M. E., *Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow flows over dry irregular topography*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 45, pp. 1047, 2004.
- [8] Brufau, P., Vazquez-Cendon, M. E., Garcia-Navarro, P., *A numerical model for the flooding and drying of irregular domains*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 39, pp. 247, 2002.
- [9] Burguete, J., Garcia-Navarro, P., *Improving simple explicit methods for unsteady open channel river flow*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 45, pp. 125, 2004.
- [10] CADAM CD ROM, ed. S. Soares Frazao, M. W. Morris, Y. Zech, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, 2000.
- [11] Chaudhry, M. H., *Open-Channel Flow*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.



- [12] Clausen, L., Clark, P. B., *The development of criteria for predicting dambreak flood damages using modelling of historical dam failures*, International Conference on River Flood Hydraulics, pp. 369-380, ed. W. R. White, John Wiley & Sons Ltd. Hydraulics Research Limited, 1990.
- [13] Courant, R., Friedrichs, K. O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [14] Družeta, S., *Utjecaj parametara numeričke mreže na rezultat simulacija strujanja u plitkim vodama*, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2004.
- [15] Družeta, S., Črnjarić-Žic, N., Kranjčević, L., *Influence of the Outflow Boundary Conditions in the Open Channel and Shallow Water Models*, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Congress of Croatian Society of Mechanics, pp. 137-144, ed. F. Matejiček, Croatian Society of Mechanics, Zagreb, 2003.
- [16] Družeta, S., Sopta, L., Črnjarić-Žic, N., Škifić, J., *Pump Start-up Analysis in Fužine Reversible Hydropower Plant Using 1D Open Channel Flow Model*, Proceedings of the 5<sup>th</sup> DAAAM International Conference on Advanced Technologies for Developing Countries, pp. 63-68, ed. T. Mikac, B. Katalinić, Faculty of Engineering University of Rijeka, DAAAM International Vienna, Rijeka, 2006.
- [17] Družeta, S., Škifić, J., Crnković, B., Sopta, L., Holjević, D., Črnjarić-Žic, N., Maćešić, S., *River Flood Lines Prediction With 1D Open Channel Flow Model*, Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Congress of the Croatian Society of Mechanics, ed. F. Matejiček, Croatian Society of Mechanics, Zagreb, 2006.
- [18] Fluent 6.2 Documentation, Fluent Inc., Lebanon, New Hampshire, 2005.
- [19] da Franca, M. J. R. P., *Caracterização e modelação numérica e experimental da ruptura provocada por galgamento de barragens de enrocamento*, disertacija, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, Lisbon, 2002.
- [20] Godlewski, E., Raviart, P.-A., *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [21] Harlow, F., Welch, J., *Numerical Calculation of Time-dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface*, The Physics of Fluids, 12 (8), pp. 2182-2189, 1965.
- [22] Hirt, C. W., Nichols, B. D., *Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries*, Journal of Computational Physics, 39, pp. 201-225, 1981.
- [23] Kranjčević, L., *Računalne simulacije strujanja u otvorenim vodotocima*, magistarski rad, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2001.

- [24] Leveque, R. J., *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhauser Verlag, Basel, 1992.
- [25] Osher, S., Fedkiw, R., *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [26] Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington, D. C., 1980.
- [27] *RESCDAM: The use of physical models in dam-break flood analysis, Final report*, Helsinki University of Technology, Helsinki, 2000.
- [28] Schröder, R. C. M., *Hydraulische Methoden zur Erfassung von Rauheiten*, DVWK Schriften, Heft 92, Hamburg-Berlin, Parey, 1990.
- [29] Smith, D. I., *Extreme floods and dam failure inundation implications for loss assessment*, Proceedings of a Seminar "Natural and Technological Hazards: Implications for the Insurance Industry", pp. 149-165, 1991.
- [30] Soares Frazao, S., Sillen, X., Zech, Y., *Dam-break Flow through Sharp Bends Physical Model and 2D Boltzmann Model Validation*, Proceedings of the CADAM meetings, Wallingford, Munich, Milan, Zaragoza, 1998-1999.
- [31] Soares Frazao, S., Testa, G., *3<sup>rd</sup> CADAM meeting – The Toce River test case: Numerical results analysis*, Proceedings of the CADAM meetings, Wallingford, Munich, Milan, Zaragoza, 1998-1999.
- [32] Sopta, L., Družeta, S., Škifić, J., Črnjarić-Žic, N., Maćešić, S., Crnković, B., *Analiza strujanja u odvodnom/dovodnom kanalu CHE Fužine*, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2005.
- [33] Sopta, L., Družeta, S., Škifić, Crnković, B., Ožanić, N., *Studija rizika od poplava na rijekama Čabranki i Kupi (od izvora do lokacije Zdihovo) te vodotocima zatvorenih planinskih polja Gorskog kotara*, Tehnički i Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2005.
- [34] Sopta, L., Vuković, S., Črnjarić-Žic, N., Družeta, S., Škifić, J., Bukovac, O., *Matematički model rijeke Kupe i V. Belice u mjestu Kuželj*, Sopex d.o.o. – Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2003.
- [35] Sopta, L., Vuković, S., Črnjarić-Žic, N., Družeta, S., Škifić, J., Crnković, B., *Određivanje posljedica uslijed iznenadnog rušenja ili djelomičnog oštećenja zemljane brane akumulacije Tribalj matematičkim modeliranjem*, Građevinski i Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2004.



- [36] Sopta, L., Vuković, S., Družeta, S., Pintar, S., Škifić, J., *Matematički model rijeke Rječine od izvora do Tvornice papira*, Rijeka, 2002.
- [37] Sopta, L., Vuković, S., Pintar, S., Škifić, J., *Matematički model pucanja brane Valići i propagacije poplavnog vala*, Rijeka, 2001.
- [38] Strybny, J., Thorenz, C., Croce, R., Engel, M., *A Parallel 3D Free Surface Navier-Stokes Solver for High Performance Computing at the German Waterways Administration*, Proceedings of the 7<sup>th</sup> Int. Conf. on Hydroscience and Engineering (ICHE), Philadelphia, 2006.
- [39] Vazquez-Cendon, M. E., *Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channel with irregular geometry*, Journal of Computational Physics, 148, pp. 497, 1999.
- [40] Vuković, S., Sopta, L., *Upwind schemes with exact conservation property for one-dimensional open channel flow equations*, SIAM Journal on Scientific Computing, 24 (5), pp. 1630, 2003.
- [41] Yang, J. Y., Hsu, C. A., *Computations of Free Surface flows*, Journal of Hydraulic Research, vol. 31, 1993.
- [42] Zhao, D. H., Shen, H. W., Tabios III, G. Q., Lai, J. S., Tan, W. Y., *Finite-Volume Two-Dimensional Unsteady-Flow Model for River Basins*, Journal of Hydraulic Engineering, 7 (120), 1994.

## Popis oznaka i simbola

$A$	omogućena površina poprečnog presjeka kanala; površina
$\mathbf{A}$	Jacobijeva matrica fluksa
$b$	širina otvorenog kanala
$C_1, C_2$	koeficijenti za Prandtl-Colebrookov izraz
$C_{1\epsilon}, C_{2\epsilon}, C_{3\epsilon}$	konstante u $k-\epsilon$ modelu turbulencije
$C_{cfl}$	Courant-Friedrichs-Lewy broj
$C_i$	$i$ -ta ćelija numeričke mreže
$C_\mu$	konstanta dinamičke turbulentne viskoznosti
$c$	brzina propagacije poremećaja
$D$	promjer cijevi
$D_H$	hidraulički promjer
$d$	dubina protočnog presjeka
$d_{50}$	srednji promjer zrna
$d_{ij}$	težinski faktor za lice između $i$ -te i $j$ -te ćelije
$d_{mix}$	visina sloja dvofaznih ćelija
$E$	energetska visina
$e$	srednja visina neravnina
$F$	sila na fluid
$Fr$	Froudiv broj
$f$	koncentracija pojedine faze; koncentracija vode
$\mathbf{f}$	numerički fluks
$G_b$	izvor turbulentne kinetičke energije nastale zbog uzgona
$G_k$	izvor turbulentne kinetičke energije
$\mathbf{G}$	numerička aproksimacija izvornog člana
$g$	ubrzanje sile teže
$\mathbf{g}$	izvorni član
$H$	razina vodnog lica
$h$	dubina vode
$\mathbf{h}$	vektor usmjerene dubine vode
$I_p$	član sile hidrostatskog tlaka
$I_w$	član sile uslijed promjene poprečnog presjeka kanala
$\mathbf{I}$	jedinična matrica
$J$	fluks mase
$K_i$	skup svih susjednih ćelija $i$ -te ćelije



$K_{ob}$	koeficijent oblika trokutastog hidrograma
$k$	kinetička energija turbulencije
$l$	duljina
$\mathbf{l}$	lijevi svojstveni vektor
$M$	količina gibanja
$Ma$	Machov broj
$N$	broj ćelija numeričke mreže
$n$	Manningov koeficijent trenja
$\mathbf{n}$	vektor normale
$P$	omočeni opseg kanala
$Pr$	Prandtlov broj
$p$	tlak
$Q$	volumni protok
$\mathbf{Q}$	numerička aproksimacija Jacobijeve matrice fluksa
$q_L$	bočni dotok po jedinici duljine kanala
$\mathbf{R}$	matrica desnih svojstvenih vektora matrice $\mathbf{Q}$
$\mathbf{r}$	desni svojstveni vektor
$Re$	Reynoldsov broj
$R_H$	hidraulički radijus
$S$	površina; modul tenzora srednje brzine deformacije
$S_b$	nagib dna kanala
$S_f$	nagib trenja
$S_m$	izvor mase fluida
$T_{ij}$	$j$ -ta podćelija $i$ -te ćelije
$t$	vremenska varijabla
$U$	protok kroz stranicu ćelije
$\mathbf{u}$	vektor stanja
$V$	volumen
$\mathbf{V}$	numerička aproksimacija prostorne derivacije fluksa
$v$	brzina vode u smjeru jedne prostorne varijable; intenzitet brzine
$v'$	turbulentna fluktuacija brzine
$\mathbf{v}$	vektor brzine
$x$	prostorna varijabla
$\mathbf{x}$	vektor prostornih varijabli
$Y_M$	fluktuirajuća dilatacija disipacije energije
$y$	prostorna varijabla
$z$	prostorna varijabla, geodetska visina

$\alpha$	vektor proizvoljnih parametara linearne kombinacije
$\Lambda$	matrica svojstvenih vrijednosti
$\beta$	parametar umjetne kompresibilnosti
$\varepsilon$	stopa disipacije kinetičke energije turbulencije
$\eta$	visina od dna kanala
$\kappa$	zakrivljenost slobodne površine
$\lambda$	koeficijent hrapavosti; svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{A}$
$\mu$	dinamička viskoznost fluida
$\nu$	kinematička viskoznost fluida
$\xi$	prostorna varijabla
$\rho$	gustoća fluida
$\sigma$	površinska napetost
$\sigma_k$	turbulentni Prandtlov broj za kinetičku energiju turbulencije
$\sigma_\varepsilon$	turbulentni Prandtlov broj za stopu disipacije kinetičke energije turbulencije
$\tau$	tenzor naprezanja
$\Phi$	udaljenost od slobodne površine
$\varphi$	općenita veličina
$\omega$	vektor vrtložnosti



## Životopis

Siniša Družeta rođen je u Puli, 5. listopada 1975. godine. Osnovnu školu pohađao je u Pazinu, kao i prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Jurja Dobrile, nakon čega 1994. godine upisuje sveučilišni studij strojarstva na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci. U toku studija obavlja stručnu praksu u brodogradilištu Lisnave Mitrena u Lisabonu i ukupno četiri puta prima fakultetsku nagradu za uspjeh. Diplomirao je sa izvrsnom ocjenom 1999. godine radom pod nazivom *Hidraulička analiza rashladnog sustava morske vode u TE Rijeka*, čime je stekao naziv dipl. ing. strojarstva. Početkom 2000. godine zapošljava se u tvrtci Sopex d.o.o. na poslovima razvoja i primjene numeričkog simuliranja strujanja fluida, da bi od 2001. godine bio zaposlen kao znanstveni novak na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, gdje ujedno pohađa poslijediplomski studij računarne mehanike. Pod vodstvom prof. dr. sc. Luke Sopte izradio je magistarski rad *Utjecaj parametara numeričke mreže na rezultat simulacija strujanja u plitkim vodama* kojeg je obranio 4. lipnja 2004. godine na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci čime je stekao akademski stupanj magistar znanosti iz znanstvenog područja Tehničke znanosti, znanstvenog polja Druge temeljne tehničke znanosti i grane Tehnička mehanika i mehanika fluida. Aktivno se služi engleskim jezikom.



## PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

### 1. AUTOR

Ime i prezime:	Siniša Družeta
Datum i mjesto rođenja:	5. listopada 1975., Pula
Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, studij strojarstva, 1999.
Naziv fakulteta, smjera i godina završetka poslijediplomskog studija:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, računarska mehanika, 2004.
Sadašnje zaposlenje:	Mlađi asistent

### 2. DOKTORSKA DISERTACIJA

Naslov:	Numeričke simulacije strujanja u vodotocima sa slobodnom površinom
Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka:	viii+129 stranica, 97 slika, 12 tablica, 42 bibliografska podatka
Znanstveno polje i grana:	Druge temeljne tehničke znanosti, Tehnička mehanika i mehanika fluida
Voditelj rada:	Doc. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing.
Fakultet na kojem je rad obranjen:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

### 3. OBRANA I OCJENA

Datum prijave teme:	15. svibnja 2006.
Datum predaje rada:	15. lipnja 2007.
Datum prihvatanja ocjene rada:	13. srpnja 2007.
Sastav povjerenstva za ocjenu:	Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing., predsjednik Doc. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing., član (Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci) Izv. prof. dr. sc. Mario Šavar, dipl. ing., član (Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu)
Datum obrane:	7. rujna 2007.
Sastav povjerenstva za obranu:	Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing., predsjednik Doc. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing., član (Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci) Izv. prof. dr. sc. Mario Šavar, dipl. ing., član (Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu)
Datum promocije:	



**NUMERIČKE SIMULACIJE STRUJANJA  
U VODOTOCIMA SA SLOBODNOM POVRŠINOM**

**Siniša Družeta**

Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
Hrvatska

**Ključne riječi:** strujanje sa slobodnom površinom, matematički model plitkih voda, računarska dinamika fluida, poplavljanje, pucanje brane

**Sažetak:** 1D, 2D i 3D numerički modeli strujanja sa slobodnom površinom opisani su, testirani i uspoređeni na dva test-primjera, od kojih je jedan temeljen na laboratorijskom eksperimentu namjenjenom upravo za testiranje numeričkih modela strujanja u otvorenim kanalima. Opisani su postupci napredne praktične primjene na zahtjevnim realnim problemima propagacije poplavnog vala nastalog uslijed pucanja brane, određivanja poplavnih linija, analize mogućih regulacija riječnog korita te optimalnog pokretanja crpke. Dobivena saznanja olakšavaju izbor primjerenog numeričkog modela strujanja sa slobodnom površinom i njegovu ispravnu upotrebu na zadanom inženjerskom ili istraživačkom problemu.

Rad nije objavljen.

Mentor:	Doc. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing.
Povjerenstvo za ocjenu:	Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing., predsjednik Doc. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing., član (Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci) Izv. prof. dr. sc. Mario Šavar, dipl. ing., član (Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu)
Povjerenstvo za obranu:	Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing., predsjednik Doc. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing., član (Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci) Izv. prof. dr. sc. Mario Šavar, dipl. ing., član (Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu)
Datum obrane:	7. rujna 2007.
Datum promocije:	

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.  
(viii+129 stranica, 97 slika, 12 tablica, 42 bibliografska podatka, hrvatski jezik)



## NUMERICAL SIMULATIONS OF FREE SURFACE FLOW

**Siniša Družeta**

University of Rijeka  
Faculty of Engineering  
Croatia

**Keywords:** free surface flow, shallow water model, computational fluid dynamics, flooding, dam break

**Summary:** Numerical models of 1D, 2D and 3D free surface flow are described, tested and compared in two test-cases, one of which was based on a laboratory experiment designed precisely for the testing of the open channel flow models. Advanced practical applications on difficult real problems of dam break flood wave propagation, river flood lines prediction, watercourse reconstruction effects analysis and optimal pump start up are demonstrated. The performed analysis and validation make easier the selection of the most suitable numerical model for the free surface flow modeling and its proper employment on a given engineering or research problem.

The thesis has not been published.

**Mentor:** Doc. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing.  
**Advisors:** Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing., chairman  
Doc. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing., member  
(Faculty of Engineering, University of Rijeka)  
Izv. prof. dr. sc. Mario Šavar, dipl. ing., member  
(Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture,  
University of Zagreb)

**Reviewers:** Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl. ing., chairman  
Doc. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing., member  
(Faculty of Engineering, University of Rijeka)  
Izv. prof. dr. sc. Mario Šavar, dipl. ing., member  
(Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture,  
University of Zagreb)

**Presentation:** September 7, 2007  
**Degree conferred:**

The thesis is deposited in the library of the University of Rijeka, Faculty of Engineering, (viii+129 pages, 97 figures, 12 tables, 42 references, Croatian)

1. Numeričke simulacije strujanja u  
vodotocima sa slobodnom površinom  
I Družeta, S.  
II Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
Hrvatska

strujanje sa slobodnom površinom  
matematički model plitkih voda  
računarska dinamika fluida  
poplavljanje  
pucanje brane

Ključne riječi:



**DD**

UDC 532.529:532.543:519.63:627.512(043)

1. Numerical Simulations of  
Free Surface Flow

Keywords:

I Družeta, S.  
II University of Rijeka  
Faculty of Engineering  
Croatia

open channel flow  
shallow water model  
computational fluid dynamics  
flooding  
dam break