

# Prilog istraživanju gubitaka trenja u zahvatu evolventnih zupčanika

---

**Križan, Božidar**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**1990**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:188:487240>

*Rights / Prava:* [Attribution-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-01**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka Library - SVKRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE "VLADIMIR BAKARIĆ" U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET RIJEKA

PRILOG ISTRAŽIVANJU GUBITAKA TRENJA U ZAHVATU  
EVOLVENTNIH ZUPČANIKA

Disertacija

Predložio je Tehničkom fakultetu Rijeka  
Sveučilišta "Vladimir Bakarić" u Rijeci  
za postizanje stupnja doktora tehničkih  
znanosti s područja strojarstva

**Božidar Križan**

SVEUČILIŠNA KNJIŽNICA  
RIJEKA



930038192

Rijeka, 1990.

## PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

### 1. Autor

Ime i prezime: Božidar Križan

Datum i mjesto rođenja: 06.12.1946., Zagreb

Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija: Strojarski fakultet u Rijeci Brodostrojarstvo usmjerenje, 1971.

Naziv fakulteta, smjera i godina završetka magistarskog studija: Fakultet strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, usmjerenje "Metode mehaničkog proračuna konstrukcija", 1981.

Sadašnje zaposlenje: Tehnički fakultet Rijeka

### 2. Doktorska disertacija

Naslov: Prilog istraživanju gubitaka trenja u zahvatu evolventnih zupčanika

Broj stranica, slika, tabela i bibliografskih podataka: 123 , 45 , 15 , 27

Znanstveno područje i disciplina: Strojarstvo, Elementi strojeva i konstruiranje

Fakultet na kojem je rad obranjen: Tehnički fakultet Rijeka

Datum prijave teme: 06.05.1986.

Datum predaje rada: 30.03.1990.

Datum prihvatanja ocjene rada: 10.07.1990.

Sastav komisije za ocjenu: Izv. prof. dr. Milan Opalić  
Prof. dr. Jože Hlebanja  
Prof. dr. Josip Obsieger

Datum obrane: 06.09.1990.

Sastav komisije za obranu: Prof. dr. Josip Obsieger  
Prof. dr. Jože Hlebanja  
Izv. prof. dr. Milan Opalić

Datum promocije: \_\_\_\_\_

TEHNIČKI FAKULTET RIJEKA  
ZNANSTVENO-NASTAVNO VIJEĆE  
Broj: 68-39/4 - 1986/87. šk.g.  
Rijeka, 26.12. 1986.

Znanstveno-nastavno vijeće Tehničkog fakulteta Rijeka,  
na svojoj 68-39/4 sjednici, održanoj 26.12. 1986. jednoglasno je  
donijelo slijedeću

O D L U K U

1. Prihvaća se izvještaj Komisije za ocjenu podobnosti kandidata  
mr Božidara Križana, dipl.inž. strojarstva, kojoj je odlukom  
Znanstveno-nastavnog vijeća na sjednici od 26.06.1986. povjereno  
da ocijeni podobnost kandidata i temu doktorske disertacije.
2. Utvrđuje se podobnost kandidata i teme doktorske disertacije  
koja glasi:  
"Prilog istraživanju gubitaka trenja u zahvatu evolventnih  
zupčanika".
3. Gornji izvještaj podnijela je Komisija u sastavu:
  - prof.dr Jože Hlebanja, FS Ljubljana
  - prof.dr Josip Obsieger
  - prof.dr D Mitar Stamboliev, MF Skopje

DEKAN

Izv.prof.dr Ivan Kamenarović

Dostavlja se:

- mr Božidar Križan
- Komisija za ocjenu podobnosti  
kandidata i teme dokt.disert.:
  - prof.dr J.Hlebanja, Fakulteta za strojništvo Ljubljana
  - prof. dr Josip Obsieger
  - prof.dr D Mitar Stamboliev, Mašinski fakultet Skopje
- Komisija za postdiplomske studije  
i doktorate znanosti
- Referada za studente
- Arhiva

Mjerenja koja sam vršio na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu su mi svojom susretljivošću i zalaganjem omogućili izv. prof. dr. Milan Opalić, zn. asistent mr. Petar Rakamarić te laborant Ivan Crnjak, čija mi je pomoć bila neophodna i u toku samih mjerenja. Prilikom obrade rezultata mjerenja nesebično mi je pomagao dr. Vladimir Medica, docent Tehničkog fakulteta Rijeka. U radu me je usmjeravao i savjetovao me dr. Josip Obsieger, profesor Tehničkog fakulteta Rijeka. Svima se njima najtoplije zahvaljujem.

Materijalnu i financijsku pomoć su pružili:

- Fabrika za oprema i prenosnici "FOP", Zavodi "Tito" Skopje
- Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
- INA Rafinerija Zagreb
- Samoupravna interesna zajednica za znanost SR Hrvatske

Rad je izrađen u okviru projekta Samoupravne interesne zajednice znanosti SR Hrvatske "Istraživanja na područjima prijenosnika snage".

Oznaka D Tekući broj:

UDK 621.8.031.6 : 621.833.01 (043.3)

## PRILOG ISTRAŽIVANJU GUBITAKA TRENJA U ZAHVATU EVOLVENTNIH ZUPČANIKA

Božidar Križan

Ključne riječi: zupčanik

evolventno ozubljenje

ozubljenje, evolventno

gubitak trenja

trenje klizanja

### Sažetak:

Geometrijski faktor gubitaka trenja klizanja definiran je za vanjsko i unutarnje evolventno ravno ozubljenje. Ovaj faktor obuhvaća utjecaj veličine i oblika ozubljenja te utjecaj promjene opterećenja na zubu tokom zahvata na gubitak snage prouzrokovan klizanjem zubi.

Izrađen je računarski program za proračun optimalnih faktora pomaka profila kod kojih je geometrijski faktor gubitaka klizanja najmanji, tj. kod kojih su najmanji gubici klizanja. Rezultati su prikazani dijagramski i u obliku matematičkih izraza. Korištenje ovih dijagrama ili izraza omogućava jednostavno određivanje optimalnih faktora pomaka profila pri proračunu zupčanika.

Teoretski proračuni su potvrđeni mjerenjima.

Code D

No.

UDC 621.8.031.6 : 621.833.01 (043.3)

## CONTRIBUTION TO THE RESEARCH OF FRICTION LOSSES IN INVOLUTE GEAR MESH

Božidar Križan

Key words: gear

involute toothings  
toothings, involute  
friction loss  
sliding friction

Summary:

A geometrical sliding friction loss factor for external and internal involute straight toothings has been defined. This factor comprises the influence of the magnitude and form of the toothings, as well as the change of the load during the mesh on sliding power loss.

Using a computer program, optimal addendum modification coefficients that give a minimal geometrical sliding loss factor and minimal sliding power loss, have been calculated. The results are summarized in diagrams and mathematical formulae. The use of this diagrams or formulae enables a simple determination of optimal addendum modification coefficient for gear design.

Theoretical calculations are in good accordance with results obtained by measurements.

## PREDGOVOR

Konstruiranje zupčanih prijenosnika danas najčešće predstavlja postizavanje kompromisa između zadovoljavajuće čvrstoće zuba, zadovoljavajuće trajnosti površine zuba i zadovoljavajuće niskih troškova izrade. Pri tome se najveća pažnja poklanja kontroli zuba na lom i piting, a nešto manje kontroli na zaribavanje. Kako je stupanj iskoristivosti zupčanih prijenosa u pravilu veoma visok, tj. gubici su mali, manje se pažnje posvećuje problemu smanjenja gubitaka. Međutim, u današnjoj eri štednje energije treba i na tom području ispitati svaku mogućnost poboljšanja. Povećanje stupnja iskoristivosti u nekom zupčanom prijenosniku od 98,5% na 99% se u prvi mah čini beznačajnim, ali to predstavlja 33% manje rasipavanje energije što rezultira i manjim zagrijavanjem samog prijenosnika. Ovo je pogotovo značajno za prijenosnike velikih snaga gdje su gubici po apsolutnom iznosu veliki.

Stoga je kod projektiranja zupčanih prijenosnika poželjno pronaći takvu kombinaciju geometrijskih parametara koja će u pogonu rezultirati najmanjim gubicima. Moguće je da to rješenje bude u suprotnosti s nekim drugim zahtjevima, ali izbor kriterija ovisi o konkretnoj procjeni koju će konstruktor izvršiti na osnovi zadanih uvjeta.



## SADRŽAJ

	Strana
SADRŽAJ	1
POPIS OZNAKA	4
1. UVOD	8
1.1 Gubici snage u prijenosnicima s cilindričnim zupčanicima	8
1.2 Gubici snage na zupčanicima	9
1.3 Gubici snage u ležajevima i na brtvama	10
1.4 Osvrt na dosadašnja istraživanja	10
1.5 Potreba za optimalizacijom	13
2. FAKTORI KOJI UTJEČU NA GUBITAK TRENJA KLIZANJA	14
2.1 Karakteristične točke na zahvatnoj liniji	14
2.2 Definicija parametra $\Gamma$	15
2.3 Polumjeri zakrivljenosti bokova zubi	16
2.4 Reducirani polumjer zakrivljenosti bokova zubi	18
2.5 Tangencijalne brzine bokova zubi	18
2.6 Brzina klizanja u točki dodira	19
2.7 Promjena opterećenja tokom zahvata	20
2.8 Koeficijent trenja	23
3. GUBITAK TRENJA KLIZANJA	25
3.1 Rad trenja klizanja za jedan zahvat zubi	25
3.2 Učin trenja klizanja	25
3.3 Geometrijska funkcija gubitaka trenja klizanja $G_f$	26
3.4 Minimizacija rada trenja klizanja	27
4. MINIMUM FUNKCIJE $G_f$	29
4.1 Traženje minimuma funkcije $G_f$	29
4.2 Smetnje i ograničenja	30
4.2.1 Podrezivanje	30

	Strana	
4.2.2	Evolventni zahvat	31
4.2.3	Minimalna debljina vrha zuba	31
4.2.4	Interferencija prve vrste	31
4.2.5	Interferencija druge vrste	32
4.2.6	Stupanj prekrivanja profila	32
4.3	Dijagrami ovisnosti $G_f - \Sigma x - x_f$ i $x_{fopt} - \Sigma x$	32
5.	REZULTATI PRORAČUNA	37
5.1	Optimalna raspodjela sume faktora pomaka profila $\Sigma x$	37
5.2	Usporedba vrijednosti faktora $G_{fmin}$	50
5.3	Faktori $G_f$ zupčanika korištenih u eksperimentu	56
6.	MJERENJE GUBITAKA NA ISPITNOM UREĐAJU	58
6.1	Cilj mjerenja	58
6.2	Ispitni uređaj	58
6.2.1	Princip rada ispitnog uređaja	58
6.2.2	Tehnički podaci korištenih aparata i instrumenata	62
6.2.3	Zupčanici	63
6.2.4	Reduktori	64
6.2.5	Mazivo	64
6.2.6	Uređaj za opterećivanje momentom	64
6.2.6.1	Izvedba	64
6.2.6.2	Granice opterećivanja	65
6.3	Provedba ispitivanja	66
6.3.1	Baždarenje mjernih vratila	66
6.3.2	Uhodavanje zupčanika	67
6.3.3	Mjerenje gubitaka	68
6.3.4	Greške pri mjerenju	68
7.	REZULTATI MJERENJA	70
7.1	Analiza rezultata mjerenja	70
7.1.1	Plohe ovisnosti $J_v - n - \phi$	70
7.1.2	Ovisnost $T_v - T$	76

	Strana	
7.1.3	Gubitak snage u ležajevima	81
7.1.4	Gubitak klizanja	86
7.2	Usporedba s teorijskim izvodima	87
8.	ZAKLJUČAK	89
	LITERATURA	90
	PRILOG 1: Program GEFAG	92
	PRILOG 2: Koeficijenti $a$ i $b$ za proračun optimalnih faktora pomaka profila Koeficijenti korelacije $r$	101
	PRILOG 3: Odstupanja stvarnih vrijednosti koeficijenata $a$ i $b$ od vrijednosti dobivenih regresionim polinomima	114
	BIOGRAFIJA	123

## POPIS OZNAKA

$a$	razmak osi zupčanika
$a$	koeficijent regresionog pravca; koeficijent regresionog polinoma
$a_d$	teoretski razmak osi zupčanika
$A$	koeficijent regresionog polinoma
$b$	širina zupčanika
$b, b_1, b_2, b_3$	koeficijenti regresionog pravca; koeficijenti regresionog polinoma
$B$	širina ležaja
$B_1, B_2 \dots B_{10}$	koeficijenti regresionog polinoma
$c$	koeficijent regresionog pravca
$c$	radijalna zračnost
$C$	dinamička nosivost ležaja
$d$	promjer; unutarnji promjer valjnog ležaja
$d_{sh}$	promjer vratila
$D$	promjer; vanjski promjer valjnog ležaja
$f, f_V$	preračunski faktori baždarenja mjernih vratila
$F$	sila
$g$	koordinata na liniji zahvata
$G_f$	geometrijski faktor gubitaka trenja
$h$	visina zuba ili dijela zuba
$H, H_1, H_2$	funkcije koje obuhvaćaju konstante te utjecaj viskoznosti i hrapavosti na gubitak klizanja
$J$	očitanje narinutog momenta na instrumentu
$J_V$	očitanje momenta gubitaka na instrumentu
$k$	faktor promjene visine glave zuba
$K$	faktor interferencije zahvata zupčanika
$K_A$	faktor primjene zupčanika
$K_{B\alpha}$	faktor djelovanja raspodjele sile u čeonom presjeku na zaribavanje
$K_{B\beta}$	faktor djelovanja raspodjele sile duž boka zuba na zaribavanje

$K_{BY}$	faktor djelovanja nagiba zuba na zaribavanje
$K_V$	faktor unutarnjeg dinamičkog opterećenja
$m$	modul
$m$	faktor trenja
$m_0$	faktor trenja praznog hoda
$m_P$	faktor trenja koji odgovara opterećenju ležaja
$n$	brzina vrtnje
$P_{et}$	korak na zahvatnoj liniji u čeonom presjeku
$P$	snaga
$P_V$	gubitak snage
$r$	koeficijent korelacije
$r$	polumjer
$R_a$	prosječno odstupanje profila hrapavosti
$s$	debljina zuba
$t$	vrijeme
$T$	moment
$T_R$	moment trenja u valjnom ležaju
$T_{RP}$	moment trenja u valjnom ležaju uzrokovan opterećenjem
$T_V$	moment gubitaka
$u$	odnos broja zubi
$v$	brzina
$v_g$	brzina klizanja
$v_n$	brzina točke zahvata na zahvatnoj liniji
$v_e$	tangencijalna brzina boka zuba
$v_\Sigma$	suma tangencijalnih brzina
$W_S$	rad trenja klizanja
$x$	faktor pomaka profila
$X_R$	faktor utjecaja hrapavosti
$X_F$	faktor raspodjele opterećenja
$y$	faktor razmaka diobenih krugova
$z$	broj zubi
$Z_E$	faktor elastičnosti
$Z_H$	faktor zone
$\alpha$	zahvatni kut
$\alpha_E$	pomoćni kut kod kontrole podrezivanja
$\beta$	kut nagiba zuba

$\Gamma$	bezdimenzionalna koordinata na zahvatnoj liniji
$\Delta x_f$	porast $x_f$
$\Delta \Sigma x$	porast $\Sigma x$
$\varepsilon_\alpha$	stupanj prekrivanja profila
$\zeta$	specifično klizanje
$\eta$	pomoćni kut kod kontrole interferencije
$\eta$	stupanj iskoristivosti
$\eta_{Oil}$	dinamička viskoznost ulja prije zahvata
$\theta$	temperatura
$\mu_m$	srednji koeficijent trenja
$\nu$	kinematička viskoznost
$\xi$	pomoćna veličina kod kontrole interferencije
$\rho$	polumjer zakrivljenosti
$\sigma$	standardna devijacija
$\sigma_H$	Hertzov pritisak
$\Sigma x$	suma faktora pomaka profila
$\tau_t \text{ dozv}$	dozvoljeno torziono naprezanje
$\varphi$	pomoćni kut kod kontrole interferencije
$\omega$	kutna brzina

### Popis indeksa kod zupčanika

$a$	krug preko glave zuba
$A$	početak zahvata na zahvatnoj liniji
$b$	temeljni krug
$B$	početak jednostrukog zahvata na zahvatnoj liniji
$C$	kinematski pol
$D$	završetak jednostrukog zahvata na zahvatnoj liniji
$E$	završetak zahvata na zahvatnoj liniji
$Ea$	završetak evolvente na vrhu zuba
$Ef$	početak evolvente na korijenu zuba
$max$	najveća vrijednost
$n$	normalni presjek
$opt$	optimalna vrijednost

<i>poč</i>	početna vrijednost
<i>P</i>	osnovni profil
<i>red</i>	reducirano
<i>t</i>	čeonni presjek; smjer tangente
<i>T</i>	diralište zahvatne linije s temeljnim krugom
<i>w</i>	pogonski krug
<i>Y</i>	proizvoljna točka na zahvatnoj liniji
<i>0</i>	alatni zupčanik
<i>01</i>	zahvat alatnog i manjeg zupčanika
<i>02</i>	zahvat alatnog i većeg zupčanika
<i>1</i>	manji zupčanik; prvi reduktor
<i>2</i>	veći zupčanik; drugi reduktor
<i>*</i>	za modul 1 mm
<i>(-)</i>	diobeni krug

#### Popis indeksa kod gubitaka

<i>B</i>	ležajevi
<i>D</i>	brtve
<i>G</i>	reperna vrijednost
<i>min</i>	najmanja vrijednost
<i>M</i>	miješanje i razbrizgavanje ulja
<i>P</i>	pod opterećenjem
<i>R</i>	valjanje
<i>S</i>	klizanje
<i>X</i>	ostali gubici
<i>Z</i>	zupčanici
<i>0</i>	prazni hod

**Napomena:** U brojčanima jednadžbama u poglavlju 2.8 i 7.1.3 se, ako nije drukčije navedeno, koriste jedinice međunarodnog sustava jedinica SI: metar (m), njutn (N) i sekunda (s) i iz njih izvedene jedinice. Sve ostale jednadžbe su u veličinskom obliku.

## 1. UVOD

### 1.1 GUBICI SNAGE U PRIJENOSNICIMA S CILINDRIČNIM ZUPČANICIMA

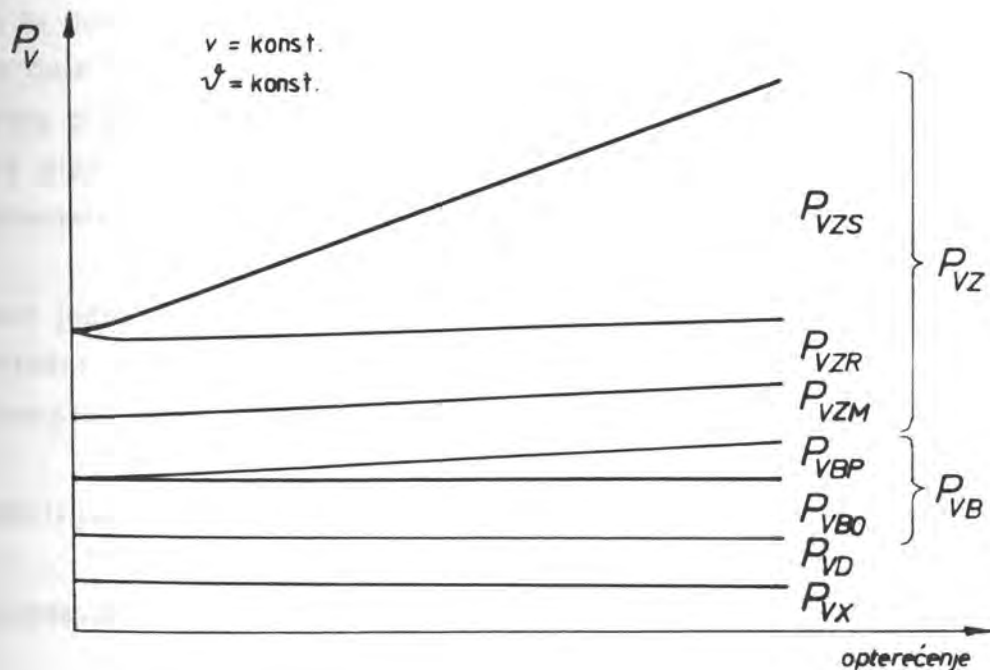
Gubici snage  $P_V$  koji se javljaju u zupčanim prijenosnicima sastoje se od sljedećih komponenti:

- gubitaka na zupčanicima  $P_{VZ}$
- gubitaka u ležajevima  $P_{VB}$
- gubitaka na brtvama  $P_{VD}$
- ostalih gubitaka (zapirala, pumpe ulja itd.)  $P_{VX}$

tj.

$$P_V = P_{VZ} + P_{VB} + P_{VD} + P_{VX} \quad (1.01)$$

Kvalitativni odnos pojedinih gubitaka u ukupnom gubitku pri konstantnoj brzini i temperaturi je prikazan na slici 1.1:



Slika 1.1 Udjeli pojedinih gubitaka u ukupnom gubitku snage pri konstantnoj brzini i temperaturi



## 1.2 GUBICI SNAGE NA ZUPČANICIMA

Među zubima zupčanika u zahvatu postoji elastohidrodinamičko podmazivanje jer zbog velikih kontaktnih pritisaka dolazi do elastičnih deformacija dodirne površine i porasta viskoznosti mazivog ulja. Tako ozubljenja, osim u izuzetnim slučajevima (početak rada, preopterećenje, pregrijavanje), rade u području elastohidrodinamičkog trenja [1, 2, 3, 4, 5]. U zahvatu među zubima postoji klizanje i valjanje, osim u kinematskom polu gdje klizanja nema. Pri tome se tokom zahvata dva zuba neprekidno mijenjaju veličine koje utječu na gubitke: polumjeri zakrivljenosti, brzine i opterećenje. Na koeficijent trenja u zahvatu još utječu i površinska hrapavost, materijal zupčanika, te vrsta i viskoznost mazivog ulja. Stoga je proračun gubitaka u ozubljenju složen i obično zahtijeva određene pretpostavke i pojednostavljenja.

Gubici valjanja i gubici klizanja javljaju se na samom ozubljenju. Gubici valjanja odnosno gubici potiskivanja ulja u zahvatu zubi  $P_{VZR}$  nastaju zbog savladavanja sila hidrodinamičkog pritiska koje djeluju prilikom formiranja elastohidrodinamičkog uljnog filma. Prilikom zahvata dva zuba ulje biva uvučeno između zuba i naglo stlačeno. U [6] se navodi da su gubici valjanja neovisni o sili između zubiju. U novijim radovima se utvrđuje da ovi gubici donekle ipak ovise o opterećenju iako se ne čini velika greška ako se oni smatraju konstantnima [7, 8]. Gubici valjanja su kod nižih i umjerenih brzina veoma maleni pa su često u proračunima zanemareni [1, 4, 5, 7].

Gubici klizanja  $P_{VZS}$  su posljedica sila trenja prilikom gibanja boka jednog zuba po drugom u prisustvu maziva. Ovi gubici sačinjavaju pretežni dio gubitaka u zahvatu evolventnih zupčanika te njihovo smanjivanje najviše doprinosi smanjenju ukupnih gubitaka.

Kod podmazivanja uranjanjem zupčanika u ulje, zupčanik miješa i razbrizgava ulje što dovodi do gubitaka  $P_{VZM}$ .

Kod podmazivanja ubrizgavanjem ulja na zube javljaju se gubici savladavanja inercije uljnog mlaza.

Prema tome su ukupni gubici na zupčanicima jednaki

$$P_{VZ} = P_{VZR} + P_{VZS} + P_{VZM} \quad (1.02)$$

Gubici na zupčanicima se obično dijele na dva dijela:

- gubici u praznom hodu  $P_{VZO}$  koji ne ovise o opterećenju:
  - gubici miješanja ulja (odnosno savladavanja inercije uljnog mlaza)
  - gubici valjanja
- gubitak koji se javlja kod prijenosa snage  $P_{VZP}$ :
  - gubitak klizanja (raste s porastom opterećenja).

### 1.3 GUBICI SNAGE U LEŽAJEVIMA I NA BRTVAMA

Gubici snage u ležajevima se mogu podijeliti na gubitak u praznom hodu  $P_{VBO}$  i porast gubitka uzrokovan opterećenjem  $P_{VBP}$ :

$$P_{VB} = P_{VBO} + P_{VBP} \quad (1.03)$$

Gubici u ležajevima su dominantni u praznom hodu prijenosnika odnosno kod malenih opterećenja [1, 7, 8, 9]. S porastom opterećenja kod konstantne brzine ovi gubici rastu, ali im udio u ukupnom gubitku opada. S porastom brzine kod konstantnog opterećenja gubici također rastu, a raste i njihov procentualni udio u ukupnom gubitku. Gubici ležaja u praznom hodu rastu s porastom viskoznosti ulja. Evidentno je da su, osim kod veoma velikih brzina, najveći gubici ipak na zupčanicima [1, 7, 8]. Gubici snage na brtvama  $P_{VD}$  rastu s porastom brzine, ali ne ovise o opterećenju.

### 1.4 OSVRT NA DOSADAŠNJA ISTRAŽIVANJA

Broj radova koji se bave problematikom gubitaka trenja u zahvatu evolventnih zupčanika je relativno malen. Prvi radovi u vezi stupnja iskoristivosti zupčanika su se pojavili krajem 19. stoljeća i navode se u [10 i 11]. Značaj proučavanja gubitaka na zupčanicima povećavao se s povećanjem primjene zupčanika. U nastavku ovog poglavlja je učinjen kratki osvrt na neke radove u kojima je u novije vrijeme obrađena tematika gubitaka trenja na zupčanicima.

E. Buckingham 1963. godine daje izraze za proračun stupnja iskoristivosti zupčanika te izraz za proračun koeficijenta trenja koji ovisi samo o brzini klizanja [10]. Pri tome se računa s hipotetskom raspodjelom opterećenja na zube u istovremenom zahvatu, uz pretpostavku da zubi imaju teoretski točan profil i da su apsolutno kruti (vidi poglavlje 2.7).

1964. godine su objavljeni rezultati istraživanja H. Ohlendorfa koje je obradio W. Richter [9]. Trenje među zubima se tretira kao mješovito trenje, tj. kao kombinacija suhog trenja površina u kontaktu (bez maziva) i hidrodinamičkog trenja, pri čemu je kod suhog trenja zanemareno trenje valjanja. Pretpostavlja se hipotetska raspodjela opterećenja na zube u istovremenom zahvatu, a računa se sa srednjom brzinom klizanja tokom zahvata. Obradeni su razni utjecaji na gubitke u ozubljenju: utjecaj maziva, načina podmazivanja, obrade zupčanika, materijala, oblika i veličine zuba i pogonskih uvjeta. Za smanjenje gubitaka se preporuča da kinematski pol leži otprilike u sredini zahvatne dužine.

G. Niemann i G. Gackstetter 1968. godine obrađuju prednosti ozubljenja sa zahvatnim kutem  $\alpha_n = 30^\circ$  i smanjenom visinom zuba u odnosu na ozubljenje izrađeno prema standardu DIN 867 [12, 13]. Gubici u ozubljenju su podijeljeni na gubitke klizanja i gubitke valjanja. Pretpostavlja se hipotetska raspodjela opterećenja na zube u istovremenom zahvatu i navode odvojeni izrazi za proračun gubitaka klizanja i gubitaka valjanja. Koeficijenti trenja klizanja i valjanja su dobiveni na osnovi pokusa. Navodi se izraz za stupanj gubitaka klizanja (stupanj gubitaka = 1 - stupanj iskoristivosti). Na osnovi ovog izraza G. Niemann 1983. godine definira stupanj gubitaka u ozubljenju [14].

1970. godine H. Eiselt daje izraze za proračun koeficijenta trenja [15]. Pri proračunu stupnja gubitaka računa s hipotetskom raspodjelom opterećenja na zube u istovremenom zahvatu i dobiva izraz vrlo sličan izrazu koji su V. Dobrovolski i suradnici objavili 1968. godine [16]. Eiselt zaključuje da se gubici mogu smanjiti izborom povoljnih pomaka profila, ali ne navodi kako se takvi pomaci mogu odrediti.

1971. godine K. Stössel konstatira da je metoda koju primjenjuje Ohlendorf (kombinacija suhog i hidrodinamičkog trenja) prevladana, s obzirom na nova saznanja do kojih se došlo proučavanjem elastohidrodinamičke teorije podmazivanja [4]. Stössel daje izraz za koeficijent trenja koji se može smatrati konstantnim za vrijeme zahvata, dok gubitak uslijed valjanja smatra zanemarivim.

Y.P. Chiu 1975. godine gubitke trenja u zahvatu zupčanika dijeli na gubitke klizanja koji su ovisni o opterećenju te gubitke valjanja koji o opterećenju ne ovise [6]. Navode se izrazi za proračun tih gubitaka dobiveni primjenom elastohidrodinamičke teorije podmazivanja.

V.N. Kudrjavcev 1980. godine daje približni izraz za proračun gubitaka u ozubljenju [17]. Ovaj izraz odgovara izrazu danom u [12].

Proračuni stupnja iskoristivosti K.F. Martina iz 1981. godine također se baziraju na elastohidrodinamičkom podmazivanju [5]. U radu se napominje da je gubitak valjanja zanemariv u usporedbi s gubicima klizanja te se pretpostavlja hipotetska raspodjela opterećenja na zube u istovremenom zahvatu.

N.E. Anderson i S.H. Loewenthal u radovima iz 1981., 1982. i 1983. godine navode praktične pojednostavljene izraze za proračun gubitaka klizanja i valjanja pri elastohidrodinamičkom podmazivanju, uz analizu pojedinih utjecaja na stupanj iskoristivosti [1, 7, 8]. Grafički su za nekoliko slučajeva prikazani i utjecaji veličine zupčanika, veličine zuba i obodne brzine na stupanj iskoristivosti.

E. Oberšmit 1982. godine daje vrlo grubi približni izraz za proračun stupnja iskoristivosti [18].

1983. godine se u knjizi G. Niemanna i H. Wintera navode novi izrazi za proračun koeficijenta trenja i gubitaka u ozubljenju [14].

C. Naruse i suradnici 1984. godine navode za proračun stupnja iskoristivosti Niemannov izraz iz [12] i daju novi izraz za određivanje koeficijenta trenja na osnovi srednje brzine klizanja [19].

U MAAG-priručniku iz 1985. godine navodi se približni grafički postupak za određivanje stupnja iskoristivosti ozubljenja s korekcijom profila [20]. Također su prikazani dijagrami pomoću kojih se mogu kontrolirati faktori pomaka profila u smislu postizavanja povoljnih odnosa klizanja na bokovima zubi.

F. Jarchow i A. Schoo 1987. godine daju modificirani Niemannov izraz iz [12 i 14] za proračun stupnja gubitaka u ozubljenju uz navođenje posebnog izraza za proračun koeficijenta trenja [3].

K. Michaelis iste godine na osnovi mnogobrojnih vlastitih i tuđih eksperimenata i višeparametarske regresije utvrđuje valjanost izraza za proračun koeficijenta trenja danog u knjizi G. Niemanna i H. Wintera iz 1983. godine [21]. Taj izraz je korišten i u ovom radu.

U spomenutim radovima su redovito prikazani izrazi za proračun gubitaka trenja u ozubljenju, a u nekima su obrađeni pojedini utjecaji na te gubitke. Preporuku za približni izbor najpovoljnijih pomaka profila s obzirom na gubitke je dao međutim samo H. Ohlendorf u [9], dok se dijagramima u [20] može vršiti samo naknadna kontrola odabranih faktora pomaka profila zupčanika u zahvatu.

## 1.5 POTREBA ZA OPTIMALIZACIJOM

Smanjivanje gubitaka posebno je važno u sljedećim slučajevima:

- kada mogućnost zaribavanja ograničava nosivost
- kad je potrebno dodatno hlađenje prijenosnika
- kad je koncentracija gubitaka velika (npr. planetni prijenosnici).

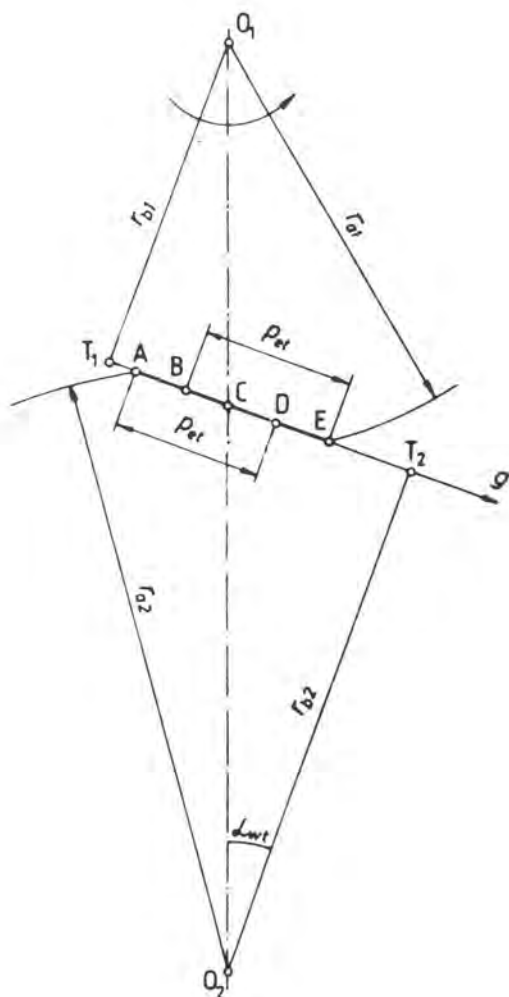
Smanjivanje gubitaka se može u prvom redu izvršiti izborom odgovarajućih osnovnih geometrijskih parametara zupčanika te vrste i viskoznosti ulja, kao i primjenom odgovarajuće obrade zupčanika. Nedostatak dosadašnjih istraživanja je u tome što se ne uzima u obzir utjecaj pomaka profila na geometrijske i kinematičke karakteristike zahvata, a što zasigurno također utječe na gubitke. Predmet ovog rada je upravo istraživanje utjecaja pomaka profila na gubitke klizanja u ozubljenju evolventnih zupčanika te, na osnovi dobivenih rezultata, pronalaženje optimalne kombinacije pomaka profila zupčanika u zahvatu koja rezultira najmanjim gubicima.

Kako je raspodjela opterećenja kod zupčanika s kosim zubima složenija i predstavlja prostorni problem, razmatranja su ograničena na zupčanike s ravnim zubima.

## 2. FAKTORI KOJI UTJEČU NA GUBITAK TRENJA KLIZANJA

### 2.1 KARAKTERISTIČNE TOČKE NA ZAHVATNOJ LINIJI OZUBLJENJA

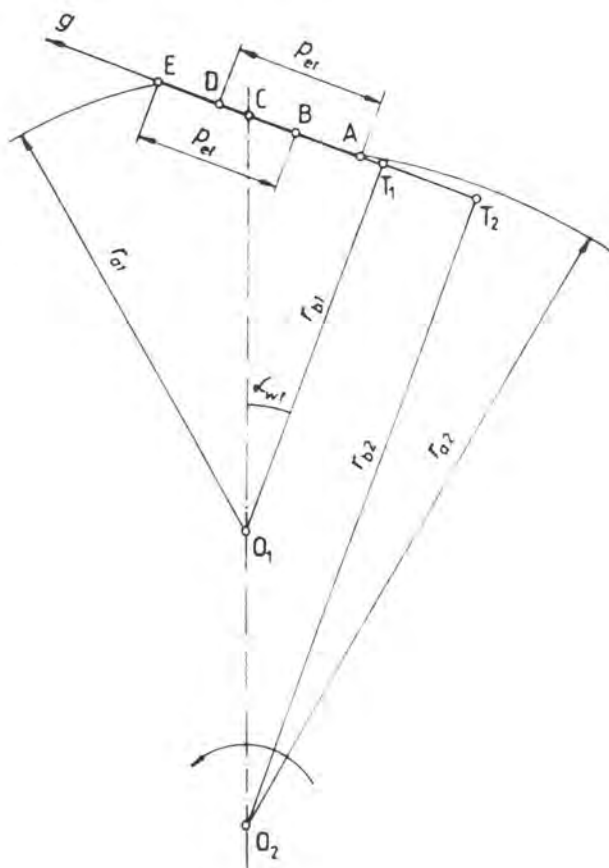
Na zahvatnoj liniji su definirane sljedeće karakteristične točke, slike 2.1 i 2.2:



Slika 2.1 Karakteristične točke kod vanjskog zahvata

- A - Početna točka zahvata. Sjecište zahvatne linije s krugom preko glave zuba gonjenog zupčanika.
- B - Unutarnja točka jednostrukog zahvata na pogonskom zupčaniku.  
Vanjska točka jednostrukog zahvata na gonjenom zupčaniku.  
Udaljenost od točke E jednaka je koraku  $p_{et}$ .

- C - Kinematski pol.
- D - Vanjska točka jednostrukog zahvata na pogonskom zupčaniku.  
Unutarnja točka jednostrukog zahvata na gonjenom zupčaniku.  
Udaljenost od točke A jednaka je koraku  $p_{ef}$ .
- E - Krajnja točka zahvata. Sjecište zahvatne linije s krugom preko glave pogonskog zupčanika.
- $T_1$  - Diralište zahvatne linije i temeljnog kruga pogonskog zupčanika.
- $T_2$  - Diralište zahvatne linije i temeljnog kruga gonjenog zupčanika.



Slika 2.2 Karakteristične točke kod unutarnjeg zahvata

## 2.2 DEFINICIJA PARAMETRA $\Gamma$

Parametar  $\Gamma$  je definiran kao bezdimenzionalna linearna koordinata na liniji zahvata (sl. 2.1 i 2.2):

$$\Gamma = g / \overline{T_1C} \quad (2.01)$$

gdje je  $g$  koordinata na liniji zahvata s ishodištem u kinematskom polu C.

Vrijednosti parametra  $\Gamma$  u karakterističnim točkama na zahvatnoj liniji su

$$\Gamma_{T1} = -1 \quad (2.02)$$

$$\Gamma_A = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \left[ \frac{\sqrt{(r_{a2}/r_{b2})^2 - 1}}{\tan \alpha_{wt}} - 1 \right] \quad (2.03)$$

$$\Gamma_B = \Gamma_E - \frac{2\pi}{z_1 \tan \alpha_{wt}} \quad (2.04)$$

$$\Gamma_C = 0 \quad (2.05)$$

$$\Gamma_D = \Gamma_A + \frac{2\pi}{z_1 \tan \alpha_{wt}} \quad (2.06)$$

$$\Gamma_E = \frac{\sqrt{(r_{a1}/r_{b1})^2 - 1}}{\tan \alpha_{wt}} - 1 \quad (2.07)$$

$$\Gamma_{T2} = u \quad (2.08)$$

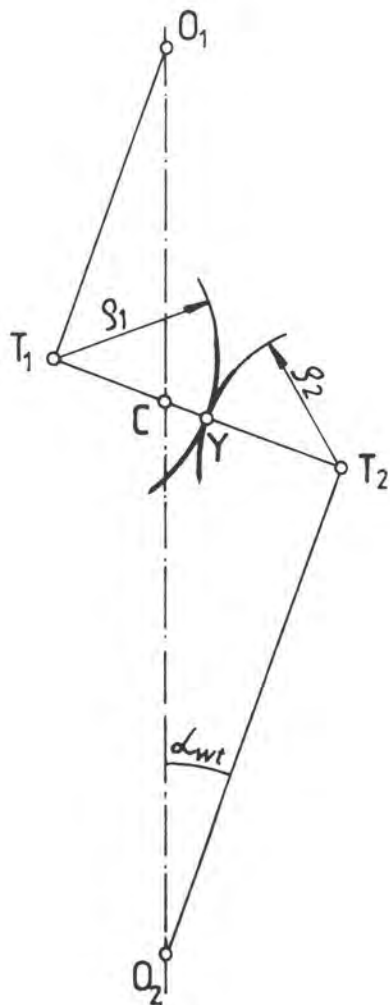
### 2.3 POLUMJERI ZAKRIVLJENOSTI BOKOVA ZUBA

Prema slici 2.3 je

$$\overline{T_1 T_2} = s \sin \alpha_{wt} = r_{wt} (1 + u) \sin \alpha_{wt} \quad (2.09)$$

$$\overline{T_1 C} = r_{wt} \sin \alpha_{wt} \quad (2.10)$$





Slika 2.3 Polumjeri zakrivljenosti

Polumjer zakrivljenosti boka zuba zupčanika 1 u proizvoljnoj točki Y na zahvatnoj liniji je

$$e_1 = \overline{T_1 Y} = \overline{T_1 C} (1 + \Gamma) = r_{w1} \sin \alpha_{wt} (1 + \Gamma) \quad (2.11)$$

Polumjer zakrivljenosti boka zuba zupčanika 2 u točki y je

$$e_2 = \overline{T_2 Y} = \overline{T_1 T_2} - e_1 = r_{w1} (1 + u) \sin \alpha_{wt} - r_{w1} (1 + \Gamma) \sin \alpha_{wt} \quad (2.12)$$

$$e_2 = r_{w1} \sin \alpha_{wt} (u - \Gamma) \quad (2.13)$$

## 2.4 REDUCIRANI POLUMJER ZAKRIVLJENOSTI BOKOVA ZUBI

Reducirani polumjer zakrivljenosti u točki dodira definiran je kao

$$\rho_{red} = \rho_1 \rho_2 / (\rho_1 + \rho_2) \quad (2.14)$$

što uvrštavanjem izraza (2.12) i (2.13) daje

$$\rho_{red} = r_{wt} \sin \alpha_{wt} (1 + \Gamma)(u - \Gamma)(1 + u) \quad (2.15)$$

Kako je za  $\beta = 0^\circ$

$$r_{wt} = r_t \cos \alpha_t / \cos \alpha_{wt} = m_n z_t \cos \alpha_t / (2 \cos \alpha_{wt}) \quad (2.16)$$

bit će

$$\rho_{red} = m_n z_t \tan \alpha_{wt} \cos \alpha_t (1 + \Gamma)(u - \Gamma) / [2(1 + u)] \quad (2.17)$$

Za kinematski pol C je  $\Gamma_C = 0$  pa je

$$\rho_{redC} = m_n z_t u \tan \alpha_{wt} \cos \alpha_t / [2(1 + u)] \quad (2.18)$$

## 2.5 TANGENCIJALNE BRZINE BOKOVA ZUBI

Tangencijalna brzina (okomita na zahvatnu liniju) boka zuba zupčanika 1 iznosi

$$v_{q1} = \rho_1 \omega_1 = r_{wt} \sin \alpha_{wt} (1 + \Gamma) \omega_1 \quad (2.19)$$

$$v_{q1} = m_n z_t \tan \alpha_{wt} \cos \alpha_t (1 + \Gamma) \omega_1 / 2 \quad (2.20)$$

Tangencijalna brzina boka zuba zupčanika 2 iznosi

$$v_{q2} = \rho_2 \omega_2 = r_{wt} \sin \alpha_{wt} (u - \Gamma) \omega_2 \quad (2.21)$$

Kako je

$$\omega_2 = \omega_1 / u \quad (2.22)$$

bit će

$$v_{Q2} = m_n z_1 \tan \alpha_{wt} \cos \alpha_t (u - \Gamma) \omega_1 / (2u) \quad (2.23)$$

Suma tangencijalnih brzina u točki dodira je

$$v_{\Sigma} = v_{Q1} + v_{Q2} = m_n z_1 \tan \alpha_{wt} \cos \alpha_t \omega_1 (2 + \Gamma - \Gamma/u) / 2 \quad (2.24)$$

Za kinematski pol C je  $\Gamma_C = 0$ , pa je

$$v_{\Sigma C} = m_n z_1 \omega_1 \tan \alpha_{wt} \cos \alpha_t \quad (2.25)$$

## 2.6 BRZINA KLIZANJA U TOČKI DODIRA

Brzina klizanja u točki dodira jednaka je razlici tangencijalnih brzina:

$$v_{g1} = v_{Q1} - v_{Q2} = m_n z_1 \tan \alpha_{wt} \cos \alpha_t \omega_1 (u + 1) \Gamma / (2u) \quad (2.26)$$

$$v_{g2} = v_{Q2} - v_{Q1} = -v_{g1} \quad (2.27)$$

Kako parametar  $\Gamma$  može biti pozitivan ili negativan, to i brzina klizanja može imati različite predznake. Za proračun veličine gubitaka trenja klizanja smjer nije važan pa se u izrazu za proračun rada trenja klizanja koristi apsolutna vrijednost brzine klizanja

$$|v_{g1}| = m_n \tan \alpha_{wt} \cos \alpha_t \omega_1 [z_1 (u + 1) / u] |\Gamma| / 2 \quad (2.28)$$

Brzina kretanja točke zahvata po zahvatnoj liniji (normalna brzina boka zuba) bit će

$$v_n = dg / dt = r_{b1} \omega_1 = r_{w1} \cos \alpha_{wt} \omega_1 \quad (2.29)$$

Kako je prema izrazima (2.01) i (2.10)

$$dg = r_{wt} \sin \alpha_{wt} d\Gamma \quad (2.30)$$

to će diferencijal vremena iz izraza (2.29) biti

$$dt = dg / v_n = (\tan \alpha_{wt} / \omega_1) d\Gamma \quad (2.31)$$

Specifično klizanje je definirano kao odnos brzine klizanja i tangencijalne brzine:

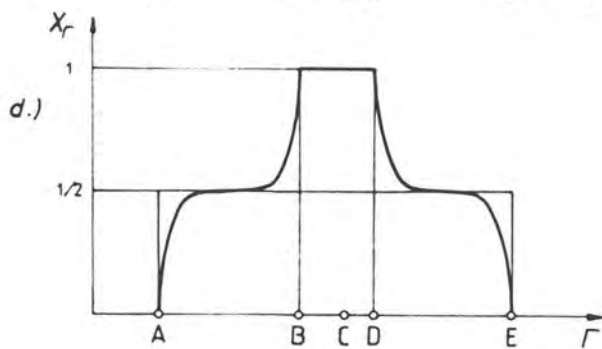
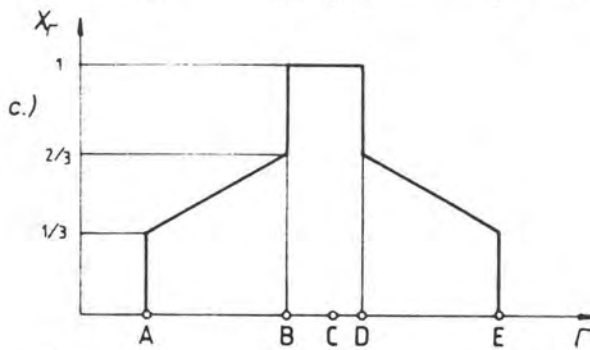
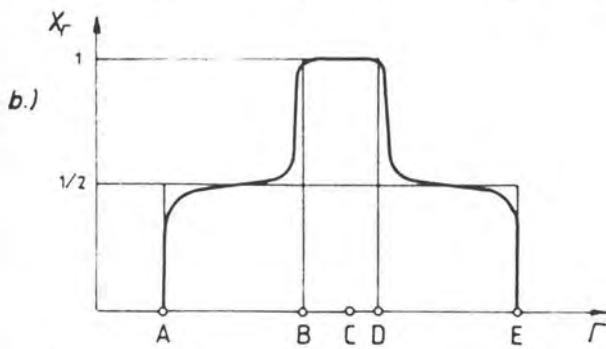
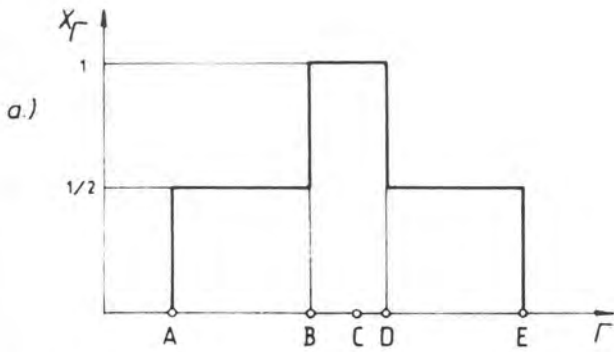
$$\zeta_1 = v_{g1} / v_{\theta 1} = (u + 1) \Gamma / [u (1 + \Gamma)] \quad (2.32)$$

$$\zeta_2 = v_{g2} / v_{\theta 2} = (u + 1) \Gamma / (\Gamma - u) \quad (2.33)$$

## 2.7 PROMJENA OPTEREĆENJA TOKOM ZAHVATA

Tokom zahvata dva zupčanika neprekidno se izmjenjuju period kad je jedan par zubi u zahvatu i period kad su dva para zubi u zahvatu (jednostruki i dvostruki zahvat). Uz pretpostavku da zubi imaju teoretski točan profil i da su apsolutno kruti, dobiva se hipotetska promjena opterećenja na zubu tokom zahvata, sl. 2.4.a.  $X_{\Gamma}$  je faktor raspodjele opterećenja i u zoni jednostrukog zahvata između točaka B i D, gdje zub podnosi puno opterećenje, jednak je jedinici. Budući da zubi nisu kruti, nego su elastični, to će se za točno izrađene zube promjena opterećenja odvijati prema slici 2.4.b [14]. Obično se promjena opterećenja prikazuje pojednostavljeno prema slici 2.4.c, gdje se uzima da u područjima dvostrukog zahvata vrijednost  $X_{\Gamma}$  raste odnosno pada od 1/3 do 2/3 ili od 0,4 do 0,6 [22, 23, 15, 20].

Navedena razmatranja vrijede za statičko opterećenje odnosno za manje brzine vrtnje. S povećanjem brzine vrtnje, na prikazani tok promjene faktora  $X_{\Gamma}$  superponiraju se i vibracije koje su posljedica netočnosti izrade i elastičnosti zuba. Ako su brzine vrtnje dovoljno ispod rezonantne frekvencije sistema, karakter promjene opterećenja tokom zahvata se bitno ne mijenja.



Slika 2.4 Promjena opterećenja tokom zahvata

U ovom radu je promjena faktora  $X_F$  u područjima dvostrukog zahvata matematički izražena parabolama petog stepena (slika 2.4.d) čiji tok vrlo dobro odgovara prikazu na slici 2.4.b. Tako će biti:

- od točke A do točke B

$$X_F = 0,5 + 16 \frac{[\Gamma - 0,5 (\Gamma_A + \Gamma_B)]^5}{(\Gamma_B - \Gamma_A)^5} \quad (2.34)$$

- od točke B do točke D

$$X_F = 1 \quad (2.35)$$

- od točke D do točke E

$$X_F = 0,5 - 16 \frac{[\Gamma - 0,5 (\Gamma_D + \Gamma_E)]^5}{(\Gamma_E - \Gamma_D)^5} \quad (2.36)$$

Normalna sila na zub je

$$F_{bn} = F_{wt} / \cos \alpha_{wt} \quad (2.37)$$

gdje je  $F_{wt}$  obodna sila na pogonskim krugovima odvaljivanja. Sila  $F_{bn}$  jednaka je obodnoj sili  $F_{bt}$  na temeljnom krugu.

Normalna sila u određenoj točki zahvata Y jednaka je

$$F_{bnY} = F_{wt} X_F K_A K_V K_{B\alpha} K_{B\beta} K_{BY} / \cos \alpha_{wt} \quad (2.38)$$

K - faktori koji utječu na silu na zub definirani su u [24] i za daljnji proračun pretpostavlja se da su oni jednaki jedinici tako da gornji izraz prelazi u jednostavniji oblik

$$F_{bnY} = F_{wt} X_F / \cos \alpha_{wt} \quad (2.39)$$

## 2.8 KOEFICIJENT TRENJA

Vrijednost koeficijenta trenja pri elastohidrodinamičkom podmazivanju je približno konstantna, osim kod malog specifičnog klizanja, kad se koeficijentu trenja vrijednost naglo smanjuje na nulu [4, 25 i 26]. To znači da se vrijednost koeficijenta trenja uzduž zahvatne linije ne mijenja mnogo, a da se pad vrijednosti koeficijenta trenja na nulu u neposrednoj blizini kinematskog pola C može pri proračunu gubitaka zanemariti jer su tu brzine klizanja ionako veoma malene pa će i gubici biti veoma mali.

U [21] je na osnovi ispitivanja dan sljedeći broičani izraz za proračun koeficijenta trenja za koji se uzima da je konstantan za vrijeme zahvata

$$\mu_m = 0,045 \left( \frac{F_{bt}}{b v_{\Sigma C} \varrho_{redC}} \right)^{0,2} \frac{1}{\eta_{Oil}^{0,05}} X_R \quad (2.40)$$

gdje je faktor utjecaja hrapavosti

$$X_R = 3,8 (R_a / d_f)^{0,25} \quad (2.41)$$

Prosječno odstupanje profila hrapavosti bokova zubi proračunavanih zupčanika je

$$R_a = (R_{a1} + R_{a2}) / 2 \quad (2.42)$$

a  $\eta_{Oil}$  je dinamička viskoznost ulja prije zahvata.

U izraze (2.40), (2.41) i (2.42) se veličine uvrštavaju u sljedećim jedinicama:  $F_{bt}$  (N),  $b$  (mm),  $v_{\Sigma C}$  (m/s),  $\varrho_{redC}$  (mm),  $\eta_{Oil}$  (m Pa s),  $R_a$  ( $\mu$ m) i  $d_f$  (mm).

Izraz (2.40) je dobiven uz pretpostavku da je gubitak valjanja  $P_{VZR}$  konstantna veličina koja se ne mijenja s opterećenjem, pa će ta pretpostavka biti zadržana i u daljnjim razmatranjima.

Izrazi (2.40) i (2.41) se mogu zajedno prikazati u veličinskom obliku

$$\mu_m = 0,482 \left( \frac{F_{bt} R_{aG}}{b v_{\Sigma C} \varrho_{redC} \eta_G} \right)^{0,2} \left( \frac{\eta_G}{\eta_{Oil}} \right)^{0,05} \left( \frac{R_a}{d_1} \right)^{0,25} \quad (2.43)$$

gdje je reporna vrijednost srednjeg odstupanja profila hrapavosti

$$R_{aG} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

a reporna viskoznost ulja

$$\eta_G = 0,1 \text{ Pa s}$$

Nakon uvrštavanja brojčanih vrijednosti za  $R_{aG}$  i  $\eta_G$  izraz (2.43) može se napisati u obliku

$$\mu_m = \underbrace{0,04296 R_a^{0,25} \eta_{Oil}^{-0,05}}_{\text{utjecaj viskoznosti, hrapavosti i konstanta}} \underbrace{F_{bt}^{0,2}}_{\text{utjecaj opterećenja}} \underbrace{(b v_{\Sigma C} \varrho_{redC})^{-0,2} d_1^{-0,25}}_{\text{utjecaj geometrije ozubljenja, brzine i veličine}} \quad (2.44)$$

Ako se prva grupa utjecaja označi s  $H_1$ , dobiva se

$$\mu_m = H_1 F_{bt}^{0,2} (b v_{\Sigma C} \varrho_{redC})^{-0,2} d_1^{-0,25} \quad (2.45)$$

Ako se u (2.45) uvrsti (2.37), (2.25) i (2.18) te

$$d_1 = m_n z_1 \quad (2.46)$$

dobije se

$$\mu_m = 2^{0,2} H_1 F_{wt}^{0,2} [(1+u)/u]^{0,2} b^{-0,2} \omega_1^{-0,2} m_n^{-0,65} z_1^{-0,65} \cdot (\tan \alpha_{wt})^{-0,4} (\cos \alpha_{wt})^{-0,2} (\cos \alpha_1)^{-0,4} \quad (2.47)$$



### 3. GUBITAK TRENJA KLIZANJA

#### 3.1 RAD TRENJA KLIZANJA ZA JEDAN ZAHVAT ZUBI

Sila trenja klizanja jednaka je umnošku normalne sile na bok zuba  $F_{bnY}$  i koeficijenta trenja  $\mu_m$ . Diferencijal puta trenja jednak je umnošku brzine klizanja  $v_{gl}$  i diferencijala vremena  $dt$ . Brzina klizanja može biti i negativna pa treba računati s njezinom apsolutnom vrijednošću. Diferencijal rada trenja klizanja tokom zahvata zupčanika će biti

$$dW_S = F_{bnY} \mu_m |v_{gl}| dt \quad (3.01)$$

Rad trenja za jedan zahvat zubi dobit ćemo integracijom diferencijala rada trenja od početka zahvata u točki A do završetka zahvata u točki E:

$$W_S = \int_A^E dW_S = \int_A^E F_{bnY} \mu_m |v_{gl}| dt \quad (3.02)$$

Kako je

$$dt = (\tan \alpha_{wt} / \omega_1) d\Gamma \quad (3.03)$$

bit će

$$W_S = \int_A^E F_{bnY} \mu_m |v_{gl}| (\tan \alpha_{wt} / \omega_1) d\Gamma \quad (3.04)$$

#### 3.2 UČIN TRENJA KLIZANJA

Za jedan okretaj zupčanika 1 zahvat će se odigrati  $z_1$  puta. Ako je brzina vrtnje tog zupčanika  $n_1$ , učin koji se troši trenjem će biti

$$P_{VZS} = n_1 z_1 W_S = \omega_1 z_1 W_S / (2 \pi) \quad (3.05)$$

Uvrštavanjem izraza (3.04) u (3.05) dobije se

$$\begin{aligned}
 P_{VZS} &= [\omega_1 z_1 / (2 \pi)] \int_A^E F_{bn\gamma} \mu_m |v_{gt}| (\tan \alpha_{wt} / \omega_1) d\Gamma = \\
 &= [z_1 / (2 \pi)] \tan \alpha_{wt} \int_A^E F_{bn\gamma} \mu_m |v_{gt}| d\Gamma \quad (3.06)
 \end{aligned}$$

U izraz (3.06) uvrštavaju se izrazi (2.39), (2.47) i (2.28). Ako se sada sve konstante i utjecaji viskoznosti i hrapavosti označe sa  $H_2$ , dobiva se

$$\begin{aligned}
 P_{VZS} &= H_2 F_{wt}^{1,2} b^{-0,2} \omega_1^{0,8} m_n^{0,35} z_1^{1,35} [(1+u)/u]^{1,2} \cdot \\
 &\cdot (\tan \alpha_{wt})^{1,6} (\cos \alpha_{wt})^{-1,2} (\cos \alpha_t)^{0,6} \int_A^E X_r |\Gamma| d\Gamma \quad (3.07)
 \end{aligned}$$

Osim utjecaja viskoznosti i hrapavosti koji su obuhvaćeni veličinom  $H_2$ , u izrazu (3.07) se mogu uočiti i sljedeći utjecaji:

- $F_{wt}^{1,2}$  - utjecaj veličine opterećenja
- $b^{-0,2}$  - utjecaj širine zupčanika
- $\omega_1^{0,8}$  - utjecaj brzine vrtnje
- $m_n^{0,35}$  - utjecaj veličine ozubljenja
- $X_r$  - utjecaj promjene opterećenja tokom zahvata

Preostali dio izraza (3.07) predstavlja utjecaj oblika, odnosno geometrije ozubljenja.

### 3.3 GEOMETRIJSKA FUNKCIJA GUBITAKA TRENJA KLIZANJA $G_f$

Dio izraza (3.07) koji predstavlja utjecaj veličine i oblika ozubljenja zupčanika i utjecaj promjene opterećenja na zubu tokom zahvata na gubitak trenja klizanja, nazvan je geometrijskom funkcijom gubitaka trenja klizanja i označen sa  $G_f$ . Vrijednost te funkcije za

odredene parametre nazvana je geometrijskim faktorom gubitaka trenja klizanja. Tako će biti

$$P_{VZS} = H_2 F_{wt}^{1,2} b^{-0,2} \omega_1^{0,8} G_f \quad (3.08)$$

a

$$G_f = m_n^{0,35} z_1^{1,35} [(1+u)/u]^{1,2} (\tan \alpha_{wt})^{1,6} (\cos \alpha_{wt})^{-1,2} \cdot (\cos \alpha_t)^{0,6} \int_A^E X_r |r| dr \quad (3.09)$$

Da bi se dobile lako prihvatljive brojčane vrijednosti za  $G_f$ , izraz (3.09) je modificiran u

$$G_f = (1000 m_n)^{0,35} z_1^{1,35} [(1+u)/u]^{1,2} (\tan \alpha_{wt})^{1,6} (\cos \alpha_{wt})^{-1,2} \cdot (\cos \alpha_t)^{0,6} \int_A^E X_r |r| dr \quad (3.10)$$

a izraz (3.08) se pretvara u

$$P_{VZS} = H F_{wt}^{1,2} b^{-0,2} \omega_1^{0,8} G_f \quad (3.11)$$

gdje je

$$H = H_2 / 1000^{0,35} \quad (3.12)$$

Kako se razmatra ravno ozubljenje, bit će  $\alpha_t = \alpha_n$ . Kut  $\alpha_{wt}$  ovisi o sumi faktora pomaka profila  $\Sigma x = x_1 + x_2$ , a položaj točaka zahvata A, B, D i E o faktorima pomaka profila  $x_1$  i  $x_2$ .

### 3.4 MINIMIZACIJA RADA TRENJA KLIZANJA

Za konkretan slučaj proračuna para zupčanika obodna sila  $F_{wt}$  proizlazi iz zadanog momenta, a kutna brzina  $\omega_1$  je također zadana, tako da se radi smanjenja gubitaka na te veličine ne može utjecati. Širina zupčanika i modul ovise o naprežanjima na zubu, pa su i te veličine uglavnom određene i ne mogu se mnogo mijenjati. Viskoznost maziva

ovisi o vrsti prijenosa, načinu podmazivanja, prenošenoj snazi i brzini vrtnje, a hrapavost bokova zuba o kvaliteti zupčanika.

Gubitak trenja klizanja ipak se može smanjiti na taj način da se nađe takva kombinacija geometrijskih parametara ozubljenja koja će dati najmanju moguću vrijednost faktora  $G_f$ .

## 4. MINIMUM FUNKCIJE $G_f$

### 4.1 TRAŽENJE MINIMUMA FUNKCIJE $G_f$

Izrađen je računarski program GEFAG koji za konkretan par zupčanika s ravnim zubima u granicama  $-1,5 \leq x_1 \leq 1,5$  traži optimalne faktore pomaka profila  $x_{1opt}$  i  $x_{2opt}$  kod kojih je vrijednost funkcije  $G_f$  minimalna. Nakon što se unutar navedenih granica s korakom 0,1 pretraže sve vrijednosti  $x_1$  i pronade  $x_{1opt}$ , u neposrednoj blizini  $x_{1opt}$  se sa deset puta manjim korakom, odnosno deset puta većom preciznošću ponavlja određivanje  $x_{1opt}$ . Korak se za deset puta na isti način smanjuje još dva puta, pa se na kraju vrijednost  $x_{1opt}$  traži s korakom 0,0001.

U programu se vrši kontrola smetnji pri izradi i zahvatu zupčanika, a uzimaju se u obzir i druga ograničenja, što je navedeno u sljedećem poglavlju.

Veličinu  $G_f$  određuju sljedeći ulazni parametri ozubljenja:

- modul  $m_n$
- zahvatni kut osnovnog profila  $\alpha_n$
- faktor visine glave zuba osnovnog profila  $h_{aP}^*$
- faktor radijalne zračnosti  $c^*$
- broj zubi malog zupčanika  $z_1$
- odnos broja zubi  $u$  (tj. broj zubi velikog zupčanika  $z_2$ )
- faktori pomaka profila  $x_1$  i  $x_2$

Prilikom proračuna smetnji potrebno je znati i neke parametre alata pa ulazne veličine trebaju biti i

- faktor polumjera zakrivljenosti vrha zuba alata  $q_{a0}^* = q_{a0} / m_n$
- faktor visine glave zuba alata  $h_{a0}^* = h_{a0} / m_n$

Ukoliko se ozubljenje izrađuje s alatnim zupčanikom, treba poznavati još:

- brojeve zuba alatnih zupčanika  $z_{01}$  i  $z_{02}$  kojima se izrađuju zupčanik 1 i zupčanik 2.
- faktore pomaka profila alatnih zupčanika  $x_{01}$  i  $x_{02}$ .

Prikaz programa GEFAG dan je u Prilogu 1. Izgled ispisa rezultata dan je na slici 4.1.

Program GeFAG - Tehnički fakultet Rijeka - 70 1990

OPTIMALIZACIJA GUBITAKA TRENJA KLIZANJA  
ZA RAVNO EVOLVENTNO OZUBLJENJE

```

=====
Zupčanik Z1 je izradjen s ozubljenom letvom
Zupčanik Z2 je izradjen s ozubljenom letvom
Faktor visine glave zuba alata          ha0* = 1.25
Faktor zakrivljenosti vrha zuba alata    roa0* = .2
.....
Zahvatni kut                             alfa  = 20 deg
Kut nagiba zuba                           beta  = 0 deg
Modul                                       mn    = 1
Broj zubi zupčanika Z1                     z1    = 20
Broj zubi zupčanika Z2                     z2    = 30
Odnos broja zubi z2/z1                     u     = 1.5
Teoretski razmak osi                       ad    = 25
Razmak osi                                  a     = 25
Suma faktora pomaka profila                sumax = 0
Faktor debljine glave zuba Z1              san1* = .676
Faktor debljine glave zuba Z2              san2* = .75
Stupanj prekrivanja profila                epsalf = 1.601
-----
Minimalni geom. faktor gubitaka trenja klizanja:  Gimin = 5.088
-----
Optimalni faktori pomaka profila:  klopt = .05      x2opt = -.05
=====

```

Slika 4.1 Ispis rezultata programa GEFAG

## 4.2 SMETNJE I OGRANIČENJA

### 4.2.1 PODREZIVANJE

Podrezivanje se javlja samo kod vanjskog ozubljenja. Kod izrade zupčanika alatom u obliku ozubljene letve do podrezivanja neće doći ako je pomoćni kut za kontrolu podrezivanja

$$\tan \alpha_E \geq 0 \quad (4.01)$$

Svi potrebni izrazi za kontrolu smetnji i ograničenja su navedeni u Prilogu 1.

Kod izrade zupčanika alatnim zupčanikom do podrezivanja neće doći kad je

$$a_0 \sin \alpha_{t0} \geq \sqrt{(r_{Ea0}^2 - r_{b0}^2)} \quad (4.02)$$

#### 4.2.2 EVOLVENTNI ZAHVAT

Polumjer kruga preko glave zuba mora biti

$$r_a \geq r_b + m_n \quad (4.03)$$

a za unutarnje ozubljenje

$$r_b \geq r_a \quad (4.04)$$

odnosno

$$|r_b| < |r_a| \quad (4.05)$$

#### 4.2.3 MINIMALNA DEBLJINA VRHA ZUBA

Pozitivnim pomakom profila smanjuje se debljina vrha zuba koja ne smije preći neku minimalnu vrijednost od  $0,2 \cdot m_n$  za mekane i  $0,4 \cdot m_n$  za tvrde čelike. Program se prekida ako je debljina vrha zuba

$$s_{an} < 0,2 m_n \quad (4.06)$$

#### 4.2.4 INTERFERENCIJA PRVE VRSTE

Do interferencije prve vrste dolazi kad se zahvat odvija u području prelazne krivulje korijena zuba, a ne na evolventnom dijelu boka zuba. Da zahvat bude pravilan, potrebno je da bude

$$r_{a1} \leq r_{a1max} \quad (4.07)$$

$$r_{a2} \leq r_{a2max} \quad (4.08)$$

#### 4.2.5 INTERFERENCIJA DRUGE VRSTE

Javlja se samo kod unutarnjeg ozubljenja i to ako je razlika apsolutnih vrijednosti brojeva zubi mala. Da ne bi došlo do interferencije, potrebno je da faktor interferencije bude

$$K > 1 \quad (4.09)$$

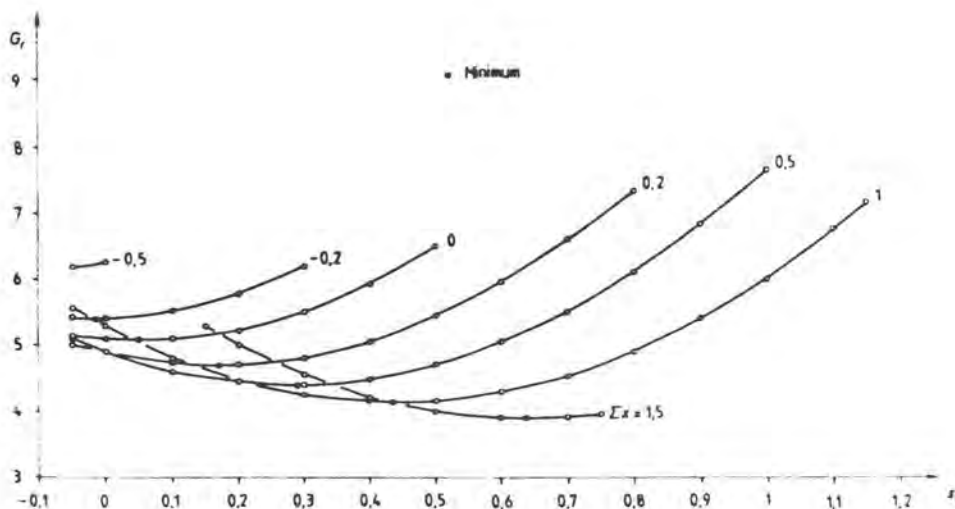
#### 4.2.6 STUPANJ PREKRIVANJA PROFILA

Program se prekida ako je stupanj prekrivanja profila

$$\varepsilon_{\alpha} < 1,2 \quad (4.10)$$

#### 4.3 DIJAGRAMI OVISNOSTI $G_f - \Sigma x - x_1$ I $x_{1opt} - \Sigma x$

Modificiranim programom GEFAG može se dobiti ispis vrijednosti faktora  $G_f$  za razne sume faktora pomaka profila  $\Sigma x$  i za razne faktore pomaka profila  $x_1$ . Na slici 4.2 su prikazani rezultati za par zupčanika sa  $m_n = 1$  mm,  $z_1 = 20$  i  $z_2 = 30$ .



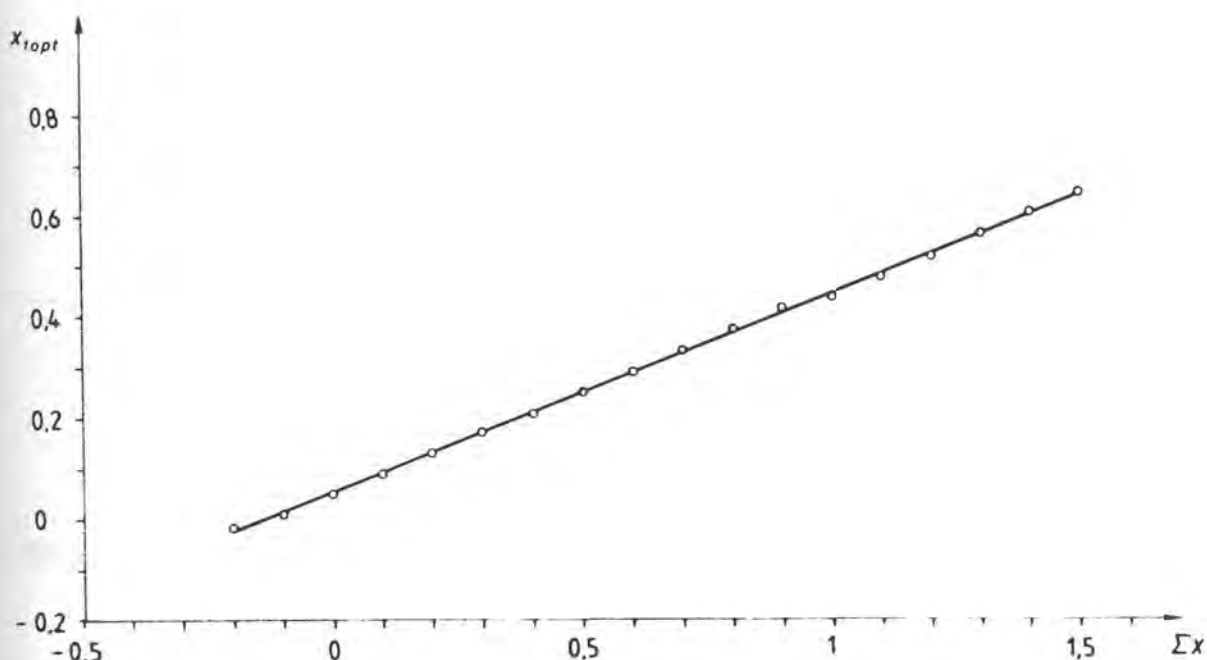
Slika 4.2 Faktor  $G_f$  za  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 30$ ,  $m_n = 1$  mm,  $\alpha_n = 20^\circ$ ,  $h_{aP}^* = 1$ ,  $\rho_{a0}^* = 0,2$



Analizirajući dobivene optimalne vrijednosti faktora pomaka profila  $x_{1opt}$  pri kojima se dobiva najmanja vrijednost faktora  $G_f$ , može se ustanoviti da za svaku kombinaciju brojeva zubi zupčanika  $z_1$  i  $z_2$  postoji linearna ovisnost oblika

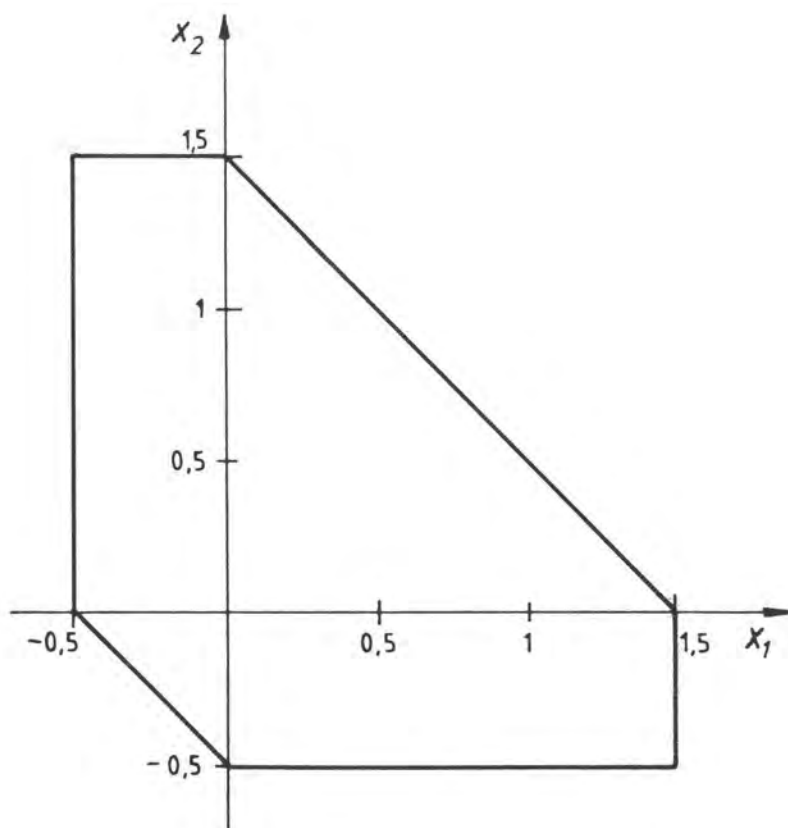
$$x_{1opt} = a \Sigma x + b \quad (4.11)$$

sa visokim koeficijentom korelacije. Za slučaj sa slike 4.2 ova je ovisnost prikazana na slici 4.3, pri čemu je koeficijent korelacije  $r = 0,999$ .



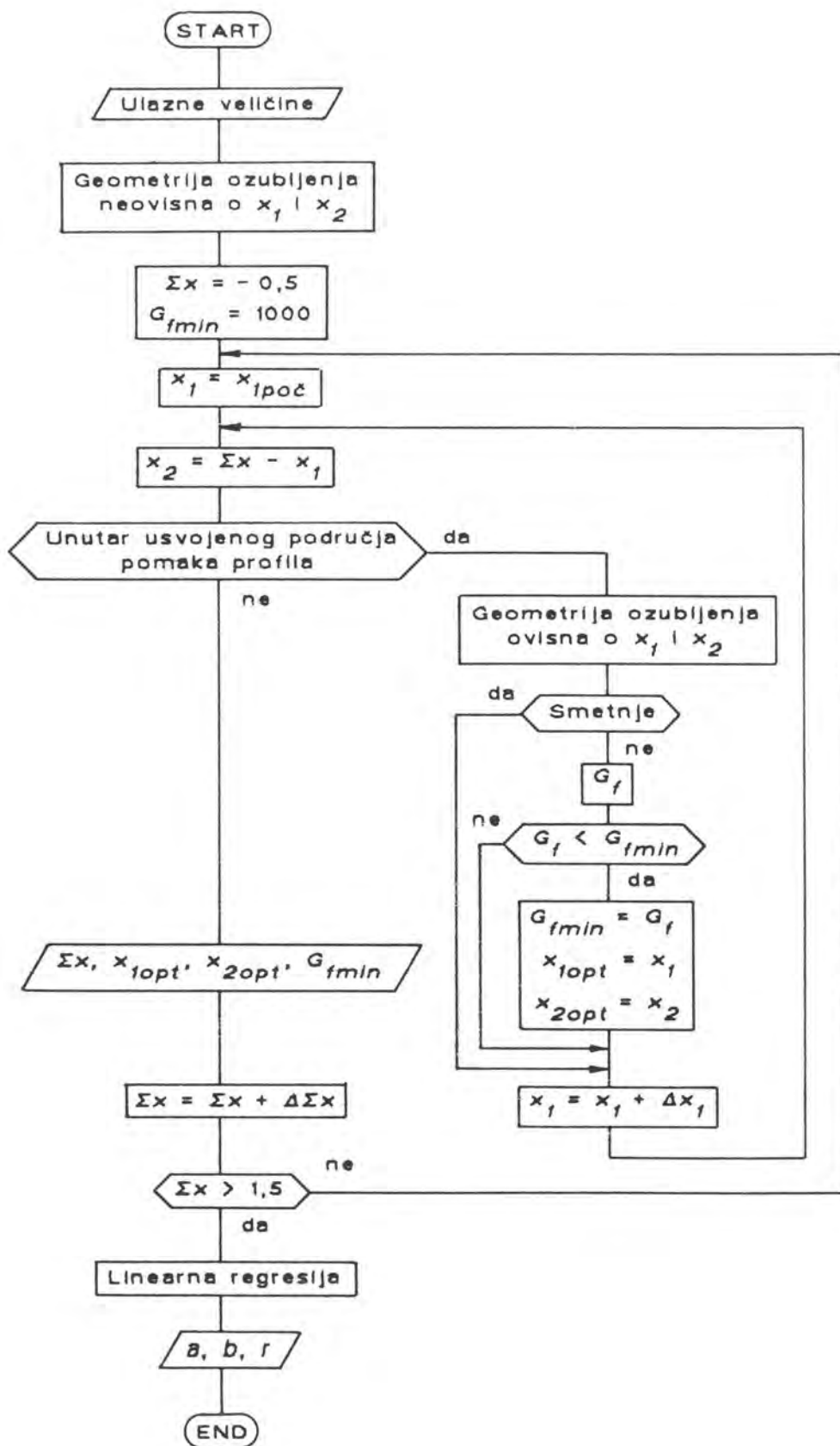
Slika 4.3 Ovisnost  $x_{1opt} - \Sigma x$  za  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 30$ ,  $\alpha_n = 20^\circ$ ,  $h_{ap}^* = 1$ .  
Vrijedi  $x_{1opt} = 0,3877503 \Sigma x + 0,05524009$

Proširenjem programa GEFAG dobiven je program MG. Program MG za određenu kombinaciju brojeva zubi  $z_1$  i  $z_2$  za razne vrijednosti  $\Sigma x$  proračunava optimalne vrijednosti  $x_{1opt}$  i  $x_{2opt}$  i vrijednost  $G_{fmin}$ . Na kraju programa se proračunavaju koeficijenti  $a$  i  $b$  regresionih pravaca iz izraza (4.11) te koeficijent korelacije  $r$ . Program MG radi u području faktora pomaka profila prikazanom na slici 4.4, što je dovoljno za određivanje koeficijenata  $a$  i  $b$ .



Slika 4.4 Granice područja faktora pomaka profila u programu MG

Glavne faze dijagrama toka programa MG su prikazane na slici 4.5, a izgled ispisa rezultata na slici 4.6.



Slika 4.5 Glavne faze dijagrama toka programa MG

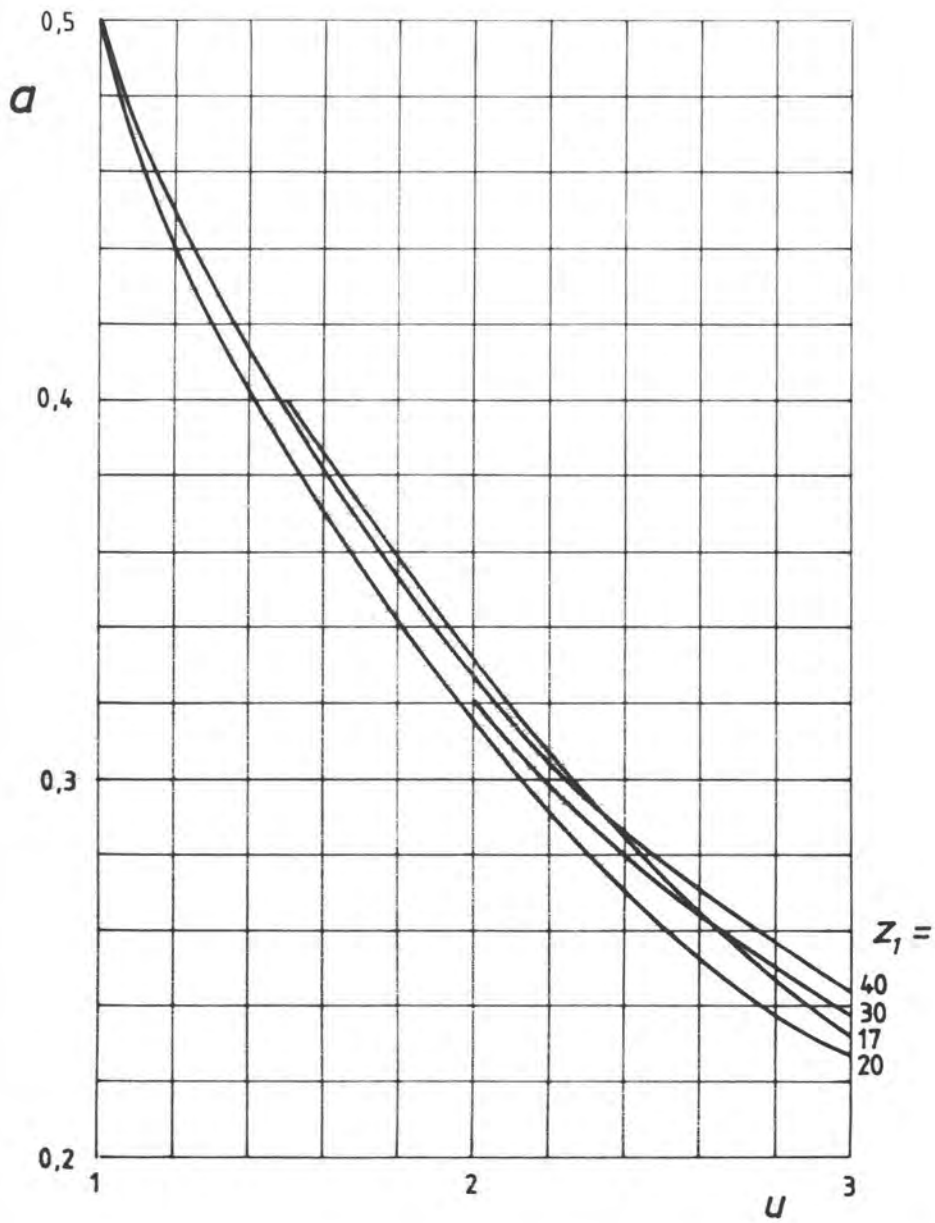
MG - MINIMIZACIJA GUBITAKA TRENJA				
Podaci: mn= 1 mm    z1= 20    z2= 30    alfan= 20    dea				
haP*= 1    roa0*= .2    ha0*= 1.25    n= 20				
x1+x2	xlopt	x2opt		Gfmin
-.5	-.051	-.449		6.191
-.4	-.051	-.349		5.876
-.3	-.051	-.249		5.627
-.2	-.016	-.184	Pravi minimum	5.424
-.1	.011	-.111	Pravi minimum	5.246
0	.05	-.05	Pravi minimum	5.088
.1	.09	.01	Pravi minimum	4.948
.2	.13	.07	Pravi minimum	4.821
.3	.17	.13	Pravi minimum	4.705
.4	.211	.189	Pravi minimum	4.6
.5	.251	.249	Pravi minimum	4.504
.6	.293	.307	Pravi minimum	4.416
.7	.334	.366	Pravi minimum	4.335
.8	.375	.425	Pravi minimum	4.261
.9	.417	.483	Pravi minimum	4.193
1	.433	.567	Pravi minimum	4.13
1.1	.474	.626	Pravi minimum	4.072
1.2	.515	.685	Pravi minimum	4.02
1.3	.556	.744	Pravi minimum	3.972
1.4	.598	.802	Pravi minimum	3.929
1.5	.639	.861	Pravi minimum	3.89
Koeficijent smjera	a =	.3877503		
Odsjecak na osi y	b =	5.524009E-02		
Koeficijent korelacije	r =	.9995416		

Slika 4.6 Ispis rezultata programa MG

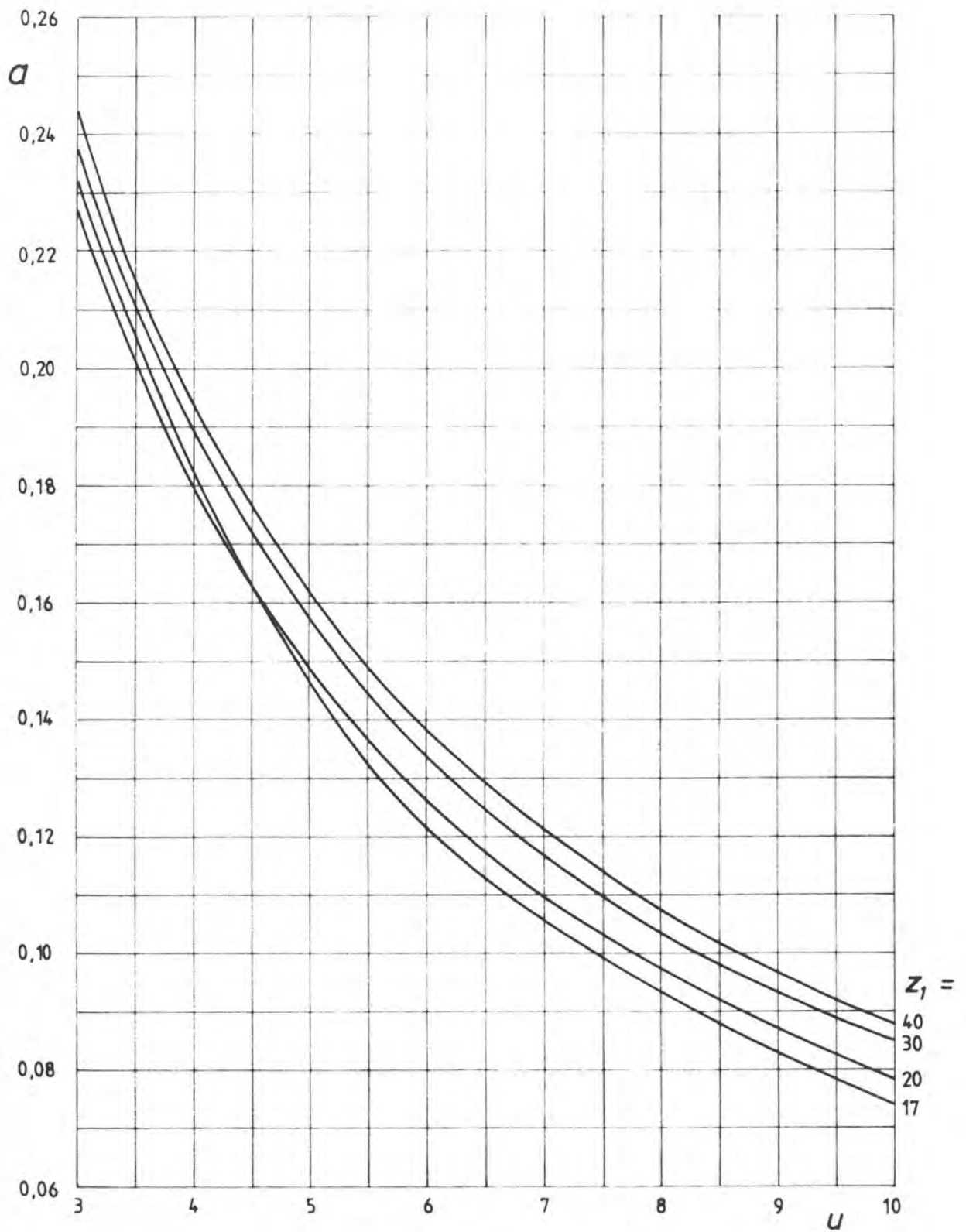
## 5. REZULTATI PRORAČUNA

### 5.1 OPTIMALNA RASPODJELA SUME FAKTORA POMAKA PROFILA $\Sigma x$

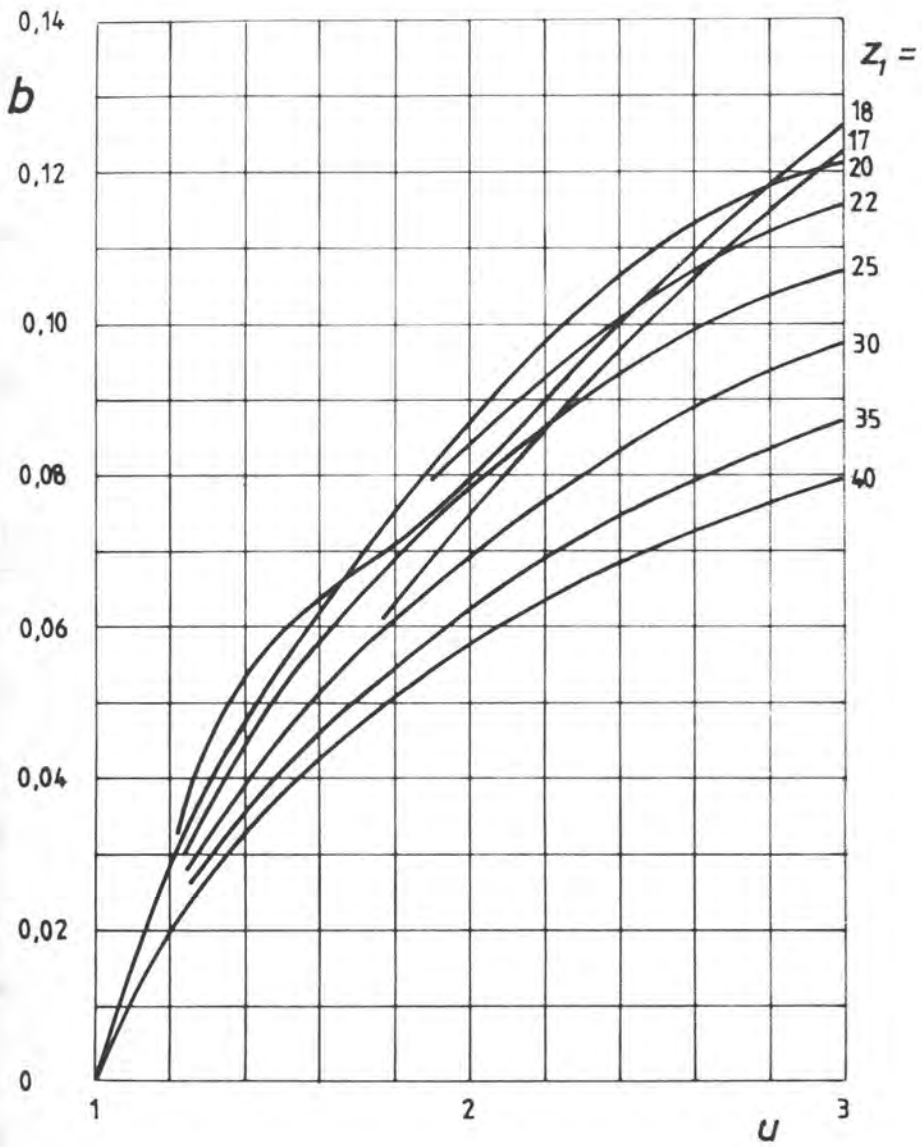
Koeficijenti  $a$  i  $b$  regresionih pravaca i koeficijent korelacije  $r$  izračunati su za razne brojeve zubi  $z_1$  i razne odnose brojeva zubi  $u$  programom MG. Proračuni su vršeni za standardno ozubljenje prema DIN 867:  $\alpha_n = 20^\circ$ ,  $h_{aP}^* = 1$ ,  $c^* = 0,25$ ,  $\rho_{a0}^* = 0,2$  i  $h_{a0}^* = 1,25$  [13]. Modul je bio  $m_n = 1$  mm, jer položaj optimalne vrijednosti  $x_{1opt}$  ne ovisi o veličini modula. Rezultati proračuna su dani u Prilogu 2 u tablicama 1 do 16. Za vanjski zahvat su koeficijenti korelacije  $r > 0,995$ , a za unutarnji zahvat je  $|r| > 0,991$ . Vrijednosti koeficijenata pravaca  $a$  i  $b$  su dijagramski prikazane na slikama 5.1 do 5.5.



Slika 5.1 Koeficijent  $a$  za vanjski zahvat i  $1 \leq u \leq 3$

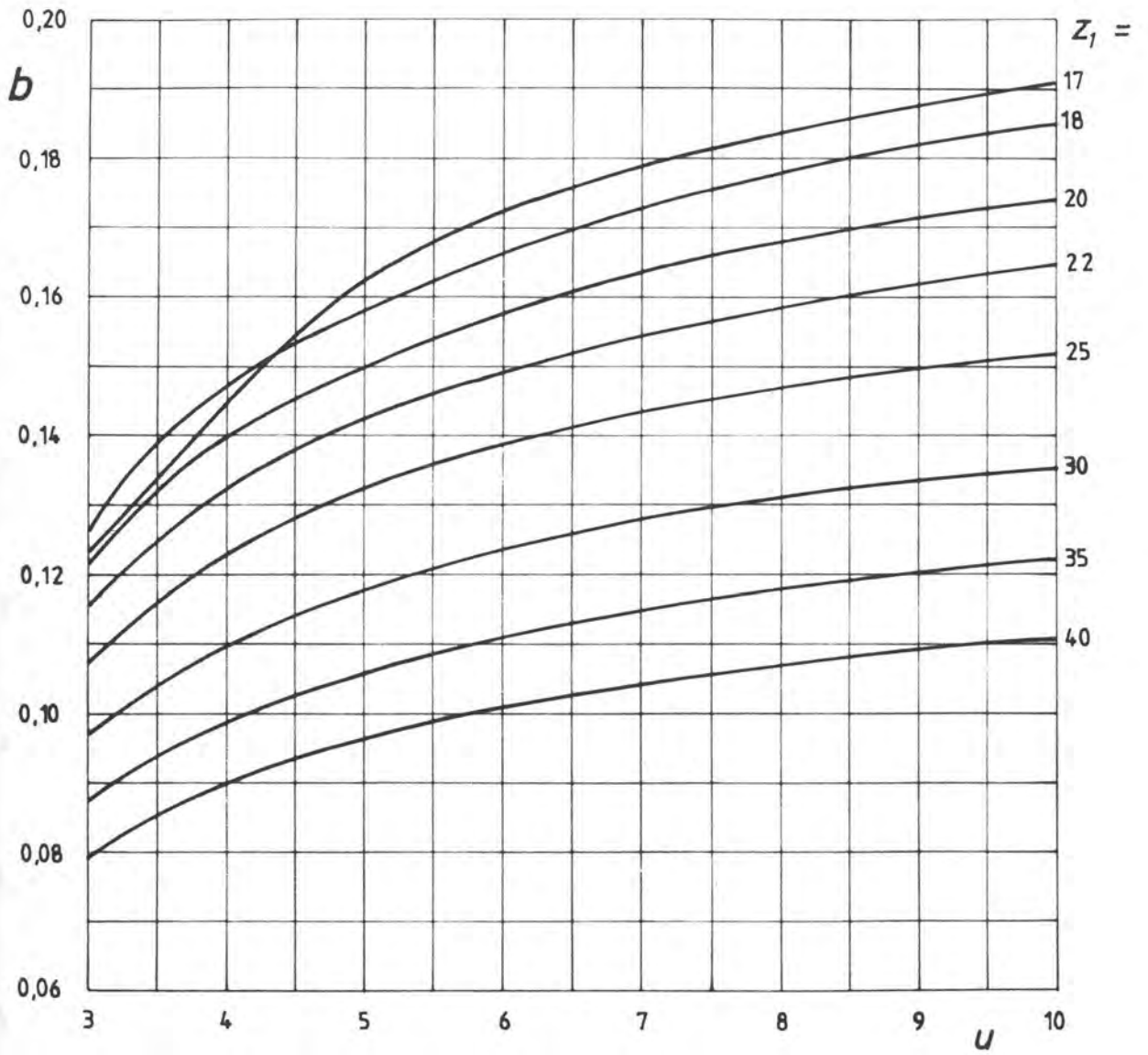


Slika 5.2 Koeficijent  $a$  za vanjski zahvat i  $3 \leq u \leq 10$

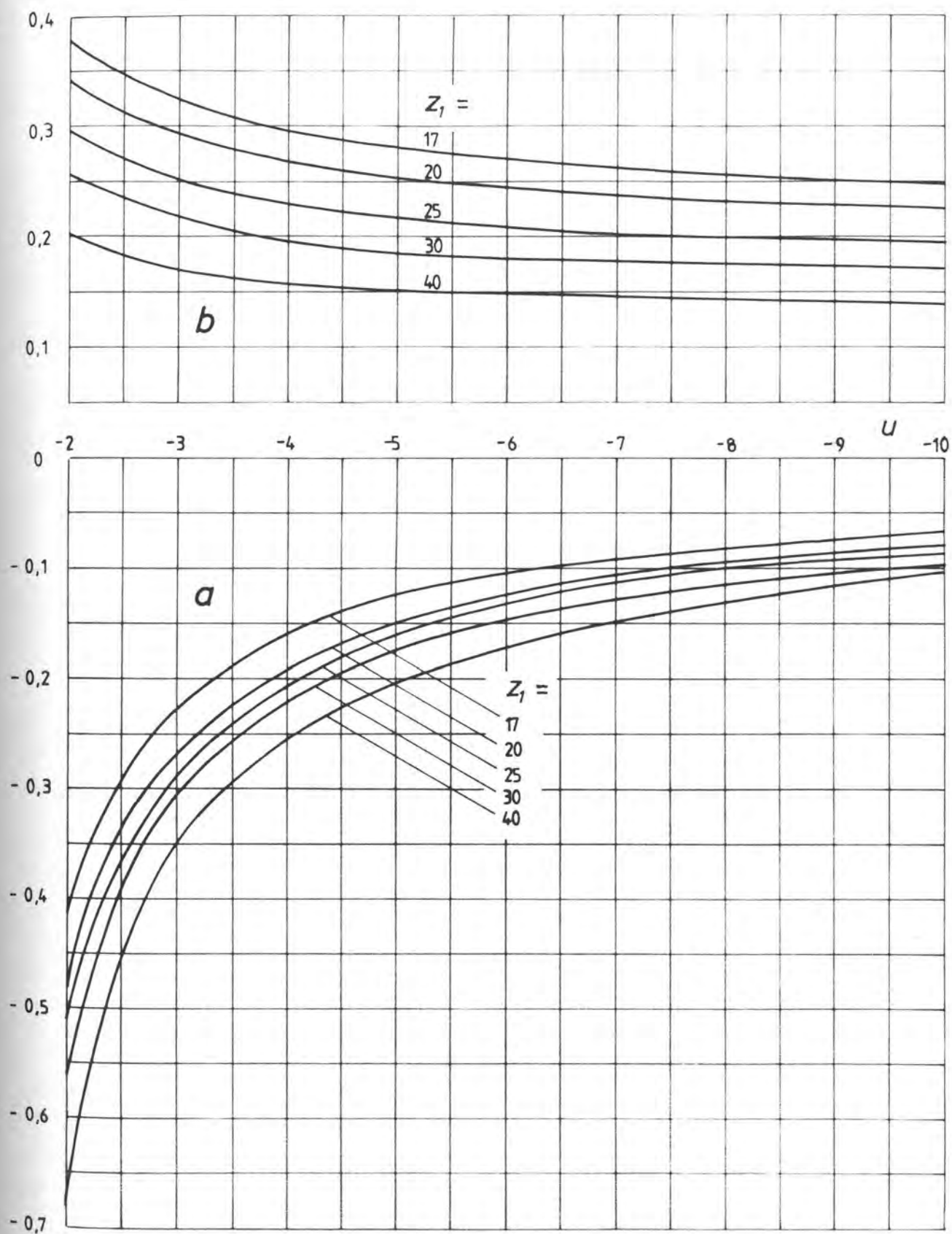


Slika 5.3 Koeficijent  $b$  za vanjski zahvat i  $1 \leq u \leq 3$





Slika 5.4 Koeficijent  $b$  za vanjski zahvat i  $3 \leq u \leq 10$



Slika 5.5 Koeficijenti  $a$  i  $b$  za unutarnji zahvat

Ako se želi izbjeći očitavanje s dijagrama, uz upotrebu elektroničkog računala mogu se koristiti sljedeći izrazi za proračunavanje koeficijenata  $a$  i  $b$  :

- Vanjski zahvat:

$$a = A + B_1 z_1 + B_2 / z_1 + B_3 / u + B_4 z_1 / u + B_5 / u^2 + B_6 z_1^2 + \\ + B_7 z_1 / u^2 + B_8 z_1^2 / u + B_9 / u^3 + B_{10} z_1^2 / u^2 \quad (5.01)$$

gdje je

$$A = -0,35440105628$$

$$B_1 = 0,016098390342$$

$$B_2 = 2,2583325173$$

$$B_3 = 1,2362362709$$

$$B_4 = -0,029812313378$$

$$B_5 = -0,74567423056$$

$$B_6 = -0,00021014250553$$

$$B_7 = 0,023424634518$$

$$B_8 = 0,00049607986993$$

$$B_9 = 0,10104522698$$

$$B_{10} = -0,000400045519$$

$$b = A + B_1 z_1 + B_2 / z_1 + B_3 / u + B_4 z_1 / u + B_5 / u^2 + B_6 z_1^2 + \\ + B_7 z_1 / u^2 + B_8 z_1^2 / u + B_9 z_1^3 + B_{10} z_1^2 / u^2 \quad (5.02)$$

gdje je

$$A = 1,604385876$$

$$B_1 = -0,079526994036$$

$$B_2 = -7,8519586711$$

$$B_3 = -0,93475882264$$

$$B_4 = 0,045582639181$$

$$B_5 = 0,52574432742$$

$$B_6 = 0,0017325105793$$

$$B_7 = -0,03209094453$$

$$B_8 = -0,00064699797651$$

$$B_9 = -0,000013649200032$$

$$B_{10} = 0,0004870582484$$

Izraz (5.02) ne daje dobre rezultate jedino za odnose broja zubi koji su vrlo bliski ili jednaki vrijednosti  $u = 1$ . To međutim nije važno jer je za taj slučaj  $b \approx 0$  odnosno  $b = 0$ , pa proračun nije niti potreban.

Izrazi (5.01) i (5.02) vrijede u granicama  $z_1 = 17 \dots 40$  i  $u = 1 \dots 10$ .

- Unutarnji zahvat:

$$a = A + B_1 z_1 + B_2 / z_1 + B_3 z_1 / u + B_4 / u^2 + B_5 z_1^2 + B_6 z_1 / u^2 + \\ + B_7 z_1^2 / u + B_8 / u^3 + B_9 z_1^3 + B_{10} z_1^2 / u^2 \quad (5.03)$$

gdje je

$$A = -5,3296032935$$

$$B_1 = 0,29252238255$$

$$B_2 = 35,079644985$$

$$B_3 = 0,062360111504$$

$$B_4 = 0,29083729054$$

$$B_5 = -0,0068736084577$$

$$B_6 = 0,066007796341$$

$$B_7 = -0,0011767871763$$

$$B_8 = 2,250027404$$

$$B_9 = 0,000057806261374$$

$$B_{10} = -0,0019208591966$$

$$b = A + B_1 z_1 + B_2 / u + B_3 / z_1 + B_4 z_1 / u + B_5 z_1^2 + B_6 z_1 / u^2 + \\ + B_7 z_1^2 / u + B_8 / u^3 + B_9 z_1^3 + B_{10} z_1^2 / u^2 \quad (5.04)$$

gdje je

$$A = 0,11190398291$$

$$B_1 = 0,0017846531399$$

$$B_2 = -0,565689852$$

$$B_3 = 1,8390921132$$

$$B_4 = 0,021201459338$$

$$B_5 = -0,00012616028627$$

$$B_6 = 0,01626120721$$

$$B_7 = -0,00016902622822$$

$$B_8 = 0,24925642371$$

$$B_9 = 1,7410911752 \cdot 10^{-6}$$

$$B_{10} = -0,00015290411556$$

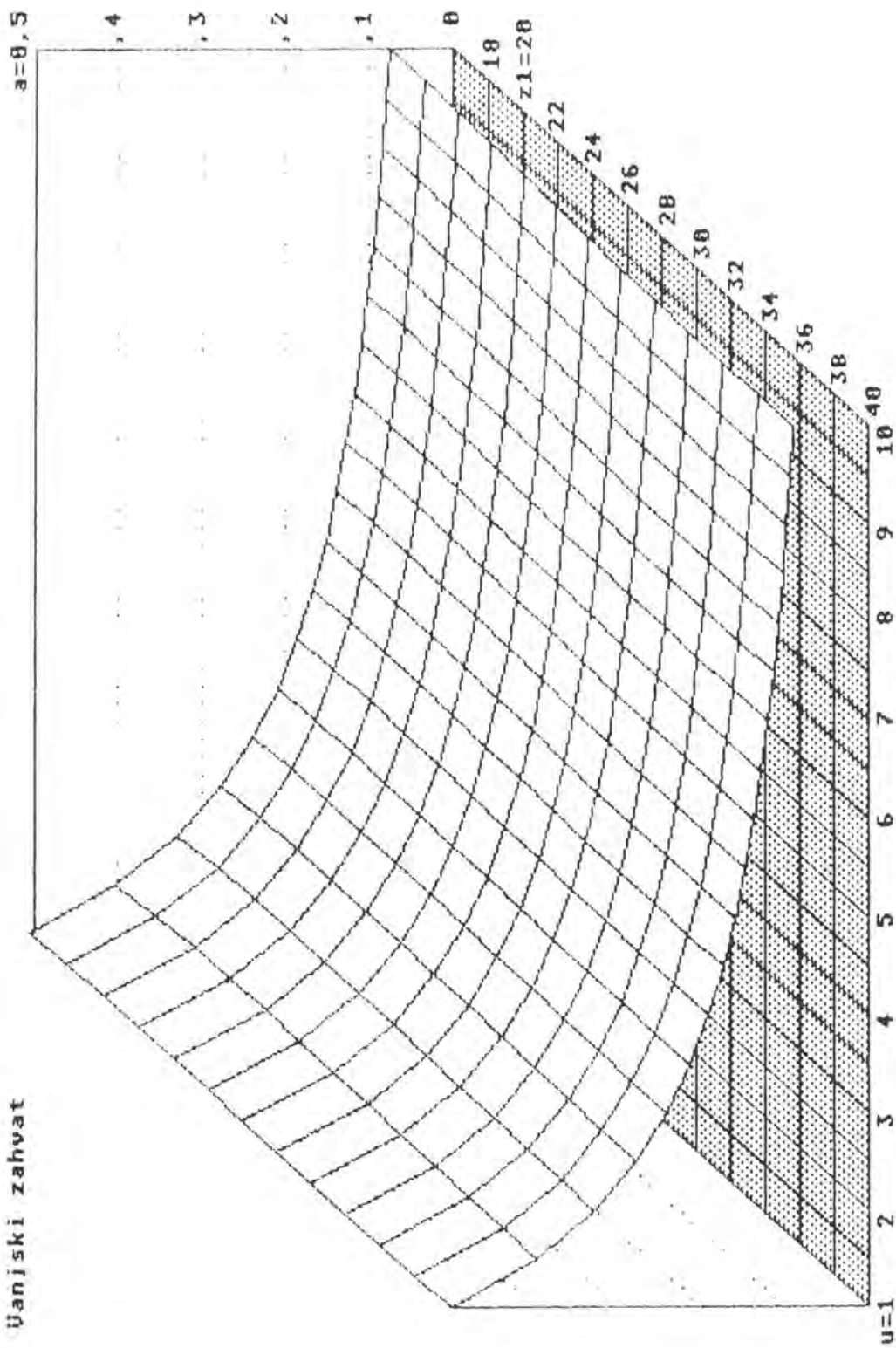
Izrazi (5.03) i (5.04) vrijede u granicama  $z_1 = 17 \dots 40$  i  $u = -10 \dots -2$ .

Za bilo koju kombinaciju brojeva zubi  $z_1$  i  $z_2$  (u okviru navedenih granica) uvrštavanjem koeficijenata  $a$  i  $b$  u izraz (4.11) mogu se izračunati optimalni faktori pomaka profila  $x_{1opt}$  i  $x_{2opt}$  pri čemu će gubici trenja klizanja u ozubljenju biti najmanji.

Zavisnost koeficijenata  $a$  i  $b$  od broja zubi  $z_1$  i odnosa broja zubi  $u$  prema regresionim polinomima (5.01) do (5.04) prikazana je prostornim dijagramima na slikama 5.6 do 5.9.

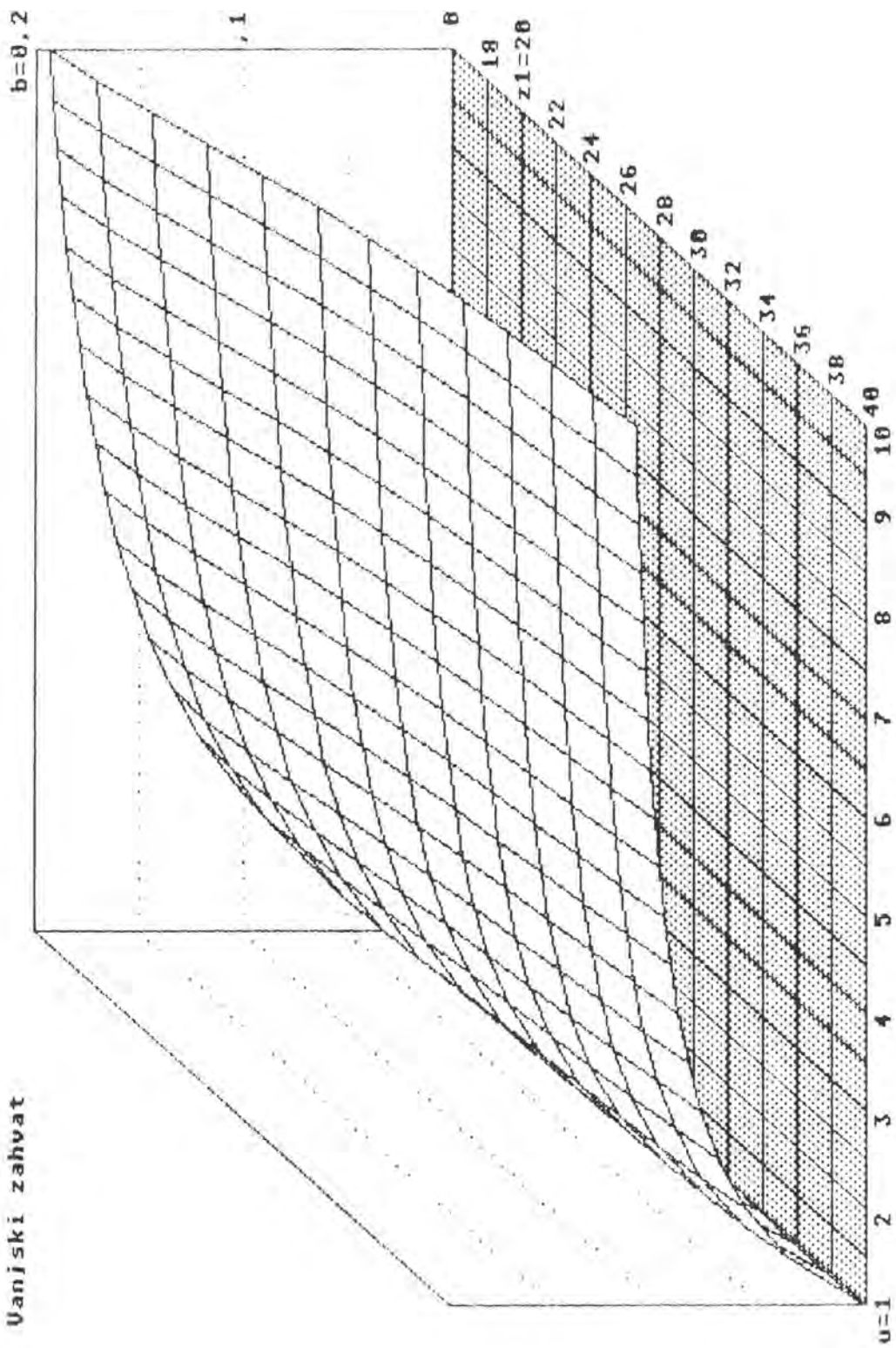
Usporedba stvarnih vrijednosti koeficijenata  $a$  i  $b$  i vrijednosti tih koeficijenata koje se dobiju korištenjem regresionih polinoma dana je u Prilogu 3. Međusobna odstupanja dana su u postocima.

Vanjski zahvat



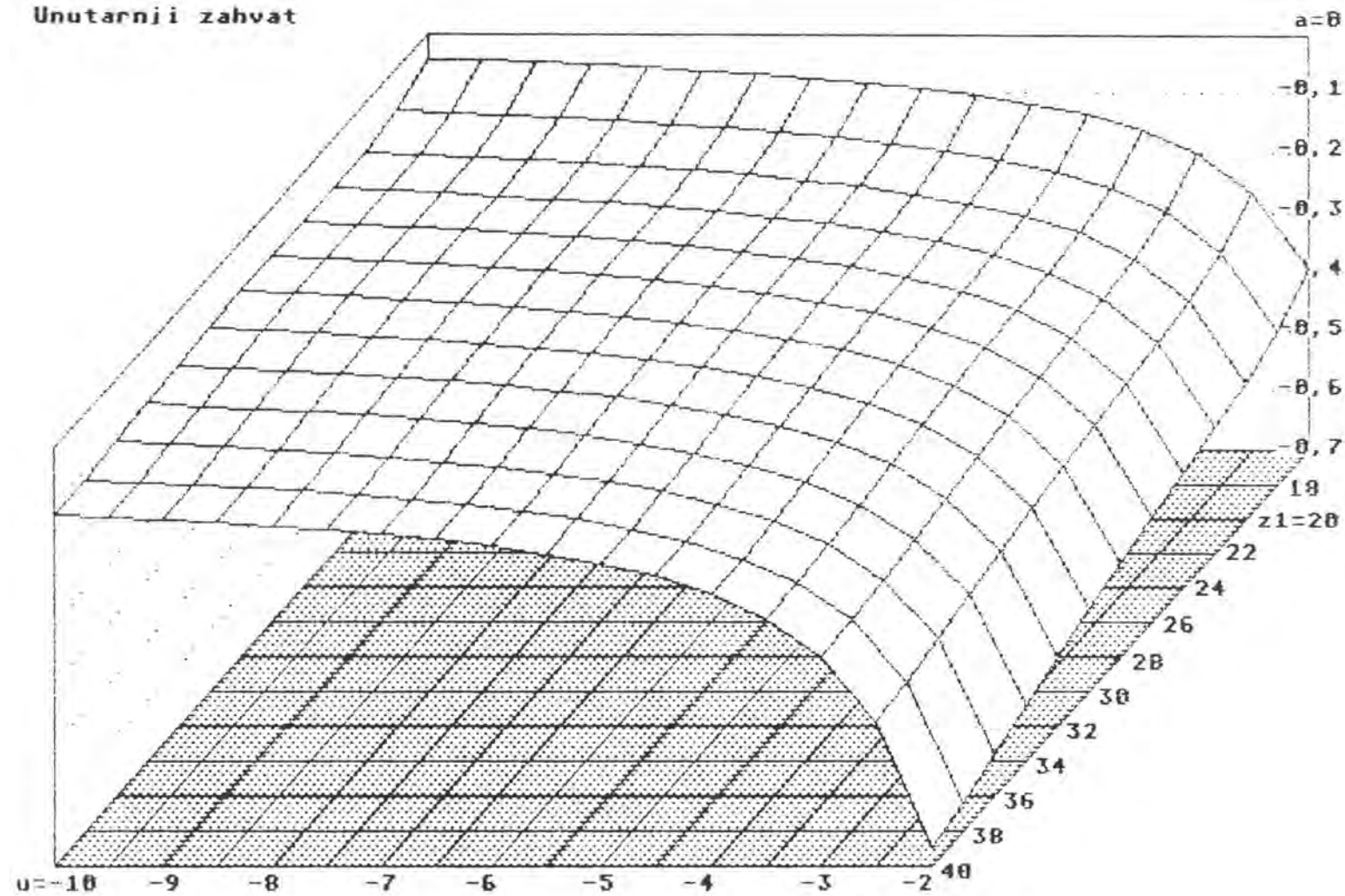
Slika 5.6 Zavisnost  $a - z_1 - u$  za vanjski zahvat

Vanjski zahvat



Slika 5.7 Zavisnost  $b - z_1 - u$  za vanjski zahvat

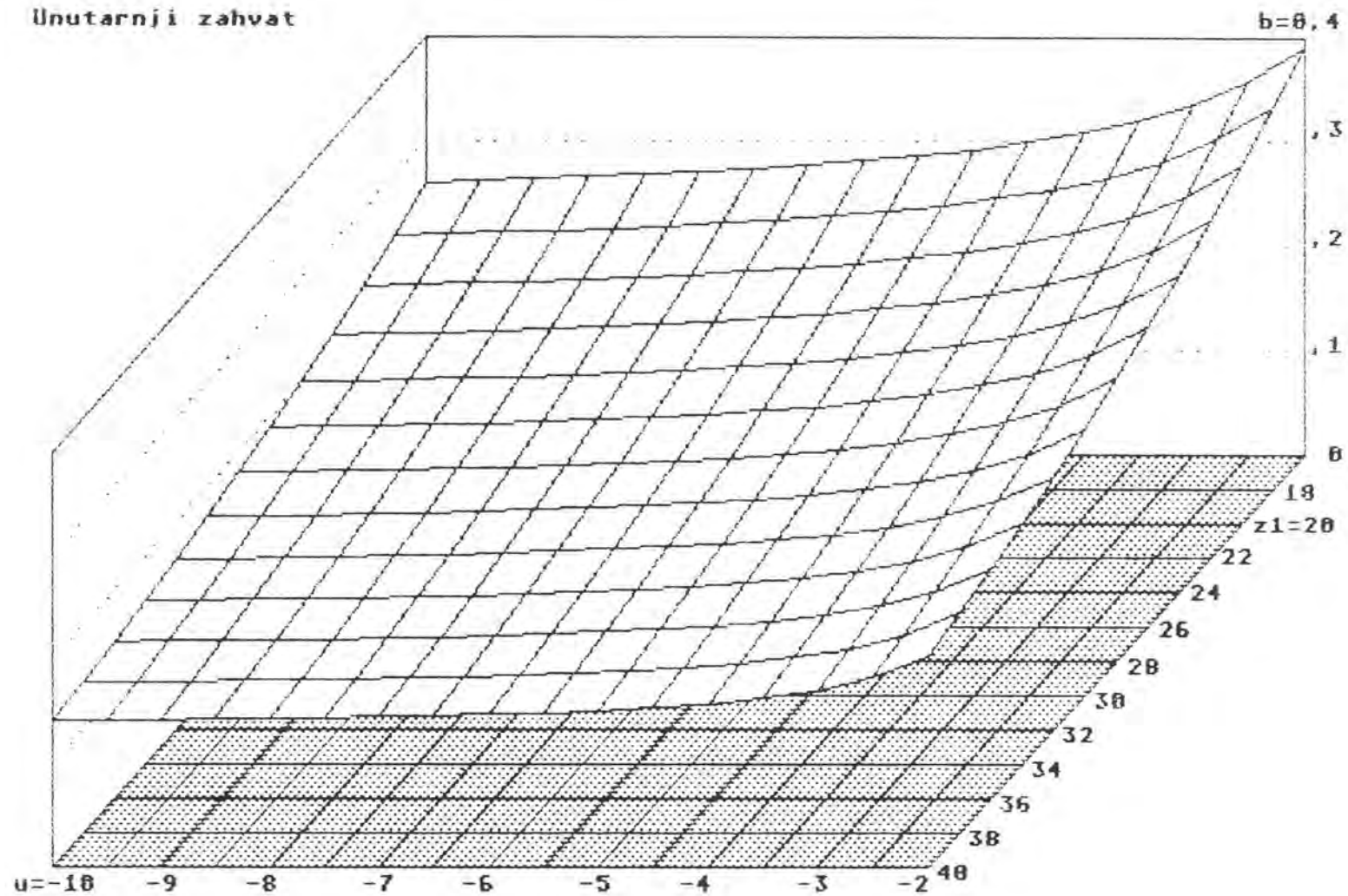
Unutarnji zahvat



Slika 5.8 Zavisnost  $a - z_1 - u$  za unutarnji zahvat



Unutarnji zahvat



Slika 5.9 Zavisnost  $b - z_1 - u$  za unutarnji zahvat

## 5.2 USPOREDBA VRIJEDNOSTI FAKTORA $G_{fmin}$

Na slikama 5.10 do 5.13 za vanjski zahvat i slikama 5.14 do 5.16 za unutarnji zahvat može se vidjeti kolike su razlike u faktorima  $G_{fmin}$  pri promjeni broja zubi  $z_1$  i sume  $\Sigma x$ . Na osnovi prikazanih dijagrama moguće je zaključiti sljedeće:

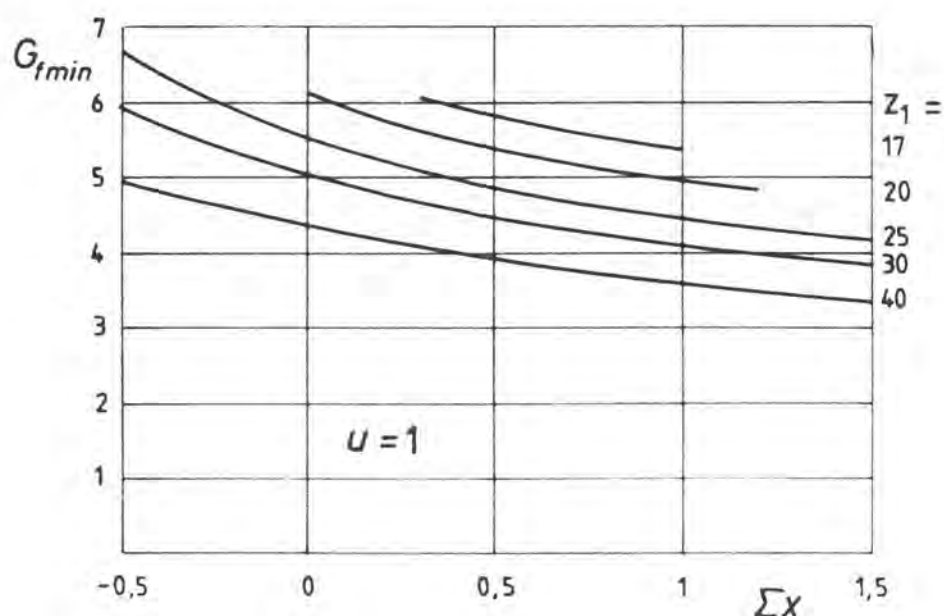
a.) Kod vanjskog zahvata porastom  $\Sigma x$  opada  $G_{fmin}$  tj. opadaju gubici klizanja. Uzrok tome je povećanje reduciranog polumjera zakrivljenosti  $\rho_{redC}$  i opadanje koeficijenta trenja  $\mu_m$ .

Opadanje vrijednosti  $G_{fmin}$  je znatno kod malih odnosa broja zubi i gubi na značaju povećavanjem  $u$ .

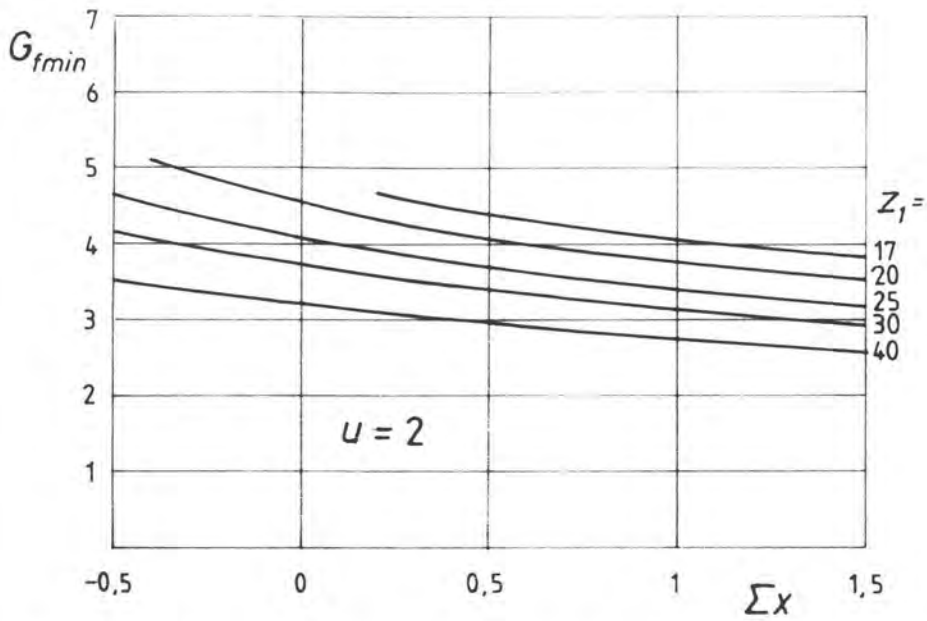
b.) Kod unutarnjeg zahvata opadanjem  $\Sigma x$  opada i  $G_{fmin}$ . Ovo opadanje faktora  $G_{fmin}$  je značajnije kod manjih apsolutnih vrijednosti odnosa broja zubi  $|u|$ . Uzrok opadanju faktora  $G_{fmin}$  je isti kao i kod vanjskog ozubljenja.

c.) Faktor  $G_{fmin}$  je uz isti modul manji pri većem broju zubi  $z_1$ . Ovo vrijedi i za vanjski i za unutarnji zahvat (vidi objašnjenje pod a.)).

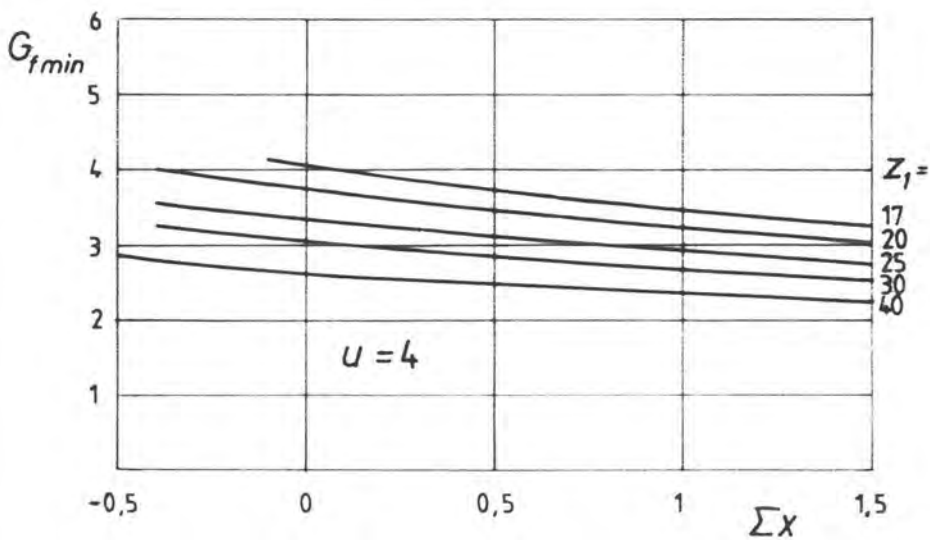
Poznato je da su kod unutarnjeg zahvata brzine klizanja općenito manje nego kod vanjskog, iz čega slijedi i da su gubici klizanja kod unutarnjeg zahvata manji. O kakvim se razlikama pri istoj apsolutnoj vrijednosti odnosa broja zubi  $|u|$  radi, može se vidjeti iz dijagrama na slikama 5.17 i 5.18.



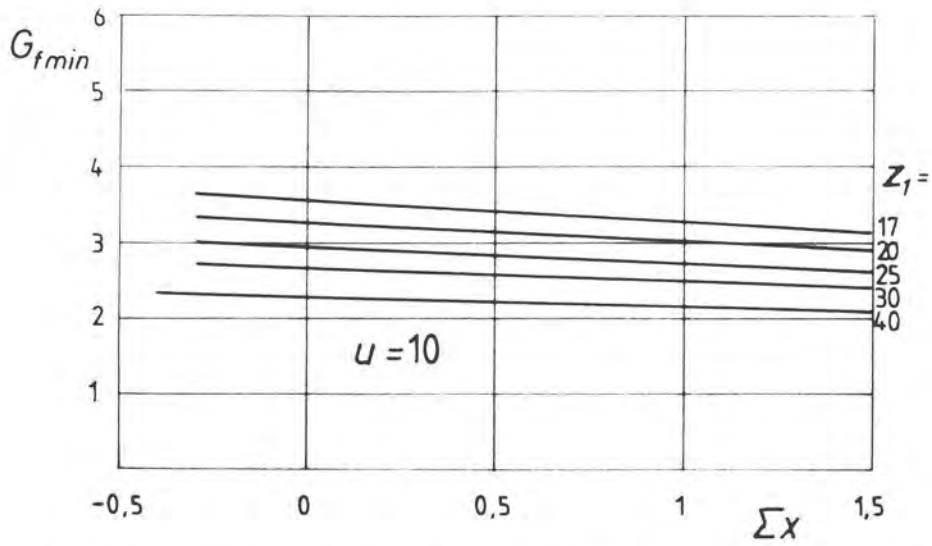
Slika 5.10 Ovisnost  $G_{fmin}$  o  $\Sigma x$  i  $z_1$  za  $u = 1$ ;  $m_n = 1$  mm



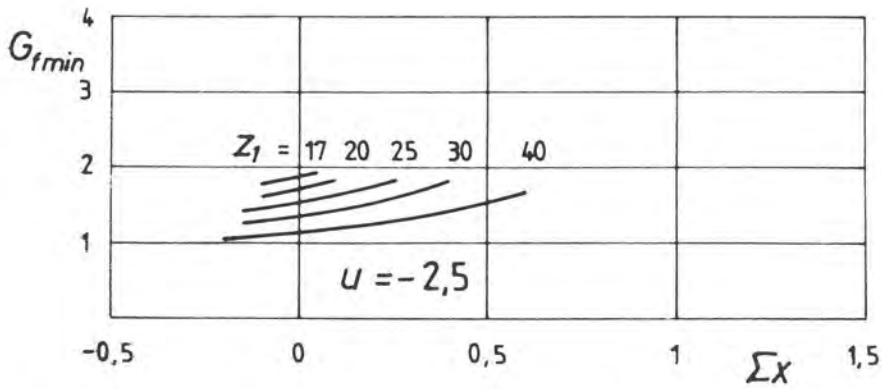
Slika 5.11 Ovisnost  $G_{fmin}$  o  $\Sigma x$  i  $z_1$  za  $u = 2$ ;  $m_n = 1$  mm



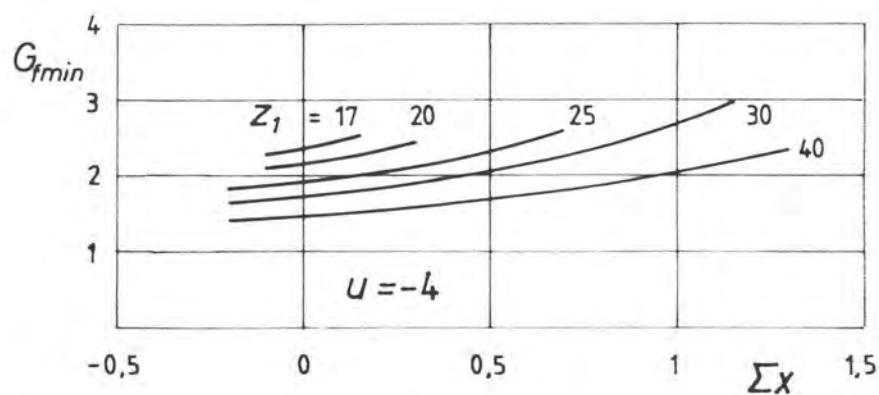
Slika 5.12 Ovisnost  $G_{fmin}$  o  $\Sigma x$  i  $z_1$  za  $u = 4$ ;  $m_n = 1$  mm



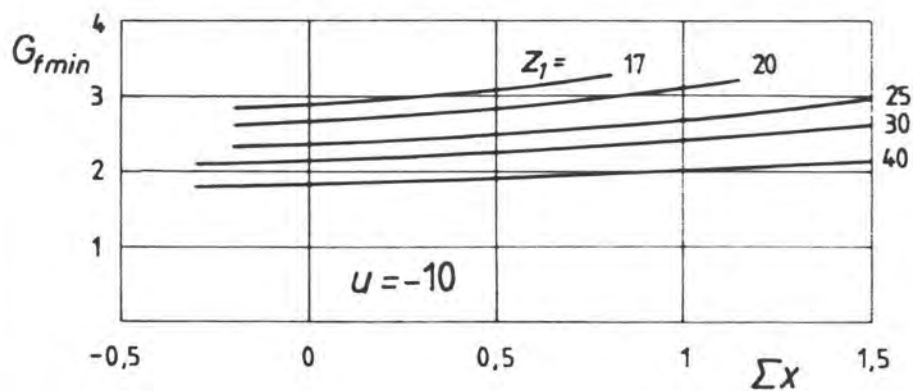
Slika 5.13 Ovisnost  $G_{fmin}$  o  $\Sigma x$  i  $z_1$  za  $u = 10$ ;  $m_n = 1$  mm



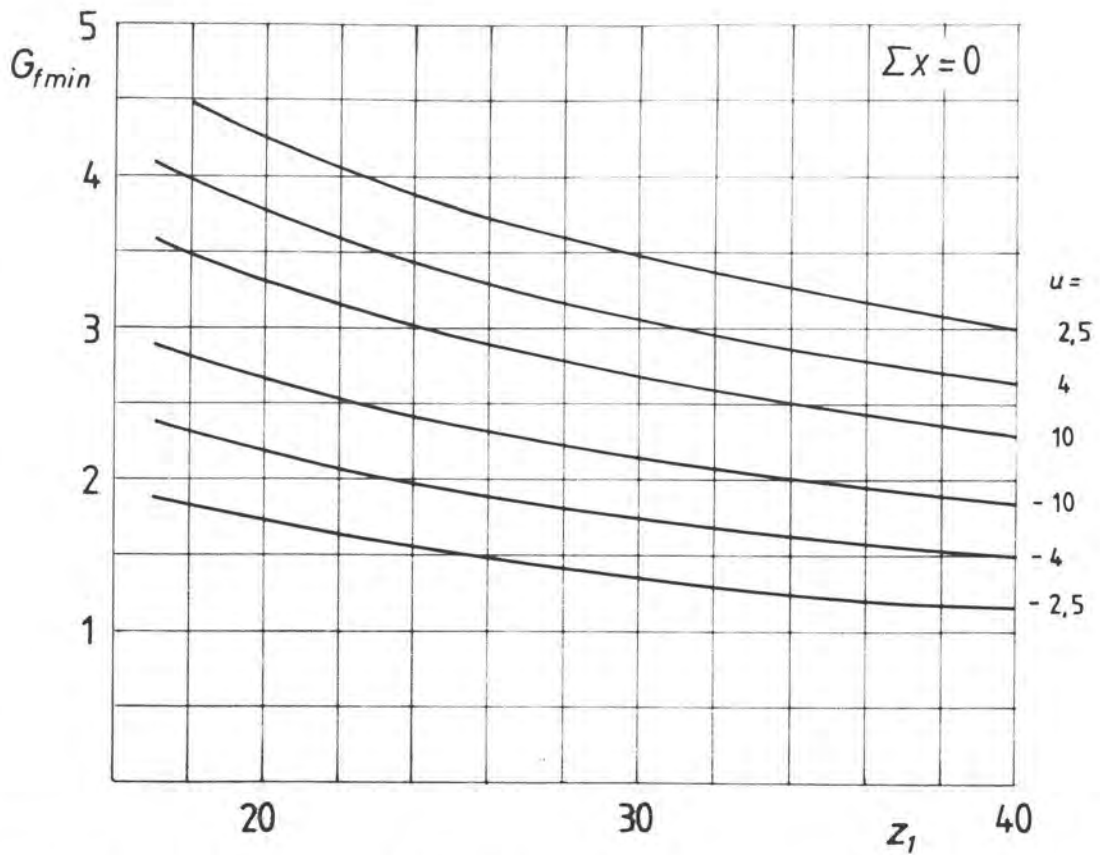
Slika 5.14 Ovisnost  $G_{fmin}$  o  $\Sigma x$  i  $z_1$  za  $u = -2.5$ ;  $m_n = 1$  mm



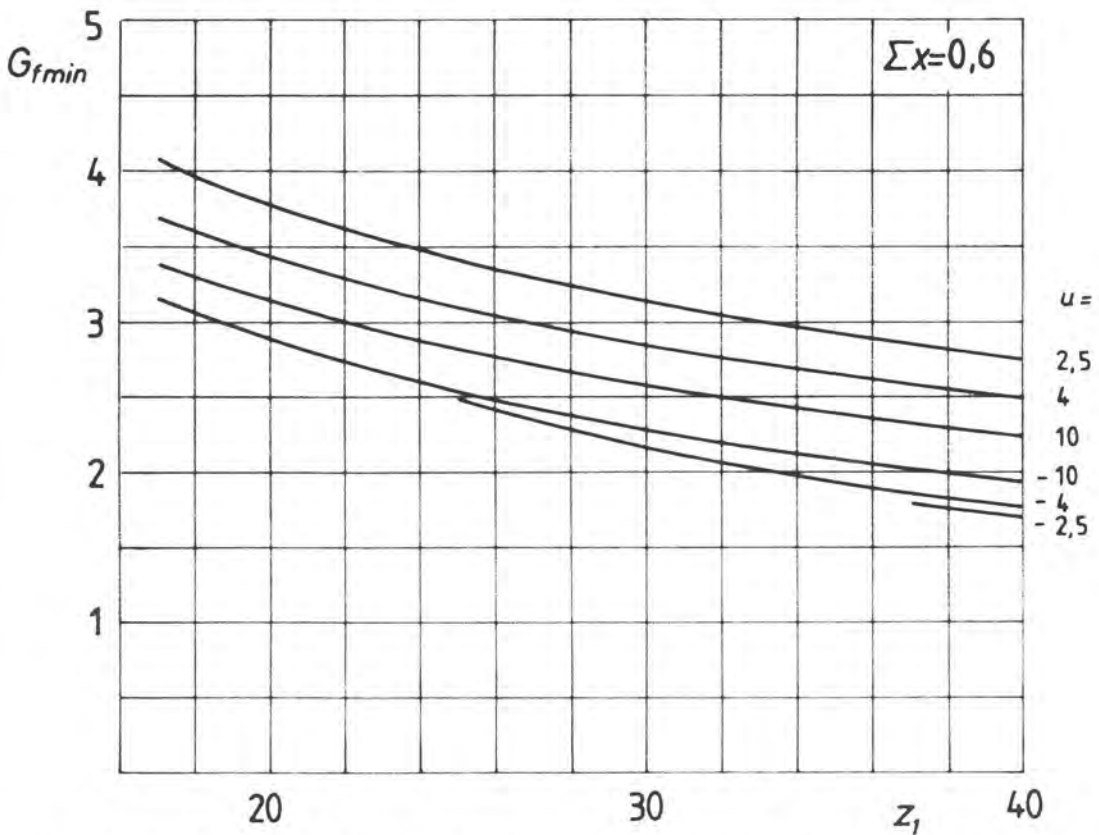
Slika 5.15 Ovisnost  $G_{fmin}$  o  $\Sigma x$  i  $z_1$  za  $u = -4$ ;  $m_n = 1$  mm



Slika 5.16 Ovisnost  $G_{fmin}$  o  $\Sigma x$  i  $z_1$  za  $u = -10$ ;  $m_n = 1$  mm



Slika 5.17 Razlika faktora  $G_{fmin}$  kod vanjskog i unutarnjeg zahvata pri  $\Sigma x = 0$ ;  $m_n = 1$  mm

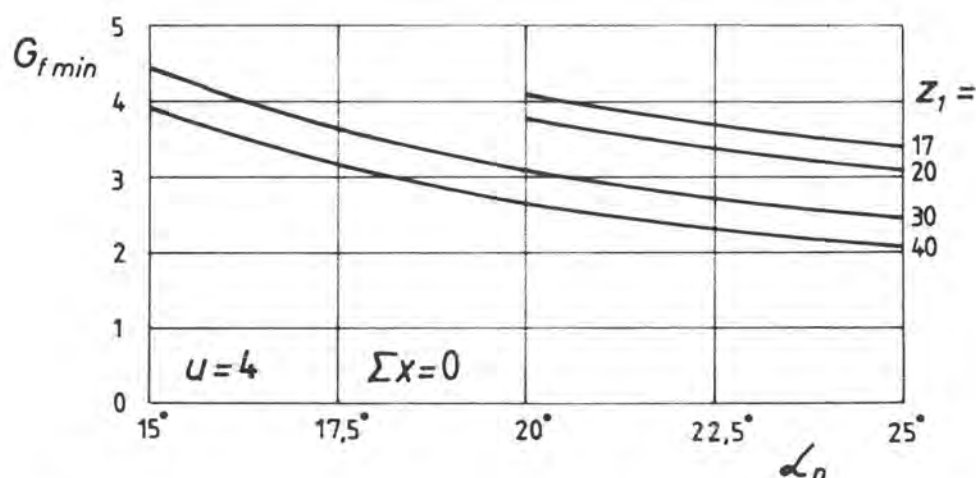


Slika 5.18 Razlika faktora  $G_{fmin}$  kod vanjskog i unutarnjeg zahvata pri  $\Sigma x = 0,6$ ;  $m_n = 1$  mm

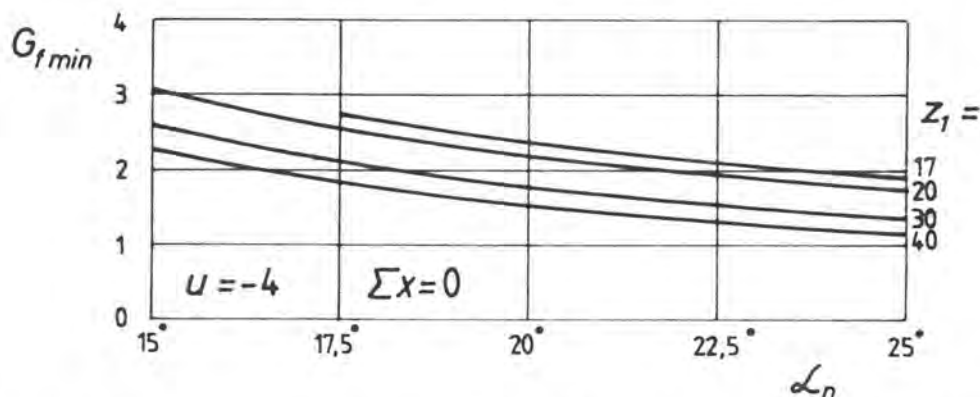
Uočava se da je pri  $\Sigma x = 0$  faktor  $G_{fmin}$  (a time i gubici klizanja) pri  $|u| = 2,5$  oko 2,5 puta manji kod unutarnjeg zahvata, a pri  $|u| = 10$  oko 1,2 puta manji. Pri  $\Sigma x = 0,6$  su te razlike manje izražene. Iz ovoga se može izvesti sljedeći zaključak:

d.) Sa stanovišta štednje energije poželjno je koristiti unutarnji zahvat, pogotovo pri malim apsolutnim vrijednostima  $|u|$  i pri manjim vrijednostima  $\Sigma x$ .

Na slikama 5.19 i 5.20 prikazan je utjecaj promjene zahvatnog kuta  $\alpha_n$  na faktor  $G_{fmin}$ . Prikazani utjecaj ima isti karakter za bilo koji prijenosni odnos i sumu faktora pomaka profila. Može se zaključiti sljedeće:

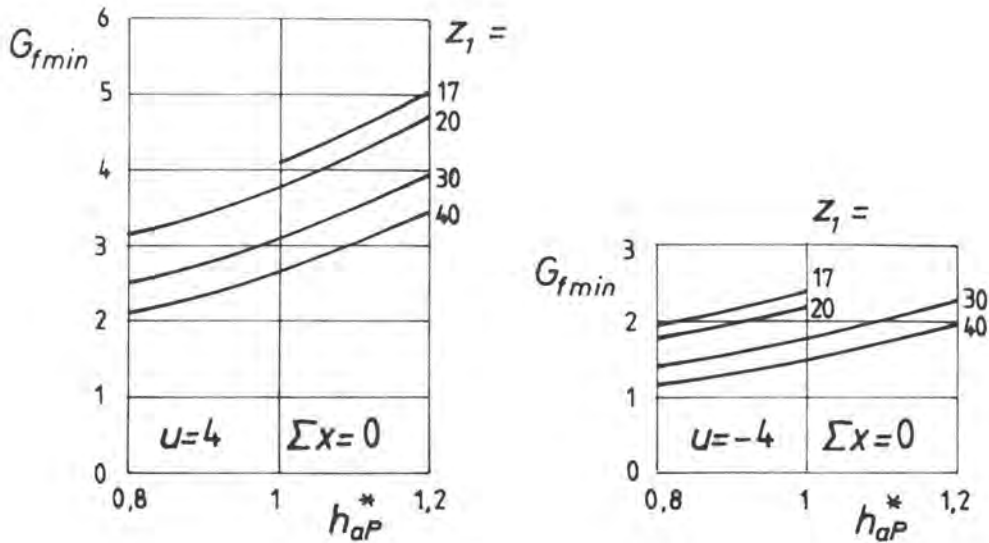


Slika 5.19 Utjecaj zahvatnog kuta  $\alpha_n$  na faktor  $G_{fmin}$  kod vanjskog zahvata;  $m_n = 1$  mm



Slika 5.20 Utjecaj zahvatnog kuta  $\alpha_n$  na faktor  $G_{fmin}$  kod unutarnjeg zahvata;  $m_n = 1$  mm

e.) Veći zahvatni kut daje manji faktor  $G_{fmin}$ . Objašnjenje je u manjoj dužini zahvata kod većih zahvatnih kutova.



Slika 5.21 Utjecaj promjene visine glave zuba na faktor  $G_{fmin}$ .

Utjecaj promjene visine glave zuba na faktor  $G_{fmin}$  prikazan je na slici 5.21. Može se izvesti sljedeći zaključak:

f.) Viši zub dovodi do većih gubitaka klizanja jer je u tom slučaju veća dužina zahvata.

### 5.3 FAKTORI $G_f$ ZUPČANIKA KORIŠTENIH U EKSPERIMENTU

U eksperimentalnom dijelu rada koriste se zupčanici  $z_1 = 28$ ,  $z_2 = 49$ ,  $m_n = 3,5$  mm,  $\Sigma x = 0,9543$ ,  $\alpha_n = 20^\circ$ ,  $h_{aP}^* = 1$ ,  $q_{a0}^* = 0,2$  i  $h_{a0}^* = 1,25$ . Ovakvi zupčanici su odabrani zbog toga što su se morali montirati u već postojeće reduktore. Vrijednosti faktora  $G_f$  za ovakav par zupčanika za različite kombinacije faktora pomaka profila  $x_1$  i  $x_2$  navedene su u tablici 5.1.



Tablica 5.1 Vrijednosti faktora  $G_f$  za zupčanike korištene u pokusima;

$$G_{fmin} = 5,2358 \text{ kod } x_1 = 0,4.$$

$x_1$	$x_2$	$G_f$
-0,5	1,4543	11,3712
-0,4	1,3543	10,1809
-0,3	1,2543	9,1133
-0,2	1,1543	8,1572
-0,1	1,0543	7,3053
0	0,9543	6,5635
0,1	0,8543	5,9756
0,2	0,7543	5,5597
0,3	0,6543	5,3139
0,4	0,5543	5,2358
0,42	0,5343	5,2412
0,5	0,4543	5,3271
0,6	0,3543	5,5848
0,7	0,2543	6,014
0,8	0,1543	6,6124
0,9	0,0543	7,3691
1	-0,0457	8,2471
1,1	-0,1457	9,239
1,2	-0,2457	10,35
1,3	-0,3457	11,5829
1,4	-0,4457	12,8794

## 6. MJERENJE GUBITAKA NA ISPITNOM UREĐAJU

### 6.1 CILJ MJERENJA

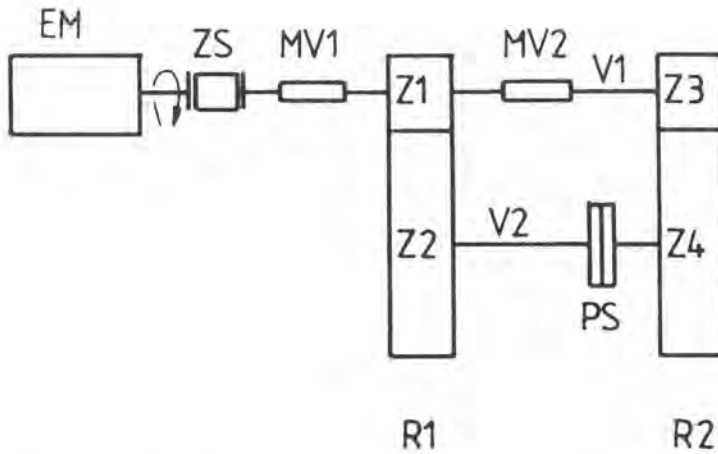
U prethodnim poglavljima je proračunima pokazano da za zahvat zupčanika s brojevima zubi  $z_1$  i  $z_2$  i za određenu sumu faktora pomaka profila  $\Sigma x$  za taj zupčanički par postoji neki optimalni faktor  $x_{1opt}$  pri kome su gubici klizanja zubi u zahvatu najmanji. Radi potkrepljivanja ove računске postavke, izvršena su mjerenja gubitaka na seriji parova zupčanika jednakih dimenzija koji su se (parovi) razlikovali samo u veličini faktora  $x_1$  i  $x_2$ , dok je suma  $\Sigma x$  bila kod svih parova jednaka. Svi su zupčanici imali jednaku površinsku obradu, a mjerenja su vršena uvijek u ulju iste viskoznosti i sastava. Tokom mjerenja se mijenjala brzina vrtnje i temperatura. Uspoređujući rezultate pri istoj brzini vrtnje i temperaturi mogli su se eliminirati svi utjecaji na gubitak klizanja osim utjecaja pomaka profila. Cilj mjerenja je bio da se dokaže da gubici klizanja zaista ovise o raspodjeli sume  $\Sigma x$  na zupčanike u zahvatu i da kod te ovisnosti postoji jedna optimalna vrijednost  $x_{1opt}$  pri kojoj su gubici klizanja najmanji.

Kako su pri vršenju mjerenja promjenjive veličine bile upravo faktori pomaka profila  $x_1$  i  $x_2$ , bilo je nužno više puta demontirati zupčanike (odnosno praktički rastaviti kompletan uređaj), te montirati nove s drugim faktorima pomaka profila. Pri tome je bilo nemoguće postići da svi elementi reduktora budu u potpuno identičnom položaju kao i prije. Posljedica toga su različiti gubici reduktora u praznom hodu, iako bi oni teoretski trebali biti jednaki. Stoga se moglo pretpostaviti da će rezultati mjerenja dati kvalitativnu potvrdu proračunima, ali da se računski i eksperimentalno određeni optimalni pomak  $x_{1opt}$  vjerojatno neće potpuno poklapati.

### 6.2 ISPITNI UREĐAJ

#### 6.2.1 PRINCIP RADA ISPITNOG UREĐAJA

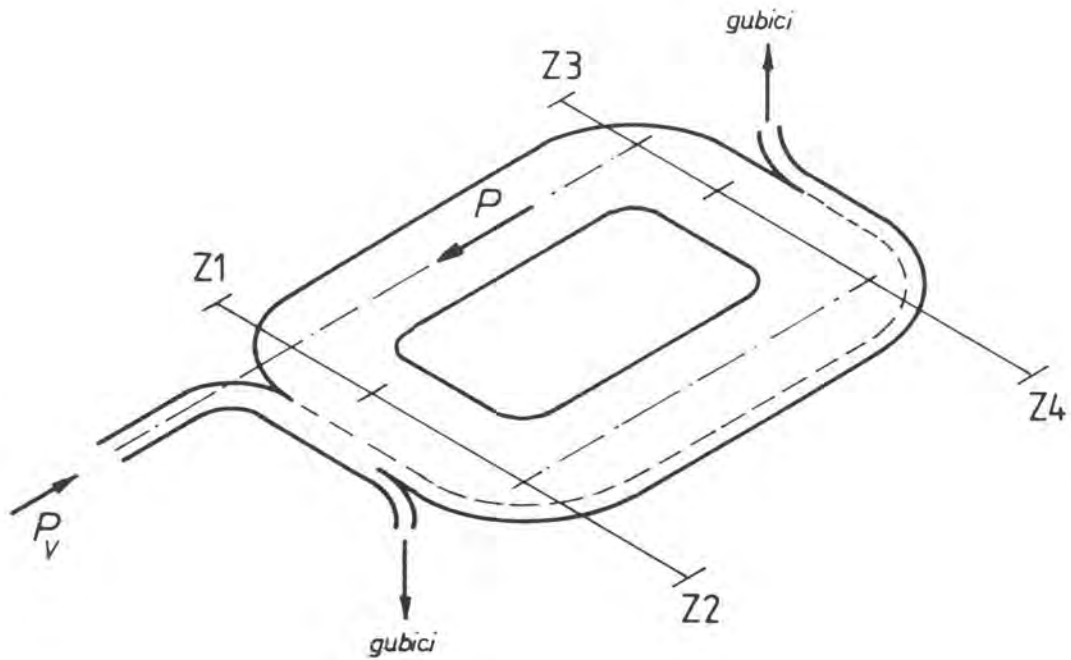
Prednaponski uređaj sa zatvorenim krugom opterećenja na kome su ispitivani zupčanici prikazan je na slici 6.1. Ovaj se uređaj također



Slika 6.1 Prednaponski uređaj

naziva uređajem s cirkulacijom snage. Elektromotor EM preko zupčaste spojke ZS pokreće vratilo V1 na kome se nalaze jednaki zupčanici Z1 i Z3 i mjerna vratila MV1 i MV2. Zupčanici Z1 i Z3 su u zahvatu sa jednakim zupčanicima Z2 i Z4 na vratilu V2 na kome je prirubnička spojka PS. Zupčanici Z1 i Z2 nalaze se u reduktoru R1, a zupčanici Z3 i Z4 u reduktoru R2. Elektromotor je na mrežu priključen preko tiristorskog pretvarača frekvencije kako bi mu se kontinuirano mogla mijenjati brzina vrtnje. Ukoliko se jedna prirubnica spojke PS zaokrene u odnosu na drugu za određeni kut, narinet će se u sistem moment uvijanja čija veličina na vratilu V1 iznosi  $T$  i koji se može izmjeriti na mjernom vratilu MV2. Veličina narinetog momenta  $T$  odgovara ostvarenoj deformaciji cijelog sistema. Ako se prirubnice u ovako međusobno zaokrenutom položaju povežu međusobno vijcima i učvrste, ostat će u sistemu narineti moment uvijanja i kod okretanja vratila će kroz dva reduktora cirkulirati snaga  $P$ .

Prilikom okretanja vratila i zupčanika javit će se otpori trenja na zupčanicima, ležajima, brtvama itd. pa se elektromotorom EM u sistem treba dodavati snaga  $P_V$  koja će pokrivati ove gubitke, odnosno treba narineti dodatni moment  $T_V$  koji se može izmjeriti na mjernom vratilu MV1. Na slici 6.2 prikazan je smjer toka snage  $P$  koja kruži sistemom i snage koja se gubi (pretvara u toplinu) za slučaj da se smjer okretanja poklapa sa smjerom narinetog momenta.



Slika 6.2 Tok snage u prednaponskom uređaju

Ako su sa  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  i  $T_4$  označeni momenti na zupčanicima, u mirovanju će biti

$$T_1 = T_3 = T \quad (6.01)$$

i

$$T_2 = T_4 \quad (6.02)$$

Uz označeni tok snage pri okretanju će biti

$$T_1 = T_3 + T_V = T + T_V \quad (6.03)$$

Uz stupanj iskoristivosti  $\eta_1$  u reduktoru R1 je

$$T_2 = T_1 u_{21} \eta_1 \quad (6.04)$$

gdje je odnos broja zubi

$$u_{21} = z_2 / z_1 \quad (6.05)$$

Uz stupanj iskoristivosti  $\eta_2$  u reduktoru R2 (snaga se prenosi sa  $z_4$  na  $z_3$ ) je

$$T_3 = T_4 u_{34} \eta_2 \quad (6.06)$$

gdje je

$$u_{34} = z_3 / z_4 \quad (6.07)$$

Kako su reduktori isti, to je  $z_1 = z_3$ ,  $z_2 = z_4$ , te

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta \quad (6.08)$$

$$u_{21} = 1 / u_{34} \quad (6.09)$$

Na zupčaniku  $z_3$  djeluje narinuti moment  $T = T_3$ . Između zupčanika  $z_2$  i  $z_4$  nema gubitaka pa je

$$T_2 = T_4 \quad (6.10)$$

$$T_4 = \frac{T_3}{u_{34} \eta} = \frac{T}{u_{34} \eta} \quad (6.11)$$

$$T_2 = (T + T_V) u_{21} \eta \quad (6.12)$$

$$(T + T_V) u_{21} \eta = \frac{T}{u_{34} \eta} \quad (6.13)$$

$$\eta^2 = \frac{T}{(T + T_V) u_{21} u_{34}} \quad (6.14)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{T}{T + T_V}} \quad (6.15)$$

Na ovaj se način na opisanom uređaju može izmjeriti i stupanj iskoristivosti reduktora. Također se može dobiti i iznos ukupnih gubitaka snage koji je upravo jednak narinutoj snazi

$$P_V = T_V \omega_1 \quad (6.16)$$

## 6.2.2 TEHNIČKI PODACI KORIŠTENIH APARATA I UREDAJA

### Elektromotor:

"Rade Končar" Tip 5 AZP 112 M 4/2

$\Delta/Y$  380 V - 7/9,4 A

$n = 1410/2860$  okr/min

$P = 3,2/4$  kW

### Tiristorski pretvarač frekvencije:

Secheron Varielec 15

### Zupčasta spojka:

"Tacke" Tip SBG 40

### Mjerno vratilo MV1:

"Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH" Tip T<sub>1</sub>

Mjerno područje do 20 kpm

### Mjerno vratilo MV2:

"Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH" Tip T<sub>1</sub>

Mjerno područje do 50 kpm

### Mjerno pojačalo:

"Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH" Tip KWS 6A-5

### Tahometar:

"Smiths"

Mjerna područja: 0-400, 0-2000 i 0-10000 okr/min

### Termometri:

"Dalmacija"

Digitalni termometar DT-1

Sonda TP-101

## 6.2.3 ZUPČANICI

Na uređaju za mjerenje gubitaka na zupčastim prijenosnicima vršena su mjerenja na pet kompleta zupčanika. Svaki komplet zupčanika sastojao se od dva jednaka manja zupčanika (Z1 i Z3) te dva jednaka veća zupčanika (Z2 i Z4). Zupčanici su imali sljedeću geometriju odnosno dimenzije:

Osnovni profil ozubljenja	DIN 867
Zahvatni kut	$\alpha_n = 20^\circ$
Kut nagiba zuba	$\beta = 0^\circ$
Modul	$m_n = 3,5 \text{ mm}$
Broj zubi	$z_1 = z_3 = 28$ $z_2 = z_4 = 49$
Razmak osi	$a = 137,841 \text{ mm}$
Suma faktora pomaka profila	$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0,954$
Širina zupčanika	$b_1 = b_3 = 56 \text{ mm}$ $b_2 = b_4 = 54 \text{ mm}$
Kvaliteta izrade po DIN-u	5
Kvalitet i polje tolerancije	5 b 26
Materijal zupčanika	Č.5421, cementiran na dubinu 0,7 mm i kaljen na tvrdoću HV 700 do HV 780.

Kompleti zupčanika su se razlikovali po pomaku profila koji su navedeni u tablici 6.1.

Tablica 6.1 Faktori pomaka profila ispitivanih zupčanika

Komplet	Faktor pomaka profila $x$	
	$z_1 \mid z_3$	$z_2 \mid z_4$
1	-0,5	1,454
2	-0,2	1,154
3	0,42	0,534
4	0,9	0,054
5	1,1	-0,146

Zupčanici su izrađeni u Zavodima "TITO" Skopje - Fabrika za oprema i prenosnici "FOP".

Tokom mjerenja je na kompletu zupčanika 4 došlo do oštećenja površine boka zuba, tako da ta mjerenja nisu mogla biti uzeta u obzir.

#### 6.2.4 REDUKTORI

Korištena su dva postojeća jednaka reduktora za koje su izrađena nova vratila za zupčanike Z1 i Z3, te novi zupčanici koji su se svi navlačili na vratila kako bi se omogućila njihova izmjenjivost. Veza između vratila i zupčanika ostvarena je pomoću pera.

Vratila su uležištena u samoudesivim valjnim ležajevima. Izlazi vratila su zabrtvljeni pomoću radijalnih brtvenica.

Na poklopcima kućišta su izbušene rupe kroz koje su bile zataknute sonde digitalnih termometara. Vrh sonde se nalazio uz samo dno reduktora, ali ne dotičući ga.

#### 6.2.5 MAZIVO

Zupčanici su bili podmazivani uljem INA EPOL SP 100 koje je laboratorijski ispitano u INA - Rafineriji Zagreb. Karakteristike ulja su:

- kinematska viskoznost  $\nu_{40^{\circ}\text{C}} = 91,47 \text{ mm}^2/\text{s}$

$\nu_{100^{\circ}\text{C}} = 10,13 \text{ mm}^2/\text{s}$

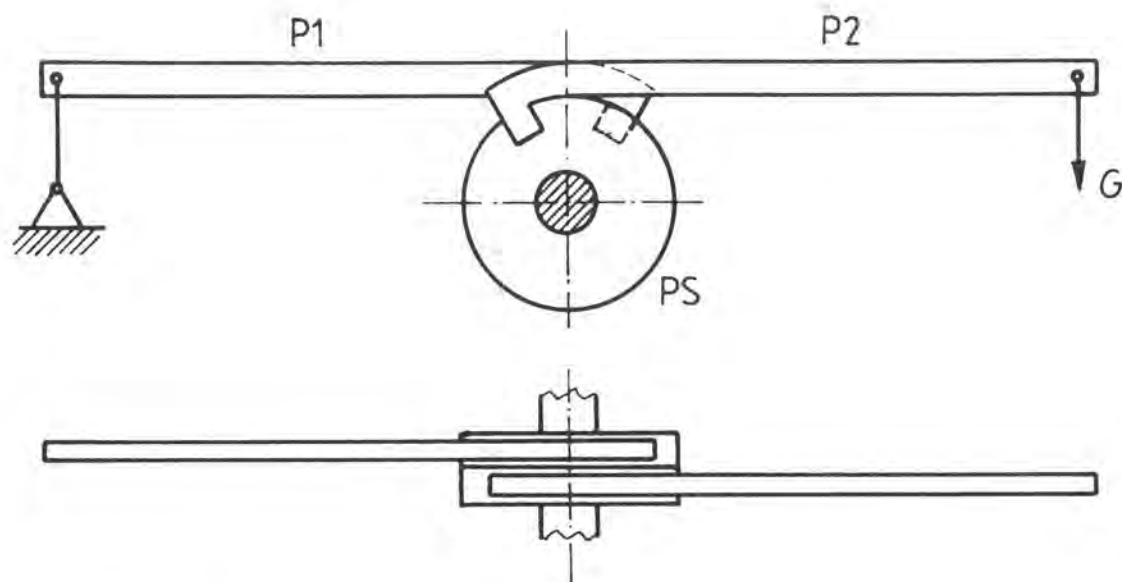
- indeks viskoznosti 89

#### 6.2.6 UREDAJ ZA OPTEREĆIVANJE MOMENTOM

##### 6.2.6.1 Izvedba

Opterećivanje uređaja momentom  $T$  vršeno je na sljedeći način. Na lijevu odnosno desnu prirubnicu prirubničke spojke PS pričvršćene su poluge P1 odnosno P2. One na jednom kraju imaju zub koji ulazi u utor na obodu prirubnice, sl. 6.3. Poluga P1 je bila fiksirana, a na polugu P2 je





Slika 6.3 Uredaj za opterećivanje momentom

vješan teret  $G$  kojim se postizavao moment  $T$  na vratilu  $V1$ , a koji se mogao izmjeriti pomoću mjernog vratila  $MV2$ . Prilikom vješanja tereta dolazi do uvijanja vratila pa su se prirubnice međusobno zakrenule, u kojem položaju su zatim bile međusobno fiksirane pomoću šest vijaka. Na jednoj prirubnici su rupe za vijke bile eliptičnog oblika kako bi se omogućila kutna zakretanja prilikom opterećivanja.

Neposredno pokraj prirubničke spojke  $PS$  ugrađen je valjni ležaj pod koji se prilikom vješanja tereta  $G$  stavlja podesivi oslonac. Na taj način je kod opterećivanja omogućena slobodna rotacija vratila do koje dolazi prilikom uvijanja, a spriječeno je savijanje vratila  $V2$  pod teretom  $G$ .

#### 6.2.6.2 Granice opterećivanja

Kontrolom čvrstoće upotrebljenih zupčanika dobiveno je da oni mogu prenositi obodnu silu  $F_{wt} \approx 10000$  N. Ovoj sili u kinematskom polu odgovara Hertzov pritisak

$$\sigma_H = Z_E Z_H \sqrt{\frac{u+1}{u} \cdot \frac{F_{wt}}{b \cdot d_1}} \quad (6.17)$$

Za čelične zupčanike je faktor elastičnosti  $Z_E = 189,8$   $(\text{N}/\text{mm}^2)^{0,5}$ , a faktor zone  $Z_H = 2,295$ , pa je  $\sigma_H = 750,6 \text{ N}/\text{mm}^2$ .

Materijal vratila je nepoznat, a najmanji promjer vratila V2 je  $d_{shmin} = 32 \text{ mm}$ . Uz pretpostavku da se radi o konstrukcijskom čeliku Č.0745 sa dozvoljenim torzionim naprezanjem  $\tau_t \text{ dozv} \approx 26 \text{ N}/\text{mm}^2$  dobivamo najveći dozvoljeni moment

$$T_{2max} = \tau_{dozv} d^3 \pi / 16 = 167 \text{ Nm} \quad (6.18)$$

Odgovarajući dozvoljeni moment na vratilu V1 je

$$T_{1max} = T_{2max} / u \approx 95 \text{ Nm} \quad (6.19)$$

pa je uređaj opterećivan do  $T = 90 \text{ Nm}$ , čemu odgovara obodna sila  $F_{wt} \approx 1800 \text{ N}$ , odnosno Hertzov pritisak  $\sigma_H = 750,6 \sqrt{1800/10000} = 318 \text{ N}/\text{mm}^2$ .

Obodna sila odnosno moment su 5,5 puta manji od vrijednosti koje bi zupčanici po proračunu čvrstoće mogli maksimalno podnijeti, a Hertzov pritisak je manji za  $\sqrt{5,5} \approx 2,4$  puta. Usprkos tome, uz dostatno podmazivanje, na kompletu zupčanika 4 došlo je do oštećenja površine boka zuba.

Mjerenja gubitaka su dakle vršena u području niskih opterećenja zupčanika, a to je razlog visokog procentualnog udjela gubitaka praznog hoda u ukupnim gubicima.

Kako zupčanici zbog postojeće konstrukcije reduktora nisu smješteni točno na sredini vratila između ležajeva, veća opterećenja bi dovodila do lošeg zahvata uzduž zuba usljed deformacije vratila.

## 6.3 PROVEDBA ISPITIVANJA

### 6.3.1 BAŽDARENJE MJERNIH VRATILA

Mjerna vratila MV1 i MV2 su baždarena na sljedeći način. Jedna prirubnica mjernog vratila je fiksirana, a na drugu je pričvršćena poluga na čiji su kraj vješani utezi. Uz poznatu težinu utega i dužinu kraka poluge na kojoj težina djeluje, mogao se točno odrediti moment kojim je mjerno

vratilo opterećeno. Za pojedine momente  $T$  na mjernim vratilima očitavane su vrijednosti  $J$  na skali mjernog pojačala. Iz tih vrijednosti je izračunat preračunski faktor  $f$  kao odnos momenta i očitane vrijednosti. Pokazalo se da za oba mjerna vratila faktor  $f$  nije konstantan nego da lagano opada s povećanjem momenta. Rezultati mjerenja su interpolirani pravcem.

Za mjerno vratilo MV1 kojim se mjeri veličina momenta  $T_V$  za savladavanje gubitaka, preračunski faktor je

$$f_V = T_V / J_V \quad (6.21)$$

i za njega vrijedi

$$f_V = 7,326129 - 0,6162435 \cdot J_V \quad (6.22)$$

Za mjerno vratilo MV2 kojim se na vratilu V1 mjeri veličina narinutog momenta  $T$  preračunski faktor je

$$f = T / J \quad (6.23)$$

i za njega vrijedi

$$f = 16,25549 - 0,04624721 \cdot J \quad (6.24)$$

### 6.3.2 UHODAVANJE ZUPČANIKA

Uhodavanje zupčanika prije početka mjerenja je potrebno radi zaglađivanja bokova zuba i odstranjivanja malih mjestimičnih nepravilnosti i oštećenja. Režim uhodavanja je naveden u tablici 6.2.

Tablica 6.2 Režim uhodavanja zupčanika

Brzina vrtnje $n_1$ (okr/min)	Moment $T$ (Nm) za komplet				Trajanje (min)
	1	2	3	5	
500	0	0	0	0	60
1500					60
500					45
1000	37	23	23	25	45
1400					45
500					60
1000	63	66	71	61	60
1400					50

Ukupno 7 sati 5 min

### 6.3.3 MJERENJE GUBITAKA

Nakon montaže svakog kompleta zupčanika gubici su mjereni na sljedeći način. Prvo su mjereni gubici u praznom hodu. Prirubnička spojka PS je fiksirana u takvom položaju da na uređaju nema narinutog momenta ( $T = 0$ ), odnosno da unutar uređaja ne cirkulira snaga. Brzina vrtnje  $n_f$  se stepenasto povećavala do oko 1500 okr/min i zatim smanjivala do oko 200 okr/min. Pri određenim izmjerenim brzinama vrtnje mjerene su temperature ulja  $\theta_1$  i  $\theta_2$  na reduktorima R1 i R2, te očitavane vrijednosti  $J_V$  koje odgovaraju narinutom momentu za savladavanje gubitaka  $T_V$ . Tokom ovakvog jednog ciklusa reduktori su se zagrijavali odnosno hladili pa se isti postupak ponavljao više puta pri raznim temperaturama koje su se generalno povećavale. Temperature su općenito varirale u području od 20 do 35°C.

Nakon mjerenja gubitaka praznog hoda, na prirubničkoj spojci PS bio je narinut moment  $T$  pri kome se ponavljao isti postupak mjerenja gubitaka pri raznim brzinama vrtnje i temperaturama.

Za svaki komplet zupčanika su vršena mjerenja u praznom hodu i do šest raznih narinutih momenata  $T$ . Pri svim mjerenjima su veći zupčanici  $z_2$  i  $z_4$  u mirovanju bili uronjeni u uljnu kupku 20 ... 21 mm.

### 6.3.4 GREŠKE PRI MJERENJU

Radi spoja s tiristorskim pretvaračem frekvencije, kutna brzina elektromotora nije bila nikad potpuno konstantna nego se uvijek malo kolebala oko neke srednje vrijednosti. S tahometra s kazaljkom očitana kolebanja brzine vrtnje su iznosila  $\pm 3\%$  pri  $n_f = 200$  okr/min, da bi se povećavanjem brzine vrtnje smanjila na  $\pm 1\%$  pri  $n_f = 1500$  okr/min. Posljedica ovih kolebanja je bila smanjena preciznost očitavanja vrijednosti  $J_V$  s instrumenta s kazaljkom na mjernom pojačalu, pogotovo kod brzina vrtnje manjih od 500 okr/min. Maksimalna moguća točnost očitavanja vrijednosti  $J_V$  s obzirom na nivo kvalitete uređaja je postignuta tako da je očitavanja vršila uvijek ista osoba na isti način, pa se može pretpostaviti da su očitane vrijednosti uvijek bile nešto veće ili uvijek bile nešto manje od stvarnih. Kako se međutim na kraju analize rezultati mjerenja samo međusobno uspoređuju, ova sistematska greška nije mogla imati znatnog utjecaja.

Temperatura uljne kupke u reduktorima je očitavana s digitalnih displeja termometara pa tu greške pri očitavanju nije bilo.

Povećanjem brzine gubici su rasli pa se obično povećavala i temperatura, i obratno, smanjivanjem brzine se temperatura obično smanjivala. Kako pri većim brzinama zupčanici više raspršuju ulje čija toplina prelazi na stijenke reduktora i okolinu, pa je bolje i hlađenje, događalo se i suprotno; smanjivanjem brzine temperatura je rasla, jer prije toga pri većim brzinama nastala toplina još nije uspjela preći na okolinu. Osim toga, iz reduktora R1 izlaze tri vratila, a iz reduktora R2 samo dva vratila, što znači da uvjeti hlađenja oba reduktora nisu jednaki. Ni strujanje zraka oko oba reduktora sigurno nije bilo jednako, pa je logično da su termometri gotovo uvijek pokazivali različitu temperaturu. Ova je razlika u velikoj većini mjerenja bila manja od 2°C, a u malom broju mjerenja je bila veća, maksimalno do 3,3°C.

Mjerenja su vršena i kada se brzina vrtnje stepenasto povećavala, a i kad se smanjivala. Na taj način su se postizali razni uvjeti i izbjegla sistematska greška koja može nastati usljed različitog prijelaza topline i različite količine ulja koje se nalazilo na dnu reduktora i koje je predstavljalo otpor okretanju velikih zupčanika.

Da bi se greške što je moguće više eliminirale, izvršen je veliki broj mjerenja gubitaka pri raznim opterećenjima, brzinama vrtnje i temperaturama. Broj brojčanih podataka dobivenih mjerenjima za pojedine komplete iznosi:

Komplet 1 - 2448 podataka

Komplet 2 - 2452 podataka

Komplet 3 - 3264 podataka

Komplet 5 - 2256 podataka

---

Ukupno 10420 brojčanih podataka

## 7. REZULTATI MJERENJA

### 7.1 ANALIZA REZULTATA MJERENJA

#### 7.1.1 PLOHE OVISNOSTI $J_V - n_1 - \vartheta$

Na mjernom uređaju je uz razne narinute momente  $T$  mjereno ukupni moment gubitaka oba reduktora  $T_V$  pri čemu se na mjernom pojačalu očitavao iznos  $J_V$ . Ovaj iznos (odnosno gubitak) je pri konstantnom narinutom momentu  $T$  ovisio o brzini vrtnje  $n_1$  i o temperaturama u reduktorima R1 i R2. U daljnjem proračunu je uzeta u obzir srednja temperatura

$$\vartheta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \quad (7.01)$$

jer su u većini mjerenja temperature  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_2$  bile vrlo blizu, uz razliku manju od 2°C.

Radi utvrđivanja ovisnosti izmjerenih veličina  $J_V$ ,  $n_1$  i  $\vartheta$  pri konstantnom narinutom momentu  $T$ , korišten je regresioni polinom oblika

$$J_V = a + b_1 n_1 + b_2 \vartheta + b_3 n_1^{0,5} \quad (7.02)$$

za koji je procijenjeno da odgovara datoj ovisnosti.

Ovakav jednostavan oblik je izabran zbog toga što bi kompliciraniji oblik usljed netočnosti mjerenja, odnosno rasipanja izmjerenih veličina, pogotovo na rubovima mjernog područja, doveo do izvitoperenja regresione plohe. Ovakva ploha bi možda bolje odgovarala pojedinim mjerenjima, ali ne bi mogla nikako odgovarati svim mjerenjima. Također bi moglo proizaći da promjenom brzine vrtnje i temperature porast odnosno pad gubitaka nije gladak.

Koeficijenti  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  i  $b_3$  određeni su pomoću elektroničkog računala po metodi najmanjih kvadrata za svako mjerenje pri kojem je narinuti moment  $T$  bio konstantan. Ovi koeficijenti su navedeni u tablicama 7.1 do 7.4.

Tablica 7.1 Koeficijenti regresionog polinoma za komplet zupčanika 1

Mjerenje broj	$J$	Koeficijenti $a, b_1, b_2, b_3$	Standardna devijacija
100	0	0,22324260627 -0,000068816521299 -0,0059534201993 0,011318779355	0,01285
101	0	0,24176582643 -0,000079015436912 -0,0068318868677 0,011644299229	0,01333
102	2,48	0,57826505792 0,000080471445902 -0,0074489805295 0,0019671350772	0,01289
103	2,57	0,63041279541 0,000074033463345 -0,008424376443 0,0015562575409	0,01273
104	4,17	0,73801656318 0,000077710388766 -0,0065009227837 -0,00013470893025	0,01505
105	5,5	0,95650134556 0,000079755080929 -0,0087422214807 -0,0018412215655	0,01344

Tablica 7.2 Koeficijenti regresionog polinoma za komplet zupčanika 2

Mjerenje broj	$J$	Koeficijenti $a, b_1, b_2, b_3$	Standardna devijacija
200	0	0,24252694476 -0,00017627976549 -0,0080925327738 0,01691299331	0,01517
201	1,72	0,62483839408 0,000056955609842 -0,013201285094 0,0049211349022	0,01589
202	2,3	0,47226798803 -0,000016368642539 -0,0098186435209 0,0098120270383	0,02017
203	3,07	0,46141275959 -0,000061003680821 -0,0079002254518 0,01140198031	0,01292
204	4,03	0,8059468002 0,00001123579632 -0,015069556698 0,005999795945	0,01548
205	5,43	0,59228033847 -0,00001575410226 -0,0044529826488 0,006700795629	0,01528



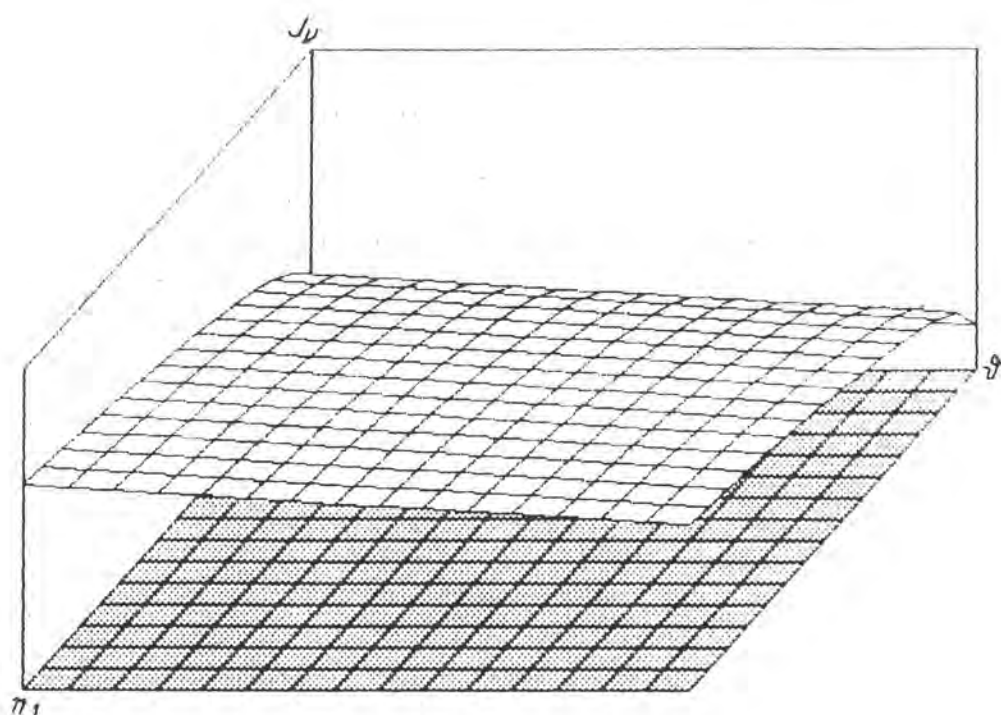
Tablica 7.3 Koeficijenti regresionog polinoma za komplet zupčanika 3

Mjerenje broj	$J$	Koeficijenti $a, b_1, b_2, b_3$	Standardna devijacija
300	0	0,24671642144 -0,00011944682528 -0,006375439579 0,013062523523	0,01904
301	0,78	0,17393118203 -0,000092834261652 -0,0021543830596 0,01254172864	0,02135
302	2,09	0,31871417429 -0,000060566063339 -0,0067195647098 0,012098183257	0,01595
303	3,75	0,4145193633 -0,000042669245213 -0,0080161600595 0,011447173886	0,01453
304	4,6	0,48597259774 -0,000043843484446 -0,0090208377306 0,011469809335	0,01629
305	5,23	0,43161135766 -0,00013174488666 -0,0083698823884 0,01606091093	0,01814
306	5,28	0,52192162975 -0,000061310049277 -0,0096579379465 0,012210528683	0,01464

Tablica 7.4 Koeficijenti regresionog polinoma za komplet zupčanika 5

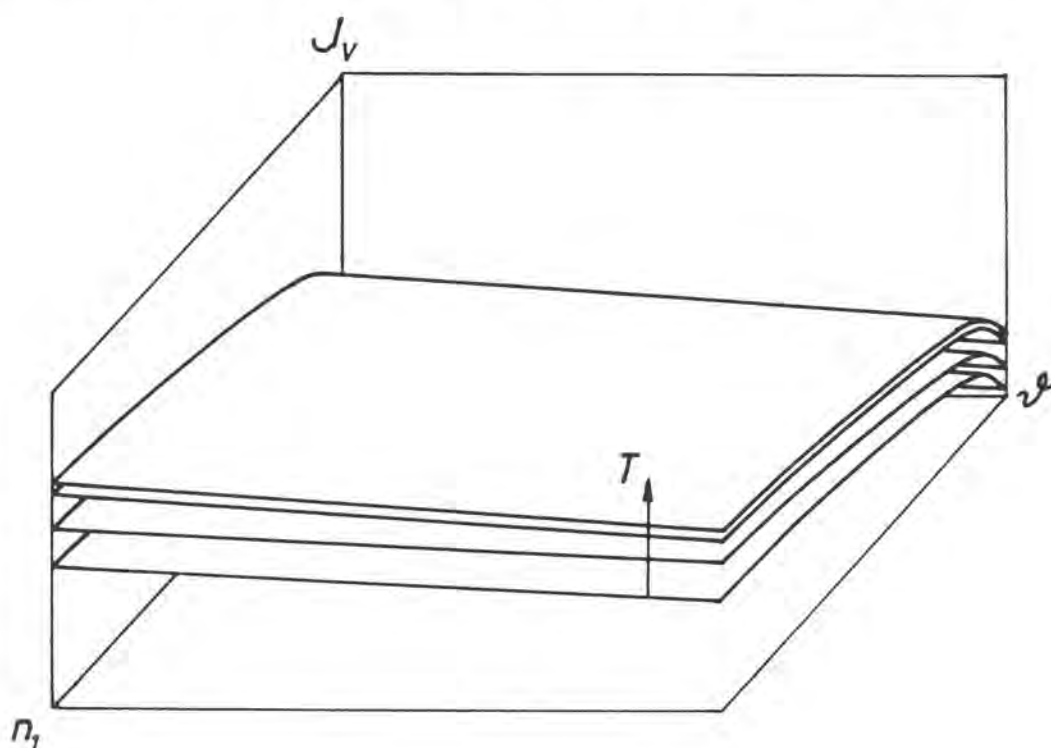
Mjerenje broj	$J$	Koeficijenti $a, b_1, b_2, b_3$	Standardna devijacija
500	0	0,31314555108 -0,000066587178321 -0,0057921151713 0,011463331269	0,02273
501	1,1	0,45916790673 -0,000025302724556 -0,0063930735648 0,0083702199621	0,01683
502	2,06	0,69470517713 0,000057636143145 -0,011195650485 0,0038590096473	0,01719
503	3	0,65835486784 -0,000052122089003 -0,011261499196 0,010593309181	0,01848
504	4,46	0,88817519043 0,000012375577938 -0,014284954999 0,0057644860257	0,01947

Dobiveni polinomi mogu se prikazati kao plohe u koordinatnom sistemu  $J_V - n_f - \phi$ . Karakterističan izgled plohe je prikazan na slici 7.1.



Slika 7.1 Ploha ovisnosti  $J_v - n_1 - \phi$

Ukoliko bi se za jedan komplet zupčanika sve ovakve plohe u koordinatnom sistemu smjestile jedna iznad druge, dobila bi se slika 7.2.



Slika 7.2 Plohe gubitaka

Viša ploha odgovara većem narinutom momentu  $T$ , a najniža odgovara praznom hodu.

Da bi se smanjio utjecaj grešaka nastalih zbog neravnomjernog zagrijavanja i hlađenja reduktora tokom mjerenja, kao i drugih mogućih grešaka, u daljnju analizu su uzeti podaci koji se odnose na sredinu intervala izmjerenih brzina vrtnje i na sredinu intervala izmjerenih temperatura, a to je brzina vrtnje  $n_1 = 850$  okr/min i temperatura  $\vartheta = 28^\circ\text{C}$ .

### 7.1.2 OVISNOST $T_V - T$

Prema izrazima (6.23) do (6.26), narinuti moment opterećenja bit će

$$T = (16,25549 - 0,04624721 \cdot J) J \quad (7.03)$$

a moment gubitka

$$T_V = (7,326129 - 0,6162435 \cdot J_V) J_V \quad (7.04)$$

Moment gubitaka  $T_V$  za svaki narinuti moment  $T$  dobit će se uvrštavanjem  $n_1 = 850$  okr/min i  $\vartheta = 28^\circ\text{C}$  u regresione polinome, i korištenjem izraza (7.03) i (7.04). U tablicama 7.5 do 7.8 dani su dobiveni nizovi vrijednosti koji daju ovisnost  $T_V = f(T)$ .

Tablica 7.5 Ovisnost  $T_V = f(T)$  za komplet 1

$T$ (Nm)	$T_V$ (Nm)
0	2,337
0	2,3006
40,0291	3,4784
41,4711	3,5279
66,9812	4,2929
88,0062	4,9928

Tablica 7.6 Ovisnost  $T_V = f(T)$  za komplet 2

$T$ (Nm)	$T_V$ (Nm)
0	2,5519
27,8226	3,1522
37,1429	3,3037
49,4684	3,6481
64,7585	3,9649
86,9037	4,4987

Tablica 7.7 Ovisnost  $T_V = f(T)$  za komplet 3

$T$ (Nm)	$T_V$ (Nm)
0	2,4714
12,6511	2,8342
33,7719	3,0485
60,3077	3,4252
73,7966	3,7132
83,7512	3,8663
84,5396	3,8787

Tablica 7.8 Ovisnost  $T_V = f(T)$  za komplet 5

$T$ (Nm)	$T_V$ (Nm)
0	3,0266
17,825	3,527
33,29	3,7945
48,3502	4,2236
71,5795	4,6109

Kako bi se dobiveni rezultati mogli dalje obrađivati, regresijom se provlači pravac kroz točke koje odgovaraju izmjerenim vrijednostima. Doduše, moguće je kroz te točke provući i krivulje višeg stupnja, ali to može zbog toka ovakvih krivulja dovesti do većih grešaka u daljnjoj analizi. Sada će biti

$$T_V = a + b_1 T \quad (7.05)$$

Na slikama 7.3 do 7.6 prikazani su dijagrami ovisnosti  $T_V = f(T)$  i navedeni koeficijenti regresionog pravca  $a$  i  $b_1$ . Koeficijent  $a$  ima značenje momenta gubitka u praznom hodu  $T_{V0}$  ( $T = 0$ ), pa će biti

$$T_V - T_{V0} = b_1 T \quad (7.06)$$

Koeficijenti  $a$  i  $b_1$  kao i koeficijenti korelacije  $r$  navedeni su u tablici 7.9.

Tablica 7.9 Koeficijenti pravca  $T_V = f(T)$

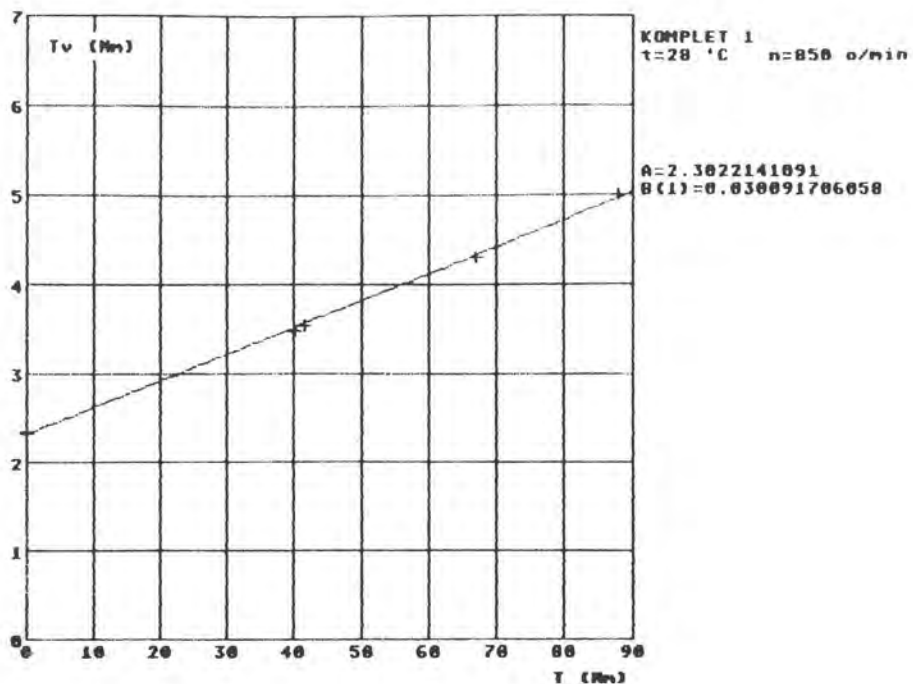
Komplet zupčanika	$a$	$b_1$	$r$
1	2,3022141091	0,030091706058	0,9996
2	2,5251693745	0,022429805447	0,999
3	2,5324152147	0,015797900101	0,9949
5	3,0790141502	0,022143505463	0,9952

Uz usvojenu pretpostavku da je gubitak kotrljanja konstantan, dijagram ovisnosti  $T_V = f(T)$  za  $n_f = \text{konst.}$  i  $\phi = \text{konst.}$  izgledat će kao što je prikazano na slici 7.7.

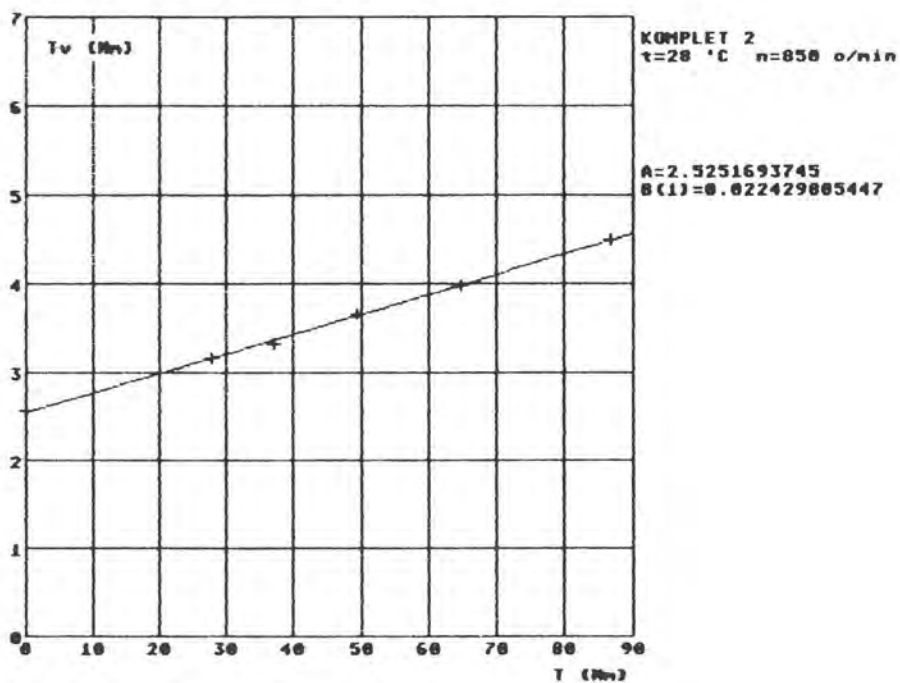
Općenito će biti

$$T_{VZS} = T_V - T_{V0} - T_{VBP} \quad (7.07)$$

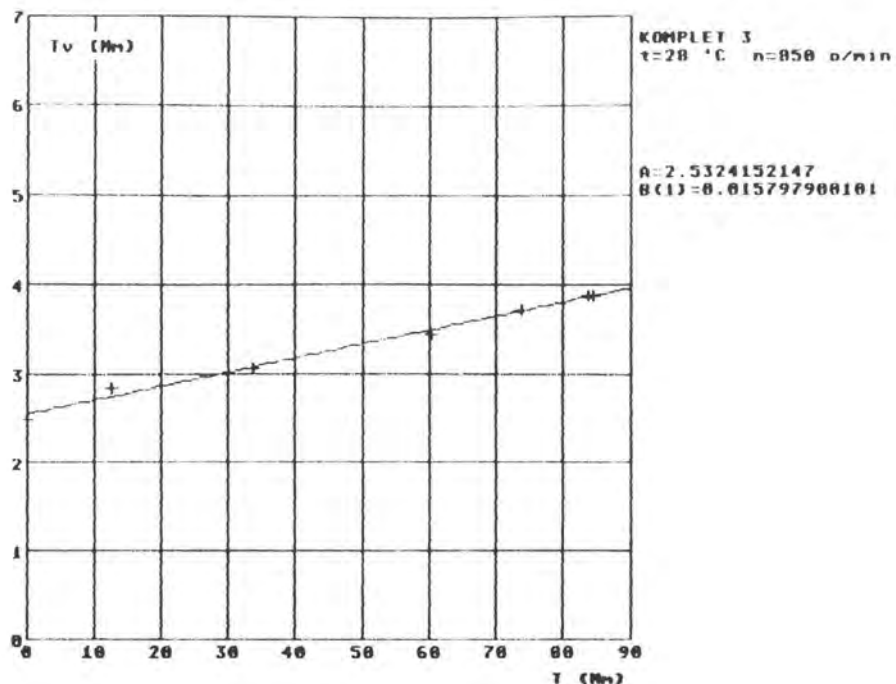
Veličine  $T_V$  i  $T_{V0}$  su izmjerene i računski obrađene, a gubitak u ležajevima usljed opterećenja  $T_{VBP}$  treba izračunati.



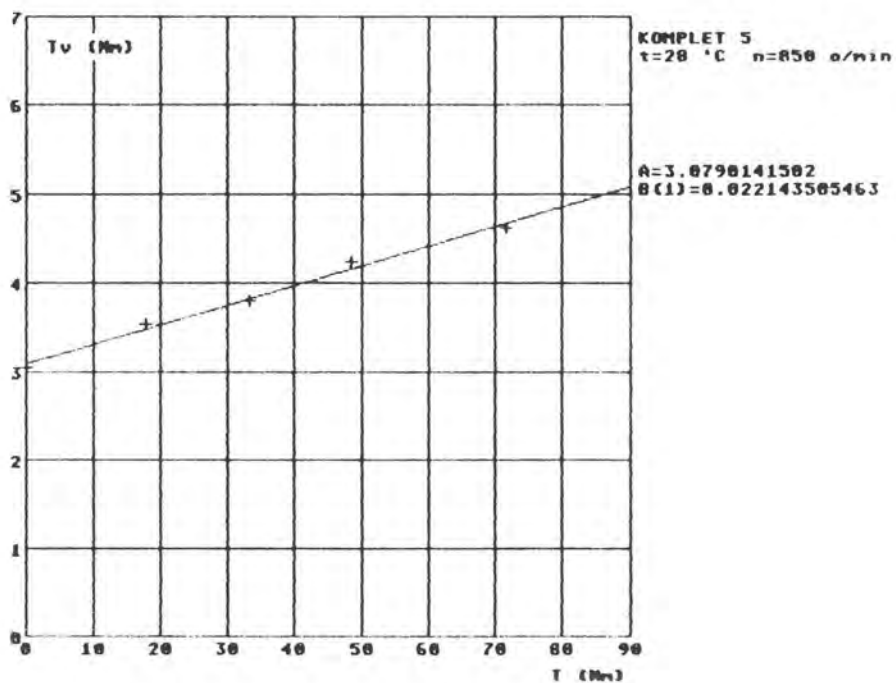
Slika 7.3 Regresioni pravac ovisnosti  $T_V = f(T)$  za komplet 1



Slika 7.4 Regresioni pravac ovisnosti  $T_V = f(T)$  za komplet 2

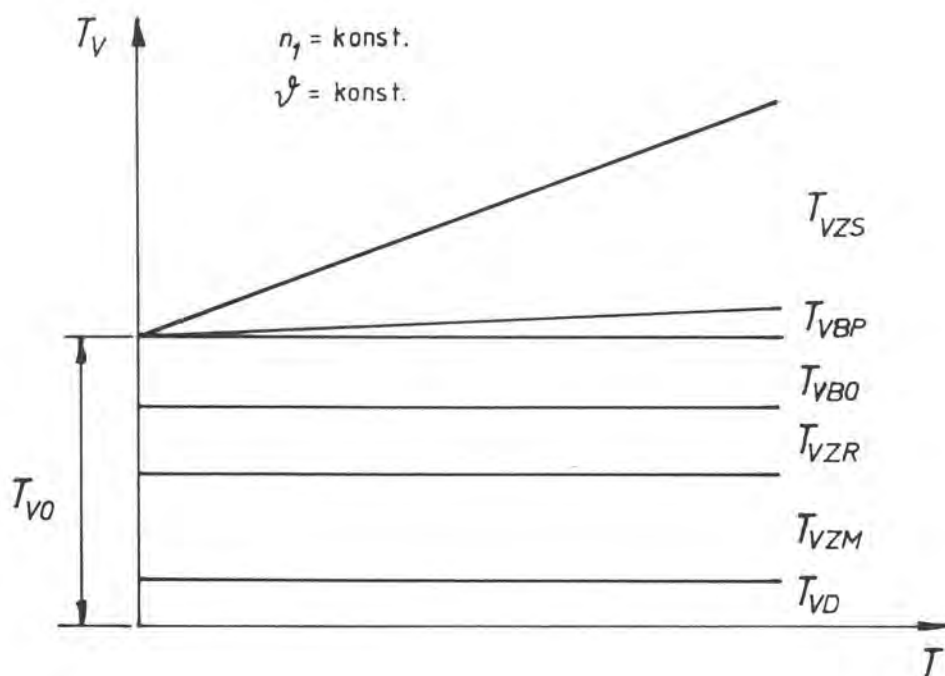


Slika 7.5 Regresioni pravac ovisnosti  $T_V = f(T)$  za komplet 3



Slika 7.6 Regresioni pravac ovisnosti  $T_V = f(T)$  za komplet 5

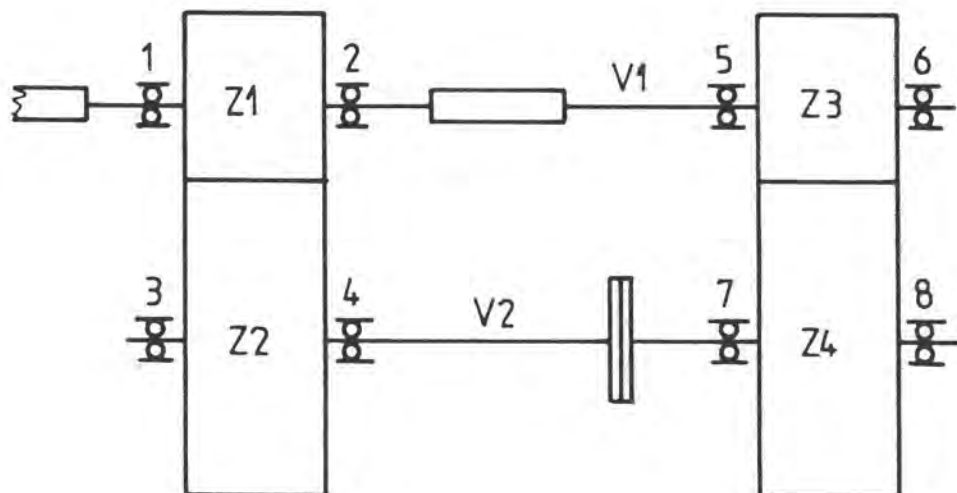




Slika 7.7 Momenti gubitka

### 7.1.3 GUBITAK SNAGE U LEŽAJEVIMA

Na ispitnom uređaju su vratila uležištena u osam valjnih ležajeva, slika 7.8. Karakteristike ležajeva navedene su u tablici 7.10.



Slika 7.8 Raspored valjnih ležajeva

Tablica 7.10 Karakteristike valjnih ležajeva

Broj ležaja	Tip ležaja	Glavne dimenzije $d / D / B$ (mm)	Dinamička nosivost $C$ (kN)
1,2,3, 5,6,7	FAG 222/2207 samoudesivi bačvasti	$\phi 35 / \phi 72 / 23$	50
4	FAG 22208 samoudesivi bačvasti	$\phi 40 / \phi 80 / 23$	57,4
8	FLTI POLAND 2208 dvoredni kuglični samoudesivi	$\phi 40 / \phi 80 / 23$	17,3

Gubici u ležajevima se mogu podijeliti na gubitak u praznom hodu i porast gubitka uzrokovan opterećenjem:

$$P_{VB} = P_{VB0} + P_{VBP} \quad (7.08)$$

Moment trenja u ležaju je [27]

$$T_R = m d^{0,75} C / 1000^{1,25} \quad \text{Nm} \quad (7.09)$$

a

$$m = m_0 + m_P \quad (7.10)$$

gdje je

$m$  = faktor trenja

$m_0$  = faktor trenja praznog hoda

$m_P$  = faktor trenja koji odgovara opterećenju ležaja

$d$  = unutarnji promjer ležaja (u m)

$C$  = dinamička nosivost ležaja (u N)

Faktor trenja  $m$  ovisi o odnosu sile koja djeluje na ležaj i dinamičke nosivosti  $F/C$ . Za područje  $F/C = 0 \dots 0,1$  koje odgovara opterećenjima na ispitnom uređaju, može se uspostaviti sljedeća linearna ovisnost:

- za ležajeve 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7:

$$m = m_0 + m_p = 0,091 + 1,623 F/C \quad (7.11)$$

- za ležaj 8:

$$m = m_0 + m_p = 0,0616 + 0,845 F/C \quad (7.12)$$

Povećanje momenta trenja u ležajevima uzrokovano opterećenjem bit će

$$T_{RP} = m_p d^{0,75} C/1000^{1,25} \quad (7.13)$$

Uvrštavanjem dijela izraza (7.11) u (7.13) za ležajeve 1, 2, 3, 5, 6 i 7 dobiva se

$$T_{RP} = 2,3354 \cdot 10^{-5} F \quad (7.14)$$

a za ležaj 4

$$T_{RP} = 2,5814 \cdot 10^{-5} F \quad (7.15)$$

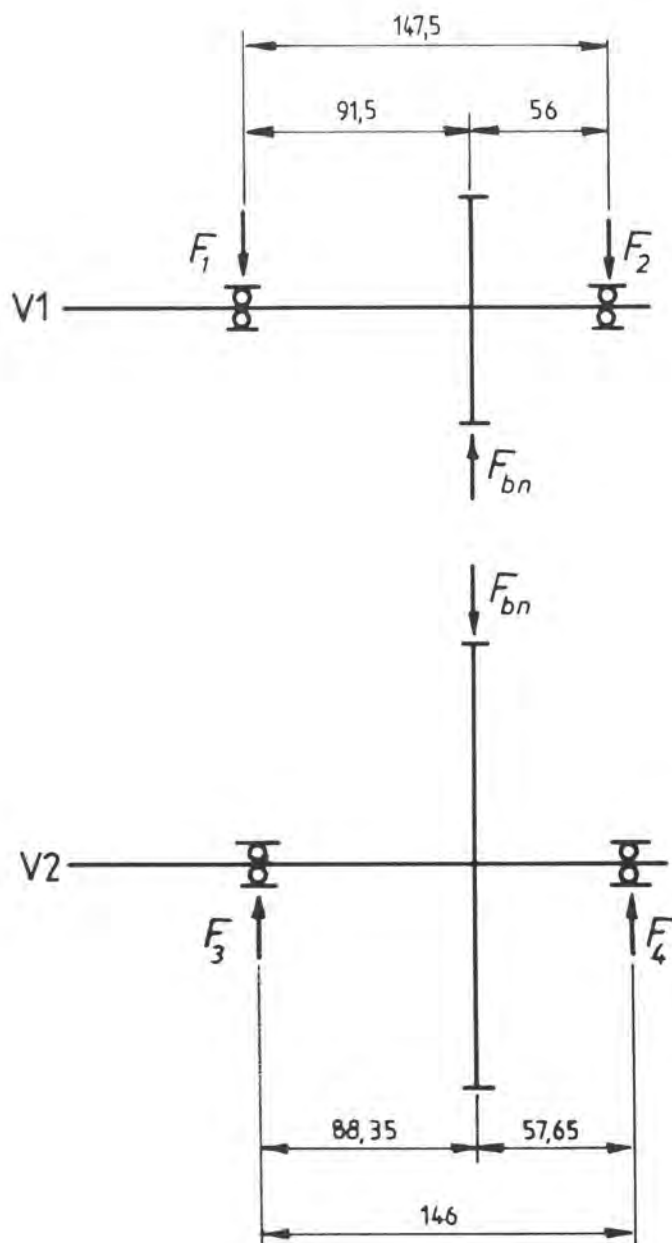
Uvrštavanjem dijela izraza (7.12) u (7.13) za ležaj 8 dobiva se

$$T_{RP} = 1,344 \cdot 10^{-5} F \quad (7.16)$$

Da bi se mogle proračunati veličine  $T_{RP}$ , potrebno je poznavati sile koje djeluju na ležajeve. Ako je vratilo VI opterećeno narinutim momentom  $T$ , normalna sila na zub će iznositi

$$F_{bn} = T / r_{b1} \quad (7.17)$$

Položaj zupčanika na vratilima prikazan je na slici 7.9.



Slika 7.9 Položaj zupčanika na vratilima (mjere u mm)

Postavljanjem jednadžbi za ravnotežno stanje mogu se izračunati sile na ležajeve. Za reduktor R1 će biti:

$$F_1 = F_{bn} \cdot 56/147,5 = 0,379661 F_{bn} \quad (7.18)$$

$$F_2 = F_{bn} - F_1 = 0,620339 F_{bn} \quad (7.19)$$

$$F_3 = F_{bn} \cdot 57,65/146 = 0,394863 F_{bn} \quad (7.20)$$

$$F_4 = F_{bn} - F_3 = 0,605137 F_{bn} \quad (7.21)$$

Reduktor R2 ima iste dimenzije pa će biti jednake i sile na ležajevе, tj.

$$F_5 = F_1 \quad (7.22)$$

$$F_6 = F_2 \quad (7.23)$$

$$F_7 = F_3 \quad (7.24)$$

$$F_8 = F_4 \quad (7.25)$$

Ako se izrazi (7.18) do (7.25) uvrste u izraze (7.14), (7.15) i (7.16), dobije se

$$T_{RP1} = 2,3354 \cdot 10^{-5} F_1 = 8,8666 \cdot 10^{-6} F_{bn} \quad (7.26)$$

$$T_{RP2} = 2,3354 \cdot 10^{-5} F_2 = 14,4874 \cdot 10^{-6} F_{bn} \quad (7.27)$$

$$T_{RP3} = 2,3354 \cdot 10^{-5} F_3 = 9,22163 \cdot 10^{-6} F_{bn} \quad (7.28)$$

$$T_{RP4} = 2,5814 \cdot 10^{-5} F_4 = 15,6213 \cdot 10^{-6} F_{bn} \quad (7.29)$$

$$T_{RP5} = 2,3354 \cdot 10^{-5} F_5 = 8,8666 \cdot 10^{-6} F_{bn} \quad (7.30)$$

$$T_{RP6} = 2,3354 \cdot 10^{-5} F_6 = 14,4874 \cdot 10^{-6} F_{bn} \quad (7.31)$$

$$T_{RP7} = 2,3354 \cdot 10^{-5} F_7 = 9,22163 \cdot 10^{-6} F_{bn} \quad (7.32)$$

$$T_{RP8} = 1,344 \cdot 10^{-5} F_8 = 8,13304 \cdot 10^{-6} F_{bn} \quad (7.33)$$

Ukupni moment trenja na vratilu V1 iznosi

$$T_{RPV1} = T_{RP1} + T_{RP2} + T_{RP5} + T_{RP6} = 46,708 \cdot 10^{-6} F_{bn} \quad (7.34)$$

a na vratilu V2 iznosi

$$T_{RPV2} = T_{RP3} + T_{RP4} + T_{RP7} + T_{RP8} = 42,1976 \cdot 10^{-6} F_{bn} \quad (7.35)$$

Moment gubitaka u ležajevima uzrokovan opterećenjem reduciran na vratilo V1 je

$$T_{VBP} = T_{RPV1} + T_{RPV2} / u = 70,821 \cdot 10^{-6} F_{bn} \quad (7.36)$$

odnosno korištenjem izraza (7.17)

$$T_{VBP} = 70,821 \cdot 10^{-6} T / r_{b1} \quad (7.37)$$

Kako je za sve kompletne zupčanika  $r_{b1} = 0,046045$  m, ukupni moment gubitaka u ležajevima uzrokovan opterećenjem bit će

$$T_{VBP} = 0,001538 T \quad (7.38)$$

#### 7.1.4 GUBITAK KLIZANJA

Uvrštavanjem (7.06) i (7.38) u (7.07) dobiva se moment gubitaka klizanja za oba reduktora

$$T_{VZS} = (b_1 - 0,001538) T \quad (7.39)$$

odnosno

$$T_{VZS} = c T \quad (7.40)$$

Koristeći tablicu 7.9, dobiju se vrijednosti koeficijenta regresionog pravca  $c$  koje su navedene u tablici 7.11.

Tablica 7.11 Koeficijenti  $c$ 

Komplet zupčanika	$c$
1	0,0285537
2	0,0208918
3	0,0142599
5	0,0206055

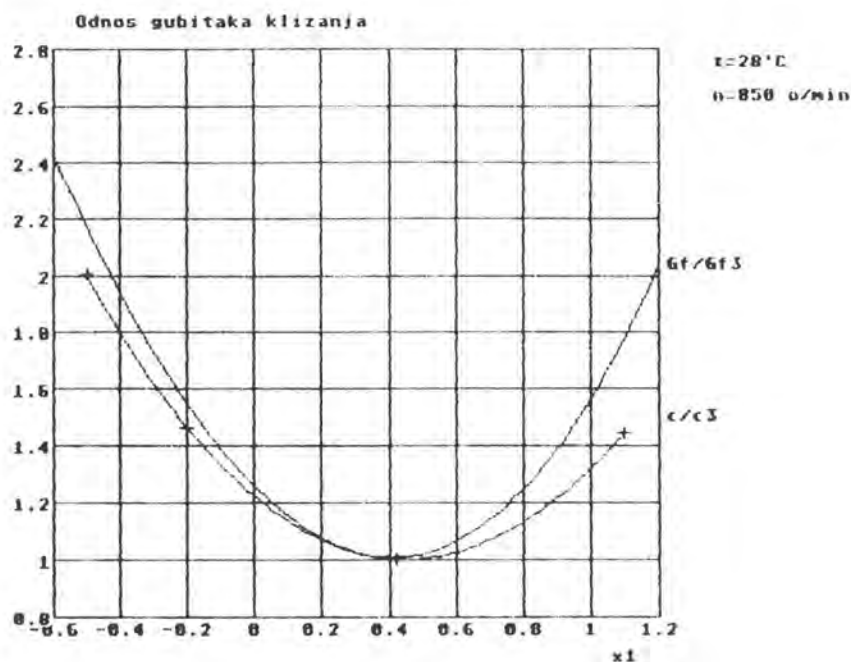
## 7.2 USPOREDBA S TEORIJSKIM IZVODIMA

Kako su tokom provođenja mjerenja eliminirani utjecaji viskoznosti i hrapavosti, odnosi eksperimentalno dobivenih momenata gubitaka klizanja  $T_{VZS}$  trebaju odgovarati odnosima geometrijskog faktora gubitka trenja klizanja  $G_f$  za razne komplete zupčanika. Budući da se kompleti zupčanika razlikuju samo u faktorima pomaka profila, to se odnosi momenata  $T_{VZS}$  i odnosi faktora  $G_f$  mogu prikazati u ovisnosti o faktoru pomaka profila  $x_f$ . U poglavlju 5.3 su izračunate vrijednosti faktora  $G_f$  zupčanika korištenih u eksperimentu. Iz izraza (7.40) je očito da će se za bilo koji narinuti moment  $T$  (unutar mjernog područja) gubici klizanja za pojedine komplete zupčanika odnositi kao pripadajući koeficijenti  $c$  iz tablice 7.11. Odnosi faktora  $G_f$  za pojedini komplet prema faktoru  $G_f$  za komplet 3, kao i odnosi koeficijenata  $c$  prema koeficijentu  $c$  za komplet 3, dani su u tablici 7.12.

Tablica 7.12 Odnosi računski i eksperimentalno dobivenih gubitaka klizanja

Komplet zupčanika	$x_f$	$G_f / G_{f3}$	$c / c_3$
1	-0,5	2,17	2,002
2	-0,2	1,56	1,465
3	0,42	1	1
5	1,1	1,76	1,445

U dijagramu na slici 7.10 ucrtana je teorijski dobivena krivulja  $G_f / G_{f3}$  i krivulja paraboloidnog oblika koja spaja eksperimentalno dobivene vrijednosti odnosa  $c/c_3$  iz tablice 7.12. Iz izgleda dijagrama može se zaključiti da su postavke o postojećem minimumu gubitaka klizanja valjane i da se pravilnim izborom pomaka profila može znatno utjecati na gubitke kod zupčastih prijenosa.



Slika 7.10 Usporedba rezultata

Iako postoje razlike u položaju teoretske i eksperimentalno dobivene krivulje, minimum u svakom slučaju egzistira. Postojeće razlike su najvjerojatnije posljedica nivoa kvaliteta mjernog uređaja koji je bio na raspolaganju. Također treba uzeti u obzir da su mjerenja vršena u području niskih opterećenja gdje su apsolutne vrijednosti gubitaka klizanja malene u odnosu na dominantne gubitke u praznom hodu, pa su i greške pri mjerenju imale relativno velik utjecaj na konačni rezultat.



## 8. ZAKLJUČAK

Vrijednost geometrijskog faktora gubitaka trenja klizanja, a s time i gubici trenja klizanja pri zahvatu zupčanika, znatno se mijenjaju, ovisno o sumi faktora pomaka profila i raspodjeli ove sume na zupčanike u zahvatu. Stoga geometrija ozubljenja ima značajan utjecaj na stvaranje gubitaka i u tom smislu treba birati optimalne faktore pomaka profila. Izrađeni su dijagrami i dani matematički izrazi čijim se korištenjem mogu odrediti optimalni faktori pomaka profila za vanjski i unutarnji zahvat evolventnih zupčanika s ravnim zubima koji su izrađeni po standardu DIN 867.

U Prilogu 1 dat je kratki prikaz programa GEFAG kojim se za konkretan par zupčanika proračunavaju optimalni faktori pomaka profila po kriteriju najmanjeg gubitka snage.

Da bi se smanjili gubici klizanja, treba težiti većem broju zubi malog zupčanika, većem zahvatnom kutu i manjoj visini zuba. Kod vanjskog zahvata poželjna je veća, a kod unutarnjeg manja suma faktora pomaka profila.

Teoretske postavke i proračuni optimalnog pomaka profila su kvalitativno potvrđeni mjerenjima na seriji zupčanika koji su se razlikovali u podjeli sume faktora pomaka profila na zupčanike u zahvatu.

## LITERATURA

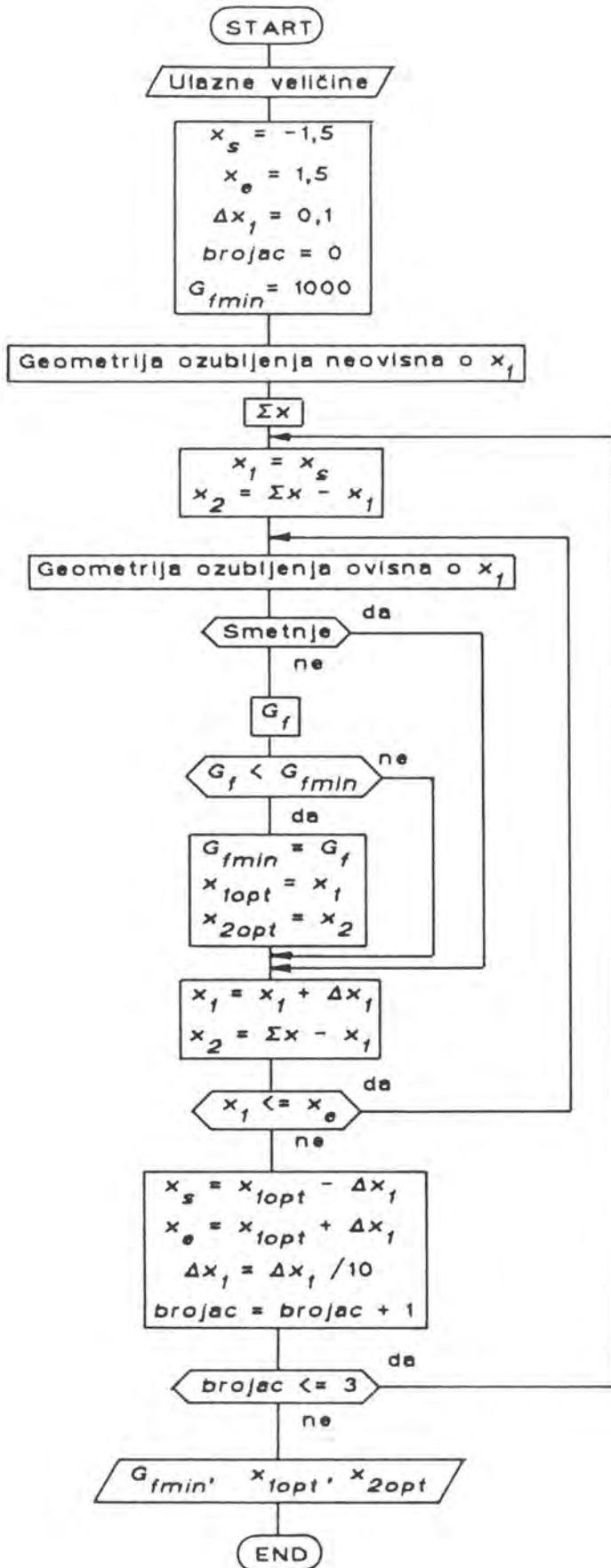
1. Anderson, N.E.; Loewenthal, S.H.: Effect of Geometry and Operating Conditions on Spur Gear System Power Loss.- ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 103, 1981, 1, 151 - 159.
2. Winter, H.; Simon, M.: Einfluss von elasto-hydrodynamischen Parametern auf die Grübchentragsfähigkeit vergüteter Scheiben und Zahnradern.- Konstruktion 37, 1985, 3, 93 - 103; 37, 1985, 4, 161 - 166.
3. Jarchow, F.; Schoo, A.: Verzahnungsverlustleistungen in Planetengetrieben.- Konstruktion 39, 1987, 3, 81 - 87.
4. Stössel, K.: Reibungszahlen unter elasto-hydrodynamischen Bedingungen; Dissertation.- München: TU, 1971.
5. Martin, K.F.: The Efficiency of Involute Spur Gears.- ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 103, 1981, 1, 160 - 169.
6. Chiu, Y.P.: Approximate calculation of power loss in involute gears.- ASME Paper 75-PTG-2, Oct. 1975.
7. Anderson, N.E.; Loewenthal, S.H.: Design of Spur Gears for improved Efficiency.- ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 104, 1982, 10, 767 - 774.
8. Anderson, N.E.; Loewenthal, S.H.: Selecting Spur-gear Geometry for greater Efficiency.- Machine Design, 55, 1983, 10, 101 - 105.
9. Ohlendorf, H.: Stirnradgetriebe - Zahnreibung, Verlustleistung und Erwärmung.- Braunschweig: Vieweg, 1964.
10. Buckingham, E.: Analytical Mechanics of Gears.- New York: Dover Publications Inc., 1963.
11. Seherr-Thoss, H.-C.: Die Entwicklung der Zahnrad-Technik.- Berlin: Springer-Verlag, 1965.
12. Niemann, G.; Gackstetter, G.: Verlustarme Zahnräder.- VDI-Zeitschrift, 110, 1968, 6, 201 - 209.
13. DIN 3972; Bezugsprofile von Verzahnwerkzeugen für Evolventenverzahnung nach DIN 867, Februar 1972.
14. Niemann, G.; Winter, H.: Maschinenelemente.- Band 2.- Berlin: Springer Verlag, 1983.

15. Eiselt, H.: Verzahnungsgeometrische Beziehungen zur Berechnung der Reibungszahl, Reibungsarbeit, Reibungsleistung, Eingriffszeiten und Ausgangsgrößen zur Berechnung der Verschleisses bei evolventischen Zahnrädern.- Maschinenbautechnik 19, 1970, 3, 127 -130.
16. Dobrovolskij, V. i dr.: Machine Elements.- Moscow: Mir Publishers, 1968.
17. Kudrjavcev, V.N.: Detali mašin.- Leningrad: Mašinostroenie, 1980.
18. Oberšmit, E.: Ozubljenja i zupčanici.- Zagreb: SNL, 1982.
19. Naruse, C. i dr.: Vlijanje formy profilja zub'ev na nagražočnuju sposobnost' zubčatyh peredač po zaedaniju i poterjam na trenie.- Ekspress informacija. Detali mašin, 1985, 5, 8 -19.
20. MAAG - Taschenbuch.- 2. Auflage.- Zürich: MAAG - Zahnräder Aktiengesellschaft, 1985.
21. Michaelis, K.: Die Integraltemperatur zur Beurteilung der Fresstragfähigkeit von Stirnradgetrieben; Dissertation.- München: TU, 1987.
22. DIN 3990 Teil 4; Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern. Berechnung der Fresstragfähigkeit, Dezember 1987.
23. Winter, H.; Michaelis, K.: Fresstragfähigkeit von Stirnradgetrieben.- Antriebstechnik, 14, 1975, 7, 405 - 409; 14, 1975, 8, 461 - 465.
24. DIN 3990 Teil 1; Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern. Einführung und allgemeine Einflussfaktoren, Dezember 1987.
25. Martin, K.F.: A Review of Friction Predictions in Gear Teeth.- Wear, 49, 1978, 201 - 238.
26. Časovnikov, L.D.: Peredači zacepleniem zubčatye i červjačnye.- 2. izd.- Moskva: Mašinostroenie, 1969.
27. Niemann, G.: Maschinenelemente.- Band 1.- Berlin: Springer Verlag, 1975.

PRILOG 1

PROGRAM GEFAG

## Dijagram toka programa GEFAG



## Ulazne i izlazne veličine i matematički izrazi korišteni u programu GEFAG

### Ulazne veličine koje određuju geometriju ozubljenja

$$m_n, z_1, z_2, a, z_{01}, x_{01}, z_{02}, x_{02}, \alpha_n, h_{aP}^*, e_{a0}^*, h_{a0}^*$$

### Ulazne ograničavajuće veličine

- Minimalni stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_{\alpha min}$
- Faktor minimalne debljine zuba  $s_{anmin}^*$

### Matematički izrazi

- Promjena faktora  $X_\Gamma$  tokom zahvata

$$X_{\Gamma(A-B)} = 0,5 + 16 [\Gamma - 0,5 (\Gamma_A + \Gamma_B)]^5 / (\Gamma_B - \Gamma_A)^5 \quad (P1.01)$$

$$X_{\Gamma(B-D)} = 1 \quad (P1.02)$$

$$X_{\Gamma(D-E)} = 0,5 - 16 [\Gamma - 0,5 (\Gamma_D + \Gamma_E)]^5 / (\Gamma_E - \Gamma_D)^5 \quad (P1.03)$$

- Minimalna dozvoljena debljina vrha zuba

$$s_{anmin} = s_{anmin}^* m_n \quad (P1.04)$$

- Zahvatni kut na diobenom krugu

$$\alpha_n \text{ (rad)} = \alpha_n \text{ (}^\circ\text{)} \pi / 180 \quad (P1.05)$$

- Polumjeri diobenih krugova

$$r_1 = m_n z_1 / 2 \quad (P1.06)$$

$$r_2 = m_n z_2 / 2 \quad (P1.07)$$

- Teoretski razmak osi

$$a_d = r_1 + r_2 \quad (\text{P1.08})$$

- Polumjeri osnovnih krugova

$$r_{b1} = r_1 \cos \alpha_n \quad (\text{P1.09})$$

$$r_{b2} = r_2 \cos \alpha_n \quad (\text{P1.10})$$

- Odnos broja zubi

$$u = z_2 / z_1 \quad (\text{P1.11})$$

- Polumjeri pogonskih krugova

$$r_{w1} = a / (u + 1) \quad (\text{P1.12})$$

$$r_{w2} = a - r_{w1} \quad (\text{P1.13})$$

- Zahvatni kut na pogonskom promjeru

$$\cos \alpha_{wt} = r_{b1} / r_{w1} \quad (\text{P1.14})$$

- Evolventna funkcija kuta  $\alpha_n$

$$\text{inv } \alpha_n = \tan \alpha_n - \alpha_n \quad (\text{P1.15})$$

- Zahvatni kut na pogonskom promjeru

$$\text{inv } \alpha_{wt} = \tan \alpha_n \left( 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} + 1 \right) - \alpha_n \quad (\text{P1.16})$$

- Suma faktora pomaka profila

$$\Sigma x = (z_1 + z_2) (\text{inv } \alpha_{wt} - \text{inv } \alpha_n) / (2 \tan \alpha_n) \quad (\text{P1.17})$$

- Faktor razmaka diobenih krugova

$$y = (a - a_d) / m_n \quad (\text{P1.18})$$

- Faktor promjene visine glave zuba

$$k = y - (x_1 + x_2) \quad (\text{P1.19})$$

- Polumjeri kruga preko glave zuba

$$r_{a1} = r_1 + m_n (x_1 + h_{aP}^* + k) \quad (\text{P1.20})$$

$$r_{a2} = r_2 + m_n (x_2 + h_{aP}^* + k) \quad (\text{P1.21})$$

- Zahvatni kut na glavi zuba

$$\alpha_{an1} = \arccos \left( \frac{r_1}{r_{a1}} \cos \alpha_n \right) \quad (\text{P1.22})$$

$$\alpha_{an2} = \arccos \left( \frac{r_2}{r_{a2}} \cos \alpha_n \right) \quad (\text{P1.23})$$

- Debljina glave zuba

$$s_{an1} = 2 r_{a1} \left( \frac{\pi + 4 x_1 \tan \alpha_n}{2 z_1} + \text{inv } \alpha_n - \text{inv } \alpha_{an1} \right) \quad (\text{P1.24})$$

$$s_{an2} = 2 r_{a2} \left( \frac{\pi + 4 x_2 \tan \alpha_n}{2 z_2} + \text{inv } \alpha_n - \text{inv } \alpha_{an2} \right) \quad (\text{P1.25})$$

- Faktor debljine glave zuba

$$s_{an1}^* = s_{an1} / m_n \quad (\text{P1.26})$$

$$s_{an2}^* = s_{an2} / m_n \quad (\text{P1.27})$$



- Pomoćni kut kod kontrole podrezivanja

$$\alpha_{E1} = \arctan \frac{r_{b1} \tan \alpha_n - \frac{m_n [h_{a0}^* - x_1 - e_{a0}^* (1 - \sin \alpha_n)]}{\sin \alpha_n}}{r_{b1}} \quad (\text{P1.28})$$

$$\alpha_{E2} = \arctan \frac{r_{b2} \tan \alpha_n - \frac{m_n [h_{a0}^* - x_2 - e_{a0}^* (1 - \sin \alpha_n)]}{\sin \alpha_n}}{r_{b2}} \quad (\text{P1.29})$$

- Polumjeri početka evolventnog dijela boka zuba izrađenog s alatom u obliku ozubljene letve

$$r_{E11} = r_{b1} / \cos \alpha_{E1} \quad (\text{P1.30})$$

$$r_{E12} = r_{b2} / \cos \alpha_{E2} \quad (\text{P1.31})$$

- Zahvatni kut pri izradi zupčanika alatnim zupčanikom

$$\text{inv } \alpha_{t01} = \tan \alpha_n \left( 2 \cdot \frac{x_1 + x_{01}}{z_1 + z_{01}} + 1 \right) - \alpha_n \quad (\text{P1.32})$$

$$\text{inv } \alpha_{t02} = \tan \alpha_n \left( 2 \cdot \frac{x_2 + x_{02}}{z_1 + z_{02}} + 1 \right) - \alpha_n \quad (\text{P1.33})$$

- Razmak osi prilikom izrade zupčanika s alatnim zupčanikom

$$a_{01} = \frac{m_n (z_1 + z_{01})}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_{t01}} \quad (\text{P1.34})$$

$$a_{02} = \frac{m_n (z_2 + z_{02})}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_{t02}} \quad (\text{P1.35})$$

- Polumjeri osnovnih krugova alata

$$r_{b01} = \frac{m_n z_{01}}{2} \cos \alpha_n \quad (\text{P1.36})$$

$$r_{b02} = \frac{m_n z_{02}}{2} \cos \alpha_n \quad (\text{P1.37})$$

- Polumjer završetka evolventnog dijela boka zuba alatnog zupčanika

$$r_{Ea01} = m_n [z_{01} / 2 + h_{a0}^* + x_{01} - \rho_{a0}^* (1 - \sin \alpha_n)] \quad (\text{P1.38})$$

$$r_{Ea02} = m_n [z_{02} / 2 + h_{a0}^* + x_{02} - \rho_{a0}^* (1 - \sin \alpha_n)] \quad (\text{P1.39})$$

- Polumjeri početka evolventnog dijela boka zuba izrađenog s alatnim zupčanikom

$$r_{E11} = \sqrt{\left( a_{01} \sin \alpha_{t01} - \sqrt{r_{Ea01}^2 - r_{b01}^2} \right)^2 + r_{b1}^2} \quad (\text{P1.40})$$

$$r_{E12} = \frac{z_2}{|z_2|} \sqrt{\left( a_{02} \sin \alpha_{t02} - \sqrt{r_{Ea02}^2 - r_{b02}^2} \right)^2 + r_{b2}^2} \quad (\text{P1.41})$$

- Veličine korištene pri kontroli interferencije

$$\xi = \frac{r_{a1}^2 - r_{a2}^2 + a^2}{2a} \quad (\text{P1.42})$$

$$\varphi_1 = \arccos \frac{\xi}{r_{a1}} \quad (\text{P1.43})$$

$$\varphi_2 = \arccos \frac{a - \xi}{r_{a2}} \quad (\text{P1.44})$$

$$\eta_1 = \text{inv } \alpha_{an1} - \text{inv } \alpha_{wt} \quad (\text{P1.45})$$

$$\eta_2 = \text{inv } \alpha_{wt} - \text{inv } \alpha_{an2} \quad (\text{P1.46})$$

$$K = \frac{\varphi_1 + \eta_1}{|u| (\varphi_2 - \eta_2)} \quad (\text{P1.47})$$

- Maksimalni polumjeri na kojima se može ostvariti dodir evolventnih bokova

$$r_{a1max} = \sqrt{\left( a \sin \alpha_{wt} - \sqrt{r_{E1}^2 - r_{b2}^2} \right)^2 + r_{b1}^2} \quad (\text{P1.48})$$

$$r_{a2max} = \frac{z_2}{|z_2|} \sqrt{\left( a \sin \alpha_{wt} - \sqrt{r_{E1}^2 - r_{b1}^2} \right)^2 + r_{b2}^2} \quad (\text{P1.49})$$

- Vrijednosti parametra  $\Gamma$  u karakterističnim točkama zahvata

$$\Gamma_A = - (z_2 / z_1) \left[ \left( \sqrt{(r_{a2} / r_{b2})^2 - 1} \right) / \tan \alpha_{wt} - 1 \right] \quad (\text{P1.50})$$

$$\Gamma_B = \Gamma_E - 2 \pi / (z_1 \tan \alpha_{wt}) \quad (\text{P1.51})$$

$$\Gamma_D = \Gamma_A + 2 \pi / (z_1 \tan \alpha_{wt}) \quad (\text{P1.52})$$

$$\Gamma_E = \left( \sqrt{(r_{a1} / r_{b1})^2 - 1} \right) / \tan \alpha_{wt} - 1 \quad (\text{P1.53})$$

- Stupanj prekrivanja profila

$$\epsilon_\alpha = \frac{\Gamma_E - \Gamma_A}{\Gamma_D - \Gamma_A} \quad (\text{P1.54})$$

- Geometrijska funkcija gubitaka trenja klizanja  $G_f$

$$G_f = m_n^{0,35} z_1^{1,35} [(1+u)/u]^{1,2} (\tan \alpha_{wt})^{1,6} (\cos \alpha_{wt})^{-1,2} (\cos \alpha_n)^{0,6} \cdot$$

$$\cdot \left[ \int_A^B X_{\Gamma(A-B)} |\Gamma| d\Gamma + \int_B^D X_{\Gamma(B-D)} |\Gamma| d\Gamma + \int_D^E X_{\Gamma(D-E)} |\Gamma| d\Gamma \right]$$

(P1.55)

- Kontrola smetnji

Do smetnji dolazi ako je

$$s_{an1} < s_{anmin} \quad (P1.56)$$

$$s_{an2} < s_{anmin} \quad (P1.57)$$

$$r_{a1} < r_{b1} + m_n \quad (P1.58)$$

$$r_{a2} < r_{b2} + m_n \quad \text{za vanjsko ozubljenje} \quad (P1.59)$$

$$r_{b2} < r_{a2} \quad \text{za unutarnje ozubljenje} \quad (P1.60)$$

$$\tan \alpha_{E1} < 0 \quad (P1.61)$$

$$\tan \alpha_{E2} < 0 \quad (P1.62)$$

$$a_{01} \sin \alpha_{t01} < \sqrt{r_{Ea01}^2 - r_{b01}^2} \quad (P1.63)$$

$$a_{02} \sin \alpha_{t02} < \sqrt{r_{Ea02}^2 - r_{b02}^2} \quad (P1.64)$$

$$K \leq 1 \quad (P1.65)$$

$$r_{a1} > r_{a1max} \quad (P1.66)$$

$$r_{a2} > r_{a2max} \quad (P1.67)$$

$$\varepsilon_\alpha < \varepsilon_{\alpha min} \quad (P1.68)$$

### Ispis rezultata

$$z_{01}, x_{01}, z_{02}, x_{02}, n_{a0}^*, r_{a0}^*$$

$$\alpha_n, m_n, z_1, z_2, \beta = 0^\circ$$

$$u, a_d, a, \Sigma x, s_{an1}^*, s_{an2}^*, \varepsilon_\alpha$$

$$G_{tmin}, x_{1opt}, x_{2opt}$$

## PRILOG 2

KOEFICIJENTI  $a$  I  $b$  ZA PRORAČUN OPTIMALNIH FAKTORA  
POMAKA PROFILA

KOEFICIJENTI KORELACIJE  $r$

Tablica 1 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 17$  i vanjsko ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$r$
17	1	0,5	0	1
18	1,059	0,4854999	0,005350024	>0,999
19	1,118	0,4650572	0,01619747	>0,999
20	1,176	0,4427868	0,03028554	>0,999
21	1,235	0,431228	0,03640351	>0,999
22	1,294	0,4233081	0,03990164	>0,999
23	1,35	0,4163307	0,04196027	>0,999
24	1,412	0,409974	0,04370996	>0,999
25	1,47	0,4061819	0,04369688	>0,999
27	1,588	0,3882809	0,05074587	>0,999
30	1,765	0,363477	0,06117842	>0,999
34	2	0,3323559	0,0752832	>0,999
42	2,47	0,2774395	0,1010217	0,999
51	3	0,232175	0,123225	0,999
60	3,529	0,20385783	0,1345258	0,999
68	4	0,1830614	0,1452806	0,998
85	5	0,1463017	0,1629874	0,996
102	6	0,1216456	0,172839	0,997
119	7	0,1053141	0,1790115	0,997
136	8	0,09338069	0,18334	0,996
170	10	0,07398072	0,1910642	0,996

Tablica 2 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 18$  i vanjsko ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$r$
18	1	0,5	0	1
19	1,056	0,4864058	0,004896343	>0,999
20	1,111	0,4737656	0,009433359	>0,999
21	1,667	0,453953	0,02027836	>0,999
22	1,22	0,4332806	0,03280243	>0,999
23	1,278	0,4198436	0,04018894	>0,999
24	1,333	0,4056873	0,04899436	>0,999
25	1,389	0,3969231	0,05359381	>0,999
26	1,444	0,3900488	0,05585474	>0,999
27	1,5	0,3821001	0,05956697	>0,999
31	1,722	0,3577937	0,0681375	>0,999
36	2	0,3268294	0,07922795	>0,999
45	2,5	0,2699804	0,1053644	0,999
54	3	0,2264193	0,1268958	0,999
63	3,5	0,1978947	0,1396679	0,998
72	4	0,1765278	0,1477897	0,997
90	5	0,1470053	0,157981	0,997
108	6	0,1227351	0,16728	0,997
126	7	0,1069105	0,1732431	0,997
144	8	0,09415957	0,178378	0,996
180	10	0,07580875	0,1850253	0,997

Tablica 3 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 20$  i vanjsko ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$r$
20	1	0,5	0	1
21	1,05	0,4874945	0,004520893	>0,999
22	1,1	0,4722143	0,01187143	>0,999
23	1,15	0,4547856	0,02172863	>0,999
24	1,25	0,4287501	0,0356833	>0,999
27	1,35	0,4113727	0,04358815	>0,999
30	1,5	0,3877503	0,05524009	>0,999
35	1,75	0,3489649	0,07277897	>0,999
40	2	0,3155955	0,08685248	>0,999
50	2,5	0,2608415	0,1103554	0,999
60	3	0,2270804	0,1215008	0,999
70	3,5	0,2011624	0,1322707	0,998
80	4	0,1791106	0,1407342	0,998
100	5	0,1489578	0,1495569	0,998
120	6	0,1261333	0,1581148	0,998
140	7	0,1092332	0,1639982	0,998
160	8	0,09780876	0,1675253	0,997
200	10	0,078507	0,1739853	0,998



Tablica 4 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 22$  i vanjsko ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$r$
22	1	0,5	0	1
24	1,091	0,4728586	0,01270556	>0,999
27	1,227	0,4381204	0,03033377	>0,999
30	1,364	0,4088312	0,04487008	>0,999
33	1,5	0,3848832	0,05574889	>0,999
38	1,727	0,3513377	0,07161687	>0,999
44	2	0,3145285	0,08476906	>0,999
55	2,5	0,2642546	0,104187	>0,999
66	3	0,2299556	0,1158194	>0,999
77	3,5	0,2045924	0,1244942	0,999
88	4	0,1825286	0,1322643	0,998
110	5	0,1493857	0,1433628	0,998
132	6	0,1295579	0,14906	0,998
154	7	0,1125386	0,1545505	0,998
176	8	0,09878951	0,1587737	0,998
220	10	0,08054041	0,1647494	0,997

Tablica 5 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 25$  i vanjsko ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$r$
25	1	0,5	0	1
27	1,08	0,4762662	0,01067643	>0,999
31	1,24	0,4364545	0,02986798	>0,999
34	1,36	0,4121689	0,04148699	>0,999
38	1,52	0,3852078	0,0542056	>0,999
44	1,76	0,3530908	0,06783557	>0,999
50	2	0,3165649	0,07941759	>0,999
63	2,52	0,2656961	0,09771383	>0,999
75	3	0,2350022	0,1074038	>0,999
88	3,52	0,2069187	0,1166447	0,999
100	4	0,1851887	0,1229912	0,999
125	5	0,1522955	0,1331324	0,999
150	6	0,1305835	0,1391791	0,998
175	7	0,11534503	0,1427537	0,998
200	8	0,1012263	0,1472326	0,998
250	10	0,08370356	0,1515568	0,998

Tablica 6 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 30$  i vanjsko ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$r$
30	1	0,5	0	1
34	1,133	0,462565	0,01657468	>0,999
38	1,267	0,432935	0,02977058	>0,999
45	1,5	0,3932338	0,04614502	>0,999
52	1,733	0,3619221	0,05818181	>0,999
60	2	0,3206338	0,07061166	>0,999
75	2,5	0,2718351	0,08665866	>0,999
90	3	0,2375181	0,09685045	>0,999
105	3,5	0,2114233	0,1037822	>0,999
120	4	0,1894263	0,1097905	>0,999
150	5	0,1578023	0,1179938	>0,999
180	6	0,1343819	0,12369	0,999
210	7	0,1162307	0,1281758	>0,999
240	8	0,1040338	0,1312164	0,999
300	10	0,08515788	0,1351526	0,999

Tablica 7 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 35$  i vanjsko ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$r$
35	1	0,5	0	1
39	1,114	0,4678248	0,01275426	>0,999
44	1,257	0,4367403	0,02648701	>0,999
52	1,486	0,399052	0,04042634	>0,999
61	1,743	0,3614286	0,05276191	>0,999
70	2	0,3232636	0,06409203	>0,999
87	2,486	0,2773246	0,07769005	>0,999
105	3	0,2405519	0,08754783	>0,999
123	3,514	0,2120298	0,09463273	>0,999
140	4	0,1919654	0,09871905	>0,999
175	5	0,1596864	0,1060675	>0,999
210	6	0,136391	0,1115149	>0,999
245	7	0,1198835	0,114869	>0,999
280	8	0,1058512	0,1179519	>0,999
350	10	0,08611576	0,1220663	>0,999

Tablica 8 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 40$  i vanjsko ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$r$
40	1	0,5	0	1
44	1,1	0,4718506	0,01109849	>0,999
50	1,25	0,4392467	0,02356714	>0,999
60	1,5	0,3986883	0,03789394	>0,999
70	1,75	0,3606884	0,04879865	>0,999
80	2	0,3258871	0,05791841	>0,999
100	2,5	0,2785909	0,07077597	>0,999
120	3	0,2435169	0,07930347	>0,999
140	3,5	0,2149974	0,08593466	>0,999
160	4	0,1935844	0,09037446	>0,999
200	5	0,161615	0,09663174	>0,999
240	6	0,1385023	0,1008037	>0,999
280	7	0,1213827	0,1039545	>0,999
320	8	0,1074888	0,1074112	>0,999
400	10	0,08791128	0,1107488	>0,999

Tablica 9 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 17$  i unutarnje ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$ r $
-34	-2	-0,4139995	0,37735	>0,999
-38	-2,235	-0,3434296	0,3605381	>0,999
-43	-2,529	-0,2821435	0,3438035	>0,999
-51	-3	-0,224	0,3235667	0,998
-68	-4	-0,1578571	0,2965714	0,998
-85	-5	-0,1241212	0,2805091	0,998
-102	-6	-0,1048352	0,2706374	>0,999
-119	-7	-0,09114282	0,2629381	>0,999
-136	-8	-0,08047475	0,2570513	0,999
-170	-10	-0,06584981	0,2492648	0,997

Tablica 10 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 18$  i unutarnje ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$ r $
-36	-2	-0,4400007	0,3647	>0,999
-40	-2,222	-0,3671431	0,3493214	0,999
-45	-2,5	-0,3093331	0,3334889	>0,999
-54	-3	-0,2485713	0,3122857	>0,999
-72	-4	-0,17	0,286	>0,999
-90	-5	-0,1346154	0,2710128	0,998
-108	-6	-0,1126154	0,2610769	>0,999
-126	-7	-0,09620582	0,2533985	>0,999
-144	-8	-0,08642102	0,2487105	0,999
-180	-10	-0,07030442	0,2411558	0,999

Tablica 11 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 20$  i unutarnje ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$ r $
-40	-2	-0,4816665	0,3421667	0,998
-45	-2,25	-0,3989092	0,3252636	>999
-50	-2,5	-0,3328572	0,3124048	0,998
-60	-3	-0,2654761	0,2925119	>0,999
-80	-4	-0,1889698	0,2682728	0,998
-100	-5	-0,1493626	0,253956	0,999
-120	-6	-0,1223038	0,2445196	>0,999
-140	-7	-0,1077544	0,2378333	>0,999
-160	-8	-0,09342737	0,2331366	>0,999
-200	-10	-0,07674886	0,2268473	>0,999

Tablica 12 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 22$  i unutarnje ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$ r $
-44	-2	-0,4942856	0,3225238	0,996
-50	-2,273	-0,3921428	0,3044643	0,993
-55	-2,5	-0,3640476	0,2932262	0,998
-66	-3	-0,2764848	0,2752364	0,996
-88	-4	-0,2013187	0,2518791	0,998
-110	-5	-0,157451	0,2386667	0,999
-132	-6	-0,1305714	0,2303619	0,998
-154	-7	-0,1113076	0,2236377	0,999
-176	-8	-0,09774392	0,2187089	0,998
-220	-10	-0,08012886	0,2129916	0,998

Tablica 13 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 25$  i unutarnje ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$ r $
-50	-2	-0,5085715	0,2956429	0,993
-56	-2,24	-0,4210001	0,2806	0,994
-63	-2,52	-0,3656365	0,2688819	0,995
-75	-3	-0,2863736	0,2511868	0,996
-100	-4	-0,2028069	0,2297543	0,994
-125	-5	-0,1583305	0,2174573	0,995
-150	-6	-0,1300779	0,2087537	0,995
-175	-7	-0,1111429	0,2029714	0,995
-200	-8	-0,101076	0,1995614	0,997
-250	-10	-0,08787124	0,1961417	>0,999

Tablica 14 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 30$  i unutarnje ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$ r $
-60	-2	-0,5592725	0,2564818	0,995
-68	-2,267	-0,4567253	0,2441769	0,994
-75	-2,5	-0,3859853	0,2334404	0,994
-90	-3	-0,3041203	0,2192331	0,994
-120	-4	-0,2073536	0,1969037	0,993
-150	-5	-0,1599588	0,1852521	0,992
-180	-6	-0,143565	0,1820892	0,996
-210	-7	-0,1268391	0,1786911	0,998
-240	-8	-0,1151429	0,1768254	0,999
-300	-10	-0,09491704	0,1725989	>0,999

Tablica 15 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 35$  i unutarnje ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$ r $
-70	-2	-0,6357803	0,2299758	0,997
-79	-2,257	-0,5007352	0,2149485	0,996
-88	-2,514	-0,4168872	0,2037383	0,996
-105	-3	-0,3209779	0,190531	0,995
-140	-4	-0,2266005	0,1740306	0,995
-175	-5	-0,1855014	0,1673865	0,997
-210	-6	-0,1590924	0,1632269	0,998
-245	-7	-0,1396036	0,1603078	0,999
-280	-8	-0,1240493	0,1580512	>0,999
-350	-10	-0,1010574	0,1548507	>0,999



Tablica 16 Koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $r$  za  $z_1 = 40$  i unutarnje ozubljenje

$z_2$	$u$	$a$	$b$	$ r $
-80	-2	-0,6810294	0,2044926	0,998
-90	-2,25	-0,5422254	0,1899233	0,998
-100	-2,5	-0,4566309	0,1835323	0,998
-120	-3	-0,3481244	0,1693986	0,997
-160	-4	-0,2532821	0,1577597	0,997
-200	-5	-0,2024935	0,1516102	0,998
-240	-6	-0,1713771	0,148153	>0,999
-280	-7	-0,1485535	0,1455016	>0,999
-320	-8	-0,1296065	0,1427639	>0,999
-400	-10	-0,1038501	0,1398776	>0,999

**PRILOG 3**

**ODSTUPANJA STVARNIH VRIJEDNOSTI KOEFICIJENATA  $a$  I  $b$   
OD VRIJEDNOSTI DOBIVENIH REGRESIONIM POLINOMIMA**

-----  
 VANJSKI ZAHVAT - REGRESIONA PLOHA KOEFICIJENTA a  
 -----

Regresioni polinom :

$$a = A + B_1 * z_1 + B_2 / z_1 + B_3 / u + B_4 * z_1 / u + B_5 / u^2 + B_6 * z_1^2 + B_7 * z_1 / u^2 + B_8 * z_1^2 / u + B_9 / u^3 + B_{10} * z_1^2 / u^2$$

$z_1$  = broj zubi

$u$  = odnos broja zubi

$a$  = koeficijent pravca

Standardna devijacija  $s = 0.0025905376448$

Koeficijenti:

$$A = -0.35440105628$$

$$B(1) = 0.016098390342$$

$$B(2) = 2.2583325173$$

$$B(3) = 1.2362362709$$

$$B(4) = -0.029812313378$$

$$B(5) = -0.74567423056$$

$$B(6) = -0.00021014250553$$

$$B(7) = 0.023424634518$$

$$B(8) = 0.00049607986993$$

$$B(9) = 0.10104522698$$

$$B(10) = -0.000400045519$$

USPOREDBA REZULTATA

i	$z_1$	$u$	$a$	$a = f(z_1, u)$	Odstupanje [%]
1	17	1	0.5	0.5022	0.43
2	17	1.47	0.4062	0.4026	- 0.88
3	17	2	0.3326	0.3246	- 2.39
4	17	2.47	0.2774	0.2755	- 0.67
5	17	3	0.232175	0.2346	1.05
6	17	3.529	0.2039	0.2038	- 0.04
7	17	4	0.1831	0.1822	- 0.48
8	17	5	0.1463	0.1482	1.32
9	17	6	0.1216	0.1245	2.35
10	17	7	0.1053	0.1069	1.53
11	17	8	0.09338	0.0934	0.07
12	17	10	0.07398	0.0741	0.21
13	20	1	0.5	0.4987	- 0.26
14	20	1.5	0.3878	0.3910	0.83
15	20	2	0.3156	0.3190	1.07
16	20	2.5	0.2608	0.2603	- 2.88
17	20	3	0.2271	0.2311	1.75
18	20	3.5	0.2012	0.2026	0.72
19	20	4	0.1791	0.1803	0.66
20	20	5	0.149	0.1474	- 1.05
21	20	6	0.1261	0.1245	- 1.28
22	20	7	0.1092	0.1076	- 1.49
23	20	8	0.09781	0.0946	- 3.29
24	20	10	0.07851	0.0760	- 3.20
25	25	1	0.5	0.4990	- 0.20
26	25	1.52	0.3852	0.3853	0.02
27	25	2	0.3166	0.3177	0.33

28	25	2.52	0.2657	0.2666		0.35
29	25	3	0.235	0.2322	-	1.18
30	25	3.52	0.2069	0.2038	-	1.49
31	25	4	0.1852	0.1832	-	1.06
32	25	5	0.1523	0.1517	-	0.42
33	25	6	0.1306	0.1296	-	0.75
34	25	7	0.1153	0.1134	-	1.64
35	25	8	0.1012	0.1010	-	0.23
36	25	10	0.0837	0.0832	-	0.66
37	30	1	0.5	0.5011		0.22
38	30	1.5	0.3932	0.3911	-	0.53
39	30	2	0.3206	0.3208		0.05
40	30	2.5	0.2718	0.2720		0.08
41	30	3	0.2375	0.2364	-	0.44
42	30	3.5	0.2114	0.2094	-	0.95
43	30	4	0.1894	0.1882	-	0.65
44	30	5	0.1578	0.1571	-	0.47
45	30	6	0.1344	0.1354		0.72
46	30	7	0.1162	0.1194		2.75
47	30	8	0.104	0.1071		3.02
48	30	10	0.08516	0.0896		5.22
49	40	1	0.5	0.4995	-	0.10
50	40	1.5	0.3987	0.3986	-	0.03
51	40	2	0.3259	0.3269		0.93
52	40	2.5	0.2786	0.2794		0.29
53	40	3	0.2435	0.2428	-	0.29
54	40	3.5	0.215	0.2148	-	0.11
55	40	4	0.1936	0.1927	-	0.46
56	40	5	0.1616	0.1601	-	0.92
57	40	6	0.1385	0.1373	-	0.83
58	40	7	0.1214	0.1205	-	0.71
59	40	8	0.1075	0.1076		0.12
60	40	10	0.08791	0.0891		1.38

---

-----  
 VANJSKI ZAHVAT - REGRESIONA PLOHA KOEFICIJENTA b  
 -----

Regresioni polinom:

$$b = A + B_1 * z_1 + B_2 / z_1 + B_3 / u + B_4 * z_1 / u + B_5 / u^2 + B_6 * z_1^2 + B_7 * z_1 / u^2 + B_8 * z_1^2 / u + B_9 * z_1^3 + B_{10} * z_1^2 / u^2$$

$z_1$  = broj zubi

$u$  = odnos broja zubi

$b$  = koeficijent

Standardna devijacija  $s = 0.0021295193265$

Koeficijenti:

$A = 1.604385876$

$B(1) = -0.079526994036$

$B(2) = -7.8519586711$

$B(3) = -0.93475882264$

$B(4) = 0.045582639181$

$B(5) = 0.52574432742$

$B(6) = 0.0017325105793$

$B(7) = -0.03209094453$

$B(8) = -0.00064699797651$

$B(9) = -0.000013649200032$

$B(10) = 0.00048705824848$

USPOREDBA REZULTATA

i	$z_1$	$u$	$b$	$b = f(z_1, u)$	Odstupanje [%]
1	17	1	1.0E-07	0.0017	%-1694274.4039
2	17	1.588	0.05075	0.0537	5.89
3	17	2	0.07528	0.0810	7.61
4	17	2.47	0.101	0.1036	2.57
5	17	3	0.1232	0.1220	- 0.96
6	17	3.529	0.1345	0.1356	0.83
7	17	4	0.1453	0.1450	- 0.18
8	17	5	0.163	0.1597	- 2.05
9	17	6	0.1728	0.1697	- 1.77
10	17	7	0.179	0.1771	- 1.06
11	17	8	0.1833	0.1827	- 0.32
12	17	10	0.1911	0.1907	- 0.20
13	20	1	1.0E-07	0.0019	%1902099.7017
14	20	1.5	0.05524	0.0521	- 5.65
15	20	2	0.08685	0.0838	- 3.52
16	20	2.5	0.1104	0.1049	- 4.99
17	20	3	0.1215	0.1198	- 1.37
18	20	3.5	0.1323	0.1309	- 1.03
19	20	4	0.1407	0.1395	- 0.85
20	20	5	0.1496	0.1518	1.49
21	20	6	0.1581	0.1603	1.37
22	20	7	0.164	0.1664	1.46
23	20	8	0.1675	0.1711	2.12
24	20	10	0.174	0.1777	2.10
25	25	1	1.0E-07	0.0000	-1519.23
26	25	1.52	0.05421	0.0525	- 3.23
27	25	2	0.07942	0.0789	- 0.69

28	25	2.52	0.09771	0.0969	-	0.85
29	25	3	0.1074	0.1083		0.80
30	25	3.52	0.1166	0.1172		0.55
31	25	4	0.123	0.1235		0.43
32	25	5	0.1331	0.1329	-	0.16
33	25	6	0.1392	0.1392	-	0.00
34	25	7	0.1428	0.1437		0.66
35	25	8	0.1472	0.1472	-	0.02
36	25	10	0.1516	0.1520		0.27
37	30	1	1.0E-07	0.0006	%-634291.28568	
38	30	1.5	0.04615	0.0485		5.02
39	30	2	0.07061	0.0731		3.57
40	30	2.5	0.08666	0.0880		1.50
41	30	3	0.09685	0.0979		1.05
42	30	3.5	0.1038	0.1050		1.11
43	30	4	0.1098	0.1103		0.42
44	30	5	0.118	0.1177	-	0.24
45	30	6	0.1237	0.1227	-	0.82
46	30	7	0.1282	0.1262	-	1.53
47	30	8	0.1312	0.1289	-	1.75
48	30	10	0.1352	0.1326	-	1.90
49	40	1	1.0E-07	0.0002	%224898.47694	
50	40	1.5	0.03789	0.0372	-	1.77
51	40	2	0.05792	0.0575	-	0.72
52	40	2.5	0.07878	0.0782	-	0.76
53	40	3	0.0793	0.0790	-	0.42
54	40	3.5	0.08593	0.0853	-	0.71
55	40	4	0.09037	0.0902	-	0.24
56	40	5	0.09663	0.0970		0.38
57	40	6	0.1008	0.1016		0.82
58	40	7	0.104	0.1050		0.92
59	40	8	0.1074	0.1075		0.07
60	40	10	0.1107	0.1110		0.29

-----  
 UNUTARNJI ZAHVAJ - REGRESIONA PLOHA KOEFICIJENIA a  
 -----

Regresioni polinom:

$$a = A + B_1 * z_1 + B_2 / z_1 + B_3 * z_1 / u + B_4 / u^2 + B_5 * z_1^2 + B_6 * z_1 / u^2 + B_7 * z_1^2 / u + B_8 / u^3 + B_9 * z_1^3 + B_{10} * z_1^2 / u^2$$

$z_1$  = broj zubi

$u$  = odnos broja zubi

$a$  = koeficijent pravca

Standardna devijacija  $s = 0.0061438824339$

Koeficijenti:

$A = -5.3296032935$

$B(1) = 0.29252238255$

$B(2) = 35.079644985$

$B(3) = 0.062360111504$

$B(4) = 0.29083729054$

$B(5) = -0.0068736004577$

$B(6) = 0.066007796341$

$B(7) = -0.0011767871763$

$B(8) = 2.250027404$

$B(9) = 0.000057806261374$

$B(10) = -0.0019208591966$

USPOREDBA REZULTATA

i	$z_1$	$u$	$a$	$a = f(z_1, u)$	Odstupanje [%]
1	17	-2	-0.414	- 0.4225	2.05
2	17	-2,235	-0.3434	- 0.3477	1.24
3	17	-2,529	-0.2821	- 0.2854	1.16
4	17	-3	-0.224	- 0.2237	0.13
5	17	-4	-0.1579	- 0.1572	0.42
6	17	-5	-0.1241	- 0.1234	0.58
7	17	-6	-0.1048	- 0.1023	2.41
8	17	-7	-0.09114	- 0.0876	3.88
9	17	-8	-0.08047	- 0.0767	4.71
10	17	-10	-0.06585	- 0.0614	6.82
11	20	-2	-0.4817	- 0.4710	2.22
12	20	-2,25	-0.3989	- 0.3884	2.64
13	20	-2,5	-0.3329	- 0.3319	0.29
14	20	-3	-0.2655	- 0.2607	1.81
15	20	-4	-0.189	- 0.1888	0.12
16	20	-5	-0.1494	- 0.1518	1.58
17	20	-6	-0.1223	- 0.1286	5.14
18	20	-7	-0.1078	- 0.1125	4.32
19	20	-8	-0.09343	- 0.1005	7.52
20	20	-10	-0.07675	- 0.0836	8.98
21	25	-2	-0.5086	- 0.5140	1.07
22	25	-2,24	-0.421	- 0.4264	1.28
23	25	-2,52	-0.3656	- 0.3569	2.37
24	25	-3	-0.2864	- 0.2817	1.64
25	25	-4	-0.2028	- 0.2009	0.94
26	25	-5	-0.1583	- 0.1592	0.58
27	25	-6	-0.1301	- 0.1332	2.41

28	25	-7	-0.1111	-	0.1152	3.72
29	25	-8	-0.1011	-	0.1019	0.79
30	25	-10	-0.08787	-	0.0833	5.16
31	30	-2	-0.5593	-	0.5616	0.41
32	30	-2.267	-0.4567	-	0.4557	0.21
33	30	-2.5	-0.386	-	0.3920	1.55
34	30	-3	-0.3041	-	0.3037	0.12
35	30	-4	-0.2074	-	0.2143	3.32
36	30	-5	-0.16	-	0.1687	5.46
37	30	-6	-0.1436	-	0.1407	2.00
38	30	-7	-0.1268	-	0.1215	4.15
39	30	-8	-0.1151	-	0.1075	6.63
40	30	-10	-0.09492	-	0.0881	7.20
41	40	-2	-0.681	-	0.6725	1.25
42	40	-2.25	-0.5422	-	0.5473	0.94
43	40	-2.5	-0.4566	-	0.4613	1.02
44	40	-3	-0.3481	-	0.3529	1.37
45	40	-4	-0.2533	-	0.2468	2.56
46	40	-5	-0.2025	-	0.1959	3.27
47	40	-6	-0.1714	-	0.1662	3.04
48	40	-7	-0.1486	-	0.1467	1.27
49	40	-8	-0.1296	-	0.1329	2.58
50	40	-10	-0.1039	-	0.1147	10.41

---



-----  
 UNUTARNJI ZAHVAT - REGRESIONA PLOHA KOEFICIJENTA b  
 -----

Regresioni polinom:

$$b = A + B_1 * z_1 + B_2 / u + B_3 / z_1 + B_4 * z_1 / u + B_5 * z_1^2 + B_6 * z_1 / u^2 + B_7 * z_1^2 / u + B_8 / u^3 + B_9 * z_1^3 + B_{10} * z_1^2 / u^2$$

$z_1$  = broj zubi

$u$  = odnos broja zubi

$b$  = koeficijent

Standardna devijacija  $s = 0.001101373886$

Koeficijenti:

$A = 0.11190398291$

$B(1) = 0.0017846531399$

$B(2) = -0.565689852$

$B(3) = 1.8390921132$

$B(4) = 0.021201459338$

$B(5) = -0.00012616028627$

$B(6) = 0.01626120721$

$B(7) = -0.00016902622822$

$B(8) = 0.24925642371$

$B(9) = 1.7410911752E-06$

$B(10) = -0.00015290411556$

USPOREDBA REZULTATA

i	$z_1$	$u$	$b$	$b = f(z_1, u)$	Odstupanje [%]
1	17	-2	0.3774	0.3765	- 0.24
2	17	-2.235	0.3605	0.3604	- 0.03
3	17	-2.529	0.3438	0.3439	0.03
4	17	-3	0.3236	0.3238	0.06
5	17	-4	0.2966	0.2967	0.02
6	17	-5	0.2805	0.2806	0.05
7	17	-6	0.2706	0.2702	- 0.16
8	17	-7	0.2629	0.2628	- 0.03
9	17	-8	0.2571	0.2574	0.13
10	17	-10	0.2493	0.2500	0.28
11	20	-2	0.3422	0.3425	0.09
12	20	-2.25	0.3253	0.3263	0.31
13	20	-2.5	0.3124	0.3130	0.20
14	20	-3	0.2925	0.2929	0.13
15	20	-4	0.2683	0.2679	- 0.13
16	20	-5	0.254	0.2534	- 0.22
17	20	-6	0.2445	0.2441	- 0.17
18	20	-7	0.2378	0.2376	- 0.09
19	20	-8	0.2331	0.2328	- 0.12
20	20	-10	0.2268	0.2263	- 0.21
21	25	-2	0.2956	0.2957	0.02
22	25	-2.24	0.2806	0.2813	0.25
23	25	-2.52	0.2689	0.2679	- 0.37
24	25	-3	0.2519	0.2509	- 0.41
25	25	-4	0.2298	0.2293	- 0.22
26	25	-5	0.2175	0.2171	- 0.16
27	25	-6	0.2088	0.2095	0.32

28	25	-7	0.203	0.2042		0.61
29	25	-8	0.1996	0.2005		0.44
30	25	-10	0.1961	0.1954	-	0.34
31	30	-2	0.2565	0.2575		0.39
32	30	-2.267	0.2442	0.2430	-	0.48
33	30	-2.5	0.2334	0.2330	-	0.17
34	30	-3	0.2192	0.2172	-	0.94
35	30	-4	0.1969	0.1986		0.89
36	30	-5	0.1853	0.1886		1.77
37	30	-6	0.1821	0.1824		0.17
38	30	-7	0.1787	0.1783	-	0.22
39	30	-8	0.1768	0.1754	-	0.78
40	30	-10	0.1726	0.1716	-	0.56
41	40	-2	0.2045	0.2032	-	0.65
42	40	-2.25	0.1899	0.1918		1.01
43	40	-2.5	0.1835	0.1830	-	0.25
44	40	-3	0.1694	0.1707		0.78
45	40	-4	0.1578	0.1573	-	0.30
46	40	-5	0.1516	0.1507	-	0.60
47	40	-6	0.1482	0.1470	-	0.83
48	40	-7	0.1455	0.1447	-	0.56
49	40	-8	0.1428	0.1432		0.28
50	40	-10	0.1399	0.1415		1.11

---

## BIOGRAFIJA

Božidar Križan rođen je 06.12.1946. godine u Zagrebu. Do 1958. g. živio je u Skoplju, a odonda je nastanjen u Rijeci. 1965. godine maturirao je na gimnaziji "Mirko Lenac" i na Srednjoj muzičkoj školi "I.M. Ronjgov". Iste godine se upisao na Strojarski fakultet u Rijeci, brodstrojarsko usmjerenje. Nakon diplomiranja 1971. godine zaposlio se u Brodogradilištu "Viktor Lenac" u Rijeci, te iste godine otišao na odsluženje vojnog roka. U brodogradilištu je radio kao šef objekta i analitičar cijena i normativa u službi prodaje.

1974. godine prešao je na Tehnički fakultet Rijeka kao asistent za kolegij Elementi strojeva u radnom odnosu s punim radnim vremenom. Na fakultetu je održavao vježbe iz kolegija elementi strojeva, tehničko crtanje, mehaničke konstrukcije i tehničko crtanje te laboratorijske vježbe. Na Fakultetu za pomorstvo i saobraćaj u Rijeci održavao je predavanja i vježbe iz kolegija grafičke komunikacije.

1975. godine upisao je na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu postdiplomski studij usmjerenja "Metode mehaničkog proračuna konstrukcija". 1981. g. magistrirao je s temom "Analiza naprezanja kod zupčanika s unutarnjim ozubljenjem".

1982. g. izabran je u zvanje znanstvenog asistenta.

Aktivno sudjeluje u zadacima Samoupravne interesne zajednice za znanost SR Hrvatske "Istraživanja na području prijenosnika snage" i "Razvoj softvera za elemente strojeva".