

# Analiza dinamike rotora pri dodiru rotora i statora

---

**Braut, Sanjin**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2006**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:188:016620>

*Rights / Prava:* [Attribution-NonCommercial 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka Library - SVKRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

**ANALIZA DINAMIKE ROTORA  
PRI DODIRU ROTORA I STATORA**

Doktorska disertacija

Sanjin Braut

Mentor: Red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing.  
Komentor: Izv. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing.

Rijeka, 2006.

110725057

Sveučilište u Rijeci  
TEHNIČKI FAKULTET  
-Fakultetsko vijeće-  
Klasa: 602-04/02-02/13  
Ur. broj: 2170-57-43-03-11  
Rijeka, 26. rujna 2003.

Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na svojoj 13. sjednici u akad. god. 2002./03., održanoj 26. rujna 2003. donijelo je sljedeću

### ODLUKU

- 1.) Utvrđuje se da mr. sc. Sanjin Braut, dipl.ing. strojarstva ispunjava uvjete za izradbu i obranu doktorske disertacije, izvan dokorskog studija te se prihvaća tema disertacije, naslovljene: «Analiza dinamike rotora pri dodiru rotora i statora» i odobrava rad na njoj.
- 2.) Za mentora se imenuje red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl.ing., a za komentora doc. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl.ing.

DOD 133  
2006

DUF-639

Dekan

Prof. dr. sc. Božidar Krizan, dipl.ing.



Dostaviti:

1. ~~Mr. sc. Sanjin Braut~~, dipl.ing.
2. Mentor
3. Komentor
4. Evidencija studija
5. Opća i kadrovska služba
6. Pismohrana FV

300+11013

*Kćerima Antoniji i Jeleni*

## SAŽETAK

U radu je prikazan numerički pristup rješavanju problema dodira (kontakta) rotora i statora pomoću jednostavnih modela Runge-Kutta metodom te kompleksnijih konačno-elementnih modela sa posebno razvijenom aplikacijom nazvanom RotorDyn. U radu je prikazan novi pristup rješavanju problema kontakta rotora i statora uvođenjem torzijskih stupnjeva slobode gibanja. U programski paket RotorDyn implementirani su linearni i nelinearni model normalne sile dodira te različiti modeli trenja dobiveni proširenjem osnovnog Coulombovog modela. Nelinearna analiza dinamike rotora ostvarena je primjenom metoda direktne integracije; HHT  $\alpha$  metode i Generalizirane  $\alpha$  metode. Izvedena je detaljna parametarska analiza pojedinih utjecaja na pojavu kontakta između rotora i statora. Na kraju numeričke analize izvedena je simulacija otpadanja lopatice turbostroja. Na taj način dobiven je potpuniji uvid u nelinearno dinamičko ponašanje rotora s ciljem utvrđivanja parametara koji bi mogli utjecati na nestabilan rad rotacijskih strojeva. Paralelno je izvedena eksperimentalna analiza na posebno izrađenom ispitnom uređaju. Korištena je osam-kanalna mjerna oprema temeljena na NI 4472 mjernoj PCI kartici. Dobivena je dobra korelacija numeričkih rezultata sa rezultatima eksperimentalne analize. Odzivi su uspoređivani u vidu vremenske i frekventne domene te u obliku orbita. Za potrebe eksperimentalne analize dinamike rotora razvijene su posebne rutine u programskom paketu Matlab.

## ABSTRACT

In this thesis, numerical approach for solving the contact phenomena between rotor and stator is shown. As well as simple contact models, complex FEM models are analyzed too. For simple models Runge-Kutta method were used but for complex model special application, called RotorDyn, was programmed. In this thesis, a new approach in solving the contact phenomena was presented by introducing a new d.o.f. - torsional degrees of freedom. In program package RotorDyn linear and also nonlinear normal force model are implemented as well as different friction force models based on Coulomb friction model. In RotorDyn program package different integration scheme are implemented like HHT  $\alpha$  method and Generalized  $\alpha$  method. Detailed parameter studies were performed with analysis of many effects on rotor – stator contact. At the end, numerical analysis of blade loss simulation is performed. In this manner, a complete insight in nonlinear dynamic behavior of the rotor was obtained with special goal to determine the parameter which will cause the unstable behavior of the rotational machines. In the same time experimental analysis was done on the specially designed test rig, with the purpose of validation of numerical results. Multi channel data acquisition equipment based on NI 4472 measuring PCI card was used. Numerical results showed a good correlation with experimental results. Results were compared in time and frequency domain as well as in the shape of orbits. For the purpose of experimental analysis a special routines were made in program package Matlab.

## Predgovor

Doktorska disertacija *Analiza dinamike rotora pri dodiru rotora i statora* izrađena je u okviru znanstvenog projekta br. 0069016, pod nazivom *Nelinearna dinamika rotacijskih strojeva*, mješovito financiranog od strane Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske i tvrtke ALSTOM Hrvatska d.o.o. iz Karlovca a pod vodstvom glavnog istraživača red. prof. dr. sc. Mirka Butkovića.

U radu je prikazana primjena metode konačnih elemenata na rješavanje problema dinamike rotora posebno problema vezanih uz neželjeni dodir rotora i statora u radu. Kako bi se što realnije predvidjelo dinamičko ponašanje rotacijskog stroja u numerički model rotora uključeni su različiti (linearni i nelinearni) modeli normalne sile dodira rotora i statora kao i različiti modeli sile trenja. Posebnost ovog rada je uvođenje torzijskog aspekta sagledavanja problema dinamike rotora koji su tradicionalno bili rezervirani samo za fleksijske vibracije.

Ovom prilikom htio bih se najiskrenije zahvaliti svome mentoru red. prof. dr. sc. Mirku Butkoviću, kao znanstveniku i stručnjaku sa dugogodišnjim iskustvom u proizvodnji i ispitivanju turbostrojeva, na bezrezervnoj pomoći prilikom izrade ovog rada, kao i tijekom cijelog poslijediplomskog studija. Također izuzetnu zahvalnost dugujem svojem komentoru i dugogodišnjem kolegi izv. prof. dr. sc. Robertu Žiguliću na velikoj pomoći koju mi je pružio tijekom poslijediplomskog studija te izrade doktorske disertacije a posebno na korisnim savjetima i diskusijama tijekom izrade programskog paketa ROTORDYN. Također bih se ovom prilikom zahvalio svom kolegi Anti Skoblaru, dipl. ing. na dugotrajnim i plodonosnim diskusijama iz problematike vibracija i buke općenito.

Čast mi je zahvaliti se i tvrtki ALSTOM iz Karlovca a posebno gospodinu Branislavu Orčiću, dipl. ing., na korisnim diskusijama te na svesrdnoj pomoći i praktičnim savjetima.

Prof. Dr.-Ing. Rainer Nordmann, predstojniku zavoda za Mehatroniku i akustiku strojeva, Tehničkog sveučilišta u Darmstadtu, Njemačka, autor se iskreno zahvaljuje na gostoprimstvu tijekom mnogih posjeta, na ustupljenoj literaturi, na dragocjenim idejama i savjetima tijekom izrade doktorske disertacije.

Autor upućuje izuzetnu zahvalu i prof. dr. sc. Ivi Alfireviću sa Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu na uloženom trudu pri pregledu disertacije.

Na kraju se autor najtoplije zahvaljuje svojoj obitelji na beskrajnoj podršci, razumijevanju i strpljenju, a posebno kćerima Antoniji i Jeleni koje su mu bile neiscrpan izvor inspiracije.

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Problem dodira – kontakta kod modernih turbo strojeva	1
1.2. Prikaz dosadašnjih istraživanja	2
1.3. Cilj istraživanja	3
1.4. Struktura rada	4
<b>2. Aspekti modeliranja dodira rotora i statora</b>	<b>7</b>
2.1. Osnovni model dodira rotora i statora	7
2.1.1. Jednadžbe gibanja	7
2.1.2. Klasični model natražne precesije	9
2.1.3. Normalna i tangencijalna sila dodira	14
2.2. Model sudara	15
2.2.1. Uvod	15
2.2.2. Newtonov model sudara	16
2.2.3. Modeli kontaktne sile	17
2.3. Model trenja	22
2.3.1. Trenje klizanja	23
2.3.2. Modeli trenja	24
<b>3. Modeliranje dinamike sustava rotor – stator</b>	<b>27</b>
3.1. Osnovni model sustava rotor – stator	27
3.2. Složeniji modeli dinamičkog sustava rotor – stator	28
3.2.1. Model statora sa svojstvima elastičnosti i inercije	28
3.2.2. Implementacija torzije	29
3.2.3. Model elektromotornog pogona	30
3.2.4. Implementacija složenijeg modela sudara i trenja	31
3.3. Primjena MKE u dinamici rotora	33
3.3.1. Gredni konačni element	34
3.3.1.1. Osnovni gredni konačni element	34
3.3.1.2. Gredni konačni element za prostornu analizu dinamike rotora	36
3.3.2. Ležaj	40
3.3.3. Implementacija torzije	41
3.3.3.1. Kruti disk	41
3.3.3.2. Gredni konačni element za fleksijsko torzijsku analizu dinamike rotora	42
3.3.4. Asembliranje jednadžbi gibanja konačnih elemenata u jednadžbu sustava	42
3.4. Numerički postupci za rješavanje problema u dinamici rotora	44
3.4.1. Postupak za rješavanje stacionarnog odziva rotora na harmonijsku uzбудnu silu	45
3.4.2. Procedure za određivanje nelinearnog odziva	46
3.4.2.1. Hilbert-Hughes-Taylorova (HHT) $\alpha$ metoda	50

3.4.2.2. Generalizirana $\alpha$ metoda .....	51
<b>4. Numerička analiza dinamike dodira rotora i statora .....</b>	<b>52</b>
4.1. Analiza dinamike dodira rotora i statora primjenom jednostavnih modela .....	52
4.1.1. Analiza dodira rotora sa krutim statorom .....	52
4.1.2. Analiza dodira rotora sa fleksijski elastičnim statorom .....	55
4.1.3. Analiza dodira rotora sa fleksijski elastičnim statorom i asimetrično postavljenim statorom .....	68
4.1.4. Analiza dodira rotora sa fleksijski i torzijski elastičnim statorom .....	69
4.2. Analiza dinamike dodira rotora i statora primjenom metode konačnih elemenata .....	71
4.2.1. Opis računalnog programa RotorDyn .....	71
4.2.2. Opis KE modela sustava rotor – stator .....	74
4.2.3. Komparativna analiza dodira rotora sa elastičnim statorom bez i sa utjecajem torzije.....	77
4.2.4. Analiza numeričkih simulacija otpadanja lopatica rotora .....	85
<b>5. Opis eksperimentalnog uređaja .....</b>	<b>95</b>
5.1. Rotor .....	96
5.2. Stator.....	97
5.3. Pogonski sustav .....	98
5.4. Sustav za mjerenje i analizu vibracija .....	99
<b>6. Eksperimentalna analiza .....</b>	<b>101</b>
6.1. Pregled analize .....	101
6.2. Analiza dinamike rotora bez pojave dodira sa statorom .....	101
6.3. Analiza dinamike rotora sa pojavom dodira sa statorom .....	106
6.3.1. Analiza rotora pri pojavi dodira sa statorom – manja neuravnoteženost .....	106
6.3.1.1. Ubrzavanje rotora .....	106
6.3.1.2. Usporavanje rotora .....	118
6.3.2. Analiza dinamike rotora pri pojavi dodira sa statorom – veća neuravnoteženost .....	124
6.3.1.1. Ubrzavanje rotora .....	124
<b>7. Zaključak .....</b>	<b>141</b>
<b>Popis literature.....</b>	<b>145</b>
<b>Popis oznaka i simbola .....</b>	<b>150</b>
<b>Popis slika .....</b>	<b>154</b>
<b>Popis tablica .....</b>	<b>161</b>
<b>Prilog .....</b>	<b>162</b>
Prilog A: Matrice grednog konačnog elementa za fleksijsku analizu dinamike rotora .....	162
Prilog B: Matrice krutog diska za fleksijsko-torzijsku analizu dinamike rotora .....	164
Prilog C: Matrice grednog konačnog elementa za fleksijsko-torzijsku analizu dinamike rotora .....	165
<b>Životopis .....</b>	<b>167</b>

## 1. Uvod

### 1.1. Problem dodira – kontakta kod modernih turbo strojeva

Direktan dodir odnosno kontakt između rotora i statora u širem smislu riječi za vrijeme rada rotacijskih strojeva predstavlja ozbiljnu neispravnost koja može dovesti do katastrofalnih posljedica [1]. U isto vrijeme kod modernih rotacijskih strojeva postoji permanentan trend povećanja stupnja korisnog djelovanja što se često postiže smanjenjem zračnosti između rotirajućih i stacionarnih dijelova. Smanjene zračnosti mnogo češće dovode rotor u nepoželjni dodir sa statorom čime se dovode u konflikt ekonomičan i siguran rad rotacijskih strojeva.

Najčešći primjer dodira rotora i statora kod rotacijskih strojeva predstavlja dodir vrha rotorske lopatice s kućištem [2-7], dodir na mjestu brtve [8, 9] te dodir rotora s prihvatnim pomoćnim ležajevima kod rotacijskih strojeva s magnetnim ležajevima [10-16]. Prva dva slučaja posljedica su pomaka simetrale rotora odnosno povišenog nivoa vibracija uzrokovanog neuravnoteženošću, raznim radijalnim predopterećenjima, hidrodinamičkim silama, toplinskom dilatacijom te poremećenom koaksijalnošću ležajeva, dok treći slučaj nastaje prestankom rada magnetnih ležajeva odnosno pojavom velikog neuravnoteženja kojeg magnetni ležajevi ne mogu prihvatiti.

Tijekom navedene pojave, uslijed ogromne energije rotora može se generirati vrlo komplicirano dinamičko ponašanje sustava. Kada rotor pri naprednoj precesiji počne dodirivati stator, relativno klizanje rotora po statoru uz određen pritisak počinje razvijati tangencijalnu silu trenja u smjeru obrnutom od smjera rotacije rotora. Ukoliko je sila dovoljno velika može izazvati pojavu prekreta napredne precesije rotora u natražnu. Teoretski, kada sila trenja naraste do neke kritične veličine relativno klizanje rotora u odnosu na stator prerasta u kotrljanje rotora po statoru u smjeru obrnutom od vrtnje rotora, pri čemu je takva pojava u engleskoj literaturi znana pod imenom backward ili reverse whirl. Vrijeme u kojem se događa preket iz napredne precesije u natražnu te razvijanje maksimalne natražne precesijske brzine, koja je praktički nešto niža od teoretske, traje vrlo kratko iz čega se da zaključiti da se radi o velikim kutnim usporenjima koja mogu biti vrlo opasna za cjelokupni rotorski sustav.

Izgleda da dodir rotora sa statorom kod modernih visokoeffikasnih turbo strojeva nije tako neuobičajen te da može izazvati, ako ne potpunu katastrofu [1] tada postupnu degradaciju radnih karakteristika strojeva izazvanu trošenjem lopatica i brtvi ili nestabilan rad uslijed spiralnih vibracija [17-19]. Stoga je potrebno stvoriti odgovarajući model kontakta, provesti analizu dinamike turbostroja u cilju predviđanja dodirnom induciranih dinamičkih pojava te procijeniti njihovu potencijalnu opasnost.

Razvojem snažnih računala te poboljšanjem metoda dinamičke analize, kao što su HHT  $\alpha$  - metoda [20-22], WBZ  $\alpha$  - metoda [23] i Generalizirana  $\alpha$  - metoda [24], analiza



dinamike strojeva je, s jedne strane, napravila golemi napredak, a s druge strane, predložila puno više zahtjeve za modeliranje fizikalnih pojava.

Trend istraživanja u ovom znanstvenom području ide u smjeru razvoja kompleksnijih i sveobuhvatnijih numeričkih modela kontakta rotora i statora što je ujedno i cilj ovog rada.

## 1.2. Prikaz dosadašnjih istraživanja

Problem dodira ili kontakta rotora sa statorom za vrijeme rada rotacijskih strojeva počinje se proučavati u drugom kvartalu 20. stoljeća počevši s radom Newkirka [25]. koji istražuje termički utjecaj na pojavu dodira rotora i statora kod turbo strojeva.

Nešto kasnije Den Hartog 1956. g. [26] opisuje pojavu samouzbudnih vibracija uslijed suhog trenja između rotora i statora, pri čemu se uvodi pojam kovitljanja (whipping) osovine rotora. Billet [27], 1965. g., nastavlja navedeno istraživanje dok ga Begg [28], 1974. g., proširuje istraživanjem granice stabilnosti u ovisnosti o karakteristikama krutosti i prigušenja.

Black, u svom istraživanju objavljenom 1968. g. [29] istražuje, dodirom izazvanu, sinkronu precesiju osovine kao posljedicu neuravnoteženja, a isto tako proučava i stabilnost rotorskog sustava.

Ehrich, u svojim istraživanjima dinamičke stabilnosti dodira kod rotacijskih strojeva iz 1967. g. [30] i 1979. g. [31], naglašava da neće svi slučajevi, zračnostima izazvanog, punog kontakta rotora sa statorom (full annular rub), kako je to inicijalno objašnjavao Den Hartog, generirati nestabilne vibracije. To, prema njemu, možemo zahvaliti elastičnosti statora.

Muszynska, 1984. g., provodi seriju eksperimentalnih studija o dinamičkom odzivu rotora na djelomični [32] i puni kontakt rotora sa statorom [33, 34]. U slučaju djelomičnog poprečnog kontakta pokazalo se da ustaljeni odziv općenito sadrži, sinkrone, nadsinkrone i podsinkrone vibracije reda  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ , itd kao posljedicu, udarom generiranih, slobodnih poprečnih tranzijentnih vibracija.

Szczygielski i Schweitzer [35] 1985. godine, u svom istraživanju dinamike rotora uključuju utjecaj giroskopskog efekta na kontakt giroskopskog njihala s krutim zidom. Također istražuju stabilnost u ovisnosti o koeficijentu trenja i brzini vrtnje giroskopa.

Choy i Padovan [36] u radu iz 1987. godine, razmatraju Jeffcottov model rotora pri čemu kućište opisuju krutim prstenom, zanemaruju mase, ovješnim o radijalne opruge. U svom istraživanju posebno se osvrću na dodir između lopatičnog rotora i pripadnog statora.

Zhang u svom radu iz 1988. godine [37] istražuje dinamičku nestabilnost elastičnog rotorskog sustava s više stupnjeva slobode gibanja. Zhang također, na osnovi teoretskih razmatranja, razvija uvjet začetka natražne precesije te uvjet za održanje trajnog kontakta.

Muszynska osim izvornih eksperimentalnih i numeričkih istraživanja, 1989. godine, također objavljuje odličan pregled [38] do tada objavljene literature iz područja dodira rotora i statora sortirane po područjima kojima se bave.

Lingener [39] (1990. g.) provodi eksperimentalna istraživanja natražne precesije elastičnog rotora. Glavni zaključak Lingenerovih istraživanja je tvrdnja da je nemoguće proći bilo koju kritičnu brzinu sustava rotor/stator ukoliko se razvije natražna precesija rotora.

Crandall u radu iz 1990. godine [40] fokusira svoju pažnju na prijelazno područje između natražne precesije (whirl) i nastanka kovitljanja (whip) rotora, pri tome uspoređuje rezultate dobivene za uljem podmazani kontakt i suhi kontakt rotora i ležajeva.

1993. g. započet je istraživački projekt ROSTADYN, iniciran od strane Europske unije s ciljem odgovora na osnovna pitanja interakcije između rotora, fluida i statora. Jedan dio istraživanja na ovom projektu odnosio se na natražnu precesiju rotora uslijed suhog trenja (Williams [41] 1996. g., Fatarella [42] 1999. i dr.), te na istraživanje ponašanja rotora oslonjenih na magnetne ležajeve nakon zatajenja magnetskog polja Fumagalli [10-12].

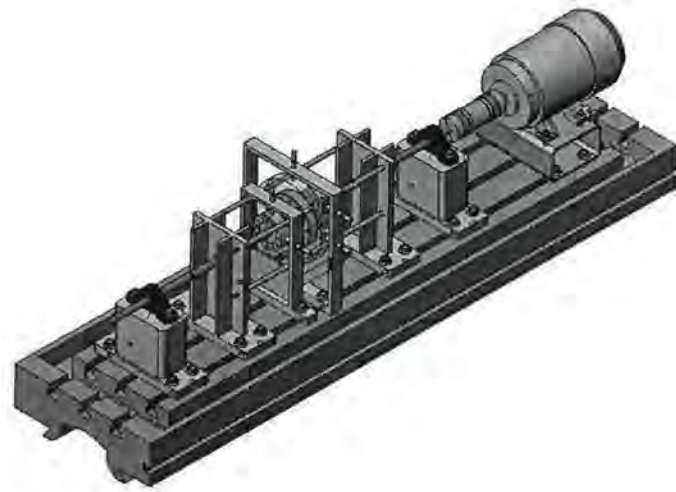
Autori poput Goldmana i Muszynske [43], Choa i Noaha [44, 45], Chua i Zhanga [46] te Sun, Xu i Zhou [47] 2001. godine nadalje, pod određenim uvjetima, javljaju opažanje periodičnog, kvazi-periodičnog te kaotičnog gibanja rotora pri dodiru rotora i statora.

Usprkos velikom broju istraživanja na ovom polju često se rezultati znatno razlikuju jedni od drugih iz čega se vidi da problem dodira rotora sa statorom još uvijek nije dovoljno istražen. Jedan od uzroka tome može biti taj da kompleksnost spomenute pojave sprječava autore u općem sagledavanju problema odnosno da većina autora prilazi problemu razmatrajući samo pojedine njegove aspekte, a zanemarujući ostale.

## 1.3. Cilj istraživanja

Cilj ovog istraživanja je izrada numeričkog modela s kojim bi se mogla provesti simulacija nelinearne pojave dodira dijelova rotora sa statorom za vrijeme rada rotacijskog stroja. Numerički model bi, osim uobičajenih fleksijskih svojstava, sadržavao i torzijska svojstva rotora. Također bi se napravio numerički model statora za kojeg se često pretpostavlja da ima beskonačnu krutost ili mu se krutost određuje pojednostavljenim računom. Provedene numeričke simulacije trebale bi odgovoriti na pitanje koliko je izvjesna te koliko je opasna pojava kontakta između rotora i statora kao i koje se sile mogu očekivati na kućištu te dalje na spoju kućišta s temeljem rotacijskog stroja. Ovo posljednje potrebno je iz razloga projektiranja takvog stroja koji bi bio otporan na potpuno razaranje stroja čime bi se smanjile potencijalne štete i direktno zaštitili ljudi u pogonu.

Cilj ovog rada je nadalje eksperimentalna verifikacija stvorenog numeričkog modela. U tu svrhu konstruirat će se poseban eksperimentalan uređaj koji će se sastojati iz vitkog elastičnog rotora, elastičnog statorskog sustava, reguliranog elektromotornog pogona te višekanalnog simultanog mjernog sustava. Slika 1.1. tako prikazuje prostorni prikaz idejnog rješenja eksperimentalnog uređaja. Rotor će imati tri diska simetrično postavljena u odnosu na uležištenja. Središnje postavljeni disk dovest će se u dodir sa statorskim prstenom dok će ostala dva manja diska služiti za mjerenje beskontaktnim senzorima pomaka. Statorski prsten omogućavat će mjerenja kako lateralnih pomaka tako i torzijskih pomaka. Mjerni sustav bit će temeljen na simultanoj PCI mjernoj kartici.



Slika 1.1. Idejno rješenje eksperimentalnog uređaja

#### 1.4. Struktura rada

U drugom poglavlju razmatraju se ključni aspekti pri modeliranju dodira rotora i statora. Poglavlje počinje osnovnim modelom dodira rotora i statora koji se dobiva proširenjem *Jeffcottovog* modela rotora. U nastavku je dan prikaz klasične teorije natražne precesije kao najrazornijeg oblika kontakta rotora i statora. Kao glavni aspekti pri modeliranju dodira između rotora i statora naglašeni su normalna i tangencijalna sila dodira. Model normalne sile dodira sveden je na model sudara između dvaju tijela te su stoga navedene osnovne teorije za opisivanje pojava pri sudaru dvaju tijela. Kao jedan od najpoznatijih modela naveden je *Newtonov* model sudara pri čemu se kao mjerilo disipacije energije uvodi koeficijent restitucije  $\varepsilon$ . U cilju prevladavanja osnovnog nedostatka *Newtonovog* modela a to je vremenski diskontinuitet, razvili su se modeli kontaktne sile pri čemu se ukupna kontaktna sila sastoji iz elastičnog i disipacijskog dijela. U modeliranju ovisnosti sile i deformacije neizostavnu ulogu i dan danas ima Hertzova teorija o elastičnom kontaktu polu-beskonačnih tijela. Na kraju pregleda modela sudara dana je nelinearna teorija Hunta i Crossleya kao spona između koeficijenta restitucije i sile prigušenja. U nastavku su razmatrani modeli tangencijalne sile odnosno sile trenja. Naglašena je nepredvidljivost trenja koja se očituje u mnoštvu različitih mehanizama i utjecaja. Iako je u svjetskoj literaturi prisutan ogroman broj radova, eksperimentalnih mjerenja i teoretskih pristupa, *Coulombov* model makroskopskog sagledavanja suhog trenja se zbog svoje jednostavnosti još uvijek uvelike koristi u dinamici sustava tijela. U nastavku su prikazani jednostavni modeli trenja nastali kao derivati osnovnog *Coulombovog* modela statičkog i dinamičkog trenja.

U trećem poglavlju opisuje se proces razvoja modela dodira rotora i statora. Na početku poglavlja postavlja se osnovni model dodira rotora i statora temeljen na fleksijskim

vibracijama rotora uslijed sile neuravnoteženja kao osnovnog pobuđivača dodira. Stator se smatra krutim. Normalna sila dodira opisuje se linearnom krutošću dok se sila trenja opisuje *Coulombovim* modelom. Osnovni model dodira se u nastavku proširuje složenijim modelom statora koji dobiva svojstva elastičnosti te inercije. Uvođenjem torzije proširuju se istovremeno i model rotora i model statora. U cilju što realnijeg opisa problema, matematički model sustava rotor-stator proširuje se modelom elektromotornog pogona, a proces evolucije modela završava uvođenjem složenijih modela kontaktne sile i modela trenja. Za potrebe modeliranja složenijih modela odabrana je metoda konačnih elemenata – MKE te je dan kratak prikaz primjene metode konačnih elemenata u dinamici rotora, sa posebnim naglaskom na implementaciju torzijskih stupnjeva slobode gibanja. Za određivanje dinamičkog odziva sustava rotor-stator primijenjeni su postupci direktne integracije, posebno *Newmarkova*, *HHT*  $\alpha$ , *Generalizirana*  $\alpha$  i *WBZ* metoda, te je dan njihov prikaz.

U četvrtom poglavlju prikazana je numerička parametarska analiza pojave dodira rotora i statora. Poglavlje se dijeli da dva dijela pri čemu se u prvom dijelu analiziraju jednostavni modeli dodira rotora i statora dobiveni proširenjem osnovnog *Jeffcottovog* modela rotora. U prvom dijelu korištena je numerička metoda Runge-Kutta s time da nisu korišteni standardni *Matlabovi* solveri iz razloga što oni koriste varijabilni vremenski korak a koji se u nekim literaturama okrivljuju za moguće nestabilnosti u rezultatima odziva rotora. Iz tog razloga programirana je nova rutina koja za vrijeme kontakta rotora i statora koristi konstantan vremenski korak. U drugom dijelu poglavlja dan je prikaz izrađenog programa, nazvanog *RotorDyn*, za analizu dinamike složenijih modela sustava rotor-stator, a temeljenog na metodi konačnih elemenata. Spomenuta aplikacija *RotorDyn* programirana je u programskom paketu *Matlab 7.0* te posjeduje dijaloge za komunikaciju korisnika sa programom. Aplikacija *RotorDyn* posjeduje sve bitne dijelove analize dinamike rotora sa posebnim naglaskom na analizu vlastitih frekvencija, pripadnih oblika vibriranja, izračun odziva linearnih prisilnih vibracija uslijed raznih tipova uzbude posebno uzbude uslijed neuravnoteženja rotora te konačno izračun nelinearnih prisilnih vibracija uslijed dodira rotora i statora. Analiza dodira podijeljena je s obzirom na vrste primijenjenih modela statora, modela sudara te modela trenja. Zajedničke pretpostavke svim analizama su sljedeće; rotor i stator su elastični u fleksijskom i torzijskom smislu, disk rotora i statorski prsten su kruta (lokalno deformabilna) tijela postavljena na sredini između ležajeva, ležajevi su kruti, disk rotora i statorski prsten ulaze u kontakt po normali tj. njihove osi su cijelo vrijeme paralelne. Svaki pojedini model analizira se prema istoj proceduri, pa se tako dinamički odziv sustava prati pri upuštanju rotora u pogon od stanja mirovanja do nominalne brzine, pri zaustavljanju pogona od nominalne brzine do stanja mirovanja, te pri zaustavljanju pogona pri povišenom nivou neuravnoteženja (simulacija havarije). Prikaz dinamičkog odziva jednak je za sve modele. Tako se simultano prati odziv diska rotora te odziv statorskog prstena u obliku orbita, relativnih normalnih i tangencijalnih brzina, precesijske brzine vrtnje te torzijskog zakreta rotora odnosno statora u ovisnosti o vremenu odnosno brzini vrtnje.

U petom poglavlju dan je detaljan opis posebno konstruiranog eksperimentalnog uređaja za potrebe istraživanja dodira rotora i statora. U poglavlju su opisuju svi bitni dijelovi eksperimentalnog uređaja počevši od izvedbe rotora, statora zatim pogonskog sustava te

konačno višekanalnog mjernog sustava sa opisom postupka mjerenja te naknadne analize unutar programa LabView i Matlab.

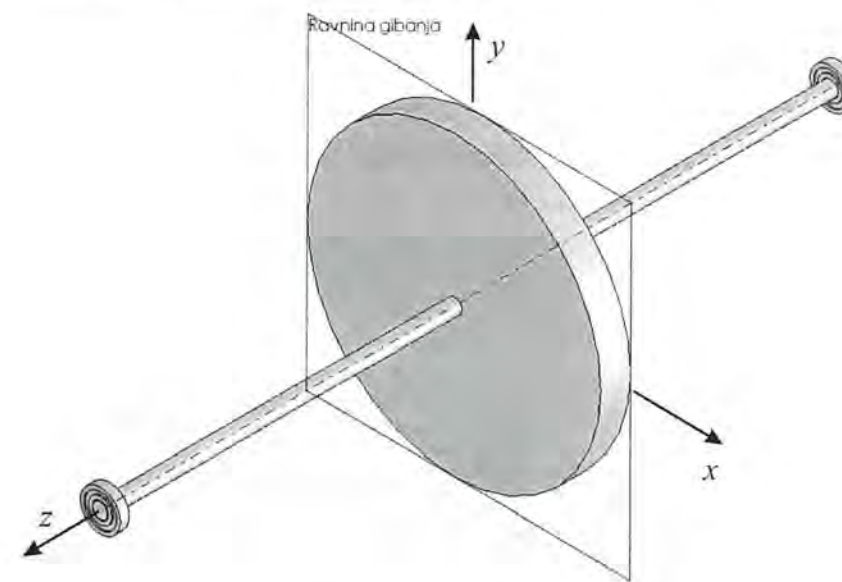
U šestom poglavlju prikazani su rezultati eksperimentalne analize. Poglavlje je podijeljeno na dva osnovna dijela. U prvom dijelu analiziran je odziv rotora bez dovođenja u dodir sa statorom kako bi se utvrdila kvaliteta uravnoteženosti rotora te preostalo neuravnoteženje u cilju kasnije usporedbe s rezultatima proračuna. U drugom dijelu analiziran je odziv rotora pri prolasku kroz kritičnu brzinu vrtnje pri ubrzavanju odnosno usporavanju. Također je na kraju analize namjerno povećano neuravnoteženje da bi se utvrdila promjena u odzivu s obzirom na novonastale okolnosti. Primjeri eksperimentalne analize odabrani su na način da mogu poslužiti za usporedbu sa rezultatima numeričke analize.

U posljednjem, sedmom poglavlju dan je zaključak u kojem je iznesen komentar rezultata istraživanja u smislu pogleda na doprinos disertacije.

## 2. Aspekti modeliranja dodira rotora i statora

### 2.1. Osnovni model dodira rotora i statora

Osnovni model dodira rotora i statora nastao je kao proširenje Jeffcottovog (Lavalovog) modela rotora za koji je karakteristično da mu središnje postavljeni disk izvodi komplanarno odnosno ravninsko gibanje, a normala ravnine u kojoj se to gibanje izvodi definirana je simetralom kroz središte ležajeva. Slika 2.1. prikazuje Jeffcottov model rotora sa definicijom koordinatnog sustava i ravnine gibanja diska.



Slika 2.1. Jeffcottov rotor

Osnovni model dodira rotora i statora dobiva se dodavanjem krutog statorskog prstena oko diska rotora. U trenutku kada amplitude vibracija diska rotora premaše vrijednost radijalne zračnosti dolazi do dodira rotora i statora

#### 2.1.1. Jednadžbe gibanja

Slika 2.2. prikazuje dodir diska Jeffcottovog rotora sa statorom. Pretpostavka je da i rotor i stator imaju svojstva inercije te fleksijske elastičnosti i prigušenja. Pomaci središta diska rotora obilježeni su sa  $x$ ,  $y$ , dok su pomaci središta statorskog prstena obilježeni sa  $x_s$ ,  $y_s$ . Na rotor djeluju sile neuravnoteženja uvedene preko ekscentričnosti osovine  $e$  te nakon pojave dodira, kontaktnih sila  $F_x$  and  $F_y$ . Sila gravitacije  $mg$  uzima se u razmatranje kod analize prihvatnih ležajeva kod rotora oslonjenih na magnetne ležajeve, pošto rotor nakon

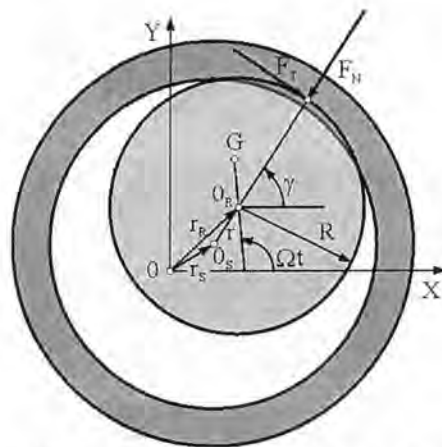
nestanka struje padne na prihvatne ležajeve upravo uslijed djelovanja sile gravitacije. Kod analize dodira između rotora i statora na mjestu brtvi ili lopatica pretpostavlja se da je stator centriran oko elastične linije rotora tako da nije potrebno uzimati gravitacijski član za rotor. Za stator se pretpostavlja da oscilira oko vlastitog ravnotežnog položaja tako da nije potrebno posebno uključivati silu gravitacije. Sve gore opisano prikazano je slijedećom jednažbom gibanja sustava rotor/stator:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= me\Omega^2 \cos \Omega t + F_x \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= me\Omega^2 \sin \Omega t + F_y - mg \\ m_s \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s &= -F_x \\ m_s \ddot{y}_s + c_s \dot{y}_s + k_s y_s &= -F_y \end{aligned} \quad (2.1)$$

pri čemu su,  $m$ ,  $m_s$ ,  $c$ ,  $c_s$ ,  $k$ ,  $k_s$  redom mase, koeficijenti prigušenja i krutosti rotora odnosno statora, dok je  $e$  ekscentričnost rotora.

Nadalje pretpostavlja se inicijalna zračnost  $C_r$  između rotora i statora. U ovom osnovnom modelu gotovo svi autori pretpostavljaju Coulombov model trenja. Ovisno o tome da li se rotor nalazi u dodiru sa statorom normalna  $F_N$  i tangencijalna sila  $F_T$  mogu se izraziti preko izraza

$$F_N(x, y) = \begin{cases} 0, & (\text{for } r < C_r) \\ (r - C_r)k_c, & (\text{for } r \geq C_r) \end{cases} \quad F_T = \mu F_N \quad (2.2)$$



Slika 2.2. Dodir diska Jeffcottovog rotora sa statorom

pri čemu je  $\mu$  koeficijent trenja između rotora i statora,  $k_c$  je kontaktna krutost a  $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$  je relativni radijalnu pomak između rotora i statora. Ove dvije sile mogu se transformirati u zapis  $x$ - $y$  koordinatnog sustava,

$$\begin{aligned} F_x &= -F_N \cos \gamma + F_T \sin \gamma \\ F_y &= -F_N \sin \gamma - F_T \cos \gamma \end{aligned} \quad (2.3)$$

pri čemu vrijedi da je,

$$\tan \gamma = (y - y_s) / (x - x_s) \quad (2.4)$$

Prema jednažbi (2.2) dodir odnosno kontakt rotora i statora dogodit će se samo pod uvjetom da je relativni radijalnu pomak između rotora i statora veći od zračnosti  $s$ .

### 2.1.2. Klasični model natražne precesije

Kada govorimo o dodiru rotora i statora onda je teško ne spomenuti natražnu precesiju ili tzv. "Backward whirl" uslijed suhog trenja.

Natražna precesija uslijed suhog trenja koja će se zbog jednostavnosti ubuduće nazivati jednostavno natražna precesija, vrlo je rijetka pojava. Ipak njegove potencijalne posljedice mogu biti razarajuće. Rosenblum [1] navodi različite slučajeve ovog kvara te predstavlja neke slučajeve potpunog razaranja turbostrojeva. Između ostalih navodi se potpuno razaranje 600 MW turbo-generatora u termoelektrani Kainan godine 1972. Šteta potekla od generatorske strane nisko tlačnog turbinskog dijela napravila je put kroz sva četiri kućišta, sve do visokotlačnog dijela turbine lomeći osovinu na ukupno 17 dijelova.

Rosenblum daje tomu, vrlo pojednostavljeno objašnjenje: U slučaju malog neuravnoteženja rotor se savija statički te izvodi sinkronu precesiju u smjeru rotacije pri čemu su amplitude pomaka konstantne. Tijekom ovakvog gibanja nema promjenjivih naprezanja unutar osovine. Neka se sada pretpostavi da rotor u jednom trenutku dođe u dodir sa kućištem uslijed iznenadnog neuravnoteženja, izazvanog gubitkom jedne ili više lopatica, a da je trenje, između rotora i statora, dovoljno veliko, da spriječi proklizavanje. Rotor je sada prisiljen, od tangencijalne sile trenja, na kotrljanje po unutarnjoj površini statora. Stoga se gibanje rotora drastično mijenja. Nadalje, osim rotacije oko glavne osi rotora sada postoji i translacijsko gibanje po kružnici sa radijusom radijalne zračnosti između rotora i statora.

Frekvencija ovog gibanja mora zadovoljiti uvjet kotrljanja tj. relativna brzina u točki dodira mora iščeznuti. Ako se radijusi rotora i statora redom označe sa  $r_r$  i  $r_s$  a kutna brzina rotacije  $\omega_{rot}$  tada se kutna brzina natražne precesije dobiva prema slijedećim izrazima:

$$v_{rel} = \omega_{rot} r_r + \omega_{np} (r_s - r_r) = 0 \quad (2.5)$$

$$\omega_{np} = -\omega_{rot} \left( \frac{r_r}{r_s - r_r} \right) \quad (2.6)$$

Negativni predznak kutne brzine natražne precesije pokazuje da je ovo gibanje suprotnog smjera od rotacije osovine. Kako su uobičajene vrijednosti radijalnih zračnosti, čak i na mjestima na kojima nema brtvljenja, vrlo male u usporedbi sa radijusom rotora to rezultira vrlo visokim vrijednostima natražne precesije. Faktor povećanja može dostići vrijednosti od otprilike 50 na pozicijama bez brtvi od više od 1000 na pozicijama brtvi. Jasno je da spomenute brzine ne mogu realno ostvariti, ali je jednako očito da se ipak mogu pojaviti visoke brzine i sile koje mogu izazvati ozbiljna oštećenja.

Gore opisano gibanje uzrokuje znatna promjenjiva naprezanja u osovinu, koja mogu premašiti granicu tečenja rotora te dovesti do pukotina na mjestima sa promjenom promjera. Iz analize različitih kvarova na turbostrojevima, kod kojih su neki dijelovi turbine nakon što su doživjeli kontakt sa statorom, promijenili kutni položaj za  $10^\circ$  do  $15^\circ$  u odnosu na osovinu u smjeru suprotnom od smjera vrtnje, Rosenblum zaključuje da su gore opisani mehanizmi natražne precesije u suglasju sa stvarnošću. On opisuje jedan primjer kvara rotora uslijed torzijskog opterećenja, a pripisuje to usporejnu rotora uslijed puknuća dijelova. Rosenblum preporučuje nastavak istraživanja na temu natražne precesije zbog katastrofa uzrokovanih istom pojavom.

Dok se Rosenblum ograničio na razmatranje natražne precesije na situaciju kod koje je već ostvaren kontinuirani kontakt, Zhang [37] proširuje klasični model razmatranjem uvjeta pod kojim se takvo gibanje može ostvariti. Za slučaj krutog diska pričvršćenog na vitku elastičnu osovinu sa vlastitom frekvencijom  $\omega_{r0}$ , viskoznom modalnim prigušenjem  $\zeta_r$  te koeficijentom trenja klizanja  $\mu$  između rotora i statora, on je izračunao ubrzanje diska uslijed sile trenja u uvjetima kontinuiranog dodira sa krutim statorom. Iz analize stabilnosti jednadžbi gibanja Zhang zaključuje da je stabilnost diska ovisna o početnim uvjetima. Ako brzina natražne precesije zadovoljava uvjet

$$\omega_{np} < -\omega_{r0} \left( \frac{\zeta_r}{\mu} + \sqrt{\left( \frac{\zeta_r}{\mu} \right)^2 + 1} \right) \quad (2.7)$$

gibanje natražne precesije postaje nestabilno. U suprotnom rotor ulazi u prigušeno slobodno vibriranje. Ovaj izraz predstavlja uvjet kod kojeg rezultatna sila trenja između rotora i statora postaje jača od od sile viskoznog prigušenja te tako ubrzava rotor u smjeru natražne precesije.

### Postojanje periodičkog gibanja natražne precesije

Za sustav sa potpuno krutim statorom utvrđeno je da veličine kutne brzine natražne precesije mogu poprimiti vrlo velike vrijednosti. S druge strane očito je da u stvarnosti postoje ograničenja na dobivene rezultate uslijed vrlo visokih vrijednosti sila kontakta te ograničene (nepotpune) krutosti realnih statora. Postoji mogućnost da se takva ograničenja mogu izraziti u ovisnosti o periodičnom gibanju natražne precesije. Ako takvo gibanje postoji te ako se shvati njegovo ponašanje, tada se mogu poduzeti selektivne mjere u cilju ograničavanja natražne precesije na vrijednosti koje ne ugrožavaju integritet postrojenja. Istraživanje koje će biti prikazano u nastavku potiče od Blacka [29] a isto tako se može naći u [48]. Slično istraživanje izvedeno je u projektu ROSTADYN [41]. Iako slijedeća analiza nije razvijena tijekom ovog rada bit će navedena zbog svoje važnosti. Bartha [9] se također bavio ovom problematikom a njegov doprinos je u ispitivanju stabilnosti dobivenih periodičkih rješenja.

### Mehanički model

U nastavku će se provesti istraživanje, da li diferencijalne jednadžbe (2.1)-(2.3), pod kinematičkim uvjetom kontakta, mogu imati periodička rješenja. Drugim riječima, tražit će se periodička rješenja sustava gdje se rotor giba s klizanjem po unutrašnjoj strani statora.

### Analiza stacionarnog stanja

Počevši od diferencijalnih jednadžbi i uvjeta dodira u kartezijevom koordinatnom sustavu te uvođenjem kompleksnog zapisa  $\mathbf{r} = r_x + i r_y$ ,  $\mathbf{s} = s_x + i s_y$  može se dobiti:

$$m_r \ddot{\mathbf{r}}_r + c_r \dot{\mathbf{r}}_r + k_r \mathbf{r}_r = -(f_n + i f_t) e^{i\gamma_c} \quad (2.8)$$

$$m_s \ddot{\mathbf{r}}_s + c_s \dot{\mathbf{r}}_s + k_s \mathbf{r}_s = (f_n + i f_t) e^{i\gamma_c} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{c}_{rs} = \mathbf{r}_r - \mathbf{r}_s = c_{rs} e^{i\gamma_c} \quad (2.10)$$

Treba napomenuti da je  $\gamma_c = \gamma_c(t)$ . Zbog simetričnosti sustava za očekivati je da periodička rješenja, ako ih uopće ima, imaju kružnu orbitu te konstantnu brzinu. Periodička rješenja drugačije vrste bilo bi tako i tako teško otkriti. Ako se pretpostave periodička rješenja oblika

$$\mathbf{r}_r(t) = \mathbf{r}_{r0} e^{i\omega_{np} t} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{r}_s(t) = \mathbf{r}_{s0} e^{i\omega_{np} t} \quad (2.12)$$

Sada u cilju omogućavanja periodičkog ponašanja, vektori sila  $\mathbf{f}_n(t) = f_n e^{i\gamma_c}$  i  $\mathbf{f}_t(t) = f_t e^{i\gamma_c}$  te vektor zračnosti  $\mathbf{c}_{rs}$  također trebaju biti iste periodičke vrste. Odnosno drugim riječima,

$$\gamma_c(t) = \gamma_c + \omega_{np} t \quad (2.13)$$

Do sada, svi vektori su bili zadani u odnosu na realnu os, tako da se u svakom vektoru, bilo eksplicitno ili ne, može pronaći član  $e^{i\gamma_c}$ . Kako je početna kutna pozicija sustava proizvoljna, odabirom vektora zračnosti  $\mathbf{c}_{rs}$  kao kutne reference može se pojednostavniti daljnja analiza. To jednostavno znači okretanje koordinatnog sustava tako da se vektor  $\mathbf{c}_{rs}$  poklapa sa realnom osi tako da je  $\gamma_c = 0$ . Tako da je odsada dalje

$$\mathbf{c}_{rs} = c_{rs} \quad (2.14)$$

što vrijedi i za sve ostale vektore, posebno  $\mathbf{r}_r$  i  $\mathbf{r}_s$  koji imaju za referencu  $\mathbf{c}_{rs}$ .

Neka se sada deriviraju jednadžbe (2.11) i (2.12) po vremenu te dobivene derivacije uvrste u (2.8) i (2.9). Dijeljenjem rezultata sa  $e^{i\omega_{np} t}$  dobiva se

$$\mathbf{r}_r = -\alpha(\omega_{np}) f e^{i\gamma_c} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{r}_s = \beta(\omega_{np}) f e^{i\gamma_c} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{c}_{rs} = -\alpha(\omega_{np}) f e^{i\gamma_c} - \beta(\omega_{np}) f e^{i\gamma_c} \quad (2.17)$$

pri čemu je  $\nu$  kut trenja a  $\alpha(\omega_{np})$  i  $\beta(\omega_{np})$  su podatljivosti rotora odnosno statora:

$$\alpha(\omega_{np}) = \frac{1}{k_r - m_r \omega_{np}^2 + i c_r \omega_{np}} \quad (2.18)$$

$$\beta(\omega_{np}) = \frac{1}{k_s - m_s \omega_{np}^2 + i c_s \omega_{np}} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{f} = (f_n + i f_t) = f e^{i\nu} \quad (2.20)$$

Na osnovi jednadžbe (2.17) može se pisati

$$\begin{aligned} c_{rs} + (\alpha(\omega_{np}) + \beta(\omega_{np})) f e^{i\nu} &= 0 \\ c_{rs} + |\alpha(\omega_{np}) + \beta(\omega_{np})| e^{i\psi} f e^{i\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

pri čemu je  $\psi$  fazni pomak od  $\alpha(\omega_{np}) + \beta(\omega_{np})$  te očito ovisi od  $\omega_{np}$ .

Jednadžba (2.21) kompleksna jednadžba sa dvije skalarne nepoznanice: veličinu sile dodira  $f$  i kutnu brzinu natražne precesije koje određuju fazni kut  $\psi$  rotorske i statorske transfer funkcije. Kako je  $c_{rs}$  realna vrijednost, drugi dio jednadžbe bi trebao biti također realan. Ovo daje uvjet faznog kuta a s njime i brzine natražne precesije, pri kojoj je ostvarivo periodičko gibanje.

Ako se pretpostavi da uvijek postoji klizanje između rotora i statora, tada je kut trenja  $\nu$  konstantan a za fazni kut  $\psi(\omega_{np})$  se dobiva:

$$\psi(\omega_{np}) + \nu = \pi \quad (2.22)$$

Sada se može odrediti kutna brzina natražne precesije  $\omega_{np}$ , koja zadovoljava jednadžbu (2.22) te zatim ukupna veličina sile dodira  $f$ , koja zadovoljava jednadžbu (2.21). Zamjenom vrijednosti  $\omega_{np}$  i  $f$  u jednadžbu (2.15) i (2.16) mogu se odrediti pomaci rotora i statora tijekom natražne precesije.

### Potreban koeficijent trenja

Gore navedeni izrazi mogu se prikazati na nešto drugačiji način, počevši od brzine natražne precesije, može se određivati sljedeće: iz jednadžbe (2.22) može se odrediti potreban kut trenja  $\nu_{potr}(\omega_{np})$  za održavanje periodičke natražne precesije pri danoj kutnoj brzini:

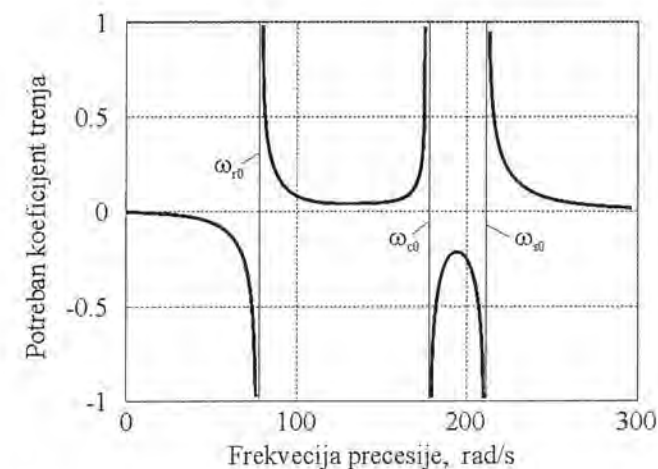
$$\nu_{potr}(\omega_{np}) = \pi - \psi(\omega_{np}) \quad (2.23)$$

a s njime potreban koeficijent trenja  $\mu_{potr} = \tan(\nu_{potr})$ . Periodičko ponašanje sustava rotor/stator pri određenoj kutnoj brzini natražne precesije moguće je ako i samo ako je za tu brzinu potreban koeficijent trenja jednak stvarnom koeficijentu trenja  $\mu_{potr}(\omega_{np}) = \mu$ . Ovaj izraz isto tako daje uvjet u kojem području frekvencija se ne može pojaviti kontinuirana natražna precesija; to su područja u kojim potreban koeficijent trenja ima negativnu vrijednost. To

znači da bi smjer sile trenja trebalo okrenuti u cilju zadovoljenja uvjeta ravnoteže. Na slici 2.3. prikazan je potreban koeficijent trenja u ovisnosti od kružne frekvencije, za sustav opisan u literaturi [40]. Jasno je vidljiv utjecaj vlastite frekvencije sustava na  $\mu_{potr}$ . Uz poznavanje vlastite frekvencije rotora za slučaj neprigušenog sustava je  $\omega_{r0} = \sqrt{k_r/m_r}$ , vlastite frekvencije statora  $\omega_{s0} = \sqrt{k_s/m_s}$  te vlastite frekvencije spojenog sustava rotor/stator  $\omega_{c0} = \sqrt{(k_r + k_s)/(m_r + m_s)}$ , mogu se odrediti područja u kojima je moguća natražna precesija. Prema literaturi [9] ispod prve vlastite frekvencije nije moguć nastanak natražne precesije. Postoje dva područja u kojima je moguć nastanak natražne precesije: između vlastite frekvencije rotora i vlastite frekvencije sustava te iznad vlastite frekvencije statora. Također se vidi, da tri točke zadovoljavaju uvjet jednakosti potrebnog koeficijenta trenja i stvarnog koeficijenta trenja. Te tri točke su označene sa A, B i C. U cilju odgovora na pitanje, koja od navedenih točaka zadovoljava uvjet stabilnog periodičkog gibanja. Black navodi slijedeća razmatranja. Ako se pretpostavi da rotor izvodi precesiju sa frekvencijom koja odgovara točki A ili C, te ako na rotor djeluje maleni poremećaj, laganim povišenjem frekvencije precesije dolazi do pada potrebnog koeficijenta trenja, potrebnog za održanje ravnoteže sila, u odnosu na stvarni koeficijent trenja. Time dolazi do prevage sile trenja u odnosu na silu prigušenja te do daljnjeg ubrzanja precesije.

Ako bi poremećaj usporavao kružnu frekvenciju natražne precesije, potreban koeficijent trenja postajao bi veći od stvarnog koeficijenta trenja, što bi dovelo do usporavanja natražne precesije. Bilo kako bilo stanje rotora će se udaljavati od točaka A i C. Za točku B vrijedi obrnuto: ako se rotor uslijed poremećaja ubrzava tada vrijednost potrebnog koeficijenta trenja postaje veća od stvarnog što dovodi do usporavanja zbog prevage sila prigušenja. Ako bi pak rotor počeo usporavati, zbog ulaska u područje dominacije stvarnog nad potrebnim koeficijentom trenja došlo bi do naknadnog ubrzanja natrag u točku B.

Iz ovih razmatranja, Black zaključuje da točke A i C predstavljaju nestabilna periodička rješenja dok točka B predstavlja stabilno periodičko rješenje. Detaljnije informacije mogu se dobiti u literaturi [29].



Slika 2.3. Potreban koeficijent trenja u ovisnosti od kružne frekvencije

Velika prednost gore prezentirane metode određivanja periodičkih gibanja natražne precesije je njena mnogostranost: ona nije ograničena na jednostavne sustave kao što je ovaj ovdje prikazan, već se upotrebom općih kompleksnih podatljivosti  $\alpha(\omega_{np})$  i  $\beta(\omega_{np})$  mogu razmatrati i vrlo složeni sustavi. Lingener [39] i Crandall [40] su objavili rezultate eksperimentalnih istraživanja koji čini se potkrepljuju Blackovu teoriju; oni su pronašli stabilnu natražnu precesiju pri frekvenciji nešto ispod vlastite frekvencije sustava. Nažalost njihovi rezultati se ne poklapaju sa rezultatima mnogo novijeg istraživanja koje je proveo Bartha [9]. Kad se raspravlja o valjanosti gore prikazanog proračuna, Bartha napominje da se u slučaju Blackove procjene stabilnosti radi samo o uvjerljivom nagađanju, temeljenom samo na ravnoteži statičkih sila. Realni sustav rotor/stator ima četiri stupnja slobode gibanja tj. osam stanja, koja se ne mogu procijeniti analizom jedne varijable. U cilju određivanja stabilnosti natražne precesije, neophodno je stoga izvršiti matematičko istraživanje stabilnosti cjelokupnog sustava.

### 2.1.3. Normalna i tangencijalna sila dodira

Kao što je to vidljivo iz slike 2.2. analiza dodira rotora i statora uvelike se svodi na modeliranje dvije međusobno okomite sile tj. na normalnu i tangencijalnu silu dodira. Iako je iz iste slike vidljivo da se realan dodir između cilindričnih površina rotora i statora ne može ni blizu opisati kao dodir preko izvodnice, odnosno projicirano na ravninu kao dodir u točki, zbog jednostavnosti se ipak tako uzima. Kao točka dodira uzima se ona koja se nalazi na pravcu koji prolazi kroz središta kružnica rotora i statora.

U nastavku će se opisati model normalne sile (model sudara) i model tangencijalne sile (model trenja) kao osnovni modeli koji tijekom dodira povezuju ponašanje rotora i statora odnosno putem kojih se odvija pretvorba energija. Tako možemo reći da se inicijalna kinetička energija rotora tijekom dodira pretvara u izmijenjenu kinetičku energiju rotora, kinetičku energiju statora te nepovratno izgublenu energiju u vidu zagrijavanja rotora i statora, plastičnih deformacija rotora i statora, istrošenosti površina rotora i statora itd.

Isto tako treba napomenuti da modeli normalne sile i tangencijalne sile nisu neovisni već da tangencijalna sila direktno ovisi o normalnoj sili što se vidi i iz najjednostavnijeg modela trenja tzv. Coulombovog modela trenja  $F_T = \mu F_N$ .

## 2.2. Model sudara

### 2.2.1. Uvod

Ukupno disipiranu energiju tijekom dodira teško je modelirati. Neki istraživači za osnovne parametre pri određivanju modela sudara uzimaju vrijeme dodira te brzine prije i poslije dodira [9] dok drugi za osnovne parametre uzimaju vrijeme dodira i maksimalnu silu tijekom dodira [10-12]

Faik [49] u svom preglednom članku o modeliranju dinamike sudara govori o evoluciji teorije sudara kroz četiri glavna vida:

**Klasična mehanika:** Ona, u cilju predviđanja brzine nakon sudara, uključuje primjenu temeljnih zakona mehanike. Zakon o impulsu i količini gibanja čini srž ovog pristupa. Goldsmith, u svom klasičnom djelu [50] posvećuje poglavlje primjeni ove teorije na nekoliko različitih problema. Brach [51] također koristi ovaj pristup za modeliranje brojnih praktičnih problema, pri čemu naglašava njegovu matematičku jednostavnost. Gubitak energije, svojstven svim realnim sudarima, uzima se u obzir preko koeficijenta restitucije. Točnost ovog koeficijenta presudna je za dobivanje dovoljno dobrih rezultata. Na žalost, ovim se pristupom ne može pouzdano odrediti sila dodira (kontakta) između tijela niti naprezanja u njima.

**Širenje elastičnih valova:** Sudar je redovito popraćen valovima naprezanja koji se šire kroz sudarena tijela počevši od mjesta sudara. Ako pritom, energija transformirana u vibracije čini značajan dio ukupne energije, tada klasičan pristup rješavanja sudara postaje nedostatan. Goldsmith [50] i Zukas [52] su primijenili ovaj pristup za rješavanje mnogih problema, kao što su: uzdužni sudar dviju šipki, sudar sfere i šipke te utjecaj viskoelastičnosti na sudar.

**Mehanika kontakta - dodira:** Naprezanje dodira koje proizlazi iz sudara dva tijela je slijedeće područje interesa u istraživanju sudara. Klasična mehanika dodira većinom se bavi statičkim dodirrom premda je proširena kako bi mogla opisati situacije koje uključuju sudar. Za kuglasta tijela koristi se Hertzova teorija kako bi se dobila ovisnost sile i deformacije potrebna za izračun trajanja sudara i maksimalne deformacije. Ovaj pristup se proširuje na slučajeve kod kojih se pojavljuju plastične deformacije, tako što se uvodi pretpostavka o materijalu koji ima granicu tečenja. Kada se ne može primijeniti Hertzova teorija tada se koriste numerički modeli. Funkciji ovisnosti sile i deformacije često se dodaje član sa prigušenjem kako bi odražavao disipaciju energije u području kontakta, omogućujući na taj način modeliranje istoga kao sustava opruge i prigušivača.

**Plastična deformacija:** Kad pojave većih plastičnih deformacija pri sudaru, ne može se više primijeniti model širenja elastičnih valova. Ova situacija se javlja kod sudara pri velikim brzinama, koji općenito povezujemo sa vojnom tehnikom projektila. Goldsmith [50] i Zukas [52] u svojim knjigama opisuju dva pristupa rješavanja navedenog problema: teoriju širenja

plastičnih valova te teoriju hidrodinamičkog ponašanja čvrstih tijela. U teoriji širenja plastičnih valova, materijal se smatra nestlačivim. Nadalje, pretpostavlja se da je jednadžba stanja naprezanja, deformacije te brzine deformacije, neovisna o temperaturi. U teoriji hidrodinamike, smatra se da je trajna deformacija rezultat promjene gustoće tijela. Jednadžba stanja materijala koja dovodi u vezu promjene tlaka i gustoće sa temperaturom i entropijom koristi se zajedno sa zakonima o očuvanju količine gibanja, energije i mase.

U većini slučajeva inženjer strojarstva traži odgovor na dva osnovna pitanja:

- a) Kakav je odnos brzina tijela prije i poslije sudara?
- b) Koje sile se pojavljuju u točki sudara

Pristup pomoću zakona o impulsu i količini gibanja može adekvatno odgovoriti na prvo pitanje, poznavanjem koeficijenta restitucije za par tijela u sudaru. S druge strane navedeni pristup ne može u potpunosti odgovoriti na drugo pitanje. Teorija širenja valova neophodna je za određivanje naprezanja unutar tijela no trenutno je njena integracija u dinamičku analizu sustava s više tijela prezahtjevan zadatak. Pristup mehanike dodira nudi mogućnost opisivanja područja dodira sustavom opruge i prigušivača, tretirajući sudar kao vremenski kontinuiranu dinamičku pojavu. Teorija velikih plastičnih deformacija uslijed sudara najviše se koristi kod analize probijanja tijela od strane projektila kao i u balistici.

Od svega navedenog može se zaključiti da je za potrebe ovog rada, zbog dinamičke analize metodama direktne integracije, od posebne važnosti teorija kontaktne mehanike koja osigurava vremenski kontinuitet te omogućuje modeliranje mjesta dodira sustavom koeficijenata krutosti i prigušenja koje je jednostavno integrirati u sustav jednadžbi gibanja. Pošto je dobar dio eksperimentalnih rezultata sudara dvaju tijela, dostupnih iz literature, izražen pomoću koeficijenta restitucije to se može reći da će, u ovome radu, pristup analize sudara biti kombinacija mehanike dodira i klasične mehanike. Eksperimentalni rezultati izraženi pomoću parametara modela koeficijenta restitucije biti će preinačeni u parametre modela mehanike kontakta.

### 2.2.2. Newtonov model sudara

Jedan od najpoznatijih modela sudara je Newtonov model. Osnovna pretpostavka u ovom modelu je da su tijela u koliziji potpuno kruta. Kao posljedica toga, trajanje sudara trebalo bi biti jednako nuli. Sam zakon o očuvanju količine gibanja, nije uvijek dovoljan za predviđanje brzina dvaju tijela nakon sudara. Općenito se, u osnovnoj teoriji sudara, razmatraju dva granična slučaja: potpuno elastičan sudar i potpuno plastičan sudar. Dok prvi slučaj implicira nepromjenjivost kinetičke energije sustava, drugi slučaj pretpostavlja spajanje dvije mase u jednu. Brzina spojene mase, nakon sudara, može se odrediti primjenom zakona o očuvanju količine gibanja. Međutim, većina sudara nije niti potpuno elastična niti potpuno plastična. Nastali, djelomični gubitak inicijalne kinetičke energije, izražava se pomoću

koeficijenta restitucije  $\varepsilon$ . Ovaj koeficijent dovodi u vezu relativne brzine dvaju tijela prije i poslije sudara:

$$\varepsilon = -\frac{v_1 - v_2}{v_{01} - v_{02}} \quad (2.24)$$

pri čemu indeksi 1 i 2 označavaju tijela u sudaru a indeks 0 označava brzine tijela prije sudara. Ova jednadžba zajedno sa zakonom o očuvanju količine gibanja i impulsu sile daje dovoljno informacija za rješavanje jednostavnih problema sudara.

Veličina  $\varepsilon$  je bezdimenzijski koeficijent koji može poprimiti vrijednost između 0 i 1 pri čemu 0 odgovara potpuno plastičnom sudaru dok 1 odgovara potpuno elastičnom sudaru. Koeficijent restitucije je globalna mjera gubitka energije tijekom sudara a može opisivati različite oblike disipacije kao što su viskoelastičan rad materijala, tijela u sudaru, plastične deformacije dodirnih površina te vibracije s prigušenjem strukture tijela u sudaru. Koeficijent restitucije kao takav nije svojstvo materijala, već osim materijala oba tijela u sudaru ovisi i o geometriji te o udarnoj brzini. Osnovna prednost koncepta koeficijenta restitucije je njegova matematička jednostavnost. No ta jednostavnost kod jednostavnih problema može s druge strane postati nedostatak pri nastojanju integracije istog modela u procedure koje se temelje na metodi konačnih elemenata a nastoje složeniji dinamički problem riješiti vremensko – integracijskim metodama.

Promjena koeficijenta restitucije u ovisnosti od inicijalne brzine, posebno je područje istraživanja. Općeniti zaključak ovih istraživanja je konstatacija da je koeficijent restitucije kod većih brzina sudara manji i obrnuto. Time se želi reći da se kod većih brzina, tijela u sudaru, više energije izgubi kroz razne mehanizme disipacije. Može se reći da općenito vrijedi

$$\varepsilon = 1 - f(v^n) \quad (2.25)$$

Razmatranjem zasebno modela sudara kuglice i masivne podloge pod utjecajem viskoelastičnog ponašanja [53, 54] dobiva se vrijednost potencije  $n = 1/5$ . Općenito za sudar dvaju tijela pri brzinama ispod 0.5 m/s može se prema [50, 55], uzeti s dovoljnom točnošću da je  $n = 1$ .

### 2.2.3. Modeli kontaktne sile

Gore osnovna teorija sudara, temelji se na pojednostavljenoj pretpostavci o potpuno krutim tijelima. Stvarni fizikalni objekti su deformabilni te stoga sudar traje neko konačno vrijeme (duže od nule). Ovaj mnogo realniji pristup pojavi sudara doveo je mnoge istraživače do razmatranja o modelima kontinuirane dinamike kolizije pri čemu se tijela tijekom sudara deformiraju. Uspjeh ovog pristupa kao alata analize temelji se na jasnom matematičkom modelu ovisnosti sile i deformacije te brzine deformacije. U općem slučaju, ovisnost sile i deformacije ima oblik:

$$F = F_k(\delta) + F_c(\delta, \dot{\delta}) + F_p(\delta, \dot{\delta}) \quad (2.26)$$



pri čemu je:  $F_k$  elastični (konzervativni) dio,  $F_c$  disipacijski dio uslijed viskoznog prigušenja te  $F_p$  disipacijski dio kontaktne sile  $F$  uslijed plastične deformacije.

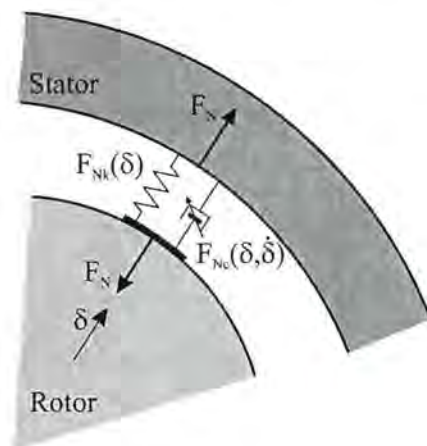
U nastavku će se pri razmatranju kontaktne sile zanemariti disipacija uslijed plastičnih sila jer se pretpostavlja da maksimalna radijalna brzina udara rotora u stator manja od kritične brzine nastanka plastične deformacije. Slika 2.4. prikazuje model kontakta pomoću ekvivalentnog sustava opruge i prigušivača.

### Ovisnost sile i deformacije

Može se reći da temelji mehanike kontakta leže na Hertzovom radu o elastičnom kontaktu polu-beskonačnih tijela objavljenom 1882. Mnogi autori [56, 57] daju opširne preglede Hertzove teorije. Hertzova teorija predviđa raspodjelu naprezanja u zoni kontakta dvaju tijela zakrivljenih površina. Također omogućuje proračun raspodjele normalnih i smičnih naprezanja unutar tijela. To otkriva zanimljivu i važnu činjenicu da se maksimalno smično naprezanje, koje se može dovesti u vezu sa oštećenjem materijala, pojavljuje ispod površine dodira izazivajući na taj način plastično tečenje neuočljivo vizualnom detekcijom. Vrlo često korišteni rezultat Hertzove teorije je relacija između sile i deformacije dviju kugli u dodiru:

$$F_k = k\delta^{3/2} \quad (2.27)$$

gdje je:  $F_k$  normalna sila pritiska između dviju kugli,  $\delta$  približenje dviju kugli odnosno ukupna deformacija kugli,  $k$  konstanta ovisna o radijusima kugli te elastičnim svojstvima materijala kugli.



Slika 2.4. Model kontaktne sile – sustav opruge i prigušivača

Kombinacijom jednadžbe (2.25) sa jednadžbama gibanja Timošenko razmatra sudar dviju kugli. Kao rezultate dobiva maksimalnu ukupnu deformaciju te trajanje sudara. Važno je napomenuti da je Hertzova formulacija primjenjiva samo na nekonformne kontakte. Drugim riječima ne mogu se primijeniti na slučajeve kada je zakrivljenost u točki dodira, kao što je to slučaj sa kliznim ležajem ili sa dodiranjem dviju ravnina, previše slična. Područje dodira

mora također ostati malo u usporedbi sa dimenzijama tijela i radijusom zakrivljenosti u točki dodira.

Rivin [58] daje prikaz detaljne analize podatljivosti kliznih ležajeva i ostalih cilindričnih spojeva. On pretpostavlja sinusnu raspodjelu pritiska između osovine i cilindričnog kućišta. U cilju određivanja raspodjele pritiska Rivin razmatra dva moguća modela ovisnosti sile i deformacije, linearni i kvadratni:

$$F_k = k_1\delta \quad (2.28a)$$

$$F_k = k_2\delta^2 \quad (2.28b)$$

Eksperimenti su paralelno provedeni za različite parove materijala osovina/cilindrično kućište kako slijedi: očvrnuti čelik/očvrnuti čelik i očvrnuti čelik/lijevano željezo te za različita opterećenja. Rezultati eksperimenata pokazuju da kvadratni model bolje opisuje deformaciju uzrokovanu većim relativnim opterećenjem dok linearni model bolje opisuje deformaciju uslijed manjih relativnih opterećenja.

### Viskozna disipacija

Najjednostavniji model viskozne disipacije  $F_c(\delta, \dot{\delta})$  koji se spominje u literaturi [59, 60] je linearni prigušivač,

$$F_c = c\dot{\delta} = c\dot{\delta}^0 = c\dot{\delta} \quad (2.29)$$

pri čemu je  $c$  koeficijent prigušenja.

Nelinearni izraz za visko-elastičnu silu izvorno su predložili Hunt i Crossley [55]. On ima slijedeći opći oblik

$$F_c = \lambda\dot{\delta}^n \quad (2.30)$$

pri čemu su  $\lambda$  i  $n$  konstante. Osnovni cilj primjene nelinearnih modela je izbjegavanje nerealnih adhezijskih sila pri izlasku iz kontakta kao i diskontinuiteta pri ulasku i izlasku iz kontakta.

Osim spomenutog modela disipacijska sila kontakta mogla bi se modelirati prema slijedećem izrazu [59, 60]:

$$F_c = c\frac{\dot{\delta}}{\delta_{ref}} \dot{\delta} \quad (2.31)$$

pri čemu se  $\delta/\delta_{ref}$  utjecajni koeficijent povećava sa povećanjem deformacije  $\delta$  a disipacijska sila postiže referentnu vrijednost  $c\dot{\delta}$  kada je  $\delta = \delta_{ref}$ .

Slika 2.5. prikazuje različite modele kontaktne sile s obzirom na različite kombinacije modela elastične sile  $F_k$  i sile prigušenja  $F_c$ .

Područje obuhvaćeno krivuljom histereze predstavlja izgubljeni rad sile prigušenja tijekom sudara dvaju tijela a matematički se može prikazati pomoću krivuljnog integrala

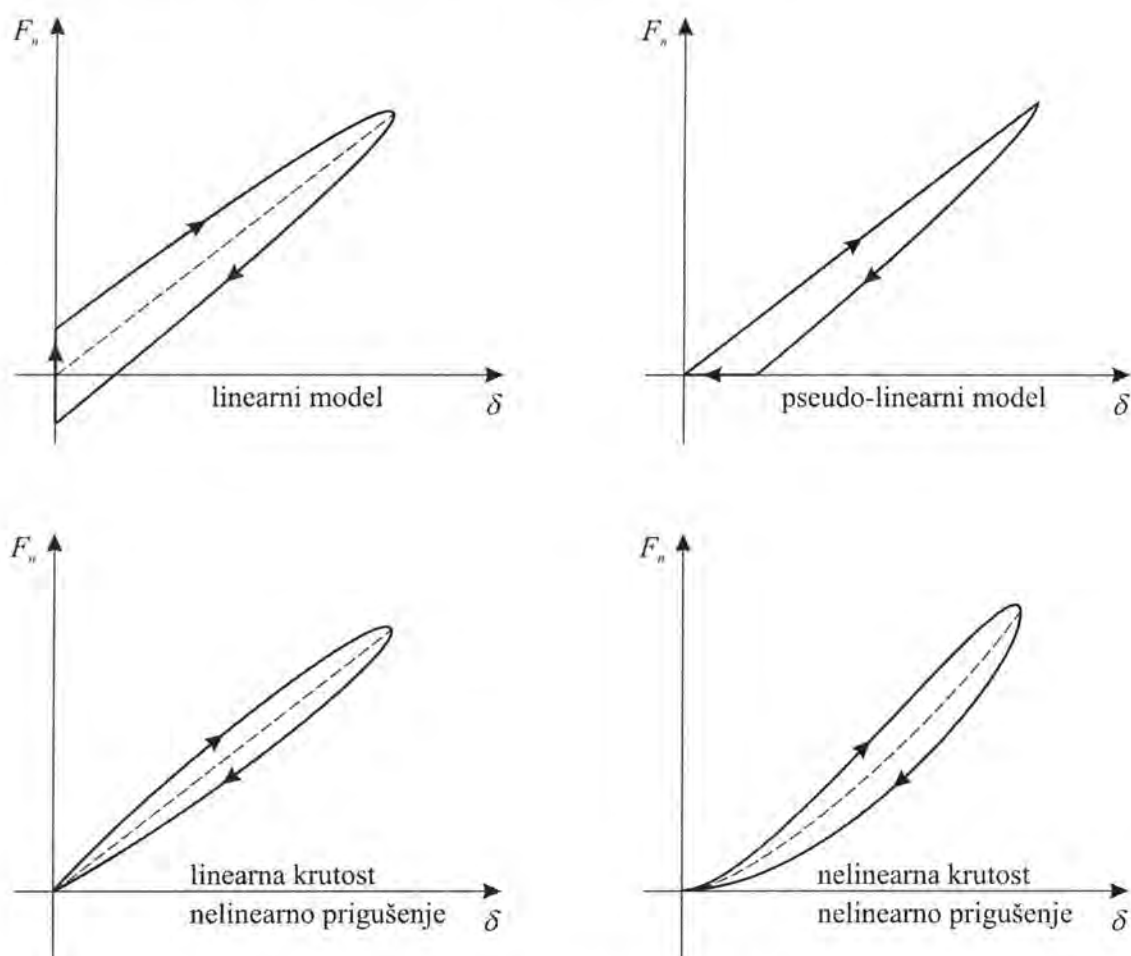
$$W = \int F_{nc} dx \quad (2.32)$$

Linearni i pseudo-linearni model kontakta opisani su dobro poznatom linearnom jednačbom:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.33)$$

pri čemu je  $c$  koeficijent viskoznog prigušenja a  $k$  koeficijent krutosti.

Pseudo-linearni model [59] u odnosu na linearni treba imati dodatnu funkciju uvjeta  $\sigma(\delta, \dot{\delta})$  koja od početka kontakta do postizanja maksimalne deformacije isključuje silu viskoznog prigušenja da bi je potom uključila. Funkcija uvjeta ponovno djeluje u povratnoj fazi rasterećenja, u trenutku kada suma konzervativne sile  $F_{nk}$  i sile viskoznog prigušenja  $F_{nc}$  postaje negativna, na način da anulira ukupnu silu kontakta  $F_n$ .



Slika 2.5. Modeli kontaktne sile

U cilju eliminacije negativnih sila poput pseudo-linearnog modela a s poboljšanjem u smislu izbjegavanja diskontinuiteta Hunt i Crossley su predložili model sa nelinearnom krutošću i nelinearnim prigušenjem. Spomenuti nelinearni model može se opisati jednačbom:

$$m\ddot{x} + (\lambda x^n)\dot{x} + kx^n = 0 \quad (2.34)$$

### Veza između koeficijenta restitucije i prigušenja

U nastavku je prikazan način povezivanja klasičnog koeficijenta restitucije  $\varepsilon$  sa dinamičkim modelom iskazanim preko jednačbe (2.32). Koeficijent restitucije je već upotrijebljen u jednačbi (2.22), pri čemu su dovedene u vezu apsolutne brzine dvaju tijela prije i poslije sudara. Ako se želi izraziti odnos relativnih brzina prije  $v_0$  i poslije  $v$  sudara tada jednačba (2.22) poprima oblik:

$$v = \varepsilon v_0 \quad (2.35)$$

Koeficijent restitucije je kao što je već rečeno vrlo indikativan parametar i može se odrediti pomoću relativno jednostavnih eksperimenata. Već je napomenuto da je iz eksperimenata zapaženo [50] da se povećanjem udarne brzine  $v_0$  smanjuje koeficijent restitucije  $\varepsilon$ . Za ograničeno područje udarnih brzina (ispod 0.5 m/s) te za materijale sa linearno elastičnim područjem Hunt i Crossley [55] su pretpostavili, s prihvatljivom točnošću, ovisnost koeficijenta restitucije o udarnoj (ulaznoj) brzini, kao varijantom jednačbe (2.23) kako slijedi:

$$\varepsilon = 1 - \alpha v_0 \quad (2.36)$$

Koeficijent restitucije je, kako je već rečeno, globalna mjera gubitka energije tijekom sudara. U cilju prikazivanja ovisnosti gubitka energije o brzini  $v_0$  može se razmotriti gubitak kinetičke energije jednog tijela pri sudaru pod uvjetom da je drugo tijelo stacionarno. Uvažavanjem jednačbe (2.33) dobiva se gubitak kinetičke energije  $\Delta E_k$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m(v_0^2 - v^2) = \frac{1}{2} m v_0^2 (1 - \varepsilon^2) \quad (2.37)$$

Uvođenjem jednačbe (2.34) u (2.35) uz pretpostavku da je  $2\alpha v_0 \gg (\alpha v_0)^2$  dobiva se

$$\Delta E_k \approx \alpha m v_0^3 \quad (2.38)$$

Pretpostavljajući nadalje opću zakonitost elastičnog dijela sile kontakta i deformacije

$$F_{nk} = k\delta^n \quad (2.39)$$

Hunt i Crossley dobivaju ovisnost koeficijenta  $\lambda$  iz jednačbe (2.32) o koeficijentu  $\alpha$  kako slijedi

$$\lambda = \frac{3}{2} \alpha k \quad (2.40)$$

Jednačba (2.32) može se sada napisati u obliku

$$m\ddot{x} + kx^n \left( \frac{3}{2} \alpha \dot{x} + 1 \right) = 0 \quad (2.41)$$

pri čemu ukupna normalna sila dodira ima oblik

$$F_n = kx^n \left( \frac{3}{2} \alpha \dot{x} + 1 \right) \quad (2.42)$$

Iako je Hertzovom teorijom vrijednost eksponenta  $n = 3/2$  dobivena za sudar dviju kugli te je napomenuto da zakon u potpunosti ne vrijedi za sudar dvaju konformnih tijela, uzimajući u obzir, prije navedeno, istraživanje o podatljivosti kliznih ležajeva i ostalih cilindričnih spojeva [58] gdje u ovisnosti o intenzitetu opterećenja eksponent  $n$  varira između 1 i 2, vrijednost eksponenta  $n = 3/2$  čini se ipak razuman izbor.

### 2.3. Model trenja

Želja za sve boljim modelima predviđanja trenja dovela je do brzog razvoja u području modeliranja i simulacije dinamičkih modela. Iako se u literaturi može pronaći ogroman broj mjerenja i teoretskih pristupa modeliranju, opis i predvidljivost trenja se do dana današnjega nije zadovoljavajuće riješila. Fenomenološki modeli imaju općenito usko područje valjanosti, fizikalno temeljeni modeli se tako većinom usredotočuju na samo manji broj utjecaja na proces trenja.

Bitni problemi pri razvoju modela trenja daju se, prema [61] svrstati u jednu od sljedećih pet konstatacija:

- Trenje se kroz svoju nepoznatu dinamičku kompleksnost očituje naizmjeničnim djelovanjem mnogih mehaničkih, fizikalnih i materijalnih utjecaja koje gotovo nije moguće zasebno razlučiti,
- Efekti koji nastaju kod trenja pokazuju se kod potpuno drukčijih skala vrijednosti. Ovdje se mora naći spona između makro- i nano-tribologije na planu eksperimenata i teorije,
- Fenomeni trenja su općenito izučavani unutar različitih znanstvenih disciplina. U novije vrijeme javljaju se multidisciplinarnе grupe za izučavanje problema trenja.
- Praktički sve postojeće teorije trenja koriste disipacijska svojstva materijala odnosno kontakta. To često dovodi do toga da izlazne vrijednosti trenja u ovim teorijama objašnjavaju preko ulaznih vrijednosti u drugoj najčešće mikroskopskoj skali.
- Daljnji bitan problem pri razvoju teorije trenja je to da je koeficijent trenja klizanja  $\mu$ , jedan globalni vremenski ovisan parametar za opis trenja. Ovaj parametar ne obilježava zapravo ništa, niti detalje kontaktne površine niti svojstva materijala tijela u dodiru.

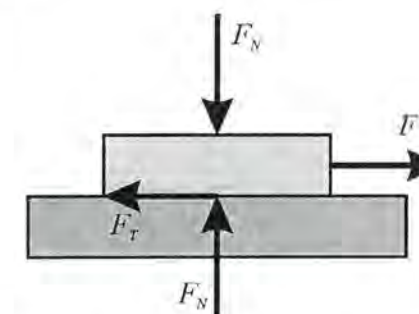
Izvrstan uvod u praktički sva područja tribologije nude [62] i [63]. Prema [62] se tako trenje može prema vrsti relativnog gibanja tijela u kontaktu podijeliti na sljedeće glavne vrste: trenje klizanja i trenje kotrljanja.

#### 2.3.1. Trenje klizanja

Klasični eksperiment trenja klizanja je prikazan na slici 2.6. Ako se tijelo, pritisnuto silom  $F_N$  prema drugom tijelu, želi pomaknuti tangencijalnom silom  $F$  tada se između dva tijela kao reakcija javlja tangencijalna sila  $F_T$  tzv. sila trenja. Veza između normalne sile pritiska i tangencijalne sile trenja poznata je pod imenom Coulomb – Amonton-ov zakon trenja. Za slučaj dok se još nije dogodilo proklizavanje između dva tijela on ima sljedeći oblik:

$$F_T \leq \mu_0 F_N \quad (2.43)$$

pri čemu se  $\mu_0$  naziva koeficijent statičkog trenja. Znak jednakosti vrijedi samo neposredno prije početka relativnog gibanja.



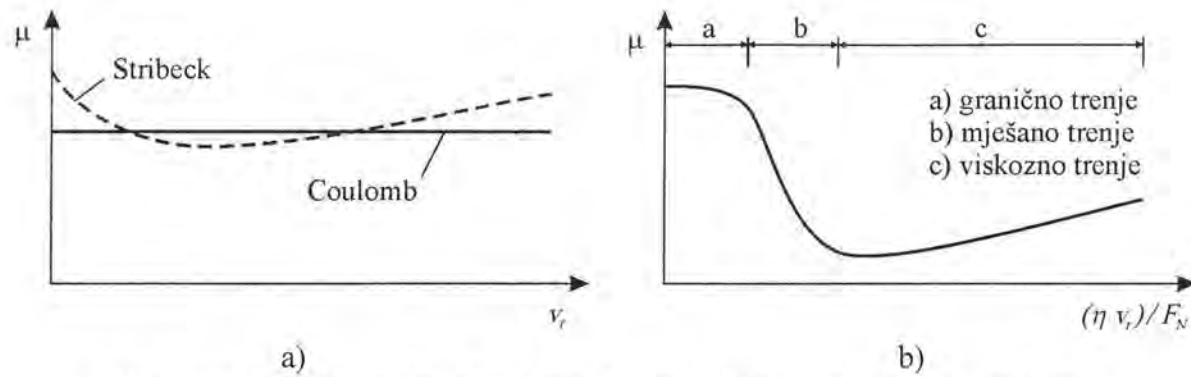
Slika 2.6. Reakcija hrapave podloge na tangencijalnu silu povlačenja

Poveća li se sila povlačenja iznad maksimalne sile statičkog trenja, tijelo se tada dovodi u gibanje. Čim počne gibanje, statičko trenje prelazi u kinematičko.

$$F_T = \mu F_N \quad (2.44)$$

pri čemu je  $\mu$  koeficijent (kinematičkog) trenja klizanja. Koeficijent statičkog trenja  $\mu_0$  veći je od koeficijenta kinematičkog trenja  $\mu$ . Prema Coulombovom objašnjenju koeficijent statičkog i koeficijent trenja klizanja neovisni su od veličine kontaktne površine. Danas se između prividne i stvarne kontaktne površine pravi razlika. Uslijed površinske hrapavosti tijela se dodiruju samo preko jednog manjeg područja  $A_0$  od ukupne površine kontakta  $A$ . Općenito je  $A_0$  bitno manje od  $A$ .

Prema Coulombu je koeficijent trenja klizanja  $\mu = F_T / F_N$  neovisan od relativne brzine klizanja  $v$  dvaju tijela u kontaktu. Mjerenja nasuprot tomu pokazuju veću ili manju očitu ovisnost koef. trenja klizanja o brzini klizanja. Ovisnost koeficijenta trenja klizanja o brzini klizanja često se prikazuje pomoću tzv. Stribeck-ove krivulje (slika 2.7.).

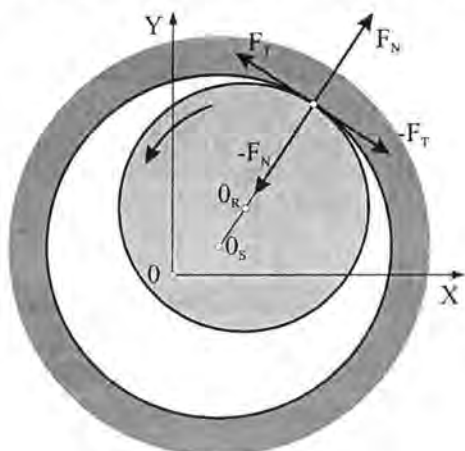


Slika 2.7. Stribeck-ova krivulja, a) za suho trenje, b) za trenje sustava s mazivom

Stribeck-ova krivulja primjenjuje se kako za slučaj suhog trenja tako i za slučaj tribološkog sustava s uljnim podmazivanjem. Slika 2.7. b) prikazuje ovisnost koeficijenta trenja klizanja  $\mu$ , kao odnosa između sile trenja  $F_T$  i normalne sile  $F_N$ , o karakterističnim varijablama poput dinamičke viskoznosti maziva  $\eta$ , relativne brzine klizanja  $v_r$  i normalne sile  $F_N$ . Kod malih vrijednosti  $v_r$  nije moguće formiranje stabilnog uljnog filma pa se govori o uvjetima *graničnog podmazivanja*. Nakon njega slijedi područje *miješanog podmazivanja* pri čemu odnos sile trenja i normalne sile naglo pada a uljni film je približno jednak visini neravnina površine tijela u kontaktu. Povećanjem viskoznosti  $\eta$  i/ili relativne brzine klizanja  $v_r$  odnosno, smanjenjem normalne sile  $F_N$ , konačno se formira *hidrodinamičko podmazivanje* a koeficijent trenja klizanja  $\mu$  neznatno raste.

### 2.3.2. Modeli trenja

Osnovna ideja svakog modela trenja je da se protivi gibanju. Slika 2.8. prikazuje sile koje djeluju na rotor odnosno stator u kontaktu. Pretpostavka je da pozitivna sila trenja  $F_T$  pri pozitivnoj razlici tangencijalnih brzina rotora i statora ( $v_r - v_s$ ) u kontaktu djeluje na stator. Istovremeno kod pozitivne razlike tangencijalnih brzina rotora i statora, stator djeluje na rotor sa negativnom silom trenja tj. ( $-F_T$ ).



Slika 2.8. Definicija sile u kontaktu koje djeluju na rotor odnosno stator

U nastojanju da se što bolje opišu, eksperimentalno opažene pojave trenja vezano uz promjenu stanja gibanja, razvili su se mnogi modeli. Slika 2.9.a) prikazuje Model

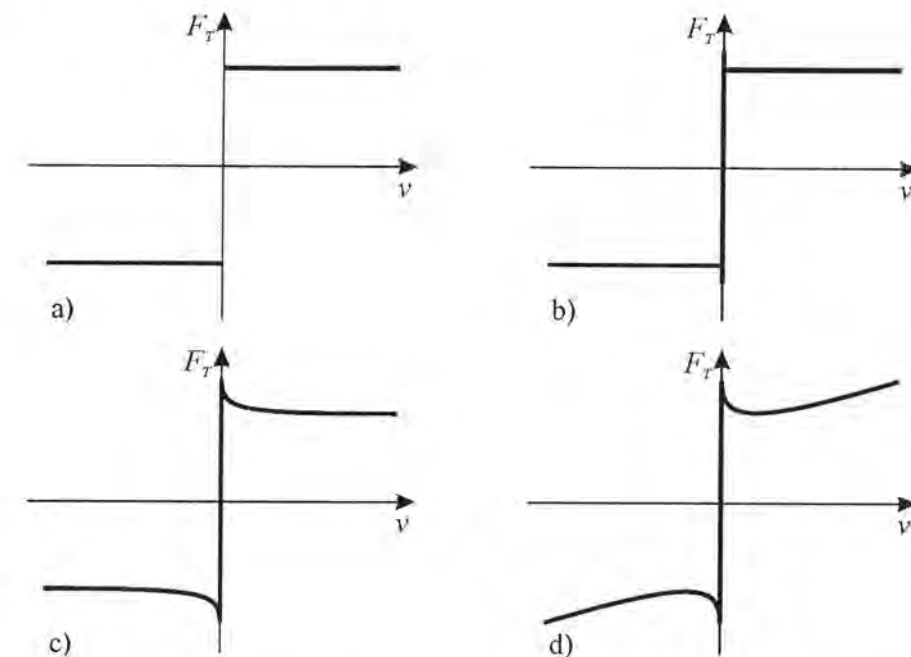
Coulombovog trenja klizanja koje predstavlja temelj svih modela a, uvažavajući mogućnost promjene smjera relativne brzine klizanja između rotora i statora, ima sljedeći oblik,

$$F_T = \mu F_N \frac{v_r - v_s}{|v_r - v_s|} \quad (2.45)$$

Coulombovo trenje klizanja ne opisuje dobro slučaj kada je brzina klizanja jednaka nuli. U tom slučaju iznos sile trenja može imati vrijednost  $-F_T$ , nula ili  $+F_T$ . Uvođenjem statičkog trenja dobiva se situacija prikazana na slici 2.9.b). Jasno je da sila trenja u mirovanju više ne može biti funkcija brzine klizanja već je treba modelirati na način da se uvede vanjska sila  $F_e$ . Statička sila trenja  $F_{T0}$  je tako jednaka veličini a protivna smjeru vanjske sile  $F_e$  sve dok ne dostigne maksimalnu vrijednost  $F_{T0\max} = \mu_0 F_N$ . Tada dolazi do proklizavanja. Model trenja sa slike 2.9.b) može se opisati sljedećim izrazom:

$$F_T = \begin{cases} \mu F_N & \text{za } v_r > v_s \\ F_e & \text{za } v_r = v_s \text{ i } |F_e| \leq \mu_0 F_N \\ -\mu F_N & \text{za } v_r < v_s \end{cases} \quad (2.46)$$

U cilju izbjegavanja diskontinuiranog skoka između statičkog i kinematičkog trenja, u modelu prikazanom na slici 2.9.c), uvodi se tzv. Stribeckovo trenje (efekt) koje daje kontinuiranu ovisnost o brzini klizanja. Stribeckovo trenje se često modelira eksponencijalnom funkcijom pa bi tako model prikazan na slici 2.9.c) bio sastavljen od kinematičkog i statičkog Coulombovog trenja te Stribeckovog efekta:



Slika 2.9. Modeli trenja, a) Model Coulombovog trenja klizanja, b) Model a) + statičko trenje, c) Model b) + Stribeckovo trenje, d) Model c) + „viskozno“ trenje

$$F_T = \begin{cases} \mu F_N + F_N (\mu_0 - \mu) e^{-1/|v/v_s|^\beta} & \text{za } v_r > v_s \\ F_e & \text{za } v_r = v_s \quad \text{i } |F_e| \leq \mu_0 F_N \\ -\mu F_N - F_N (\mu_0 - \mu) e^{-1/|v/v_s|^\beta} & \text{za } v_r < v_s \end{cases} \quad (2.47)$$

Pri većim brzinama klizanja suho trenje pokazuje skoro linearan porast s brzinom kao i viskozno trenje. Slika 2.9.d) tako prikazuje model trenja sa ugrađenom linearnom ovisnošću o brzini a sljedeći izraz opisuje model sile trenja

$$F_T = \begin{cases} \mu F_N + F_N (\mu_0 - \mu) e^{-1/|v/v_s|^\beta} + \mu_v F_N v & \text{za } v_r > v_s \\ F_e & \text{za } v_r = v_s \quad \text{i } |F_e| \leq \mu_0 F_N \\ -\mu F_N - F_N (\mu_0 - \mu) e^{-1/|v/v_s|^\beta} - \mu_v F_N v & \text{za } v_r < v_s \end{cases} \quad (2.48)$$

Kod razvijanja numeričkog modela iz praktičkih razloga uzima se da je nastalo statičko trenje kada relativna brzina klizanja ( $v_r - v_s$ ) padne ispod neke male unaprijed zadane vrijednosti, obično  $(v_r - v_s)_{kr} = 10^{-3}$  m/s.

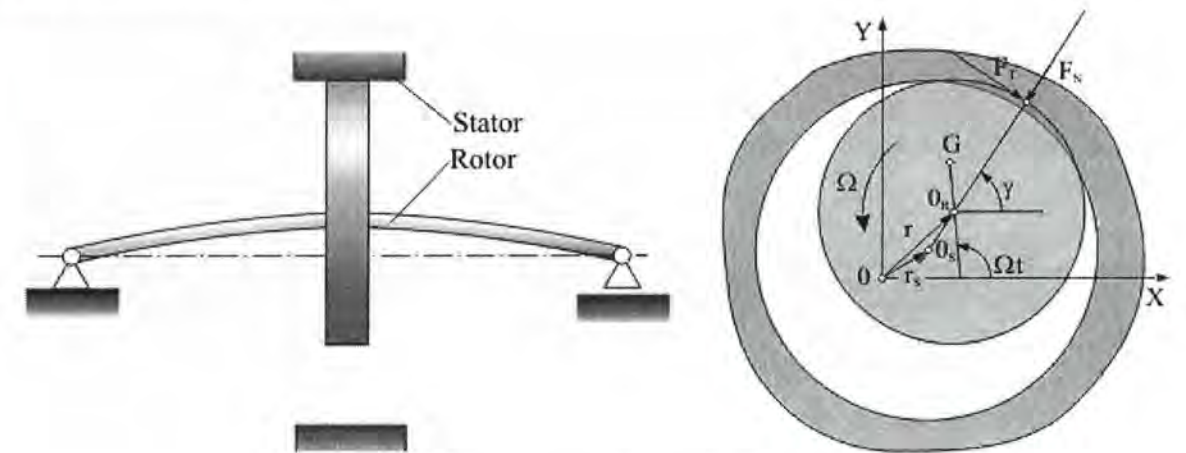
### 3. Modeliranje dinamike sustava rotor – stator

#### 3.1. Osnovni model sustava rotor – stator

Slika 3.1. prikazuje model rotora sa krutim statorom. Kroz povijest izučavanja dodira rotora sa statorom ovaj model se prvi pojavio [64-66]. Pomaci središta diska rotora obilježeni su sa  $x, y$ . Na rotor djeluju sile neuravnoteženja uvedene preko ekscentričnosti osovine  $e$  te nakon pojave dodira, kontaktnih sila  $F_x$  and  $F_y$ . Sila gravitacije  $mg$  uzima se u razmatranje kod analize prihvatnih ležajeva kod rotora oslonjenih na magnetne ležajeve, pošto rotor nakon nestanka struje padne na prihvatne ležajeve upravo uslijed djelovanja sile gravitacije. Kod analize dodira između rotora i statora na mjestu brtvi ili lopatica pretpostavlja se da je stator centriran oko elastične linije rotora tako da nije potrebno uzimati gravitacijski član za rotor. Za stator se pretpostavlja da je toliko robustan da su njegovi pomaci zanemarivi. Sve gore opisano prikazano je sljedećom jednadžbom gibanja sustava rotor/stator:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= me\Omega^2 \cos\Omega t + F_{Cx} \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= me\Omega^2 \sin\Omega t + F_{Cy} - mg \end{aligned} \quad (3.1)$$

pri čemu su,  $m, c, k$ , redom mase, koeficijenti prigušenja i krutosti rotora, dok je  $e$  ekscentričnost mase rotora.



Slika 3.1. Model rotora sa krutim statorom

Nadalje pretpostavlja se inicijalna radijalna zračnost  $C_r$  između rotora i statora. U ovom osnovnom modelu gotovo svi autori pretpostavljaju Coulombov model trenja. Ovisno o tome da li se rotor nalazi u dodiru sa statorom ili ne, normalna  $F_N$  i tangencijalna sila  $F_T$  mogu se izraziti preko izraza

$$F_N(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{(for } r < C_r) \\ (r - C_r)k_c, & \text{(for } r \geq C_r) \end{cases} \quad F_T = \mu F_N \quad (3.2)$$

pri čemu je  $\mu$  koeficijent trenja između rotora i statora,  $k_c$  je kontaktna krutost a  $r$  je radijalni pomak rotora koji za slučaj simetrično postavljenih rotora i statora iznosi  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Ove dvije sile mogu se transformirati u zapis  $x$ - $y$  koordinatnog sustava,

$$\begin{aligned} F_{Cx} &= -F_N \cos \gamma + F_T \sin \gamma \\ F_{Cy} &= -F_N \sin \gamma - F_T \cos \gamma \end{aligned} \quad (3.3)$$

pri čemu vrijedi da je,

$$\tan \gamma = y/x \quad (3.4)$$

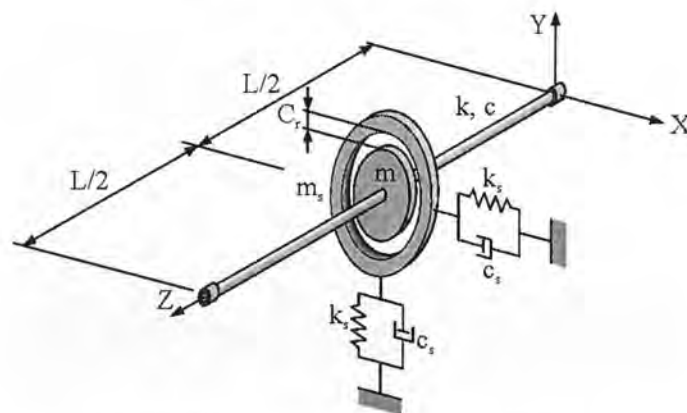
Prema jednadžbi (3.2) dodir odnosno kontakt rotora i statora dogodit će se samo pod uvjetom da je radijalni pomak rotora veći od radijalne zračnosti  $C_r$ .

### 3.2. Složeniji modeli dinamičkog sustava rotor – stator

#### 3.2.1. Model statora sa svojstvima elastičnosti i inercije

Proširenjem osnovnog modela prikazanog u prethodnom dijelu a predočenog izrazom (3.1) dobiva se model sustava rotor – stator kako je to prikazano na slici 3.2. Ovdje se podrazumijeva da je, kako masa tako i krutost statora konačna te se više ne mogu zanemarivati pomaci statora. Nadalje se, prema konvenciji koju koriste mnogi autori [5, 9, 59], smjer sile dodira definira kako je to prikazano na slici 3.3. pri čemu se smatra da sile dodira  $F_C = F_N + iF_T$  djeluje na stator kao pozitivna sila (unosni energiju) dok istovremeno djeluje na rotor kao negativna sila (prigušuje odnosno oduzima energiju) čime se formulacija jednadžbe (3.3) mijenja u oblik:

$$\begin{aligned} F_{Cx} &= F_N \cos \gamma - F_T \sin \gamma \\ F_{Cy} &= F_N \sin \gamma + F_T \cos \gamma \end{aligned} \quad (3.5)$$



Slika 3.2. Model rotora sa fleksijskim elastičnim statorom

pri čemu sada vrijedi da je,

$$\tan \gamma = \frac{y - y_s}{x - x_s} \quad (3.6)$$

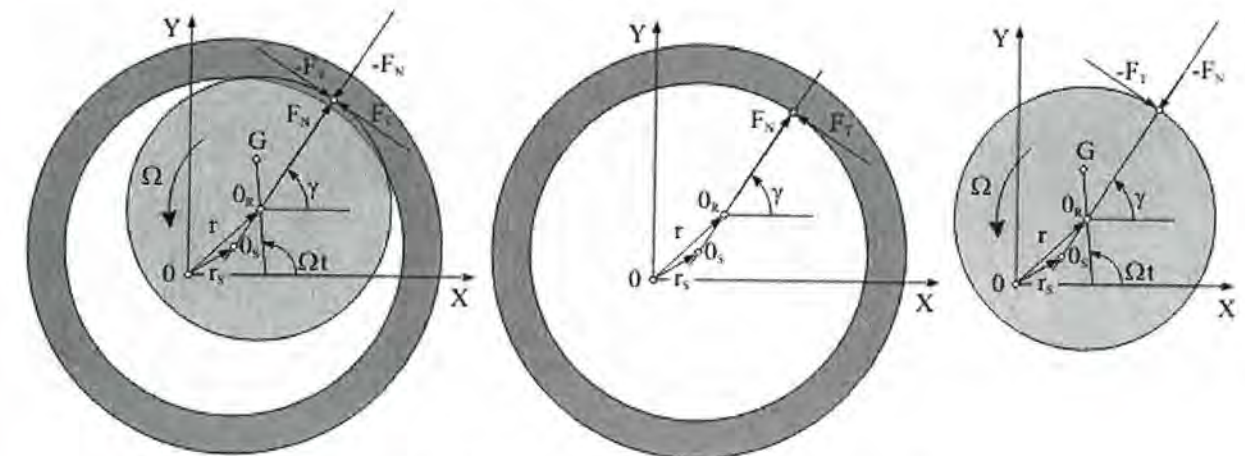
a jednadžbe gibanja koja opisuju ovakav sustav glase:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= me\Omega^2 \cos \Omega t + F_{Cx} \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= me\Omega^2 \sin \Omega t + F_{Cy} - mg \\ m_s\ddot{x}_s + c_s\dot{x}_s + k_s x_s &= -F_{Cx} \\ m_s\ddot{y}_s + c_s\dot{y}_s + k_s y_s &= -F_{Cy} \end{aligned} \quad (3.7)$$

pri čemu su,  $m$ ,  $m_s$ ,  $c$ ,  $c_s$ ,  $k$ ,  $k_s$  redom mase, koeficijenti prigušenja i krutosti rotora odnosno statora, dok je  $e$  ekscentričnost mase rotora.

Kao u prethodnom dijelu pretpostavljena je inicijalna zračnost  $C_r$  između rotora i statora te Coulombov model trenja. Ovisno o tome da li se rotor nalazi u dodiru sa statorom normalna  $F_N$  i tangencijalna sila  $F_T$  mogu se izraziti preko izraza (3.2) s time što je  $r$  sada relativni radijalni pomak između rotora i statora a definiran je slijedećim izrazom;

$$r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} \quad (3.8)$$



Slika 3.3. Definicija smjerova sile dodira između rotora i statora

#### 3.2.2. Implementacija torzije

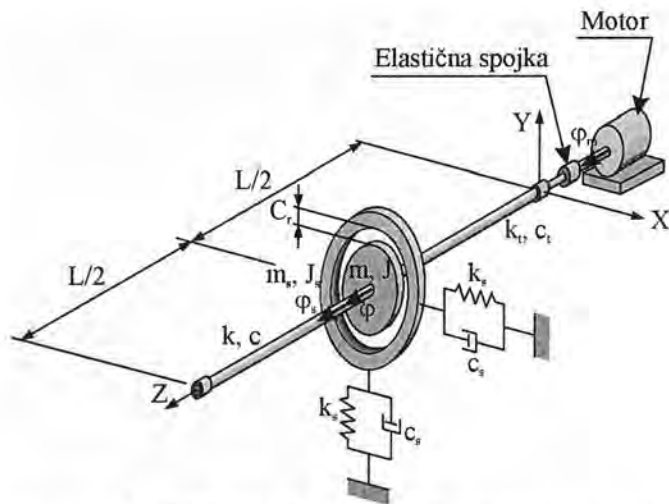
Dinamika rotora se donedavno tradicionalno dijelila prema tipu uzbude pa su tako postojali pretežito fleksijski problemi (uzrokovani prvim harmonikom uslijed neuravnoteženja) te torzijski problemi (uzrokovani nejednolikim torzijskim uzbuđnim momentom). Moderno izučavanje dinamike rotora nameće potrebitost kompleksnog izučavanja problema na način da se tradicionalno fleksijski problemi proširuju i na torziju.

Tako se proširenjem modela iz poglavlja 3.2.1. dobiva model opisan slijedećim jednadžbama gibanja:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= me\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + me\ddot{\varphi} \sin \varphi - F_{Cx} \\
 m\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= me\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - me\ddot{\varphi} \cos \varphi - F_{Cy} \\
 J\ddot{\varphi} + c_t(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_m) + k_t(\varphi - \varphi_m) &= -M_C \\
 m_s\ddot{x}_s + c_s\dot{x}_s + k_sx_s &= F_{Cx} \\
 m_s\ddot{y}_s + c_s\dot{y}_s + k_sy_s &= F_{Cy} \\
 J_s\ddot{\varphi}_s + c_{ts}\dot{\varphi}_s + k_{ts}\varphi_s &= M_C \\
 J_m\ddot{\varphi}_m + c_t(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}) + k_t(\varphi_m - \varphi) &= M_m
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

pri čemu su,  $m$ ,  $m_s$ ,  $c$ ,  $c_s$ ,  $k$ ,  $k_s$  redom mase, fleksijski koeficijenti prigušenja, koeficijenti krutosti, rotora odnosno statora,  $c_t$ ,  $c_{ts}$ ,  $k_t$  i  $k_{ts}$  su torzijski koeficijenti prigušenja i krutosti osovine rotora odnosno statora dok je  $e$  ekscentričnost rotora.  $\varphi$ ,  $\varphi_s$  i  $\varphi_m$  predstavljaju torzijske kutove diska rotora, statora odnosno elektromotora, a  $J$ ,  $J_s$  and  $J_m$  predstavljaju momente inercije masa rotora, statora odnosno motora.

Slika 3.4 prikazuje model sustava rotor – stator sa dodanim svojstvima torzije odnosno realnim modelom pogonskog sustava u obliku asinkronog kaveznog elektromotora koji je modeliran u slijedećem dijelu.



Slika 3.4. Model rotora sa fleksijskim i torzijskim elastičnim statorom te modelom elektromotora

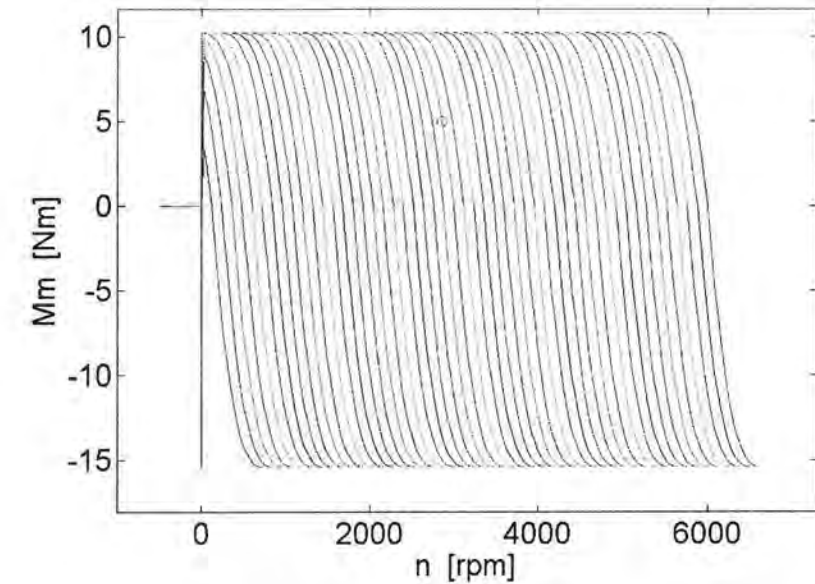
### 3.2.3. Model elektromotornog pogona

Pogonski moment asinkronog elektromotora može se modelirati prema tzv. Kloss-ovom izrazu [67-69]

$$M_m = M_p \frac{2 + 2s_{pn}}{\frac{s\varphi}{s_{pn}} + \frac{s_{pn}}{s\varphi} + 2s_{pn}} \quad (3.10)$$

pri čemu su  $M_p$  i  $s_{pn}$  moment motora i nominalno klizanje u prekretnoj točki,  $s$  je stvarno klizanje motora u odnosu na sinkrono elektromagnetsko polje a  $\varphi = n_{sf}/n_s$  je omjer trenutne brzine vrtnje koju generira pretvarač napona i frekvencije te nominalne brzine vrtnje definirane frekvencijom strujne mreže ( $n_s = f_s \cdot 60 = 3000 \text{ min}^{-1}$ ).

Ako se  $M_p$  u izrazu (3.10) zamijeni sa  $M_{pg} = -M_p(1 + s_{pn})/(1 - s_{pn})$  dobiva se Klossov izraz za generatorsko kočenje. Generatorsko kočenje nastaje kada trenutna brzina vrtnje rotora nadmaši sinkronu brzinu vrtnje. Tada se motor ponaša kao elektromagnetska kočnica. Slika 3.4. prikazuje cijeli niz momentnih krivulja za asinkroni elektromotor upravljani pretvaračem napona i frekvencije a za područje brzina vrtnje  $0 - 6000 \text{ min}^{-1}$ .



Slika 3.5. Niz momentnih krivulja asinkronog elektromotora nominalne snage  $P = 1.5 \text{ kW}$

### 3.2.4. Implementacija složenijeg modela sudara i trenja

Jednadžba (3.2) predstavlja najjednostavniji model normalne sile dodira. U njemu se normalna sila opisuje samo pomoću elastičnog dijela tj. pomoću linearne ovisnosti normalne sile dodira o deformaciji. U poglavlju 2.2. bili su obrazlagani i složeniji modeli koji realnije opisuju stvarnost a to je da se za vrijeme sudara jedan dio energije izgubi što se može prikazati preko koeficijenta restitucije  $\varepsilon$  koji je uvijek manji od jedan. Gubitak energije može se modelirati uvođenjem koeficijenta prigušenja pri čemu on može biti linearan ili nelinearan.

Konačno se implementacija modela normalne sile dodira ostvaruje preko definicije dva njena člana i to,

$$F_N = F_{KN} + F_{CN} \quad (3.11)$$

od kojih jedan ovisi o lokalnoj deformaciji rotora i statora u kontaktu  $\delta$  a drugi o brzini lokalne deformacije  $\dot{\delta}$ . U ovom radu korištena su dva modela; linearna krutost – linearno prigušenje i nelinearna krutost – nelinearno prigušenje. U daljnjem tekstu nazivat će se jednostavnije linearni model odnosno nelinearni model. Za slučaj linearnog modela jednadžba (3.11) ima oblik

$$F_N = k_c \delta + c_c \dot{\delta} \quad (3.12)$$

dok za slučaj nelinearnog modela prema Huntu i Crossleyu [55] ona ima oblik

$$F_N = k_c \delta^n + (\lambda \delta^n) \dot{\delta} \quad (3.13)$$

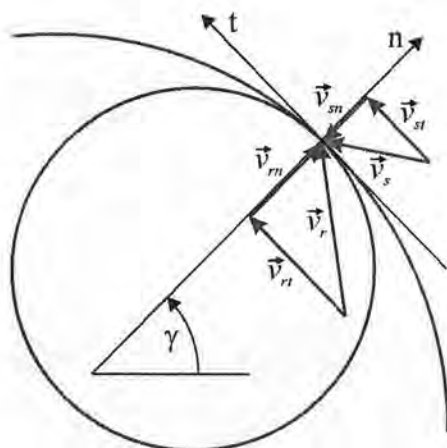
Što se tiče lokalne deformacije  $\delta$  stvar je jednostavna  $\delta = r - C_r$ . Dovoljno je samo znati koordinate središta diska rotora  $(x, y)$  odnosno statora  $(x_s, y_s)$  te primijeniti izraz (3.8). Što se tiče brzine lokalne deformacije  $\dot{\delta}$ , stvar je nešto kompliciranija zbog toga što treba trenutne brzine rotora  $v_r$  i statora  $v_s$ , danih preko komponenti nepomičnog pravokutnog koordinatnog sustava  $\mathbf{v}_r = [v_{xr}, v_{yr}]$  i  $\mathbf{v}_s = [v_{xs}, v_{ys}]$ , projicirati na pravac normale i međusobno oduzeti tj.

$$\dot{\delta} = v_{rn} - v_{sn} \quad (3.14)$$

To se može izvesti na način da se definira jedinični vektor normale  $\mathbf{n}_0$  na osnovi poznatog vektora lokalne deformacije  $\delta = [\delta_x, \delta_y] = [x - x_s, y - y_s]$ :

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\delta}{|\delta|} \quad (3.15)$$

Skalarnim umnoškom vektora brzine rotora  $\mathbf{v}_r$  odnosno statora  $\mathbf{v}_s$  i jediničnog vektora normale  $\mathbf{n}_0$  dobivaju se projekcije brzina rotora i statora na pravac normale kako slijedi:



Slika 3.6. Definicija vektora potrebnih za određivanje brzine lokalne deformacije  $\dot{\delta}$

$$\begin{aligned} v_{rn} &= \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}_0 \\ v_{sn} &= \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Za implementaciju složenijeg modela trenja prema poglavlju 2.3.2. potrebno je poznavati brzinu klizanja u točki dodira između površine rotora i površine statora. Brzina klizanja može se definirati slijedećim izrazom

$$v_{kl} = v_{rn} - v_{sn} \quad (3.17)$$

pri čemu su  $v_{rn}$  i  $v_{sn}$  tangencijalne komponente brzina dodirnih točaka rotora i statora. Tangencijalna brzina rotora sastoji se od obodne brzine uslijed vlastite rotacije te od tangencijalne komponente brzine središta diska koji izvodi precesiju (pretežno naprednu). Kada je brzina klizanja u točki dodira jednaka nuli tada rotor izvodi natražnu precesiju bez klizanja, što je jako opasna pojava.

### 3.3. Primjena MKE u dinamici rotora

Metoda konačnih elemenata temelji se na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Razmatrani kontinuum s beskonačnim brojem stupnjeva slobode zamjenjuje se diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode gibanja. Drugim riječima, domena kontinuuma dijeli se na konačan broj poddomena koje se nazivaju konačni elementi, odnosno razmatrani kontinuum postaje mreža konačnih elemenata.

Osnovna jednadžba gibanja za analizu dinamike jednog konačnog elementa glasi,

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e \quad (3.18)$$

pri čemu je

- $\mathbf{M}_e$  matrica inercije konačnog elementa.
- $\mathbf{C}_e$  matrica prigušenja konačnog elementa.
- $\mathbf{K}_e$  matrica krutosti konačnog elementa.
- $\mathbf{f}_e$  ekvivalentno opterećenje čvorova konačnog elementa.

Vektor pomaka konačnog elementa  $\mathbf{q}_e$  općenito se sastoji od više vektora pomaka čvorova konačnog elementa  $\mathbf{q}_{no}$  prema izrazu

$$\mathbf{q}_e^T = [\mathbf{q}_{no1}^T \quad \mathbf{q}_{no2}^T \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{non}^T] \quad (3.19)$$

pri čemu vektor pomaka za čvor konačnog elementa može maksimalno imati 6 pomaka i to tri translacijska pomaka i tri kutne rotacije.



### 3.3.1. Gredni konačni element

Zbog postepenosti izlaganja najprije će se izvesti jednostavniji gredni konačni element koji razmatra dinamiku savijanja grede u jednoj ravnini. Takav gredni element se često naziva osnovni ili ravninski gredni element. Nakon toga razmatranja će se proširiti na dinamiku savijanja rotirajuće grede u dvije ortogonalne ravnine čime se dobiva tzv. prostorni rotordinamički konačni element [70-73].

#### 3.3.1.1. Osnovni gredni konačni element

Slika 3.7. prikazuje segment vitke Bernoulli-Eulerove grede sa raspodijeljenim svojstvima tromosti i krutosti. U ovom slučaju masa grede je jednoliko raspodijeljena po duljini. Osnovna parcijalno-diferencijalna jednačba ima oblik

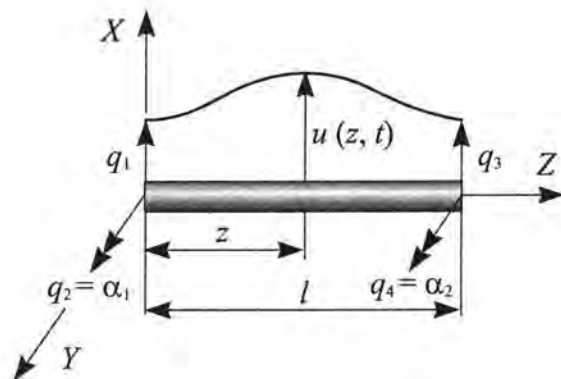
$$m_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = f(z, t) \quad (3.20)$$

gdje je  $m_l$  masa po jedinici duljine grede,  $f(z, t)$  je raspodijeljeno vertikalno opterećenje, a  $u(z, t)$  funkcija pomaka unutar konačnog elementa. U cilju dobivanja aproksimacije pomaka ovisne samo od položaja može se prema Rayleigh-Ritzovoj metodi pisati

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \sum_{i=1}^4 N_i(z) q_i(t) \\ &= \mathbf{N}_e(z) \mathbf{q}_e(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

pri čemu su  $N_i(z)$  funkcije oblika od kojih se zahtjeva da zadovolje statičko homogenu verziju jednačbe (3.20), dok su  $q_i(t)$  komponente vektora pomaka  $\mathbf{q}_e$  u čvorovima konačnog elementa koji za ovaj tip elementa ima oblik

$$\mathbf{q}_e = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T = [u_1 \ \alpha_1 \ u_2 \ \alpha_2]^T \quad (3.22)$$



Slika 3.7. Osnovni gredni konačni element

Iz jednačbi (3.20) i (3.21) zahtjeva se od funkcija  $N_i(z)$  da zadovolje slijedeće rubne uvjete

$$\begin{aligned} N_1(0) &= 1 & N_2(0) &= 0 & N_3(0) &= 0 & N_4(0) &= 0 \\ N_1'(0) &= 0 & N_2'(0) &= 1 & N_3'(0) &= 0 & N_4'(0) &= 0 \\ N_1(l) &= 0 & N_2(l) &= 0 & N_3(l) &= 1 & N_4(l) &= 0 \\ N_1'(l) &= 0 & N_2'(l) &= 0 & N_3'(l) &= 0 & N_4'(l) &= 1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

gdje crtano označava diferencijaciju po  $z$ -u. Statička homogena verzija jednačbe (3.20) glasi

$$\frac{d^4 u}{dz^4} = 0,$$

i ima rješenje

$$u = c_4 + c_3 z + \frac{c_2 z^2}{2} + \frac{c_1 z^3}{6}.$$

Stoga iz jednačbe (3.23) funkcije oblika se definiraju kao

$$\begin{aligned} N_1(z) &= 1 - 3z^2/l^2 + 2z^3/l^3, \\ N_2(z) &= z - 2z^2/l + z^3/l^2, \\ N_3(z) &= 3z^2/l^2 - 2z^3/l^3, \\ N_4(z) &= -z^2/l + z^3/l^2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

a aproksimacijsko rješenje jednačbe (3.21) može se tada prevesti u slijedeći oblik:

$$u(z, t) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{bmatrix} u_1 \\ \alpha_1 \\ u_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Ovo približno rješenje ima četiri poopcene koordinate  $q_i(t)$  te se predlaže definiranje Lagrange-ovih jednačbi gibanja za ove varijable. Prvo se definira kinetička energija

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^l m_l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dz = \frac{m_l}{2} \int_0^l \mathbf{q}_e^T \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e dz. \quad (3.26)$$

Uvrštenjem jednačbe (3.24) u ovu definiciju dobiva se kvadratni oblik

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{q}}_e, \quad (3.27)$$

Na isti način, uvrštenjem jednačbe (3.24) u funkciju potencijalne energije deformacije

$$E_{pu} = \frac{1}{2} \int_0^l EI (u'')^2 dz = \frac{EI}{2} \int_0^l \mathbf{q}_e^T \frac{d^2 \mathbf{N}_e^T}{dz^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_e}{dz^2} \mathbf{q}_e dz. \quad (3.28)$$

dobiva se kvadratni oblik

$$E_{pv} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e, \quad (3.29)$$

Ukoliko se pretpostavi da na konačan element djeluje raspodijeljeno vertikalno opterećenje  $f(z, t)$  tada se može definirati odgovarajuća potencijalna funkcija

$$E_{pv} = - \int_0^l f(z, t) u(z, t) dz = - \int_0^l f(z, t) \mathbf{q}_e^T(t) \mathbf{N}_e^T(z) dz \quad (3.30)$$

Izraz (3.30) može se još napisati u obliku

$$E_{pv} = -\mathbf{q}_e^T \mathbf{f}_e \quad (3.31)$$

Sada se može definirati Lagrange-ova funkcija kao

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{q}}_e - \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_e^T \mathbf{f}_e, \quad (3.32)$$

a primjenom Lagrangeovih jednadžbi druge vrste dobivaju se jednadžbe gibanja konačnog elementa

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e, \quad (3.33)$$

pri čemu su matrice tromosti i krutosti konačnog elementa  $\mathbf{M}_e$  i  $\mathbf{K}_e$  te vektor ekvivalentnog opterećenja  $\mathbf{f}_e$  za slučaj uniformnih karakteristika slijedećeg oblika

$$\mathbf{M}_e = \frac{m_l l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{f}_e^T = \frac{f_0 l}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{6} & 1 & -\frac{l}{6} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

### 3.3.1.2. Gredni konačni element za prostornu analizu dinamike rotora

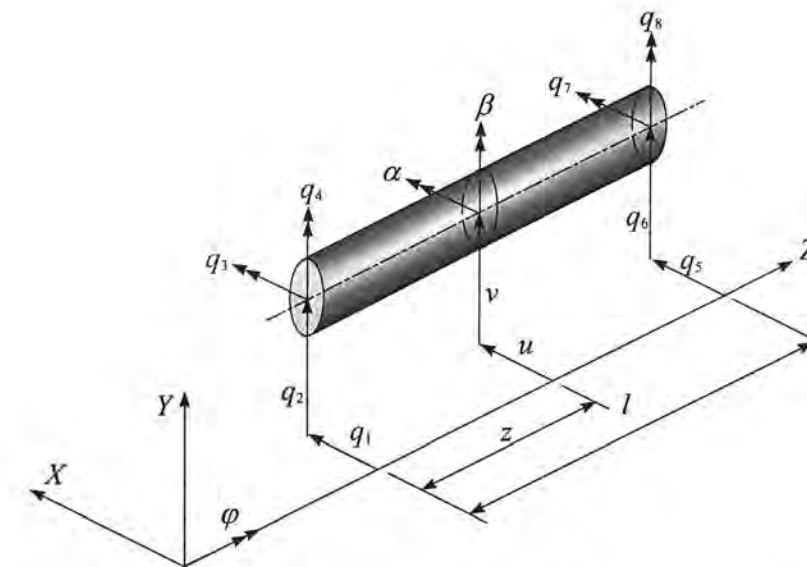
U ovom dijelu razvijen je konačni element grede prema literaturi [70], koji se temelji na Bernoulli-Eulerovoj gredi a uzima u obzir distribuiranu rotacijsku inerciju i giroskopski efekt unutar segmenta grede.

Sukladno proceduri iz prethodnog dijela pri razvijanju ovog "novog" modela konačnih elemenata slijedit će se ista procedura. Posebno će se definirati funkcije kinetičke i

potencijalne energije u ovisnosti o funkcijama oblika elemenata, a time su postavljene i Lagrange-ove jednadžbe gibanja. Izvod funkcije kinetičke energije je glavna dodatna komplikacija, pošto gibanje mora biti definirano u ortogonalnim  $X$ - $Z$  i  $Y$ - $Z$  ravninama. Na slici 3.8. prikazana je dodatna potrebna kinematika. Komponente vektora pomaka  $\mathbf{q}_e$  ovakvog konačnog elementa glase:

$$\mathbf{q}_e = [u_1 \ v_1 \ \alpha_1 \ \beta_1 \ u_2 \ v_2 \ \alpha_2 \ \beta_2]^T \quad (3.37)$$

Iz usporedbe izraza (3.37) sa izrazom (3.22) vidi se na koji način je izvedeno sprezanje dviju ortogonalnih ravnina. Funkcije pomaka u  $X$ - $Z$  i  $Y$ - $Z$  ravninama su redom  $u(z, t)$  i  $v(z, t)$ , a definirane su u ovisnosti od funkcija oblika iz jednadžbe (3.24) i od komponenata vektora pomaka konačnog elementa iz jednadžbe (3.37) te glase



Slika 3.8. Gredni konačni element za prostornu analizu dinamike rotora

$$\begin{aligned} u(z, t) &= q_1 N_1 + q_4 N_2 + q_5 N_3 + q_8 N_4 \\ v(z, t) &= q_2 N_1 - q_3 N_2 + q_6 N_3 - q_7 N_4 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Prva od ovih funkcija ponavlja jednadžbu (3.21) i (3.25) iz ranijeg razvoja. Usmjerenost diferencijalnog elementa grede definirana je sa (diferencijalnim) kutovima  $\alpha$  i  $\beta$  na sl. 5.3. koji su pak definirani u ovisnosti o  $u(z, t)$  i  $v(z, t)$  preko izraza:

$$\begin{aligned} \beta(z, t) &= \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = q_1 \frac{dN_1}{dz} + q_4 \frac{dN_2}{dz} + q_5 \frac{dN_3}{dz} + q_8 \frac{dN_4}{dz} \\ \alpha(z, t) &= \frac{-\partial v(z, t)}{\partial z} = -q_2 \frac{dN_1}{dz} + q_3 \frac{dN_2}{dz} - q_6 \frac{dN_3}{dz} + q_7 \frac{dN_4}{dz} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Jednadžbe (3.38) i (3.39) mogu se izraziti u matričnom obliku kao

$$\begin{Bmatrix} u(z, t) \\ v(z, t) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_e(z) \mathbf{q}_e(t), \quad \begin{Bmatrix} \alpha(z, t) \\ \beta(z, t) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_r(z) \mathbf{q}_e(t), \quad (3.40)$$

gdje je

$$\mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & N_1 & -N_2 & 0 & 0 & N_3 & -N_4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{r\alpha} \\ \mathbf{N}_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{dN_1}{dz} & \frac{dN_2}{dz} & 0 & 0 & -\frac{dN_3}{dz} & \frac{dN_4}{dz} & 0 \\ \frac{dN_1}{dz} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{dz} & \frac{dN_3}{dz} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{dz} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

Kinetička energija elementa dobiva se izvođenjem kinetičke energije za diferencijalni element duljine  $dz$ , te njenom integracijom po duljini konačnog elementa. Može se izvesti izraz za kinetičku energiju po jedinici duljine

$$dE_k = \frac{m_l}{2} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dz + \frac{j_d}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) dz + \frac{j_p}{2} (\dot{\varphi}^2 - 2\dot{\varphi}\alpha\dot{\beta}) dz, \quad (3.42)$$

gdje su  $m_l$ ,  $j_p$  i  $j_d$  redom masa te momenti inercije mase oko uzdužne i poprečne osi svi po jedinici duljine. Uvrštenjem jednadžbe (3.41) u jednadžbu (3.42) dobiva se

$$dE_k = \frac{m_l}{2} \dot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \dot{\mathbf{q}}_e dz + \frac{j_d}{2} \dot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_r \dot{\mathbf{q}}_e dz - \dot{\varphi} \dot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{N}_{r\alpha}^T \mathbf{N}_{r\beta} \dot{\mathbf{q}}_e dz + \frac{j_p}{2} \dot{\varphi}^2 dz. \quad (3.43)$$

Prvi član izraza uzima u obzir pravocrtnu translaciju, drugi rotacijsku tromost, treći girokopski efekt i posljednji rotaciju modela. Integracijom po duljini konačnog elementa dobiva se definicija kinetičke energije:

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_e^T (\mathbf{M}_{eT} + \mathbf{M}_{eR}) \dot{\mathbf{q}}_e - \dot{\varphi} \dot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{N}_g \dot{\mathbf{q}}_e + \dot{\varphi}^2 l \frac{j_p}{2}, \quad (3.44)$$

pri čemu su  $\mathbf{M}_{eT}$  i  $\mathbf{M}_{eR}$  redom matrice tromosti (inercije) uslijed translacije i rotacije dok je  $\mathbf{N}_g$  pomoćna matrica za dobivanje matrice girokopskog efekta. One se dobivaju preko slijedećih izraza

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{eT} &= \int_0^l m_l \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dz, \\ \mathbf{M}_{eR} &= \int_0^l j_d \mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_r dz, \\ \mathbf{N}_g &= \int_0^l j_p \mathbf{N}_{r\alpha}^T \mathbf{N}_{r\beta} dz. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Posljednji član jednadžbe (3.43) i (3.44) se zanemaruje jer predstavlja energiju vlastite rotacije koja je neovisna od pomaka a isto tako je konstantna za slučaj stacionarne vrtnje.

Funkcija potencijalne energije iz prethodnog dijela mora se izmijeniti kako bi uzela u obzir energiju savijanja u  $Y-Z$  ravnini. Potencijalna energija po jedinici duljine iznosi

$$dE_p = \frac{EI}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz = \frac{EI}{2} \mathbf{q}_e^T \frac{d^2 \mathbf{N}_e^T}{dz^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_e}{dz^2} \mathbf{q}_e dz, \quad (3.46)$$

te se njenom integracijom dobiva funkcija potencijalne energije elementa

$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e \quad (3.47)$$

pri čemu je  $\mathbf{K}_e$  matrica krutosti konačnog elementa a dobiva se preko slijedećeg izraza

$$\mathbf{K}_e = \int_0^l EI \frac{d^2 \mathbf{N}_e^T}{dz^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_e}{dz^2} dz \quad (3.48)$$

Definiranjem Lagrange-ove funkcije  $L = E_k - E_p$  iz jedn. (3.44) i (3.47) te primjenom Lagrangeovih jednadžbi druge vrste dobiva se jednadžba gibanja pri konstantnoj brzini vrtnje ( $\dot{\varphi} = \Omega$ )

$$(\mathbf{M}_{eT} + \mathbf{M}_{eR}) \ddot{\mathbf{q}}_e + \Omega \mathbf{G}_e \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e \quad (3.49)$$

gdje je matrica girokopskog efekta  $\mathbf{G}_e$  antisimetrična a definirana je preko izraza

$$\mathbf{G}_e = \mathbf{N}_g - \mathbf{N}_g^T \quad (3.50)$$

Matrice inercije, girokopskog efekta i krutosti za jednadžbu (3.49) nalaze se u prilogu.

Vektor sile sa desne strane jednadžbe (3.49) uključuje neuravnoteženost mase konačnog elementa te sva vanjska opterećenja. Ovdje će se pokazati utjecaj neuravnoteženosti raspodijeljene mase (vidi [70]). Može se tako pretpostaviti raspodjela neuravnoteženosti mase, u stacionarnim ravninama  $X-Z$  i  $Y-Z$  preko izraza

$$\begin{aligned} p_x(z) &= p_x(z) \cos \varphi - p_y(z) \sin \varphi \\ p_y(z) &= p_x(z) \sin \varphi - p_y(z) \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.51)$$

pri čemu su  $p_x(z)$  i  $p_y(z)$  raspodjele neuravnoteženosti za spomenute stacionarne ravnine a kut  $\varphi = \Omega t$ . Diferencijalna opterećenja neuravnoteženosti na diferencijalni element  $dz$  su tako:

$$\begin{aligned} dQ_x &= -\Omega^2 p_x(z) m_l dz \\ dQ_y &= -\Omega^2 p_y(z) m_l dz \end{aligned} \quad (3.52)$$

Upotrebom principa virtualnog rada navedenih sila [48]:

$$\delta W = -\Omega^2 \delta \mathbf{q}_e^T (\mathbf{f}_{ec} \cos \Omega t + \mathbf{f}_{es} \sin \Omega t) \quad (3.53)$$

pri čemu vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ec} &= -\Omega^2 \int_0^l m_l \mathbf{N}^T(z) \begin{bmatrix} p_x(z) \\ p_y(z) \end{bmatrix} dz \\ \mathbf{f}_{es} &= -\Omega^2 \int_0^l m_l \mathbf{N}^T(z) \begin{bmatrix} -p_y(z) \\ p_x(z) \end{bmatrix} dz \end{aligned} \quad (3.54)$$

dobiva se vektor poopcene sile prostornog rotordinamičkog grednog konačnog elementa:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_{ec} \cos \Omega t + \mathbf{f}_{es} \sin \Omega t \quad (3.55)$$

Vektori sila  $\mathbf{f}_{ec}$  i  $\mathbf{f}_{es}$  iz izraza (3.54) nalaze se u prilogu a vrijede za slijedeću raspodjelu

$$\begin{aligned} p_x(z) &= p_{x0} \left(1 - \frac{z}{l}\right) + p_{xl} \left(\frac{z}{l}\right) \\ p_y(z) &= p_{y0} \left(1 - \frac{z}{l}\right) + p_{yl} \left(\frac{z}{l}\right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

### 3.3.2. Ležaj

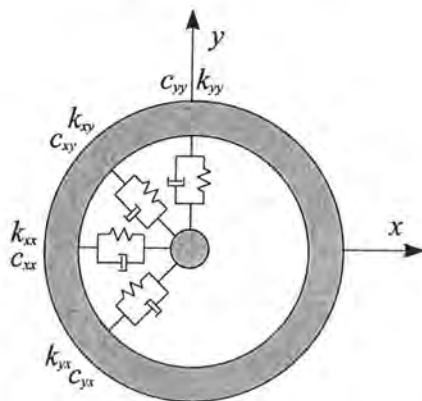
Kod modeliranja ležaja zanemaruje se utjecaj nagiba osovine rotora te prenošenje momenta savijanja. Pretpostavlja se da je ležaj nepomičan te su relativni pomaci između rotora i ležaja ujedno i apsolutni pomaci rotora. Djelovanje ležaja na osovinu rotora može se predočiti pomoću dvije sile za dva poprečna smjera  $x$  i  $y$ . Slika 3.9. prikazuje simboličko predočavanje djelovanja ležaja na osovinu rotora preko dvije opruge i dva prigušivača. Uz pretpostavku poznavanja krutosti i prigušenja (npr. iz proračuna kliznog ležaja) mogu se definirati izrazi za sile u ležaju

$$\begin{aligned} F_{B1} &= -k_{xx}q_1 - k_{xy}q_2 - c_{xx}\dot{q}_1 - c_{xy}\dot{q}_2 \\ F_{B2} &= -k_{yy}q_2 - k_{yx}q_1 - c_{yy}\dot{q}_2 - c_{yx}\dot{q}_1 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Jednadžba (3.58) može se napisati i u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} F_{B1} \\ F_{B2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_B \mathbf{q}_B - \mathbf{C}_B \dot{\mathbf{q}}_B \quad (3.58)$$

pri čemu indeksi u  $k_{ij}$  i  $c_{ij}$  imaju značenje sile  $F_i$  uslijed pomaka  $u_j$ . Prva matrica s desne strane predstavlja matricu krutosti ležaja  $\mathbf{K}_B$ , dok druga matrica predstavlja matricu prigušenja ležaja  $\mathbf{C}_B$ . Ove matrice su općenito asimetrične (tj.  $k_{xy} \neq k_{yx}$  i  $c_{xy} \neq c_{yx}$ ) a njihovi članovi mogu bitno ovisiti o brzini vrtnje.



Slika 3.9. Krutosti i prigušenja ležaja

### 3.3.3. Implementacija torzije

Implementacija torzije u konačno-elementni model rotora izvedena je proširenjem vektora pomaka čvora sa torzijskim kutom kao 5. stupnjem slobode gibanja čvora grednog konačnog elementa. Tako sada vektor pomaka čvora ima oblik

$$\mathbf{q}_{no} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T = [u_1 \ v_1 \ \alpha_1 \ \beta_1 \ \varphi_1]^T \quad (3.59)$$

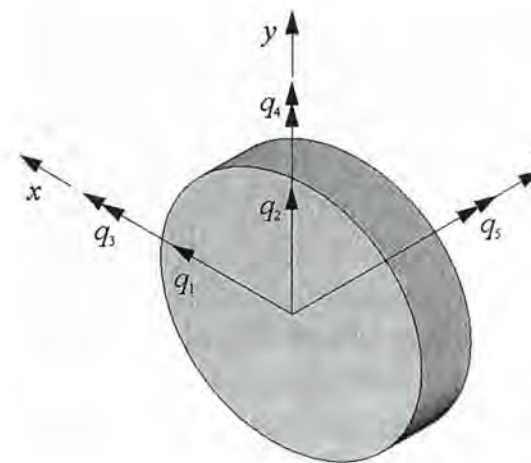
U nastavku se pretpostavlja da vektor pomaka čvora ima oblik (3.59) te će se s tom pretpostavkom definirati matrice krutog diska i grednog konačnog elementa.

#### 3.3.3.1. Kruti disk

Mnogi elementi jednog rotacijskog stroja mogu se, pri modeliranju, uzeti kao kruto tijelo. To znači da se njihova elastičnost u odnosu na masu može zanemariti. Postavljanjem kinetičke energije za disk sa slici 3.10, te uzimanjem pretpostavki [74] simetričnosti diska ( $J_{dx} = J_{dy} = J_d$ ), zatim mogućih pomaka prema (3.59), može se primjenom Lagrange-ovih jednadžbi dobiti slijedeći izraz

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}} + \dot{q}_5 \mathbf{G}_D \dot{\mathbf{q}} + \ddot{q}_5 \mathbf{K}_{DT} \mathbf{q} \quad (3.60)$$

pri čemu matrica uz vektor ubrzanja sa desne strane izraza predstavlja matricu inercije diska  $\mathbf{M}_D$ , matrica uz vektor brzina predstavlja tzv. giroskopsku matricu  $\mathbf{G}_D$  a matrica uz vektor pomaka matricu krutosti  $\mathbf{K}_{DT}$  uslijed promjenjive kutne brzine diska. Navedene matrice nalaze se u prilogu.



Slika 3.10. Stupnjevi slobode za kruti disk

### 3.3.3.2. Gredni konačni element za fleksijsko torzijsku analizu dinamike rotora

Proširenjem vektora pomaka (3.37) u oblik

$$\mathbf{q}_e = [u_1 \ v_1 \ \alpha_1 \ \beta_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ v_2 \ \alpha_2 \ \beta_2 \ \varphi_2]^T \quad (3.61)$$

te proširenjem matrice funkcija oblika (3.41),

$$\mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & -N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & -N_4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\Gamma\alpha} \\ \mathbf{N}_{\Gamma\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{dN_1}{dz} & \frac{dN_2}{dz} & 0 & 0 & 0 & -\frac{dN_3}{dz} & \frac{dN_4}{dz} & 0 & 0 \\ \frac{dN_1}{dz} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{dz} & 0 & \frac{dN_3}{dz} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{dz} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

može se primjenom Lagrangeovih jednadžbi dobiti:

$$(\mathbf{M}_{eT} + \mathbf{M}_{eR})\ddot{\mathbf{q}}_e + \dot{\varphi}\mathbf{G}_e\dot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{K}_e + \ddot{\varphi}\mathbf{K}_{eT})\mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e \quad (3.63)$$

pri čemu se pojavljuje dodatna matrica krutosti  $\mathbf{K}_{eT}$  uslijed promjenjive kutne brzine pojedinog konačnog elementa. Oblik matrica može se vidjeti u prilogu.

Dodatno su uzeta torzijska svojstva konačnog elementa definicijom torzijskog pomaka

$$\varphi = \mathbf{N}_{eT}\mathbf{q}_e \quad (3.64)$$

pri čemu je  $\mathbf{N}_{eT}$  matrica funkcija oblika,

$$\mathbf{N}_{eT} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_6] \quad (3.65)$$

a  $N_5 = 1 - z/l$  i  $N_6 = z/l$ , su funkcije oblika. Postavljanjem kinetičke i potencijalne energije kako je to objašnjeno u literaturi [74] te primjenom Lagrangeovih jednadžbi dobiva se jednadžba gibanja

$$\mathbf{M}_{e\text{torz}}\ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_{e\text{torz}}\mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e \quad (3.66)$$

pri čemu je  $\mathbf{M}_{e\text{torz}}$  matrica torzijske inercije a  $\mathbf{K}_{e\text{torz}}$  matrica torzijske krutosti konačnog grednog elementa a oblik im se može vidjeti u prilogu.

### 3.3.4. Asembliranje jednadžbi gibanja konačnih elemenata u jednadžbu sustava

Osnovna jednadžba dinamike konstrukcije (rotora) koju treba riješiti glasi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (3.67)$$

gdje je

$\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \text{ i } \ddot{\mathbf{q}}$  globalni vektor pomaka, brzina i ubrzanja,  
 $\mathbf{M}$  globalna matrica inercije,

$\mathbf{H} = \mathbf{C} + \Omega\mathbf{G}$  sumarna matrica matrice prigušenja i matrice giroskopskog efekta konstrukcije,  
 $\mathbf{K}$  globalna matrica krutosti,  
 $\mathbf{f}$  globalni vektor generaliziranih sila

Globalni vektor pomaka definiran je preko slijedećeg izraza)

pri čemu je:  $\mathbf{q}_i^T = [u_i \ v_i \ \alpha_i \ \beta_i]$  - vektor pomaka  $i$ -tog čvora modela rotora  
 $n$  - ukupni broj čvorova

Radi jednostavnijeg prikaza postupka asembliranja zanemareno je unutarnje prigušenje u konačnim elementima.

Globalna matrica krutosti  $\mathbf{K}$  dobiva se na način da se najprije izvrši parcijalizacija matrica krutosti [22, 75, 76] pojedinih konačnih elemenata  $\mathbf{K}_e$  na podmatrice krutosti pojedinih čvorova konačnih elemenata  $\mathbf{K}_{eij}$ .

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{eii} & \mathbf{K}_{eij} \\ \mathbf{K}_{eji} & \mathbf{K}_{ejj} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Dobivene podmatrice krutosti konačnog elementa osovine  $\mathbf{K}_{eij}$  se, prema definiciji globalnog vektora pomaka  $\mathbf{q}$ , zbrajaju zajedno sa matricama krutosti ležaja  $\mathbf{K}_B$  u globalnu matricu krutosti konstrukcije:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \dots & \mathbf{K}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1} & \mathbf{K}_{n2} & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

pri čemu bi npr. podmatrica  $\mathbf{K}_{22}$  (2. čvora modela) na spoju prvog i drugog konačnog elementa iznosila

$$\mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}_{1jj} + \mathbf{K}_{2ii} (+\mathbf{K}_{B1}) \quad (3.70)$$

Matrica krutosti prvog ležaja  $\mathbf{K}_{B1}$  dodala bi se pod uvjetom da se prvi ležaj nalazi upravo u drugom čvoru.

Postupak formiranja globalne matrice inercije  $\mathbf{M}$  podudara se sa postupkom formiranja globalne matrice krutosti tako da se ovdje neće ponavljati. Ono što je specifično kod formiranja globalne matrice inercije je to da u nju ulaze dvije po definiciji različite matrice inercije konačnog elementa a to su tzv. klasična matrica inercije (uslijed translacije)  $\mathbf{M}_{eT}$  i matrica inercije uslijed rotacije konačnog elementa  $\mathbf{M}_{eR}$  te ukoliko se uzima u obzir torzija i matrica  $\mathbf{M}_{e\text{torz}}$ . Isto tako kod zbrajanja podmatrica inercije koje odgovaraju istom čvoru treba uzeti u obzir i matricu inercije krutog diska  $\mathbf{M}_D$  koji se po definiciji vezuje na čvor grednog konačnog elementa. Na taj način dolazi se do globalne matrice inercije konstrukcije, koja je oblika:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{M}_{1n} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{M}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{M}_{n1} & \mathbf{M}_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{M}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Globalna matrica  $\mathbf{H}$  se definira, kako je to navedemo u obrazloženju jedn. (3.67), kao suma globalne matrice prigušenja  $\mathbf{C}$  i umnoška kutne brzine i globalne matrice giroskopskog efekta  $\Omega \mathbf{G}$ . Globalna matrica prigušenja  $\mathbf{C}$ , uz pretpostavku zanemarenja unutarnjeg prigušenja u grednim konačnim elementima, uključuje samo matrice prigušenja u ležajevima  $\mathbf{C}_B$ . Globalna matrica  $\mathbf{G}$  giroskopskog efekta dobiva se kako je to već opisano kod formiranja globalne matrice krutosti, izrazi (3.70) i (3.71), tj. zbrajanjem podmatrica matrice konačnog elementa  $\mathbf{G}_e$ , s tim da još treba dodati matrice  $\mathbf{G}_D$  u čvorove gdje su smješteni kruti diskovi. Konačno globalna matrica  $\mathbf{H}$  ima oblik:

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} + \Omega \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{H}_{1n} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{H}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{H}_{n1} & \mathbf{H}_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{H}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

### 3.4. Numerički postupci za rješavanje problema u dinamici rotora

Problematika analize dinamike rotora modeliranog konačnim elementima kako je to razmatrano u prethodnom poglavlju sadržana je u jednadžbi gibanja

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (3.73)$$

Njeno potpuno rješenje sastoji se od rješenja pripadne homogene jednadžbe zajedno sa partikularnim rješenjem sukladno desnoj strani jednadžbe. Rješenje homogene jednadžbe vodi do problema vlastitih vrijednosti, koji kao rezultat daje vlastite frekvencije i vlastite vektore. Za detaljnije informacije o vlastitim frekvencijama i vlastitim vektorima može se pogledati u [74, 77]. Od partikularnih rješenja jednadžbe (3.73) posebno će se razmatrati ono sa harmonijskom uzbuđom [78, 79]. Na kraju poglavlja prikazat će se postupak za nelinearnu analizu odziva rotora u uvjetima dodira sa statorom.

#### 3.4.1. Postupak za rješavanje stacionarnog odziva rotora na harmonijsku uzbuđnu silu

Većina rotora se okreće u stacionarnom stanju (pri jednolikoj kutnoj brzini), što znači da pri proračunu možemo jednostavno zanemariti utjecaj mogućih tranzijentnih pojava. U ovom poglavlju bit će prikazan proračun odziva modela rotora u stacionarnom stanju na harmonijsku uzbuđnu silu. Pomoću harmonijske uzbuđne sile možemo opisati uzbuđnu silu zbog neuravnoteženosti (debalansa) rotora [78-80].

Vektor generaliziranih sila u jednadžbi (3.73) možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_c \cos \Omega t + \mathbf{f}_s \sin \Omega t. \quad (3.74)$$

Vektor pomaka možemo prema jednadžbi (3.73) pretpostaviti u obliku:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_c \cos \Omega t + \mathbf{q}_s \sin \Omega t. \quad (3.75)$$

Brzinu i ubrzanje dobijemo deriviranjem po vremenu:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{q}_c \Omega \sin \Omega t + \mathbf{q}_s \Omega \cos \Omega t \\ \ddot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{q}_c \Omega^2 \cos \Omega t - \mathbf{q}_s \Omega^2 \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Jednadžba gibanja (3.73) poprima korištenjem jednadžbi (3.74) - (3.76) slijedeći oblik:

$$\begin{aligned} -\mathbf{M} \Omega^2 (\mathbf{q}_c \cos \Omega t + \mathbf{q}_s \sin \Omega t) + \mathbf{H} \Omega (-\mathbf{q}_c \sin \Omega t + \mathbf{q}_s \cos \Omega t) + \\ + \mathbf{K} (\mathbf{q}_c \cos \Omega t + \mathbf{q}_s \sin \Omega t) = \mathbf{f}_c \cos \Omega t + \mathbf{f}_s \sin \Omega t \end{aligned} \quad (3.77)$$

Izjednačenjem članova s istom trigonometrijskom funkcijom u jednadžbi (3.77) dobiva se:

$$\begin{aligned} -\mathbf{M} \mathbf{q}_c \Omega^2 + \mathbf{H} \mathbf{q}_s \Omega + \mathbf{K} \mathbf{q}_c &= \mathbf{f}_c \\ -\mathbf{M} \mathbf{q}_s \Omega^2 - \mathbf{H} \mathbf{q}_c \Omega + \mathbf{K} \mathbf{q}_s &= \mathbf{f}_s \end{aligned} \quad (3.78)$$

Jednadžbe možemo udružiti u matricnu jednadžbu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \mathbf{M} \Omega^2 & \mathbf{H} \Omega \\ -\mathbf{H} \Omega & \mathbf{K} - \mathbf{M} \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

iz koje se vidi da smo dobili sustav jednadžbi dva puta većeg reda od početnog tj  $2 \times n$  ( $n$  je ukupan broj stupnjeva slobode sustava). Rješenje ovog sustava su, prema izrazu (3.75), vektori kosinusnih odnosno sinusnih komponenata pomaka  $\mathbf{q}_c$  i  $\mathbf{q}_s$ . Svakom čvoru numeričkog modela pripada po četiri pomaka (dva poprečna i dva kutna) unutar oba vektora, no za prikazivanje orbite bit će potrebna samo prva dva tj. poprečni pomaci  $u_c$ ,  $v_c$ ,  $u_s$  i  $v_s$ . Na osnovi izraza (3.75) odnosno prema [48] definiran je stacionarni odziv proizvoljne čvorne točke rotora na harmonijsku uzbuđnu silu u općem obliku:

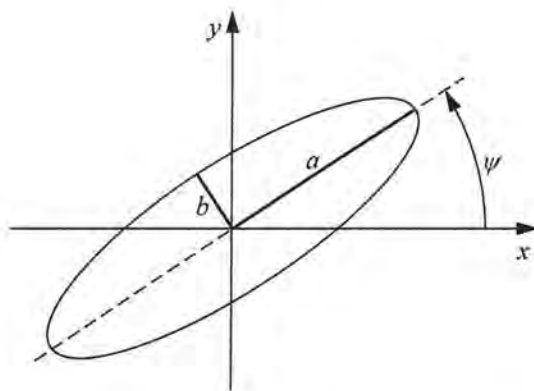
$$\begin{aligned} u_i &= u_{ci} \cos \Omega t + u_{si} \sin \Omega t \\ v_i &= v_{ci} \cos \Omega t + v_{si} \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Slika 3.11. prikazuje da se proizvoljna čvorna točka rotora u stacionarnom stanju giba upravo po eliptičnoj putanji. Poluosi eliptične putanje mogu se izračunati prema slijedećim izrazima

$$\begin{aligned} a^2 &= A + (B^2 + C^2)^{1/2}, \\ b^2 &= A - (B^2 + C^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.81)$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} A &= (u_c^2 + v_c^2 + u_s^2 + v_s^2)/2, \\ B &= (u_c^2 + v_c^2 - u_s^2 - v_s^2)/2, \\ C &= u_c u_s + v_c v_s \end{aligned}$$



Slika 3.11. Kinematika stacionarnog odziva

Kut odklona elipse  $\psi$  definira se preko slijedećeg izraza:

$$\tan 2\psi = \frac{2(u_s v_s + u_c v_c)}{u_s^2 + u_c^2 - v_s^2 - v_c^2} \quad (3.82)$$

Poluos  $b$  može se isto tako izračunati prema izrazu:

$$b = \frac{u_c v_s + u_s v_c}{a} \quad (3.83)$$

Ako se za izračun poluosi  $b$  upotrijebi izraz (3.83) tada predznak rješenja ima smisao definicije naprednog odnosno natražnog precesijskog gibanja.

### 3.4.2. Procedure za određivanje nelinearnog odziva

U principu, nelinearnosti u matematičkom modelu mogu biti dvojake prirode i to geometrijske i materijalne nelinearnosti. Ovaj rad će se baviti isključivo geometrijskim nelinearnostima koje nastaju pri određivanju vektora normalne sile dodira  $\mathbf{F}_N$  kod tranzijentnih nelinearnih vibracija koja je funkcija vektora deformacije  $\delta$  u kontaktnoj točki intenziteta:

$$\langle \delta \rangle = (u_1 - u_2) \cos \gamma + (v_1 - v_2) \sin \gamma - C_r \quad (3.84)$$

gdje je  $C_r$  radijalna zračnost rotora, a  $\langle \delta \rangle$  je funkcija kuta dodira  $\gamma$  koji se računa iz trenutnog položaja:

$$\gamma = \text{Arc tan} \frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2} \quad (3.85)$$

Stvari se još dodatno kompliciraju ukoliko se uzima u obzir i kontaktno prigušenje. Jednadžbe gibanja nelinearnog rotordinamičkog sustava (3.66), u modificiranom obliku, mogu se pisati:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}, t) \quad (3.86)$$

uz poznate početne uvjete  $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$ , pri čemu je  $\mathbf{g}$  vektor vanjskih linearnih sila koje djeluju u čvorovima numeričkog modela, dok vektor  $\mathbf{f}$  predstavlja unutrašnje i vanjske nelinearne sile rotordinamičke strukture koje djeluju također u čvorovima matematičkog modela.

Za određivanje tranzijentnog odziva nelinearnog modela koriste se ili čisto implicitne ili implicitno - eksplicitne integracijske metode. Eksplicitne metode se koriste rjeđe budući se vektor  $\mathbf{f}$  često ne može eksplicitno prikazati kao funkcija vektora  $\mathbf{q}$  i  $\dot{\mathbf{q}}$ . Kod implicitnih algoritama potrebno je u svakom vremenskom trenutku  $t + \Delta t$  riješiti sustav nelinearnih jednadžbi [22]:

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}_{t+\Delta t}) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{t+\Delta t} - \mathbf{g}_{t+\Delta t} = 0 \quad (3.87)$$

Dinamičko stanje sustava u trenutku  $t + \Delta t$  dobiva se integracijom brzina i pomaka korištenjem Newmarkove integracijske sheme s dva parametra  $\beta$  i  $\gamma$  koji definiraju aproksimaciju ubrzanja u razmatranom intervalu vremenskog koraka  $h$ . Ukoliko se koristi Newmarkova integracijska shema, tada su predikcijska i korekcijska faza sljedećeg oblika:

- predikcijska faza

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{t+\Delta t}^i &= \mathbf{q}_t + h \dot{\mathbf{q}}_t + (0.5 - \beta) h^2 \ddot{\mathbf{q}}_t \\ \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^i &= \dot{\mathbf{q}}_t + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{q}}_t, \\ \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^i &= 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

- korekcijska faza :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{i+1} &= \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^i + \frac{1}{\beta h^2} \Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^{i+1}, \\ \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{i+1} &= \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^i + \frac{\gamma}{\beta h} \Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^{i+1}, \\ \mathbf{q}_{t+\Delta t}^{i+1} &= \mathbf{q}_{t+\Delta t}^i + \Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^{i+1} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Prije svake korekcijske faze kao dijela Newmarkove integracijske sheme potrebno je izvršiti proračun prirasta vektora pomaka  $\Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^{i+1}$ . To se provodi rješavanjem nelinearnog sustava

(3.87) Newton-Raphsonovom metodom, slika 3.12. sve dok ostatak  $\mathbf{r}$  ne zadovolji jednadžbu  $\mathbf{r}(\mathbf{q}_{t+\Delta t})=0$ . Pri tome se, s dovoljnom točnošću može provesti linearna aproksimacija Taylorovog razvoja u red ostatka  $\mathbf{r}$  u okolišu  $i$ -te iteracije vektora pomaka  $\mathbf{q}'_{t+\Delta t}$ :

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}'_{t+\Delta t}) = \mathbf{r}(\mathbf{q}_{t+\Delta t}) + \mathbf{S}(\mathbf{q}'_{t+\Delta t})(\mathbf{q}'_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_{t+\Delta t}) \quad (3.90)$$

pri čemu je  $\mathbf{S}(\mathbf{q}'_{t+\Delta t})$  označena Jacobijeva tangentna matrica koja je oblika:

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}'_{t+\Delta t}) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}'_{t+\Delta t}} \quad (3.91)$$

gdje se iz jednadžbe (3.87) općenito dobiva [22, 81]:

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.92)$$

čije različite komponente imaju sljedeće značenje:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{matrica tangentne krutosti } \mathbf{K}'$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad \text{matrica tangentnog prigušenja } \mathbf{C}'$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{varijacija vanjske linearne sile u odnosu na pomak, koja je nesimetričnog oblika te se uobičajeno zanemaruje kako bi se osigurala simetričnost Jacobijeve iteracijske matrice.}$$

Uzimajući u obzir jednadžbe (3.81) i (3.82) Newmarkove metode, dobivaju se preostali članovi izraza (3.85) kao:

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{I} \quad \text{te} \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{\beta h} \mathbf{I} \quad (3.93)$$

čime se doseže konačni oblik Jacobijeve iteracijske matrice:

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}' + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C}' + \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{M} \quad (3.94)$$

Ukoliko se želi da ostatak  $\mathbf{r}(\mathbf{q}_{t+\Delta t})$  bude jednak nuli, potrebno je, kako slijedi iz jednadžbe (3.82) rješavati iterativno, nelinearni sustav:

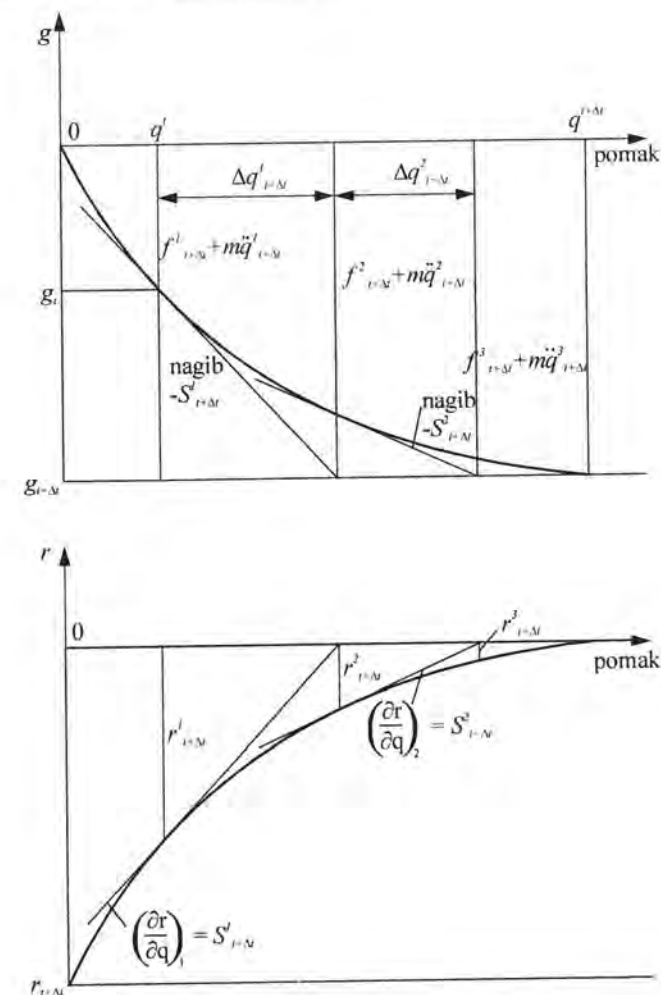
$$\Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t} = -\mathbf{S}(\mathbf{q}_{t+\Delta t})^{-1} \mathbf{r}_{t+\Delta t} \quad (3.95)$$

Na temelju ovako dobivenog prirasta vektora pomaka, računa se nadalje prirast vektora vibracijske brzine i ubrzanja kao i novi položaj vibracijskog sustava iz čega je moguće ponovo izračunati vektor unutarnje i vanjske nelinearne sile koji je kod zapinjanja rotora o ležaj oblika:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}_K(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_C(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_{con} \quad (3.96)$$

gdje su:

- $\mathbf{f}_K(\mathbf{q})$  unutrašnje elastične sile kao doprinos tangentne matrice krutosti  $\mathbf{K}'$ ,
- $\mathbf{f}_C(\dot{\mathbf{q}})$  unutrašnje disipativne i giroskopske sile kao doprinos tangentne matrice prigušenja  $\mathbf{C}'$ ,
- $\mathbf{f}_{con}$  vanjske nelinearne sile kontakta.



Slika 3.12. Newt.-Raphsonov iteracijski postupak za rješavanje vibracija sustava s jednim stupnjem slobode gibanja

Unutrašnje elastične i disipativne (giroskopske) sile dobivaju se kao umnoški tangentnih matrica krutosti (prigušenja) i vektora pomaka  $\mathbf{q}$  (brzina  $\dot{\mathbf{q}}$ ) i mijenjaju se iz iteracije u iteraciju budući se mijenjaju i tangentne matrice krutosti (prigušenja) kao i vektor pomaka (brzina).

Kao kriteriji konvergencije Newton-Raphsonove metode u literaturi se najčešće spominju sljedeća tri kriterija [82]:



$$\text{- kriterij norme pomaka } \frac{\|\Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^i\|}{\|\Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^1\|} \leq \varepsilon_q$$

$$\text{- kriterij norme ostatka (neuravnoteženog opterećenja) } \frac{\|\mathbf{r}_{t+\Delta t}^i\|}{\|\mathbf{r}_{t+\Delta t}^1\|} \leq \varepsilon_r$$

$$\text{- kriterij rada neuravnoteženog opterećenja } \frac{(\Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^i)^T \mathbf{r}_{t+\Delta t}^i}{(\Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^1)^T \mathbf{r}_{t+\Delta t}^1} \leq \varepsilon_w$$

pri čemu su norme pomaka i ostatka definirane na sljedeći način:

$$\|\Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^i\| = \sqrt{(\Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^i)^T \Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^i} \quad (3.97)$$

i

$$\|\mathbf{r}_{t+\Delta t}^i\| = \sqrt{(\mathbf{r}_{t+\Delta t}^i)^T \mathbf{r}_{t+\Delta t}^i} \quad (3.98)$$

a prema literaturi [83-86] uobičajene vrijednosti odstupanja  $\varepsilon_q$ ,  $\varepsilon_r$  i  $\varepsilon_w$  iznose:

$$\varepsilon_q = \varepsilon_r = 10^{-3}, \quad \varepsilon_w = 10^{-10} \dots 10^{-6} \quad (3.99)$$

### 3.4.2.1. Hilbert-Hughes-Taylorova (HHT) $\alpha$ metoda

U slučaju složenijih vibracijskih sustava moguća su neznatna odstupanja parametara  $\gamma$  i  $\beta$  zbog veće složenosti matrice pojačanja  $\mathbf{A}(h)$ . Stvar se dodatno komplicira uvođenjem numeričkog prigušenja u jednadžbe gibanja vibracijskih sustava te je u oba slučaja moguće pomicanje područja stabilnosti. Zbog toga se uobičajeno nastoji uči nešto dublje u područje bezuvjetne stabilnosti uz odabir sljedećih parametara bezuvjetne stabilnosti:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha \quad i \quad \beta = \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (3.100)$$

te uz uvjet  $\alpha > 0$ . U slučaju  $\alpha = 0$  HHT metoda se reducira na Newmarkove sheme. Metoda je naročito učinkovita pri modeliranju numeričkog prigušenja [82] gdje su nelinearne sile oblika:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} \quad (3.101)$$

nakon čega jednadžbe gibanja vibracijskog sustava poprimaju mnogo općenitiji oblik prikladan za korištenje kod modeliranja nelinearnih sustava:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + (1-\alpha)\mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \dot{\mathbf{q}}_{n+1}) + \alpha\mathbf{f}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) = (1-\alpha)\mathbf{g}(\mathbf{q}_{n+1}, t) + \alpha\mathbf{g}(\mathbf{q}_n, t) \quad (3.102)$$

Stabilnost HHT metode ispituje se preko vlastitih vrijednosti matrice pojačanja  $\mathbf{A}(h)$ , na sličan način kao i kod Newmarkove metode. Korištenje HHT metode za vibracijske sustave s ograničenim stupnjevima slobode gibanja preporuča se i pri nelinearnoj analizi gdje

se traže bezuvjetno stabilni implicitni algoritmi. Međutim iako osigurava bezuvjetnu stabilnost, ovako modificirana shema može bitno promijeniti preciznost korištene Newmarkove metode npr. metode prosječne vrijednosti ubrzanja, budući se parametar  $\alpha$  odabire unutar intervala  $\alpha \in [0, 1/3]$ .

### 3.4.2.2. Generalizirana $\alpha$ metoda

Primjenom Generalizirane  $\alpha$  metode [23, 24] dobiva se sljedeća diferencijalna jednadžba gibanja:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}((1-\alpha_m)\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \alpha_m\ddot{\mathbf{q}}_n) + \mathbf{C}((1-\alpha_f)\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \alpha_f\dot{\mathbf{q}}_n) + \\ & + \mathbf{K}((1-\alpha_f)\mathbf{q}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{q}_n) = (1-\alpha_f)\mathbf{g}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{g}_n \end{aligned} \quad (3.103)$$

pri čemu se izraz za Jacobijevu iteracijsku matrice  $\mathbf{S}$  sada mijenja u:

$$\mathbf{S} = (1-\alpha_f)\mathbf{K} + (1-\alpha_f)\frac{\gamma}{\beta h}\mathbf{C} + (1-\alpha_m)\frac{1}{\beta h^2}\mathbf{M}. \quad (3.104)$$

Ovdje se glavni zadatak svodi na određivanje odnosa između parametara metode  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . Ukoliko se uzme da je  $\alpha_m = 0$ , uz odgovarajući izbor parametara  $\beta$  i  $\gamma$ , procedura se svodi na HHT  $\alpha$  metodu odnosno izborom parametra  $\alpha_f = 0$  Generalizirana  $\alpha$  metoda svodi se na WBZ (Wood-Bossak-Zienkiewicz)  $\alpha$  metodu. Konačno usvajanjem parametara  $\alpha_m = \alpha_f = 0$  dobiva se klasična Newmarkova metoda. Iz literature [24] se da zaključiti da je Generalizirana  $\alpha$  metoda, za linearne sustave, drugog reda točnosti, ako se uzme:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f. \quad (3.105)$$

Isto tako ova je metoda, za linearne sustave bezuvjetno stabilna uzimanjem:

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}, \quad \beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m) \quad (3.106)$$

## 4. Numerička analiza dinamike dodira rotora i statora

### 4.1. Analiza dinamike dodira rotora i statora primjenom jednostavnih modela

U ovom djelu rada bit će prikazani razni jednostavni modeli za analizu dodira rotora i statora a nastali proširenjem osnovnog Jeffcott-ovog (Laval-ovog) modela rotora. Svi modeli će se rješavati, nakon svođenja na sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda, Runge – Kutta metodom. Postepeno će se proširivati (usložnjavati) osnovni model dodira rotora s statorom uvođenjem, složenijeg modela normalne sile dodira, složenijeg modela tangencijalne sile dodira te uvođenjem složenijeg modela rotora i statora.

Na početku će se analizirati dodir fleksijski elastičnog rotora s krutim statorom. Dodir diska rotora sa statorom definiran je najjednostavnijim modelom normalne sile tj. pomoću linearne kontaktne krutosti  $k_c$  dok je za modeliranje tangencijalne sile upotrijebljen model Coulombovog trenja.

U nastavku se uvodi fleksijska elastičnost statora uz parametarsku analizu krutosti i prigušenja statora, linearnog i nelinearnog modela normalne sile.

Analiza jednostavnih modela dodira rotora i statora završava uvođenjem torzijske elastičnosti rotora i statora uz dodatnu parametarsku analizu torzijskih svojstava. U ovom dijelu analizirat će se odziv sustava rotor – stator sa krutom pogonskom karakteristikom odnosno sa karakteristikom koja odgovara asinkronom elektromotoru.

U svim primjerima analizirat će se odzivi rotora (i statora) uslijed sljedećih simulacija: prolazak kroz kritičnu brzinu vrtnje pri upuštanju u pogon (run-up) i zaustavljanju pogona (run-down).

Parametri rotora odabrani su na način da što bolje oponašaju kasnije analizirani eksperimentalni model rotora. Cilj ove analize je prvenstveno utvrditi parametre za potrebe konačno-elementne analize dodira rotora i statora, prikazane u slijedećem dijelu koji slijedi.

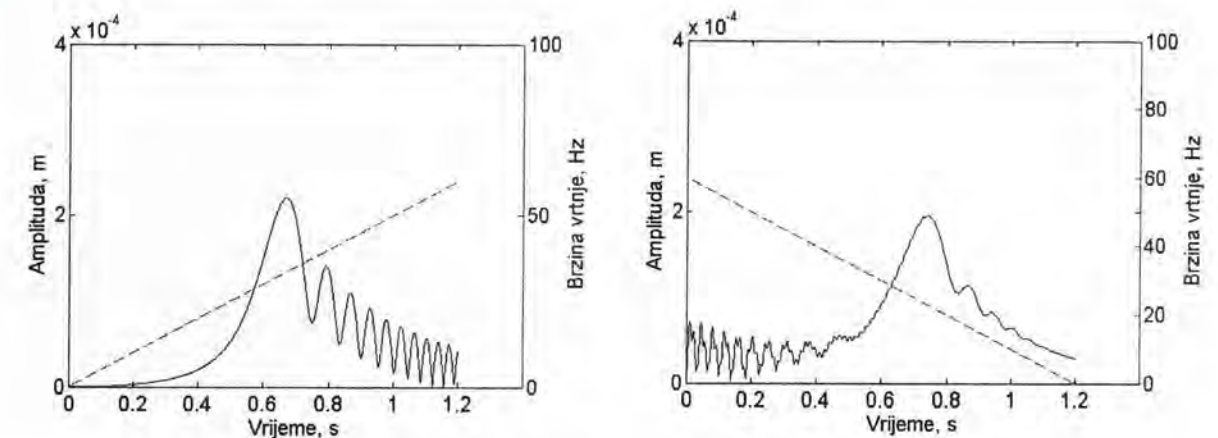
#### 4.1.1. Analiza dodira rotora sa krutim statorom

U ovom primjeru analiziran je utjecaj kutnog ubrzanja (odnosno usporenja) na odziv rotora pri upućivanju u pogon te pri zaustavljanju pogona. Za modeliranje normalne sile dodira upotrijebljen je najjednostavniji model – model s linearnom krutošću  $k_c$ . Tangencijalna sila modelirana je jednostavnim modelom Colombovog trenja. Provedene simulacije prolaska rotora kroz kritičnu brzinu vrtnje uz kontakt s krutim statorom pokazuju očekivano teži prolazak kroz kritičnu brzinu vrtnje pri upućivanju rotora u odnosu na zaustavljanje rotora uz iste uvjete. «Težina» prolaska ogleda se kroz vrijeme provedeno u kontaktu i intenzitete normalne sile dodira. Zadani podaci za ovaj primjer glase:

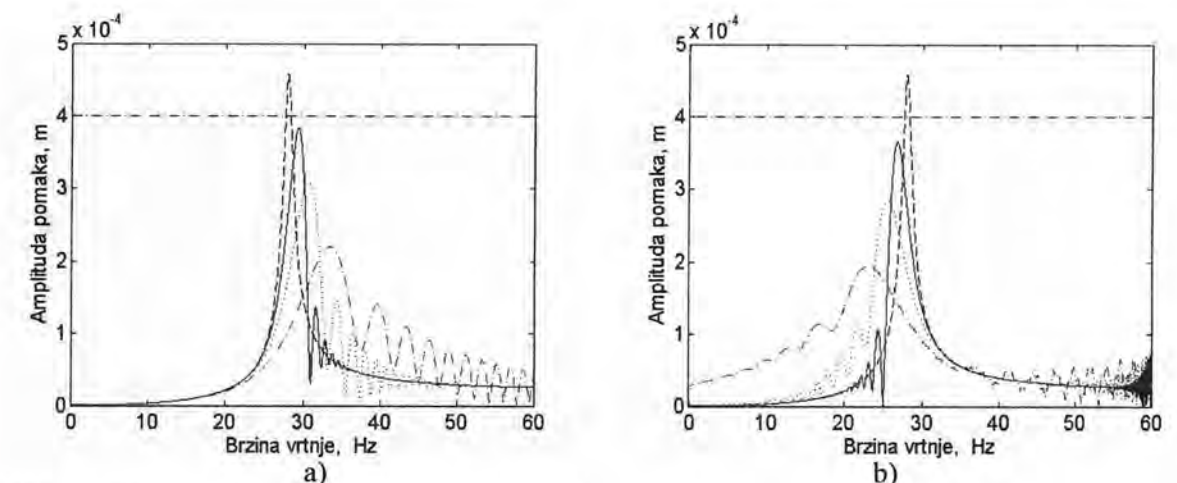
Tablica 4.1. Podaci o analiziranom modelu dodira rotora s krutim statorom

$k_r$ , N/m	110720	$U_d$ , kg·m	$7.2 \cdot 10^{-5}$
$m_r$ , kg	3.577	$e_d = U_d / m_r$ , m	$2 \cdot 10^{-5}$
$\zeta$	0.022	$\mu$	0.2
$k_c$ , N/m	$200 \cdot k_r$	$\varepsilon$	$100 \cdot \pi$
$c_c$ , Ns/m	0	$C_r$ , m	$4 \cdot 10^{-4}$

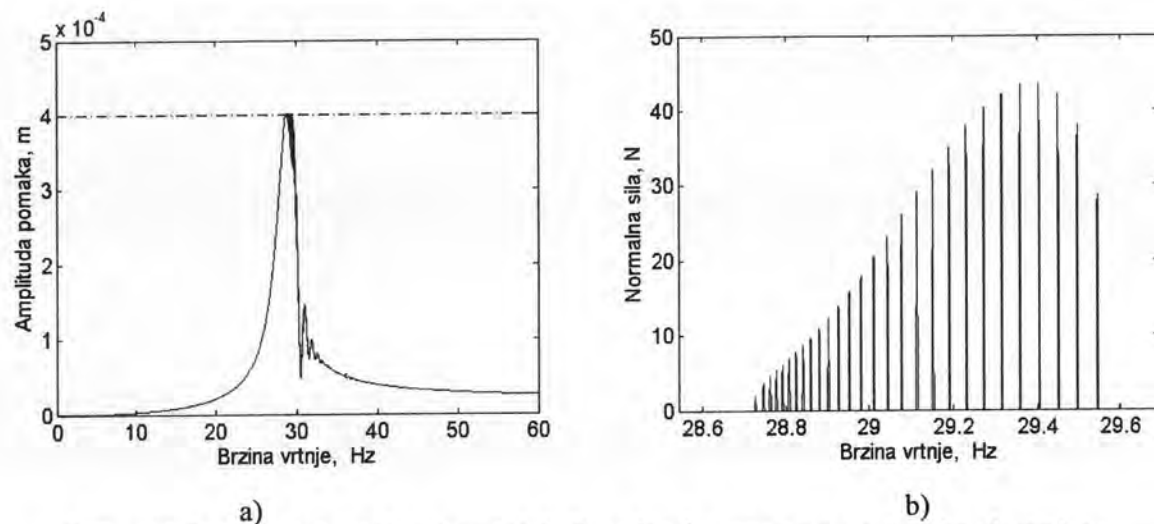
Slika 4.1. prikazuje dva odziva rotora pri kutnom ubrzanju  $\varepsilon = 100 \cdot \pi$ , rad/s<sup>2</sup> za slučaj ubrzavanja odnosno usporenja u ovisnosti od vremena. Slika 4.2. prikazuje odzive rotora pri različitim intenzitetima kutnog ubrzanja odnosno usporenja, bez uspostave dodira s statorom, u ovisnosti od brzine vrtnje. Slike 4.3. do 4.6. prikazuju odzive rotora u vidu radijalne amplitude rotora usporedo s angažiranom normalnom silom dodira za slučaj uspostavljenog kontakta rotora i statora.



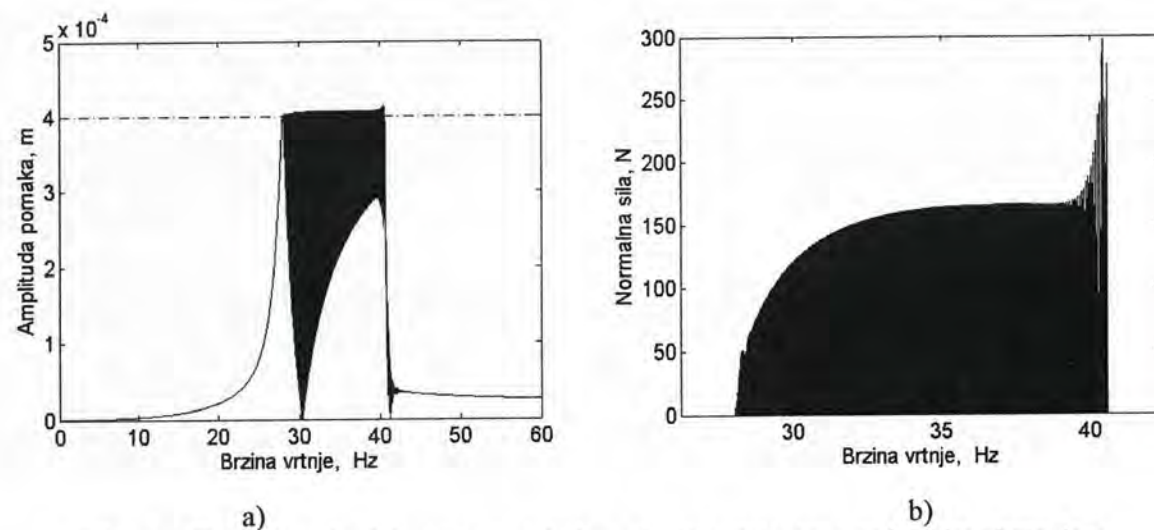
Slika 4.1. Tranzijentni odziv rotora pri kutnom ubrzanju  $\varepsilon = 100\pi$ , rad/s<sup>2</sup> (odnosno usporenju  $\varepsilon = -100\pi$ , rad/s<sup>2</sup>)



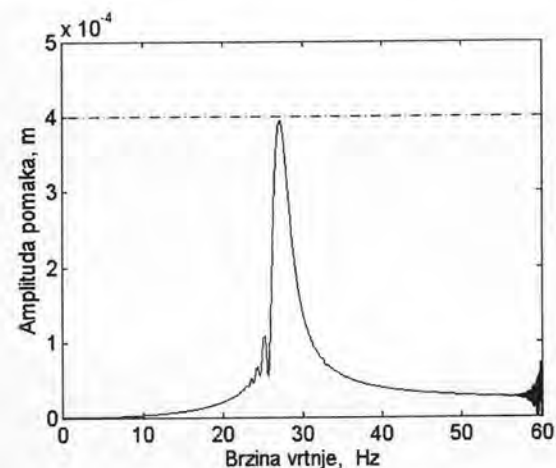
Slika 4.2. Usporedni prikaz stacionarnog i tranzijentnog odziva rotora u ovisnosti od brzine vrtnje pri različitim, a) kutnim ubrzanjima  $\varepsilon = (100\pi, 30\pi \text{ i } 10\pi)$  rad/s<sup>2</sup>, b) odnosno istim usporenjima



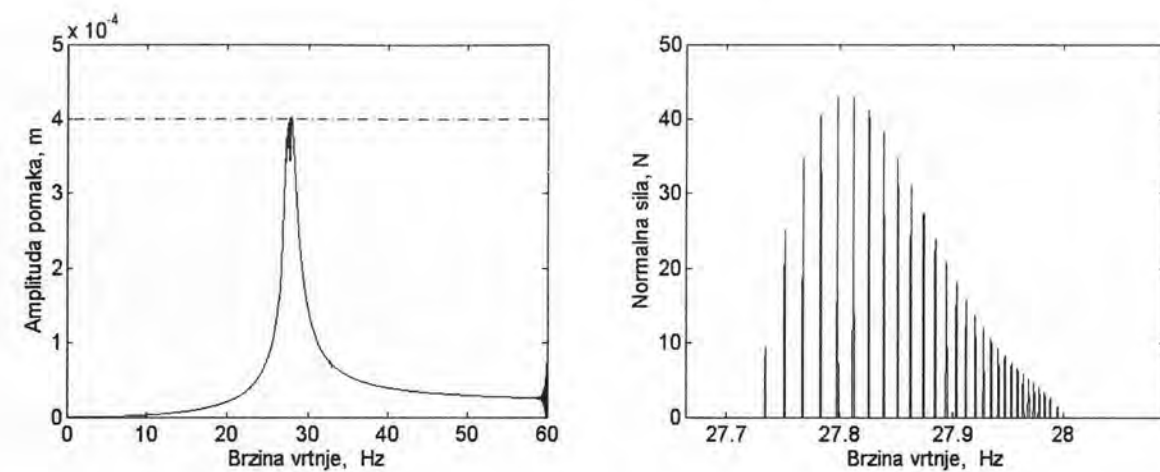
**Slika 4.3.** Tranzijentni odziv rotora pri dodiru s krutim statorom a sa kutnim ubrzanjem  $\varepsilon = 6\pi$ , rad/s<sup>2</sup>, a) Amplitude pomaka, b) Normalna sila dodira



**Slika 4.4.** Tranzijentni odziv rotora pri dodiru s krutim statorom a sa kutnim ubrzanjem  $\varepsilon = 2\pi$ , rad/s<sup>2</sup>, a) Amplitude pomaka, b) Normalna sila dodira



**Slika 4.5.** Tranzijentni odziv rotora pri dodiru s krutim statorom a sa kutnim usporenjem  $\varepsilon = -6\pi$ , rad/s<sup>2</sup>,



**Slika 4.6.** Tranzijentni odziv rotora pri dodiru s krutim statorom a sa kutnim usporenjem  $\varepsilon = -2\pi$ , rad/s<sup>2</sup>, a) Amplitude pomaka, b) Normalna sila dodira

Na osnovi prikazanih rezultata dodira rotora s krutim statorom a vezano uz uvjete definirane u Tablici 4.1. može se zaključiti da su normalne sile većeg intenziteta u slučaju prolaska kritične brzine pri upućivanju rotora (slike 4.3. i 4.4.) u odnosu na zaustavljanje rotora (slike 4.5. i 4.6.). U slučaju prikazanom na slici 4.5. uopće nije došlo do dodira rotora s statorom pri kutnom usporenju  $\varepsilon = -6\pi$ , rad/s<sup>2</sup>, dok se kod ekvivalentnog slučaja pri upućivanju (slika 4.3.) generiraju znatne normalne sile. Kod usporedbe slika 4.4. i slike 4.6. ponovno se primjećuje disproporcija u intenzitetima normalnih sila te širini područja brzina vrtnje u kojem se događa kontakt. Područje brzina za slučaj upućivanja rotora u pogon (ubrzanja) zamjetno je šire te je stoga opasnije s obzirom na dulje vrijeme provedeno u kontaktu što uzrokuje zagrijavanje površina u kontaktu te intenzivnije trošenje istih. Sa pojačanim trošenjem javlja se i moguće povećanje koeficijenta trenja a s time i veća opasnost od natražne precesije.

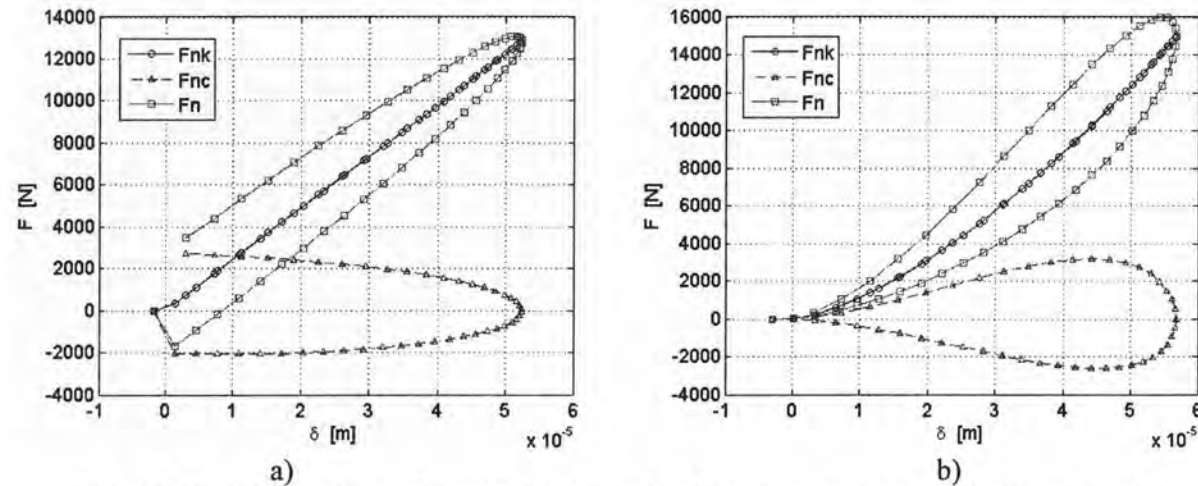
#### 4.1.2. Analiza dodira rotora sa fleksijski elastičnim statorom

U ovom primjeru uvedena je fleksijska elastičnost statora. Za modeliranje normalne sile dodira upotrijebljena su dva modela. Prvi model je prema objašnjenju sa slike 2.4. tzv. linearni model (linearna krutost – linearno prigušenje) dok je drugi tzv. nelinearni model Hunta i Crossleya (nelinearna krutost – nelinearno prigušenje). Njihovi utjecaji na odziv rotora i statora su međusobno komparirani. Slika 4.7. prikazuje krivulje histerese za navedena dva modela normalne sile sa podacima preuzetim iz literature [9] a dobivenih na osnovi eksperimenta. Slika 4.7. dobivena je numeričkom integracijom te je vidljiv utjecaj vremenskog koraka integracije koji za ovaj slučaj iznosi  $\Delta t = 10^{-5}$  s dok je ulazna brzina sudara  $v = 0.42$  m/s. Za modeliranje normalne sile još su usvojeni slijedeći podaci vrijeme provedeno u kontaktu  $t_c = 0.45$  s i koeficijent restitucije  $\varepsilon = 0.76$ . Provedene su simulacije prolaska rotora kroz kritičnu brzinu vrtnje uz kontakt s fleksijski elastičnim statorom pri upuštanju u pogon (run-up) i zaustavljanju pogona (run-down).

Iz razloga direktne komparacije sa rezultatima iz objavljenih članaka poput [59, 60] usvajaju se vrijednosti parametra kako je prikazano u tablici 4.2. Odstupanja od navedenih vrijednosti bit će posebno naznačene.

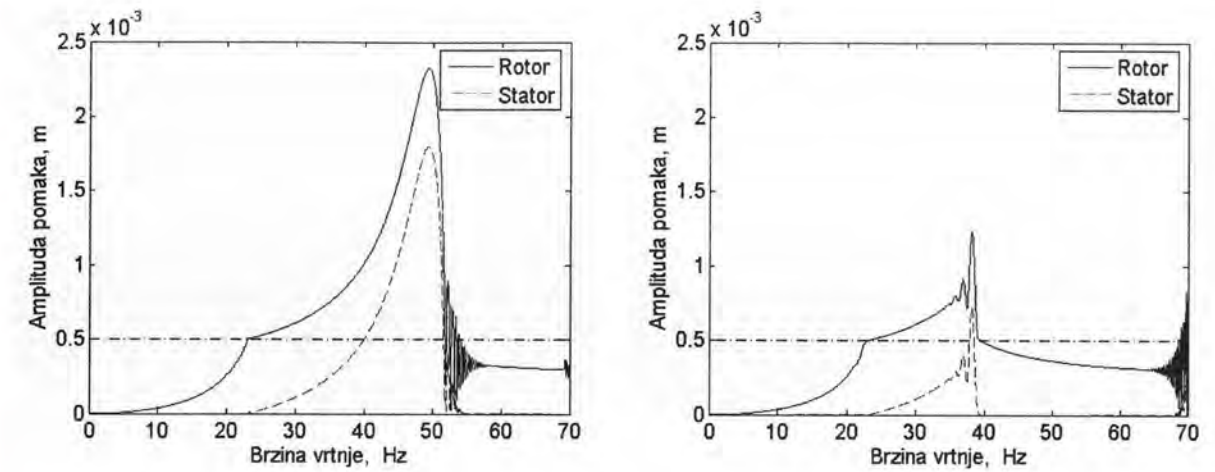
**Tablica 4.2.** Vrijednosti parametara koje vrijede za sve simulacije ako nije drukčije navedeno

$m_s = 0.5m_r$	$\zeta_r = 0.05$	$k_c = 150 k_r$	$C_r = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$\mu = 0.0$
$k_s = 4 k_r$	$\zeta_s = 0.07$	$c_c = 2 \cdot 0.125 \cdot \sqrt{k_c m_r}$	$e_d = C_r / 2$	$\ddot{\varphi} = 0.001 \omega_0^2$

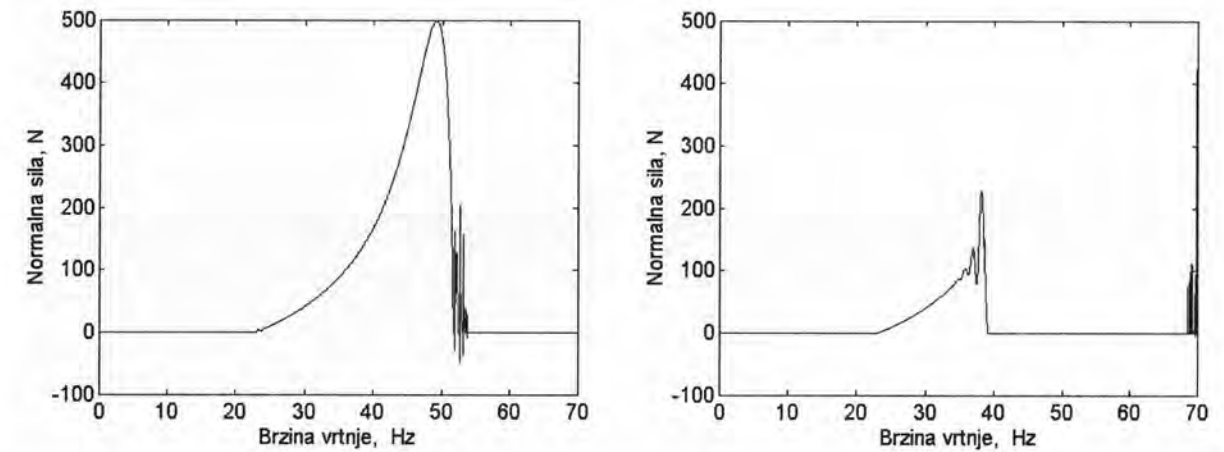


**Slika 4.7.** Kontaktna sila u ovisnosti od deformacije dobivena na osnovi, a) linearnog modela, b) nelinearnog modela

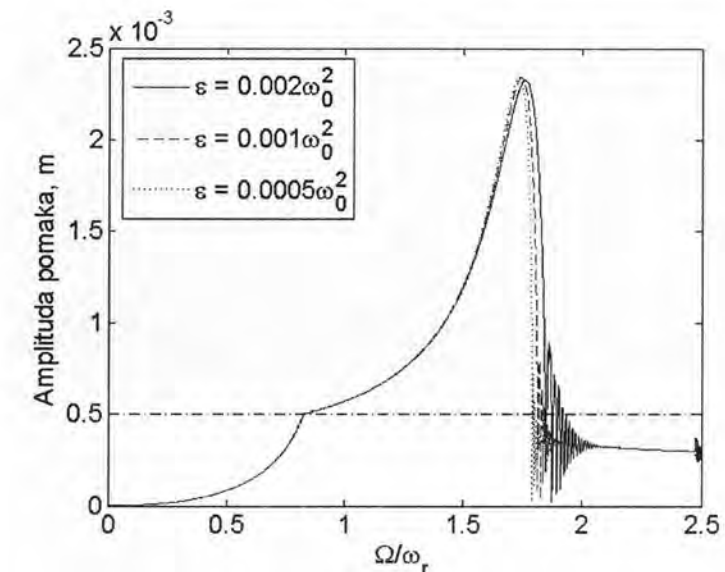
Na slici 4.8. su prikazana dva odziva rotora za slučaj upućivanja u pogon i zaustavljanja uz koeficijent trenja  $\mu = 0$ , kutno ubrzanje  $\ddot{\varphi} = \pm 0.002 \omega_0^2$  te odnos masa statora  $m_s = 0.5m_r$ . Poput prethodne analize rotora s krutim statorom vidljivo je da je prolazak kroz kritičnu brzinu slučaj zaustavljanja rotora manje opasan. Slika 4.9. prikazuje odgovarajuće intenzitete normalnih sila između rotora i statora za vrijeme kontakta. Na slici 4.10. su nadalje prikazani odzivi rotora za slučaj različitih kutnih ubrzanja, te se u cilju izbjegavanja većeg utjecaja tranzijentnih pojava za daljnju analizu usvaja kutno ubrzanje  $\ddot{\varphi} = 0.001 \omega_0^2 = 9.85\pi, \text{ rad/s}^2$ . Slike 4.11 a) i b) prikazuju odzive rotora te normalne sile dodira za slučaj različitih koeficijenata trenja klizanja i to redom za koeficijente  $\mu = 0.1, 0.3, 0.5$ . Slika 4.11. c) po prvi puta prikazuje tangencijalne brzine rotora pri čemu je vidljivo njeno opadanje porastom koeficijenta trenja  $\mu$ . Za daljnju analizu usvaja se koeficijent trenja  $\mu = 0.3$ . Slika 4.12. prikazuje utjecaj odnosa masa statora i rotora na odziv rotora i to redom  $m_s/m_r = 0.5, 1.0, 2.0$ . Iz slike 4.12 je vidljivo da povećanje mase statora u odnosu na masu rotora suzuje područje brzina u kojem su rotor i stator u kontaktu. U nastavku se usvaja da je  $m_s/m_r = 1$  (što približno odgovara kasnije analiziranom eksperimentalnom modelu).



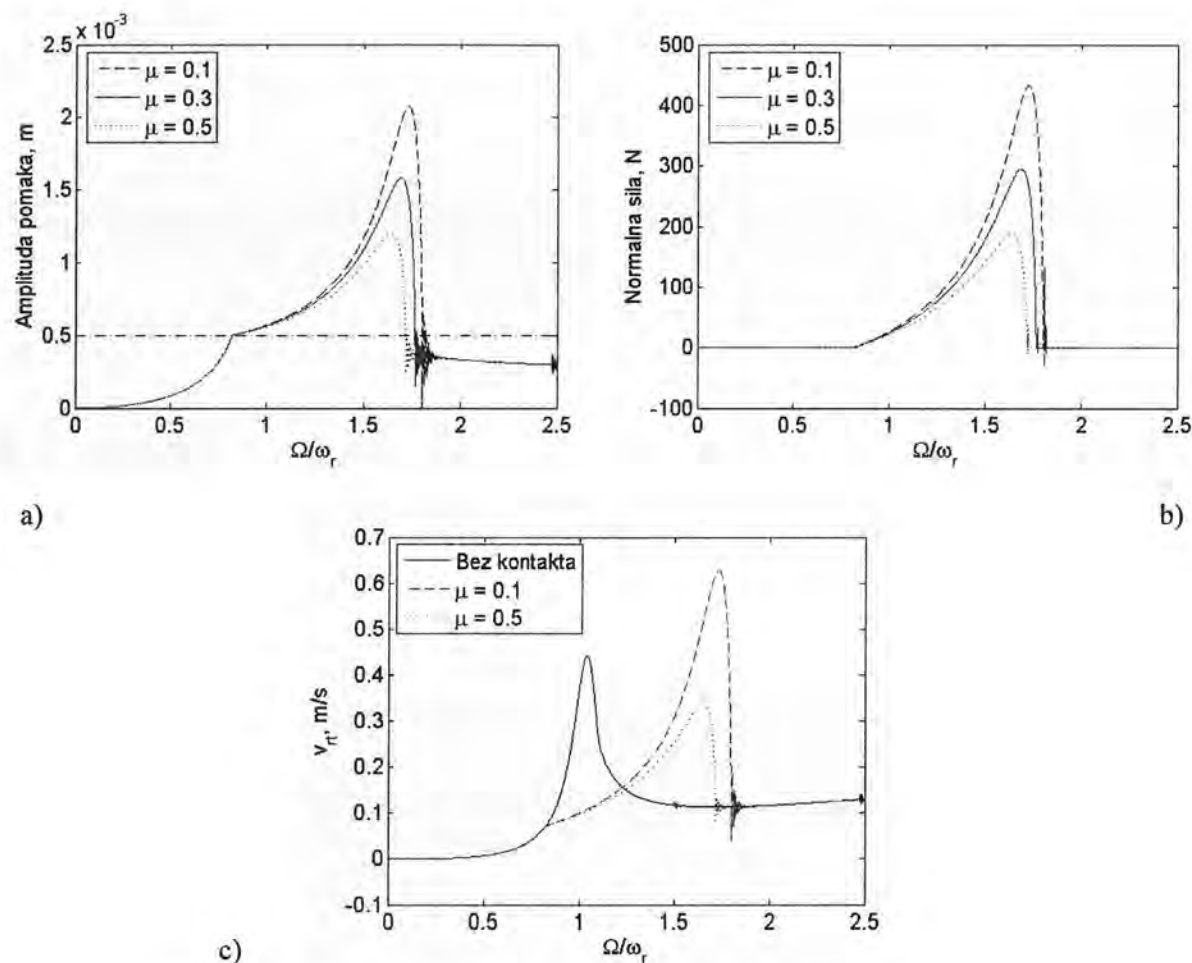
**Slika 4.8.** Tranzijentni odzivi rotora i statora za slučaj a) upućivanja i slučaj b) zaustavljanja



**Slika 4.9.** Normalna sila dodira vezano uz odzive sa slike 4.8. a) za slučaj a) upućivanja i b) zaustavljanja



**Slika 4.10.** Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim kutnim ubrzanjima

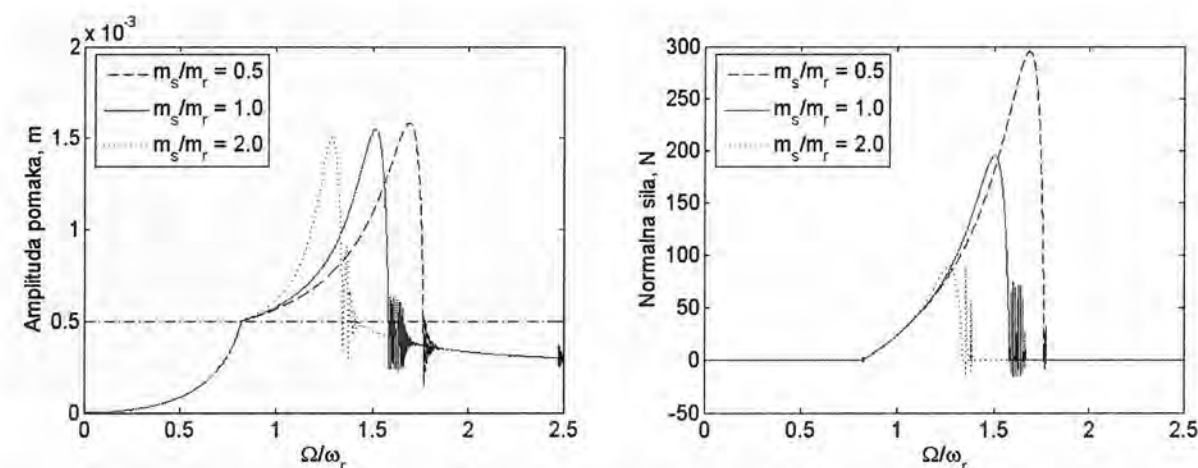


**Slika 4.11.** Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim koeficijentima trenja  $\mu$ , a) Amplitude pomaka, b) Normalne sile dodira, c) Tangencijalna brzina središta diska rotora

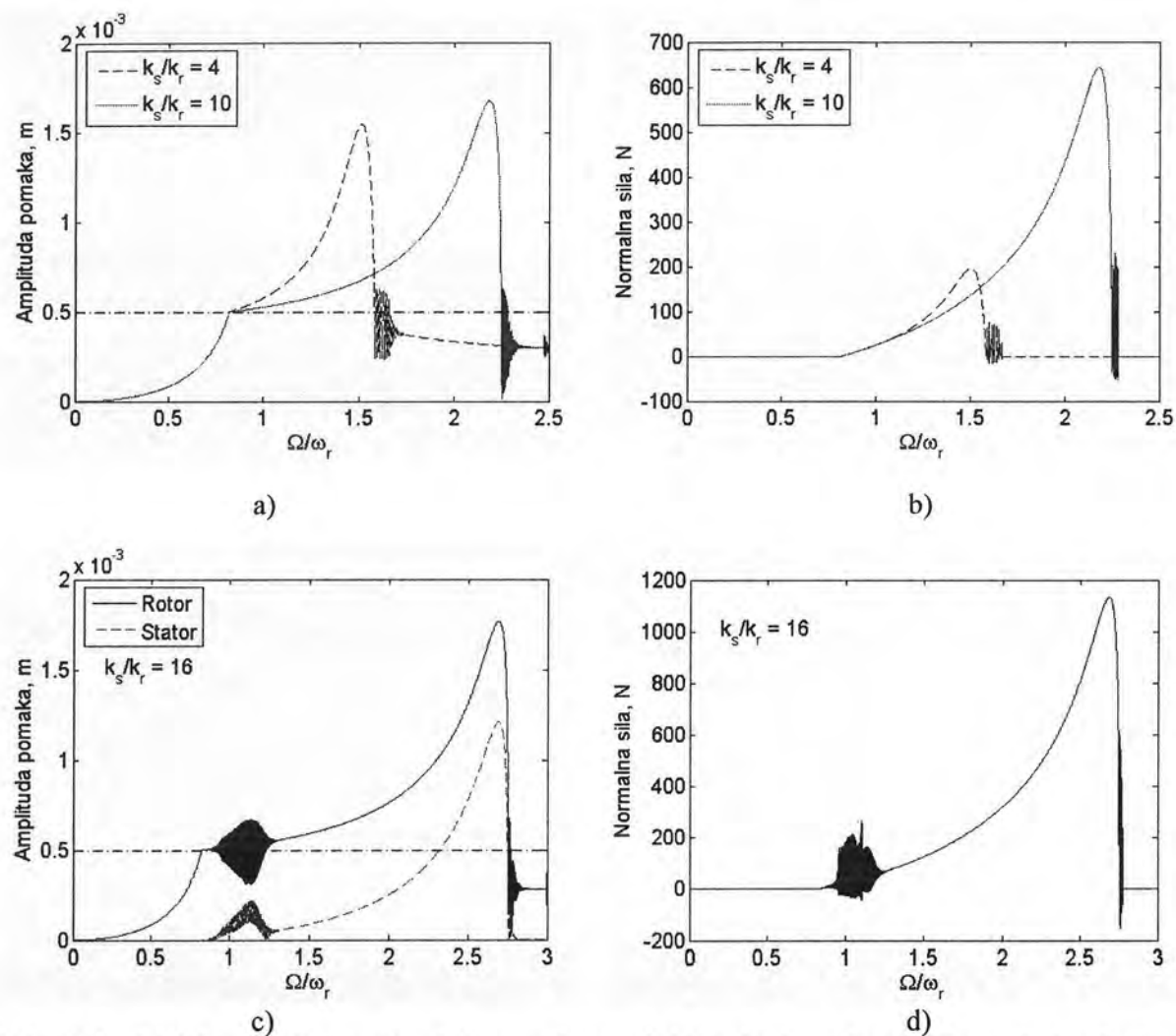
Slika 4.13. nadalje prikazuje odzive rotora uslijed promjene omjera krutosti statora i rotora. Kako se može vidjeti omjer krutosti statora i rotora ima znatan utjecaj te se njegovim povećanjem proširuje područje brzina u kojem se rotor nalazi u kontaktu s statorom. Navedeno proširenje područja brzina ima za posljedicu smanjenje nagiba krivulje odziva rotora i statora od točke nakon što je rotor ušao u kontakt s statorom. Kod omjera krutosti  $k_s/k_r = 16$  vidljiva je lokalna nestabilnost u neposrednoj blizini vlastite frekvencije rotora. Neki autori poput [5] objašnjavaju takve nestabilnosti, varijacijom vremenskog koraka metode direktne integracije, no kako je upravo iz tog razloga usvojena metoda s konstantnim vremenskim korakom  $\Delta t = 10^{-5}$  s za cijelo područje dodira rotora i statora a naknadno izvršena provjera s konstantnim vremenskim korakom  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$  s, uzrok ne leži u numeričkoj metodi. U nastavku se koristio omjer krutosti  $k_s/k_r = 10$ . Na slici 4.14. prikazani su rezultati simulacije utjecaja neuravnoteženja rotora  $e_d$  na odzive rotora. Kako bi se naglasio intenzitet pojedinog neuravnoteženja na slici 4.14. a) prikazan je stacionarni odziv rotora, bez dodira sa statorom, u odnosu na nominalnu zračnost između rotora i statora. Slika 4.14. b) prikazuje odzive rotora pri dodiru sa statorom pri čemu se može vidjeti širenje područja

brzina, kada je rotor u kontaktu sa statorom, sa porastom intenziteta neuravnoteženja. Proporcionalno porastu amplituda rotora rastu i normalne sile dodira, što je vidljivo na slici 4.14. c). Za potrebe daljnje analize usvaja se  $e_d = 1.25 \cdot 10^{-4}$  m. Na slici 4.15. prikazani su rezultati analize utjecaja prigušenja rotora pri čemu odziv u obliku amplituda rotora raste smanjenjem relativnog prigušenja  $\zeta_r$  (slika 4.15. a). Smanjenjem amplituda rotora smanjuju se i normalne sile dodira rotora i statora. U nastavku se pretpostavlja da je  $\zeta_r = 0.015$ . Na slici 4.16. dodatno je analiziran utjecaj prigušenja ali sada statora. Vidljiva je sličnost sa utjecajem prigušenja rotora u smislu da se povećanjem relativnog prigušenja statora  $\zeta_s$  smanjuju amplitude rotora (slika 4.16. a), amplitude statora (slika 4.16. b) te normalne sile dodira (slika 4.16. c). U nastavku se pretpostavlja da je  $\zeta_s = 0.015$  što odgovara izmjerenoj vrijednosti kod eksperimentalnog modela rotora. Ovdje treba napomenuti da se radi usporedbe s literaturom [60] cijelo vrijeme koristila definicija prigušenja statora  $c_s = 2\zeta_{sr}\sqrt{k_r m_r}$  koja nije posve logična ali ima prednosti u tome što su parametri rotora nepromjenjivi dok se parametri statora neprestano mijenjaju tako da bi se promjenom mase odnosno krutosti statora direktno promijenilo i prigušenje statora. Uobičajena definicija prigušenja statora glasi  $c_s = 2\zeta_s\sqrt{k_s m_s}$ , što uz pretpostavku jednakog prigušenja  $c_s$  te odnosa masa  $m_s = m_r$  i odnosa krutosti  $k_s = 10k_r$  daje odnos koeficijenata relativnog prigušenja iz literature [60] i uobičajenog koeficijenta relativnog prigušenja  $\zeta_{sr} = \sqrt{10} \cdot \zeta_s$ . Za daljnju analizu usvaja se  $\zeta_{sr} = 0.008$  što odgovara eksperimentalno dobivenoj vrijednosti  $\zeta_s = \zeta_{sr}/\sqrt{10} = 0.008/\sqrt{10} \approx 0.0025$ .

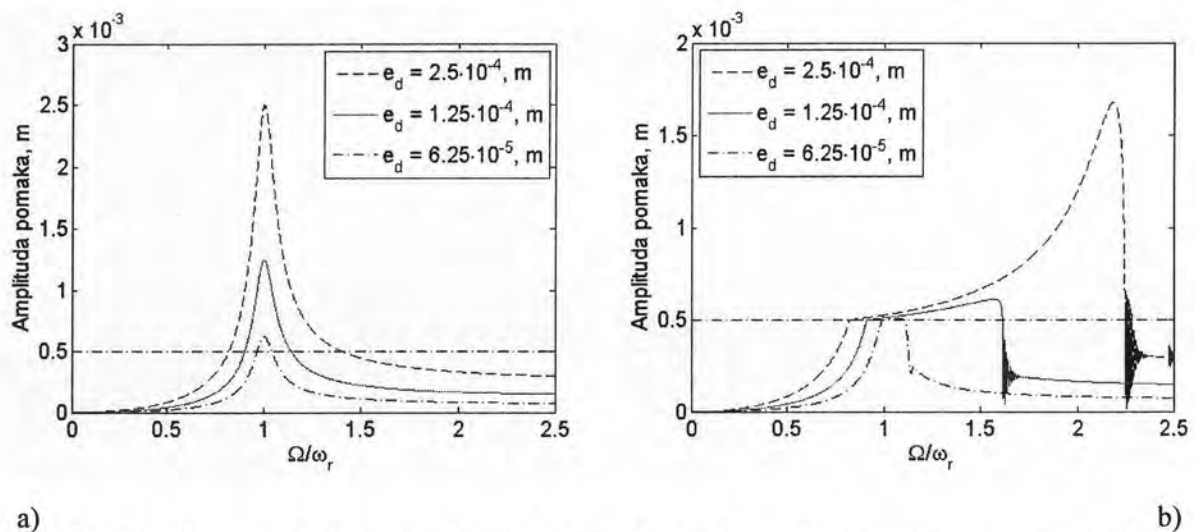
Slika 4.17. prikazuje odzive rotora i statora te normalnu silu dodira za slučaj linearnog modela normalne sile sa koeficijentom krutosti  $k_c = 2.45 \cdot 10^8$  N/m i koeficijentom prigušenja  $c_c = 6.5 \cdot 10^3$  Ns/m preuzetim iz literature [9] a dobivenih na osnovi eksperimentalnog određivanja koeficijenta restitucije i trajanja kontakta između krutog diska i krutog ležaja izrađenih iz čelika.



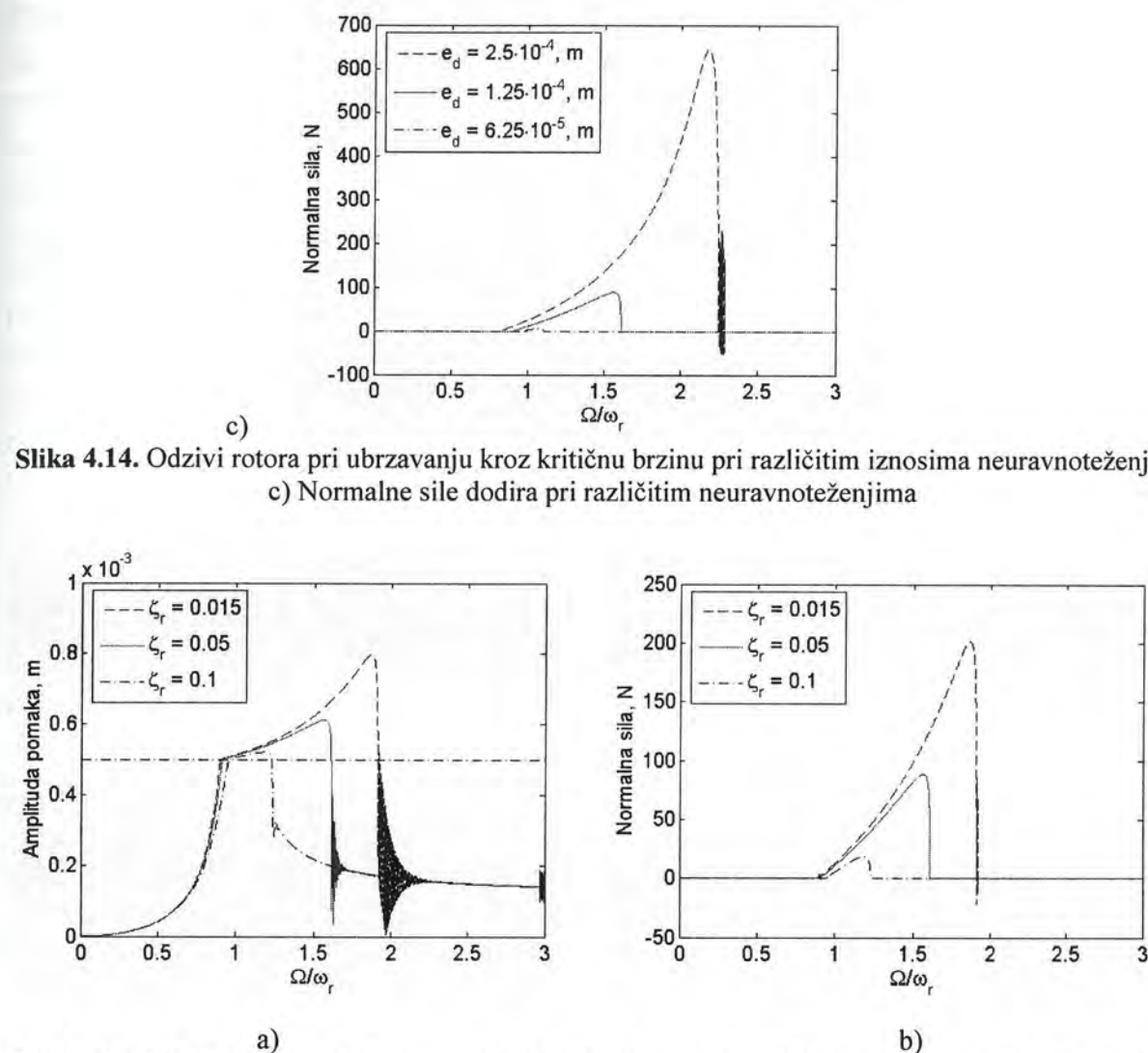
**Slika 4.12.** Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim omjerima mase statora i rotora, a) Amplitude pomaka b) Normalne sile dodira



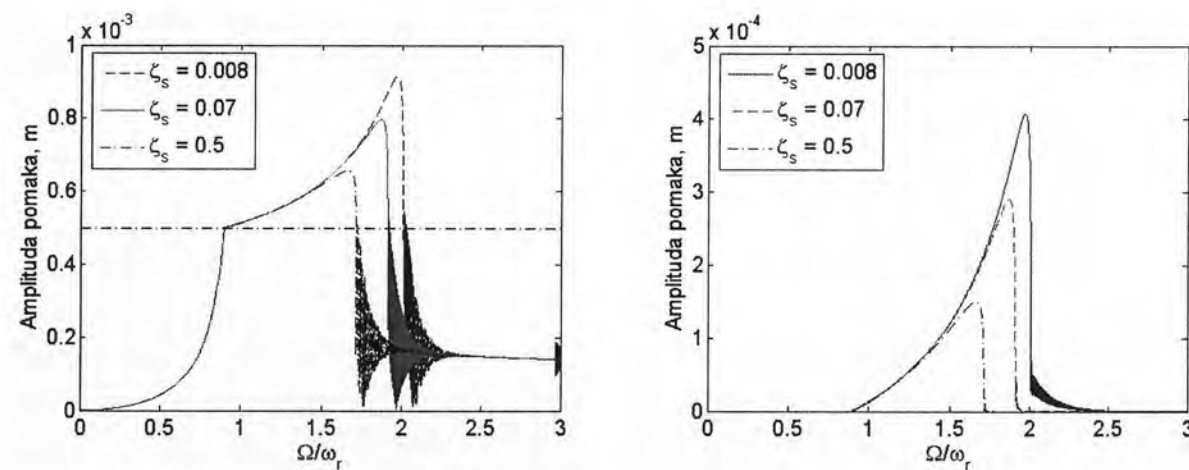
Slika 4.13. Odzivi rotora (i statora) pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim omjerima krutosti statora i rotora; a) Amplitude pomaka rotora pri omjerima krutosti  $k_s/k_r = 4, 10$ , b) Normalna sila dodira pri  $k_s/k_r = 4, 10$ , c) Amplitude pomaka rotora i statora pri  $k_s/k_r = 16$ , d) Normalna sila dodira pri  $k_s/k_r = 16$



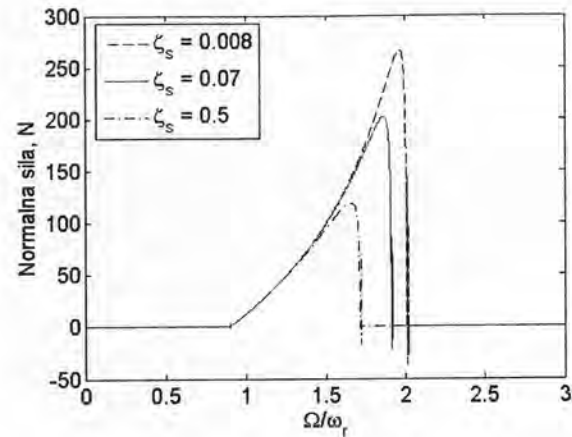
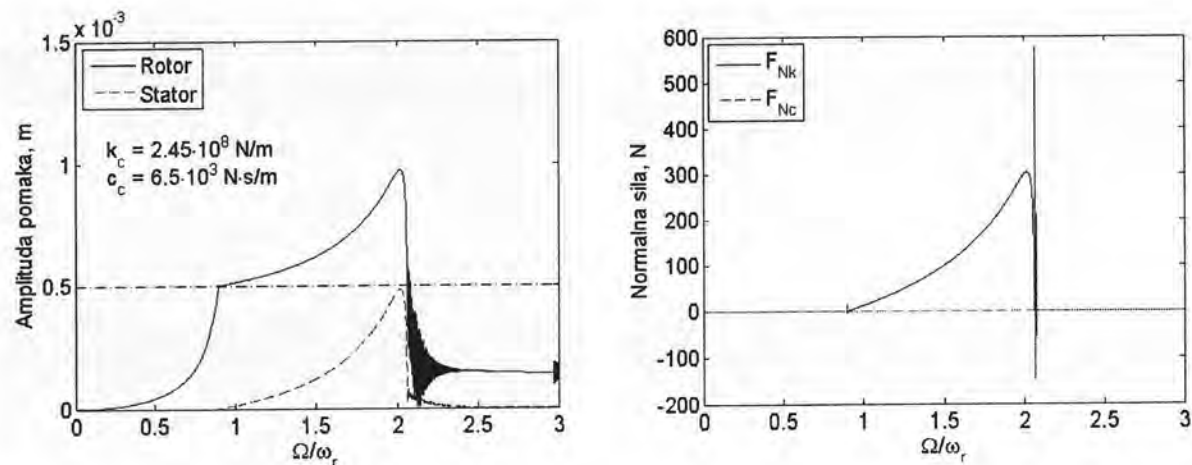
Slika 4.14. Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim iznosima neuravnoteženja, a) Stacionarni odzivi bez kontakta sa statorom, b) Tranzijentni odzivi pri kontaktu sa statorom



Slika 4.15. Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim omjerima prigušenja rotora  $\zeta_r$ , a) Amplitude pomaka, b) Normalne sile dodira  $F_N$

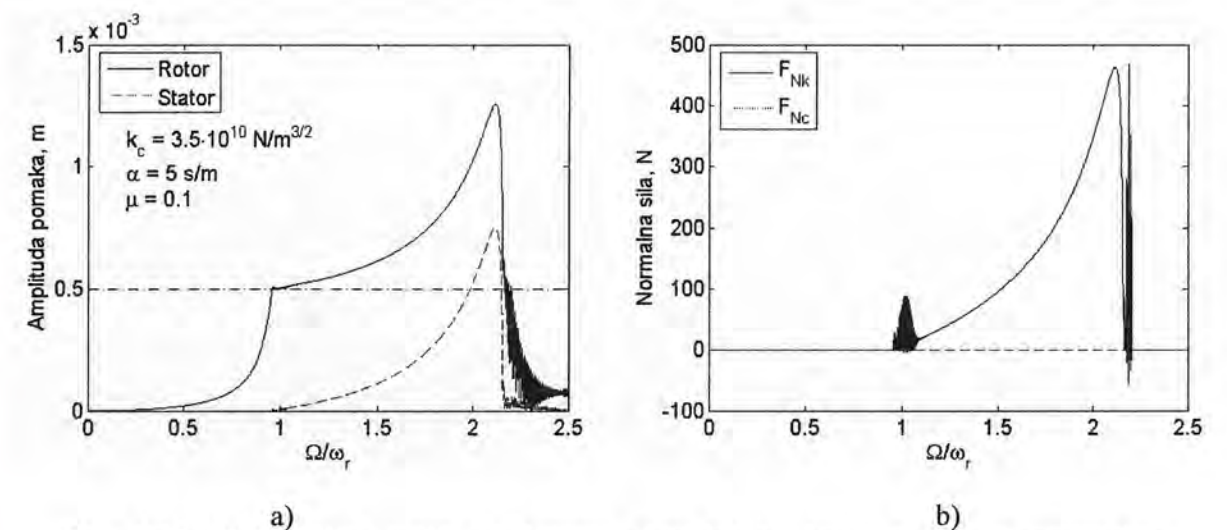


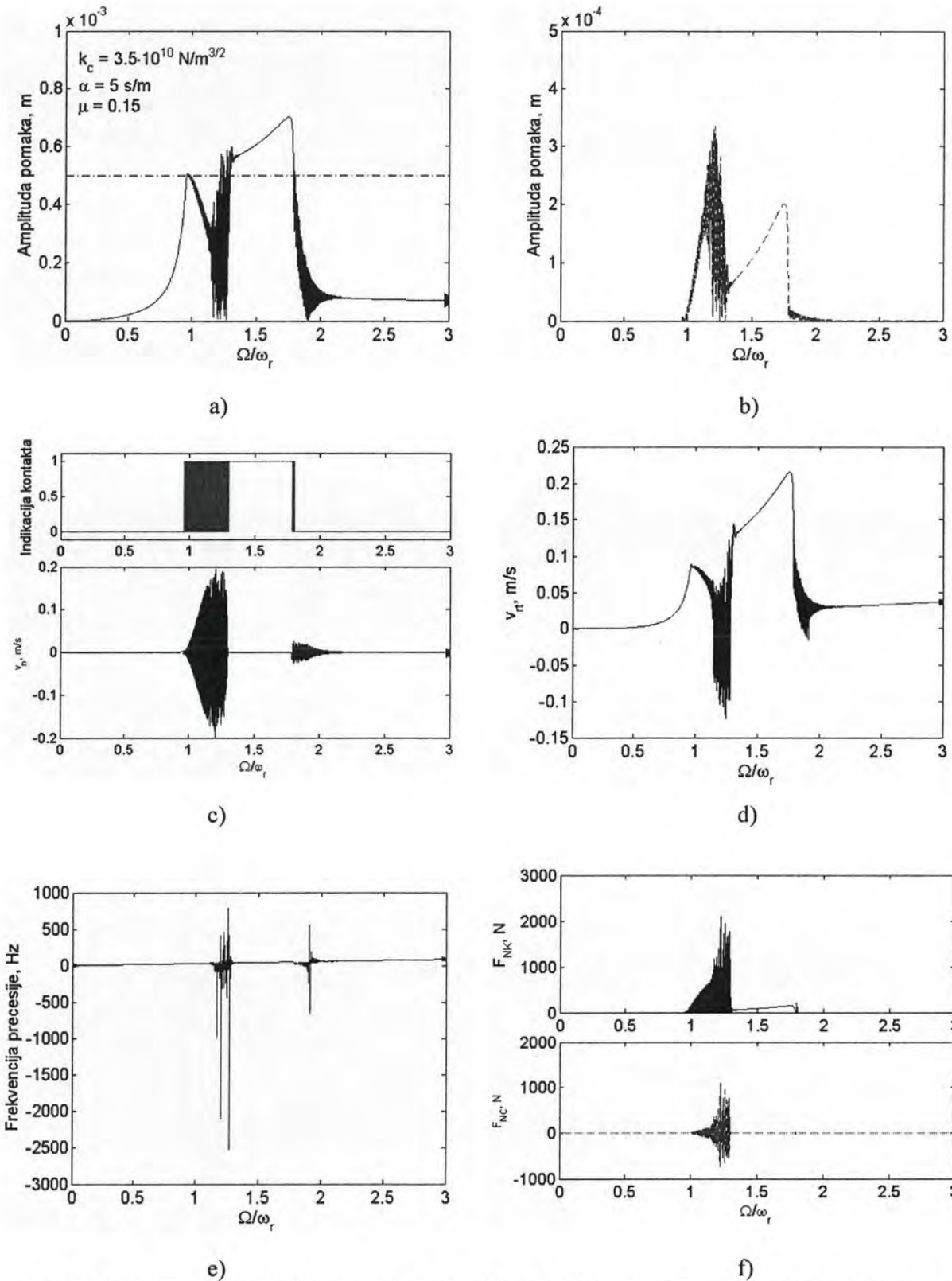
Slika 4.16. Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim omjerima prigušenja statora  $\zeta_s$ , a) Amplitude pomaka, b) Odzivi statora

Slika 4.16. Nastavak, c) Normalne sile dodira  $F_N$ Slika 4.17. Odzivi rotora i statora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu sa realnim parametrima linearnog modela kontakta, a) Amplitude pomaka, b) Normalne sile dodira  $F_N$ 

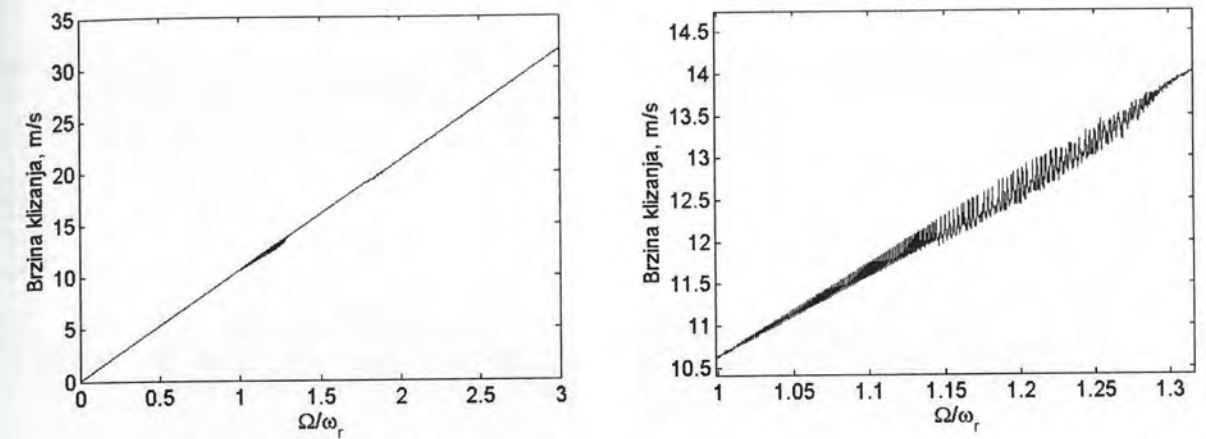
Kao što je već komentirano u literaturi [9] nelinearni model normalne sile prema Huntu i Crossleyu zna u nekim situacijama uzrokovati nestabilno rješenje. Promjenom modela normalne sile iz linearnog u nelinearni te definiranjem ključnih parametara: nelinearne krutosti  $k_c = 3.5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^{3/2}$  te koeficijenta prigušenja  $\alpha = 5 \text{ s/m}$  a na osnovi rezultata preuzetih iz literature [9, 12] došlo je do divergencije rješenja. Smanjenjem neuravnoteženosti na vrijednost  $e_d = 6.25 \cdot 10^{-5} \text{ m}$  te koeficijenta trenja na vrijednost  $\mu = 0.1$  rješenje je počelo konvergirati. Slika 4.18. prikazuje odzive rotora i statora za slučaj spomenutog nelinearnog modela normalne sile te normalne sile dodira između rotora i statora koji se javljaju ubrzanjem rotora kroz vlastitu frekvenciju. Slike 4.17 i 4.18 se ne mogu direktno uspoređivati jer se kod odziva prikazanog na slici 4.18. a) radi o manjem neuravnoteženju ( $e_d = 6.25 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ ) te manjem koeficijentu trenja ( $\mu = 0.1$ ) u odnosu na primjer prikazan na slici 4.17 a) ( $e_d = 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  i  $\mu = 0.3$ ), no kvalitativno izgled je sličan.

Povećanjem koeficijenta trenja na  $\mu = 0.15$  dobiva se odziv prikazan na slici 4.19. a) pri čemu se može primijetiti početak nestabilnog ponašanja rotora. Kako bi se stekao što bolji uvid u ponašanje rotora na slici 4.19 dani su različiti prikazi i to redom: odziv rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu, odziv statora, relativna normalna brzina između rotora i statora sa indikacijom kontakta, tangencijalna brzina središta diska rotora, frekvencija precesije rotora, te elastična i prigušna sila dodira. Iz prikaza tangencijalne brzine središta diska rotora i frekvencije precesije rotora po prvi puta se pojavljuju negativne vrijednosti što govori o pojavi natražne precesije rotora. Brzina klizanja u dodirnoj točki rotora i statora za model rotora s nelinearnim modelom prikazana je na slici 4.19. g). Iz navedene slike vidljivo je da brzina klizanja ima stabilan trend povećanja uslijed dominantnog utjecaja rotacije tako da na mjestu gdje se na trenutak pojavljuje natražna precesija imamo laganu oscilaciju tangencijalne brzine klizanja u točki dodira. Na osnovi slike 4.19. g), može se zaključiti da za ovaj tip simulacije nema potrebe koristiti model trenja koji uzima u obzir statičko trenje i Stribeckov efekt. Znajući da je vlastita frekvencija rotora  $\omega = 175.93 \text{ rad/s}$  odnosno  $f = 28 \text{ Hz}$  na slici 4.20. su dodatno dani odzivi rotora u obliku orbita pri karakterističnim brzinama vrtnje. Po definiciji rotacija ima smisao okretanja obrnuto kazaljci na satu odnosno pozitivnu matematičku rotaciju. Precesija je druga kutna brzina a definira se kao kutna brzina obilaska središta diska oko točke središta diska u stanju mirovanja. Usporedbom smjera kutne brzine precesije sa referentnom kutnom brzinom rotacije govori se o naprednoj ili natražnoj precesiji. Smjer rotacije je pozitivni matematički smjer odnosno obrnuto kazaljci na satu. Na slikama 4.20. smjer precesije određen je sa tri posebne oznake od kojih je prva puni krug a ostale dvije su kružnice. Može se vidjeti da na gotovo svim orbitama prevladava napredna precesija izuzev orbita pri brzinama  $n = 34.464$  i  $n = 34.964$ . Na orbiti pri brzini vrtnje  $n = 35.464$  može se vidjeti izlazak iz natražne brzine vrtnje.

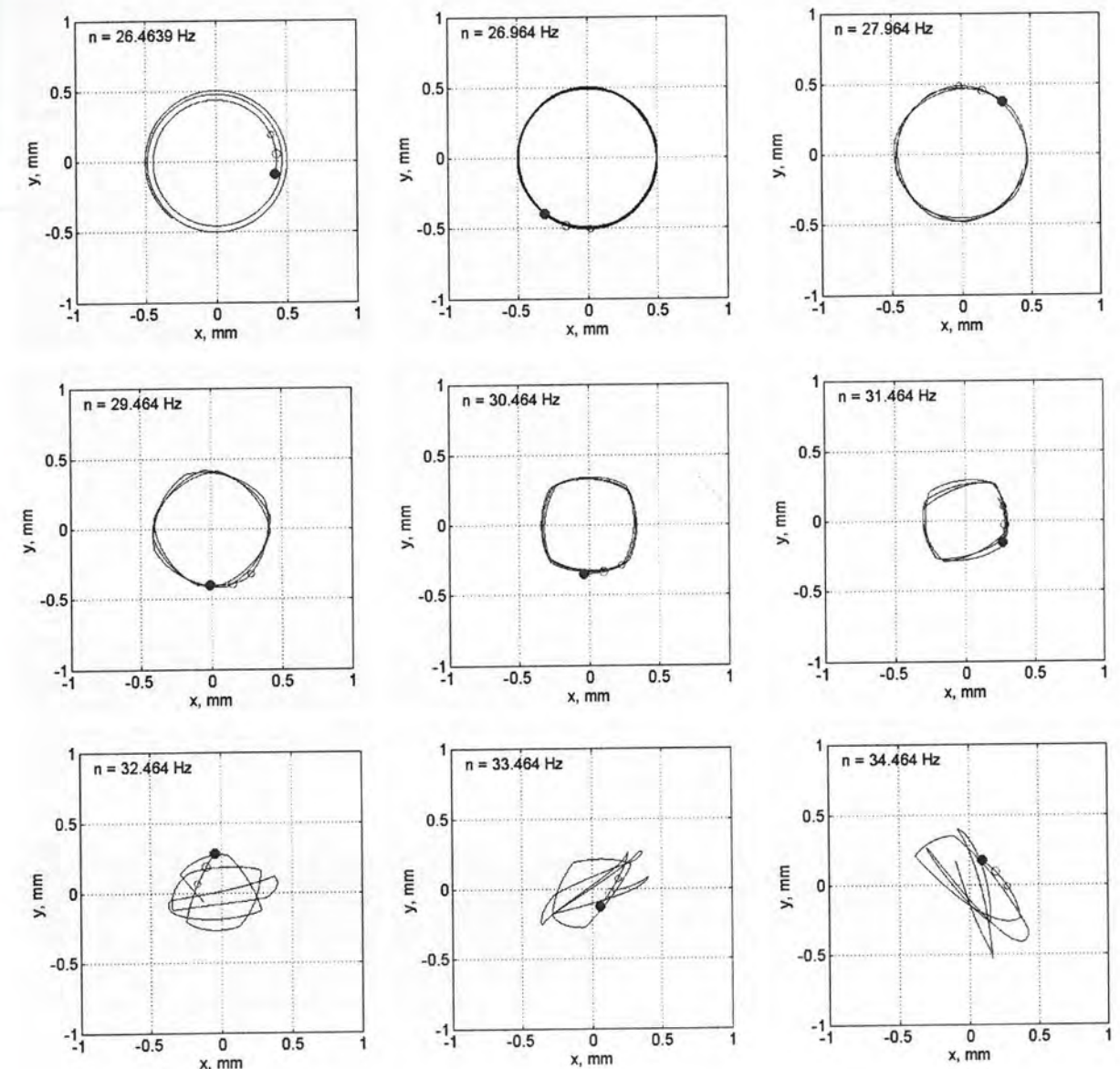
Slika 4.18. Odzivi rotora i statora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu sa realnim parametrima nelinearnog modela kontakta te koef. trenja  $\mu = 0.1$ , a) Ampl. pomaka, b) Norm. sile dodira  $F_N$



Slika 4.19. a) Odziv rotora pri ubrzavanju kroz kritičnu brzinu sa realnim parametrima nelinearnog modela kontakta te koef. trenja  $\mu = 0.15$ , b) Odziv statora, c) Relativna normalna brzina između rotora i statora sa indikacijom kontakta, d) Tangenc. brzina središta diska rotora, e) Frekvencija precesije rotora, f) Elastična i prigušna sila dodira

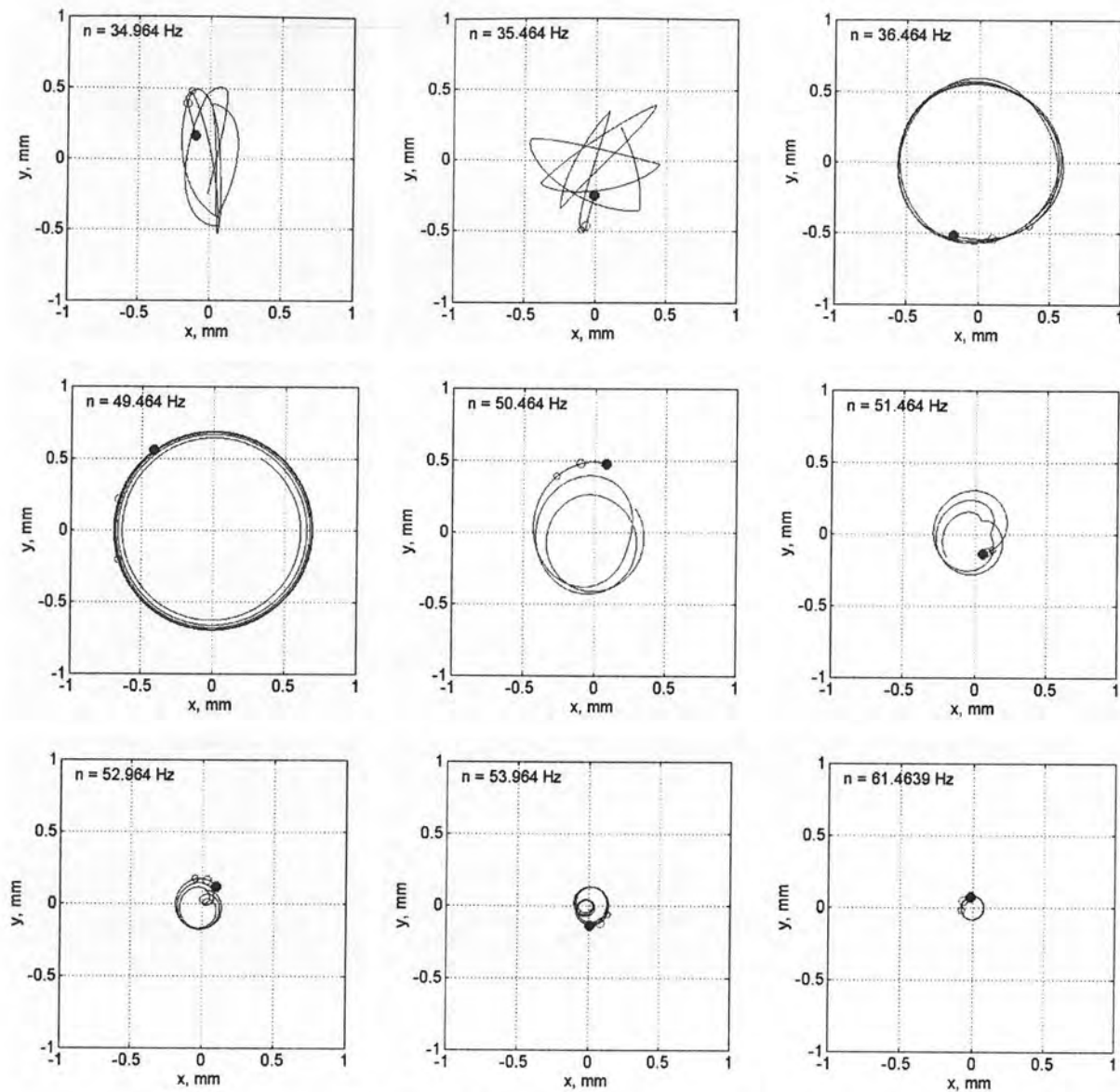


Slika 4.19. Nastavak, g) Brzina klizanja u dodirnoj točki rotora i statora



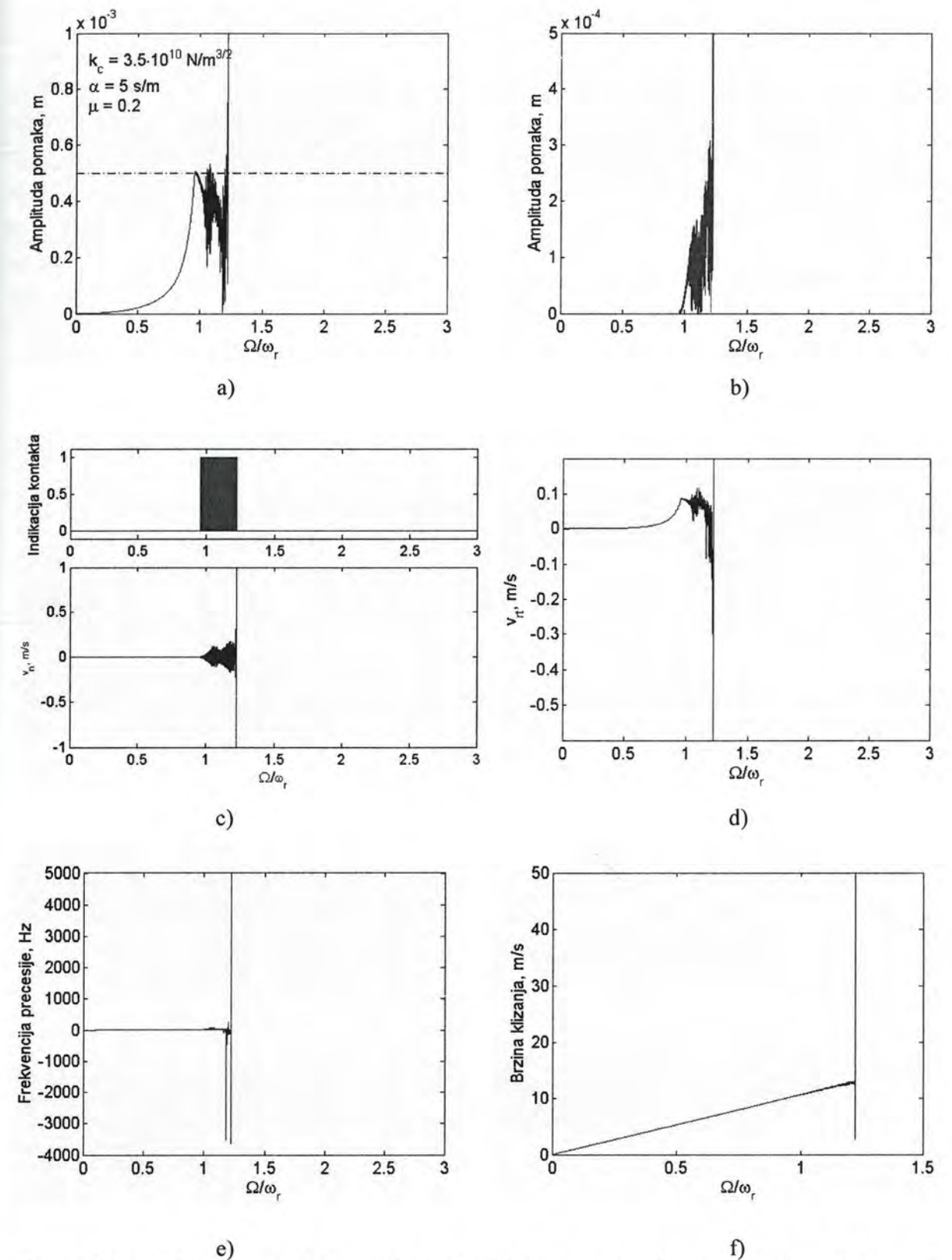
Slika 4.20. Orbite središta diska rotora za slučaj sa slike 4.19





Slika 4.20. Orbite središta diska rotora za slučaj sa slike 4.19 (nastavak)

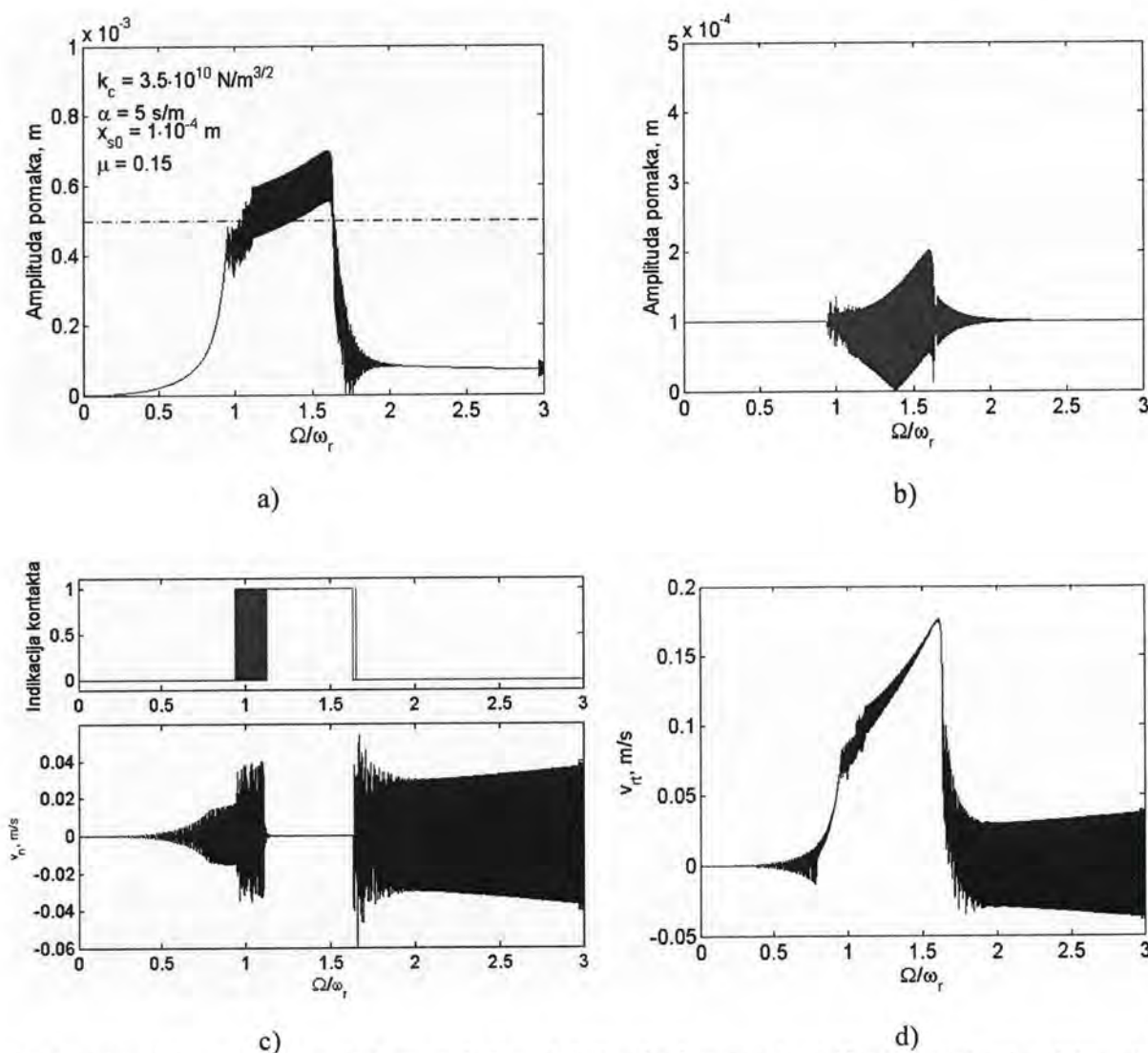
Kod koeficijenta trenja  $\mu=0.2$  te većim od njega uz prije definirane parametre ( $k_c=3.5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^{3/2}$ ,  $\alpha=5 \text{ s/m}$ ,  $e_d=6.25 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ ) rješenje počinje divergirati pri brzini vrtnje približno jednakoj  $1.22 \times \omega$  što je prikazano na slici 4.21.



Slika 4.21. a) Odziv rotora pri ubrzavanju kroz kritičnu brzinu sa realnim parametrima nelinearnog modela kontakta te koeficijentom trenja  $\mu=0.2$ , b) Odziv statora, c) Relativna normalna brzina između rotora i statora sa indikacijom kontakta, d) Tangencijalna brzina središta diska rotora, e) Frekvencija precesije rotora, f) Brzina klizanja u dodirnoj točki rotora i statora

### 4.1.3. Analiza dodira rotora sa fleksijski elastičnim statorom i asimetrično postavljenim statorom

Za ovaj primjer vrijede podaci iz prethodnog primjera, te oni navedeni na slici 4.22. Definicijom ekscentričnosti statorskog prstena u odnosu na rotor dovodi do pojave da rotor dolazi u kontakt sa statorom prije iznosa nominalne zračnosti, što je vidljivo sa slike 4.22. Uz zračnost između rotora i statora  $C_r = 5 \cdot 10^{-4}$  m u ovom primjeru uzeta je ekscentričnost statora u horizontalnom smjeru za  $x_{s0} = 1 \cdot 10^{-4}$  m uz ostale uvjete kao u prethodnom primjeru. Kod prikaza u vidu amplituda pomaka vidljivo je intenzivno osciliranje amplitude za vrijeme kontakta rotora sa statorom. Na prikazu normalne brzine između rotora i statora treba zanemariti onaj dio dijagrama za koji je indikator kontakta jednak nuli, jer taj dio samo pokazuje da se događa primicanje i odmicanje središta rotora i statora bez uspostave dodira.



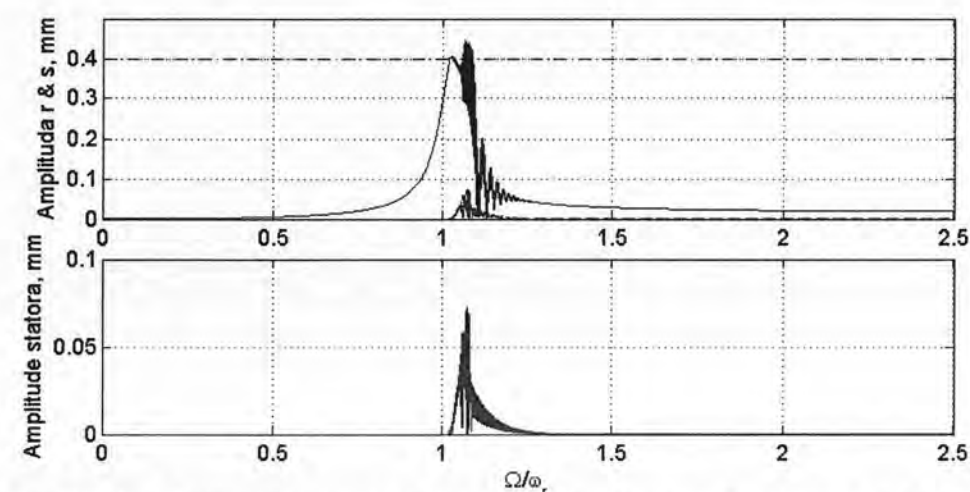
Slika 4.22. a) Odziv rotora pri ubrzavanju kroz kritičnu brzinu sa asimetrično postavljenim statorom te koeficijentom trenja  $\mu = 0.15$ , b) Odziv statora, c) Relativna normalna brzina, d) Tangencijalna brzina središta diska rotora

### 4.1.4. Analiza dodira rotora sa fleksijski i torzijski elastičnim statorom

U ovom primjeru pretpostavlja se da su i rotor i stator fleksijski i torzijski elastični. Osnovni cilj ovog primjera je utvrđivanje utjecaja relativnog torzijskog prigušenja  $\zeta_{ts}$  na odzive rotora i statora za vrijeme kontakta. Analizirani su odzivi relativnog torzijskog kuta između motora i diska na kojem se ostvaruje kontakt sa statorom tj.  $(\varphi_m - \varphi_r)$  te torzijskog kuta statora  $\varphi_s$ . Provedene su tri simulacije prolaska kroz kritičnu brzinu vrtnje pri ubrzavanju rotora od  $n = 0 - 70$  Hz za sljedeće vrijednosti relativnog torzijskog prigušenja; simulacija a)  $\zeta_{ts} = 0.001$ , b)  $\zeta_{ts} = 0.005$  i c)  $\zeta_{ts} = 0.01$ . U ovom primjeru usvojen je nelinearan model normalne sile a parametri su preuzeti iz literature [12]. Navedeni parametri nelinearnog modela normalne sile kontakta uz smanjeno neuravnoteženje rotora  $e_d = 1.8 \cdot 10^{-5}$  m dovelo je do stabilnog odziv rotora (slika 4.23) pri koeficijentu trenja  $\mu = 0.2$  što ranije nije bio slučaj. Ostali podaci vezani uz ovaj primjer, a sukladno objašnjenju u poglavlju 3.2.2., navedeni su u Tablici 4.3. Podaci o elektromotornom pogonu dani su u tablici 5.3 pri opisu pogonskog sustava. Na slici 4.24 prikazan je odziv relativnog torzijskog kuta između motora i diska

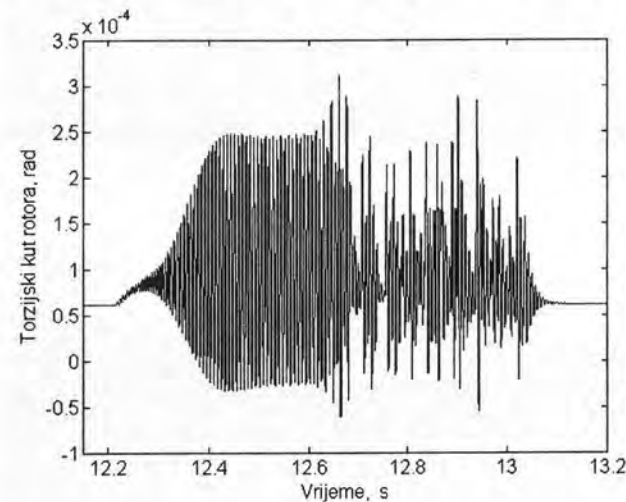
Tablica 4.3. Podaci o analiziranom modelu dodira rotora s fleksijski i torzijski elastičnim statorom

$k_r$ , N/m	110720	$k_s$ , N/m	$1.237 \cdot 10^6$
$k_{tr}$ , Nm/rad	1080	$k_{ts}$ , Nm/rad	$7.917 \cdot 10^3$
$m_r$ , kg	3.577	$m_s$ , kg	3.838
$J_r$ , kg·m <sup>2</sup>	$4.532 \cdot 10^{-3}$	$J_s$ , kg·m <sup>2</sup>	$2.11 \cdot 10^{-2}$
$\zeta_r$	0.015	$\zeta_s$	0.0025
$\zeta_{tr}$	0.015	$\zeta_{ts}$	$10^{-3}; 5 \cdot 10^{-3}; 10^{-2}$
$J_{ms}$ , kg·m <sup>2</sup>	$2.115 \cdot 10^{-3}$		
$k_c$ , N/m <sup>3/2</sup>	$2.4 \cdot 10^9$	$e_d$ , m	$1.6 \cdot 10^{-5}$
$\alpha$ , s/m	5	$C_r$ , m	$4 \cdot 10^{-4}$
$\mu$	0.2	$\varepsilon$ , rad/s	14.66

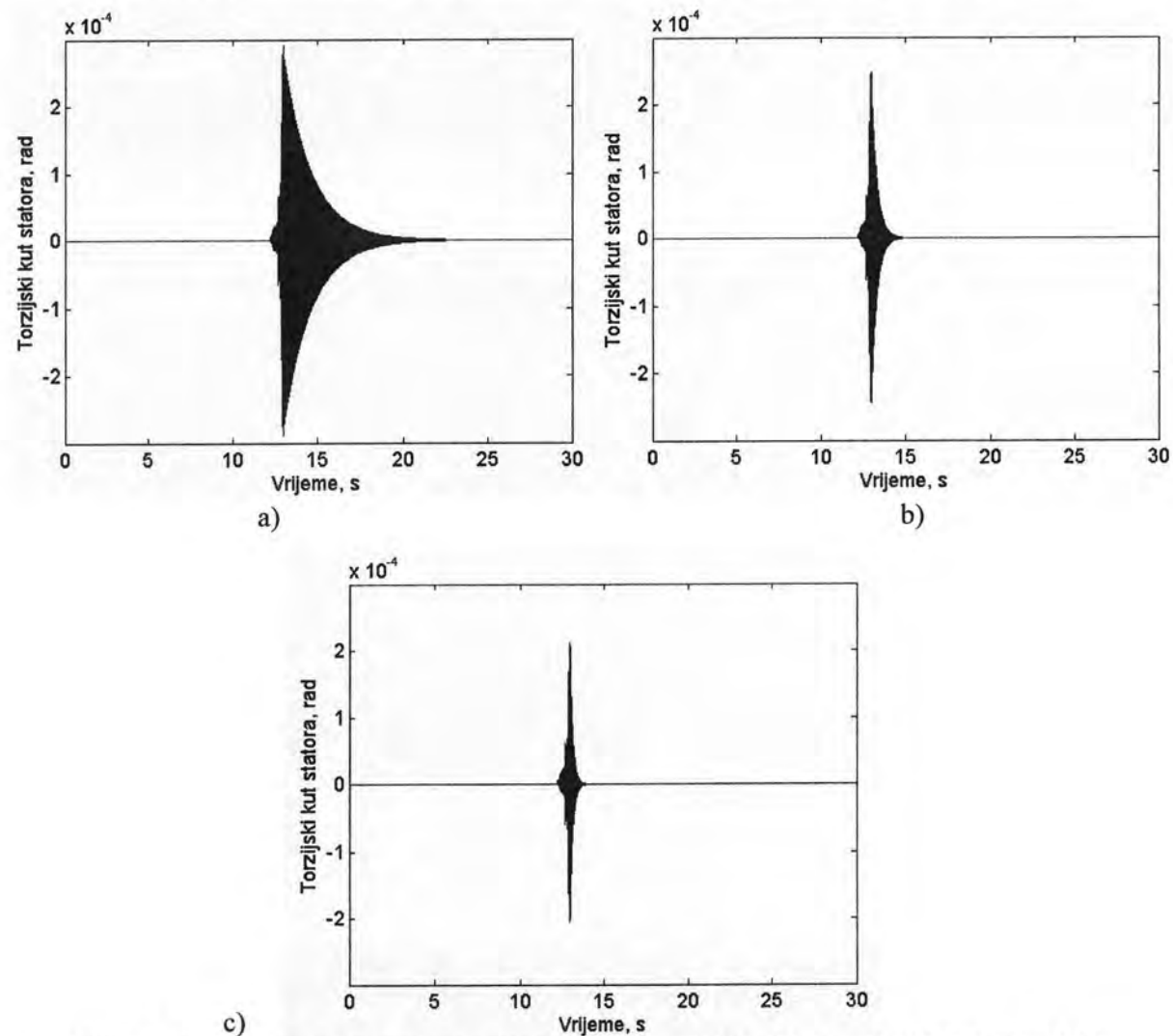


Slika 4.23. Radijalni odziv rotora i statora u horizontalnom smjeru pri ubrzavanju kroz kritičnu brzinu za model sa implementiranom torzijom

rotora tj.  $(\varphi_m - \varphi_r)$  za slučaj  $\zeta_{ts} = 5 \cdot 10^{-3}$  a ne razlikuje se bitno od ostala dva analizirana slučaja. Razlike u odzivima torzijskog kuta statora  $\varphi_s$  vidljive su na slici 4.25.



Slika 4.24. Relativni torzijski kut između motora i diska na kojem se ostvaruje kontakt

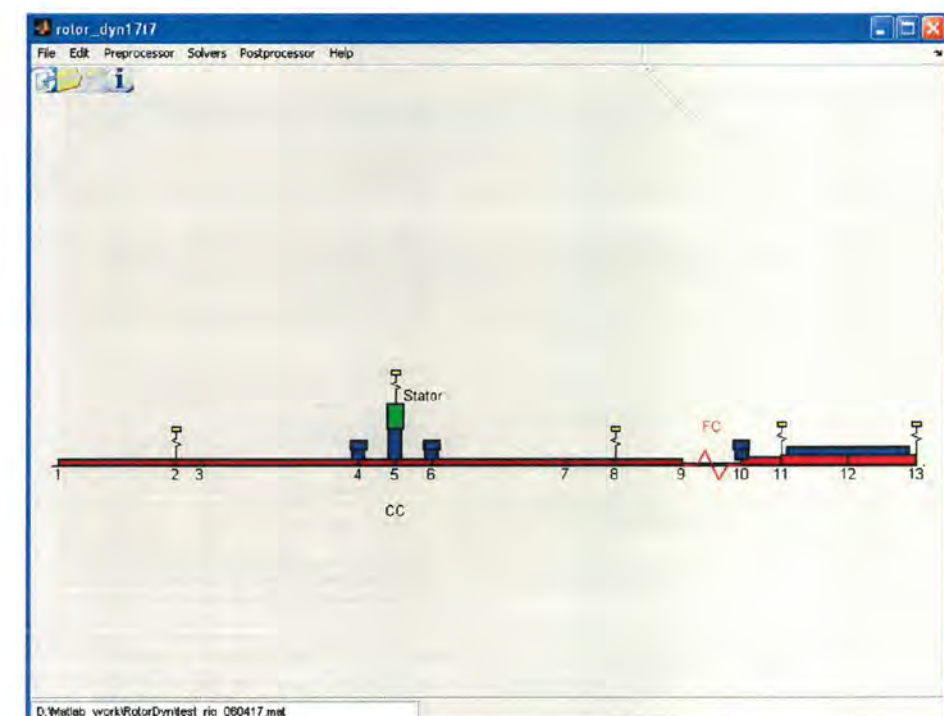


Slika 4.25. Torzijski kut statora za slučajeve: a)  $\zeta_{ts} = 0.001$ , b)  $\zeta_{ts} = 0.005$  i c)  $\zeta_{ts} = 0.01$

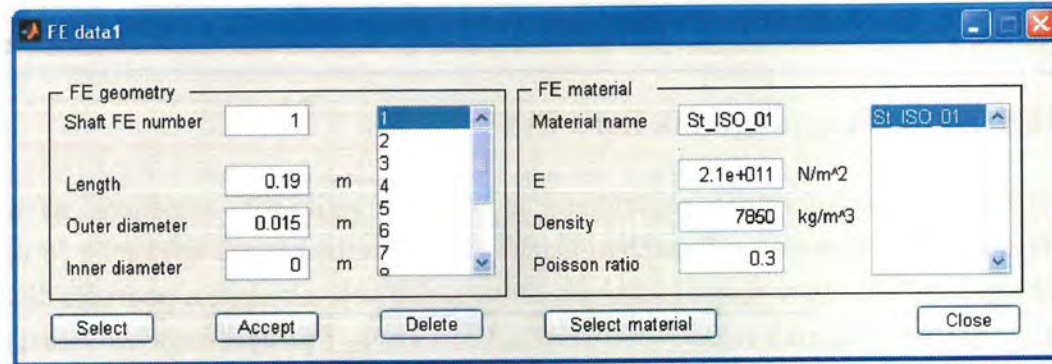
## 4.2. Analiza dinamike dodira rotora i statora primjenom metode konačnih elemenata

### 4.2.1. Opis računalnog programa RotorDyn

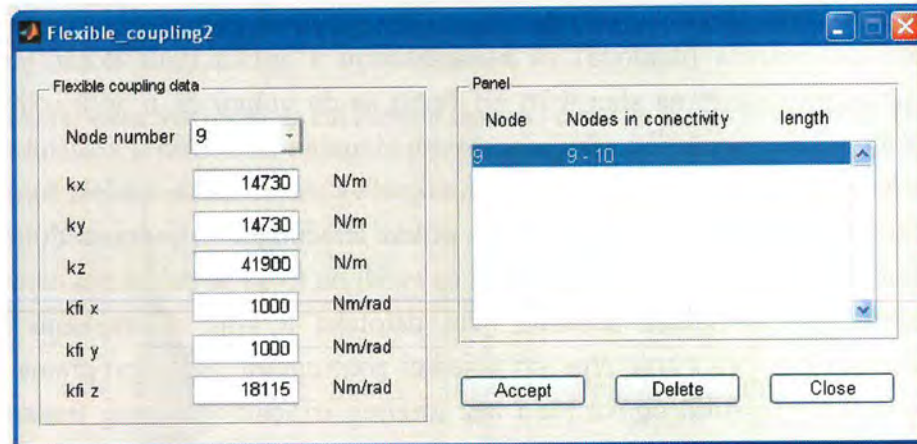
U sklopu ove disertacije napravljena je posebna aplikacija, temeljena na metodi konačnih elemenata a nazvana *RotorDyn*. Osnovna karakteristika ove aplikacije je ugodno korisničko sučelje tako da se njome mogu služiti i studenti koji tek ulaze u područje dinamike strojeva a posebno dinamike rotora. Ova aplikacija ima pre- i postprocesor za vizualizaciju rezultata proračuna. Aplikacija je napisana u Matlabu 7.0. Ovaj program pruža cjelovito sagledavanje problema dinamike rotora od vlastitih frekvencija, kritičnih brzina, giroskopskog efekta, Campbellovog dijagrama, linearnog odziva uslijed neuravnoteženja te posebno simulaciju nelinearnog odziva uslijed dodira diska rotora i statora. Slike 4.26. – 4.32. prikazuju neke od prozora (dijaloga) za komunikaciju s aplikacijom *RotorDyn*. Osnovni prozor aplikacije prikazan je na slici 4.26 pri čemu se da vidjeti da u aplikaciju integriran jednostavan 2-D preprocesor koji pruža jednostavnu vizualnu informaciju korisniku o tome da li je napravio kakvu grešku kod definicije geometrijskih karakteristika modela rotora odnosno statora. Do prozora za unos podataka odnosno prikaz izračunatih vrijednosti dolazi se preko padajućih izbornika. Princip rada s programom se svodi na to da se pritiskom naredbe *New* iz padajućeg izbornika *File* kreira posebna .mat datoteka u koju se zapisuju sve ulazne informacije o modelu rotora a koje crpe svi pojedini potprogrami poput programa za: izračun vlastitih frekvencija i vlastitih oblika (sa i bez torzije), izračuna prisilnog linearnog odziva uslijed neuravnoteženja, te izračuna nelinearnog odziva rotora i statora (sa i bez utjecaja torzije) uslijed međusobnog kontakta.



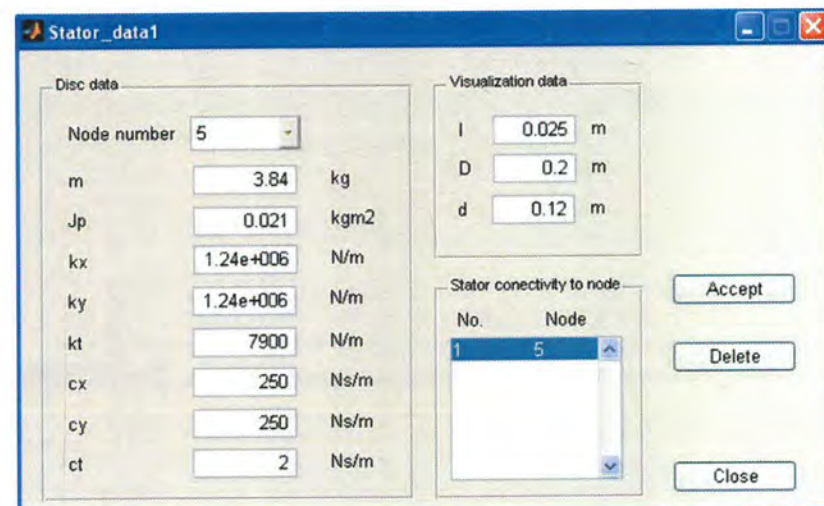
Slika 4.26. Korisničko sučelje programa RotorDyn



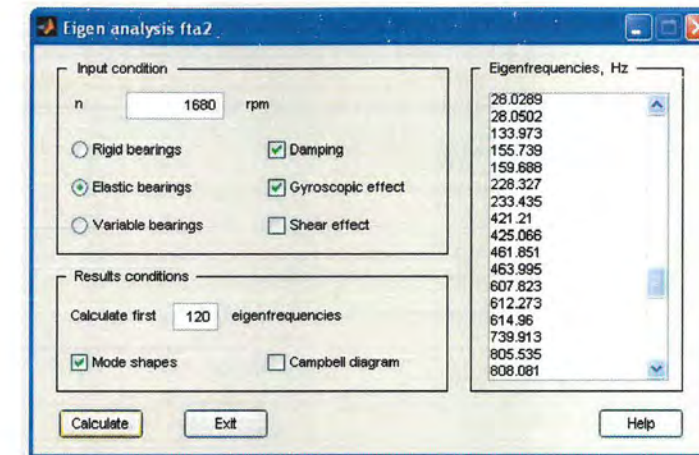
Slika 4.27. Korisničko sučelje za upisivanje podataka o grednim konačnim elementima



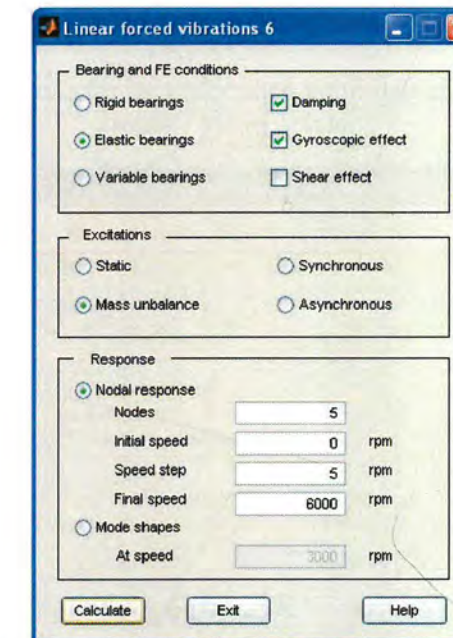
Slika 4.28. Korisničko sučelje za upisivanje podataka o elastičnim spojkama



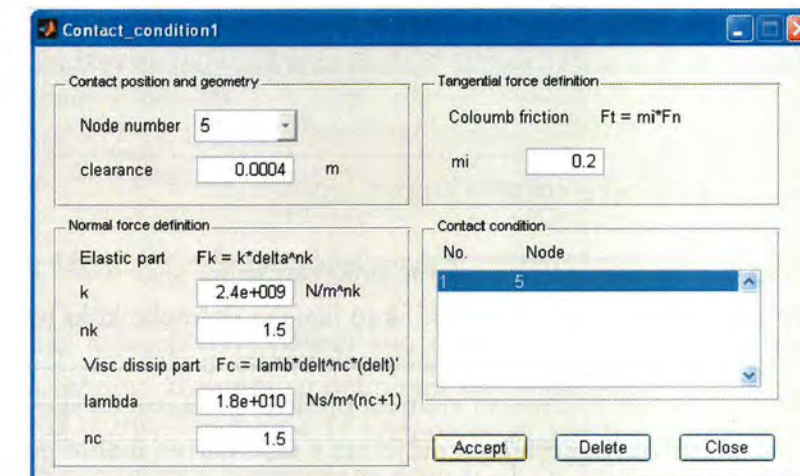
Slika 4.29. Korisničko sučelje za upisivanje podataka o statoru



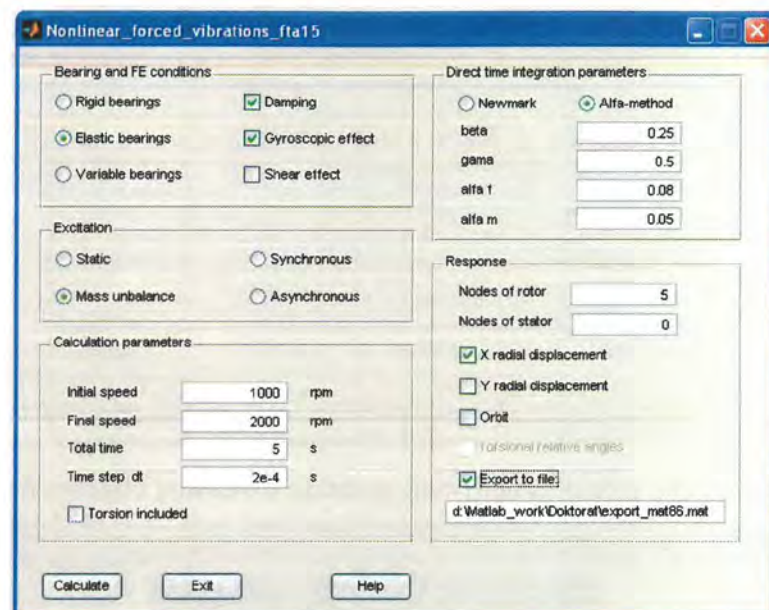
Slika 4.30. Korisničko sučelje za upisivanje podataka o traženim vlastitim frekvencijama



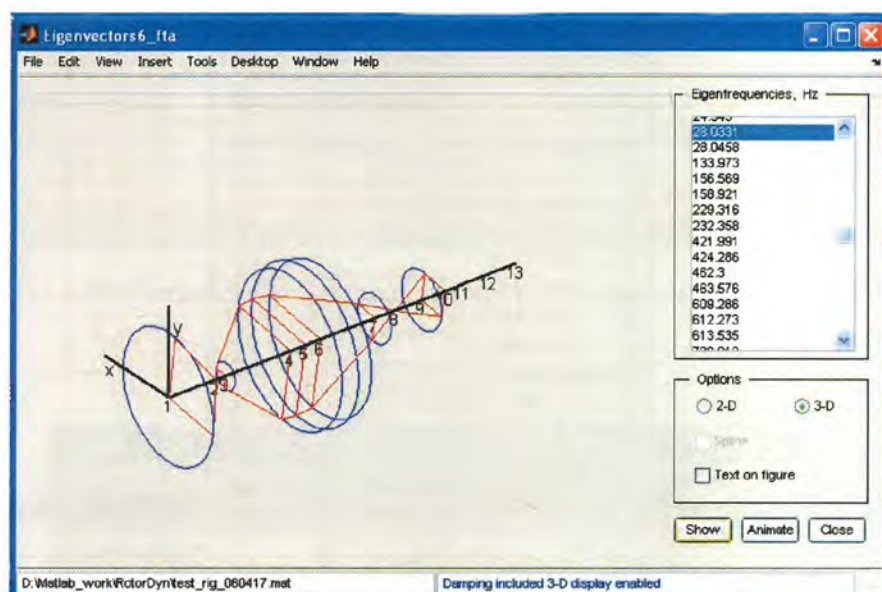
Slika 4.31. Korisničko sučelje za definiciju parametara pri traženju linearnog odziva rotora



Slika 4.32. Korisničko sučelje dijaloga za upisivanje podataka o kontaktu



Slika 4.33. Korisničko sučelje za definiciju parametara pri određivanju nelinearnog odziva uslijed kontakta rotora i statora



Slika 4.34. Korisničko sučelje dijaloga za prikaz vlastitih vektora

#### 4.2.2. Opis KE modela sustava rotor – stator

Analizirani model sustava rotor – stator prikazan je na slici 4.26. Podaci vezani uz karakteristike modela prikazani su na slici 4.35. kao ispis iz datoteke koju je stvorio program *RotorDyn*. Iz slike 4.35 može se vidjeti da konačno-elementni model ima 12 grednih konačnih elemenata i 13 čvorova od kojih 9. konačni element predstavlja elastičnu spojku te je u popisu grednih konačnih elemenata uzet sa realnom duljinom i zanemarivo malim promjerom. Iako u stvari postoji 5 krutih diskova, na slici 4.35 opisano ih je 8. To je zato što su mjerni diskovi radi specifičnosti spajanja na osovinu preko ljuskastih spojki izrađeni uži na unutarnjem

```

=====
Rotor model filename: test_rig_060417.mat
Time: 18-Apr-2006 07:40:11
=====
% Material properties
      Name      Em      ro      ni
=====
St_ISO_01  2.1e+011  7850  0.3

% Shaft FE elements properties
id      l (m)      D (m)      d (m)      E (N/m^2)  ro (kg/m^3)  ni
=====
1       0.19      0.015      0      2.1e+011  7850  0.3
2       0.04      0.015      0      2.1e+011  7850  0.3
3       0.26      0.017      0      2.1e+011  7850  0.3
4       0.06      0.017      0      2.1e+011  7850  0.3
5       0.06      0.017      0      2.1e+011  7850  0.3
6       0.22      0.017      0      2.1e+011  7850  0.3
7       0.08      0.015      0      2.1e+011  7850  0.3
8       0.11      0.015      0      2.1e+011  7850  0.3
9       0.096     0.0001     0      2.1e+011  7850  0.3
10      0.065     0.024      0      2.1e+011  7850  0.3
11      0.11      0.03       0      2.1e+011  7850  0.3
12      0.11      0.03       0      2.1e+011  7850  0.3

% Rigid discs properties
id      node      l (m)      D (m)      d (m)  ro (kg/m^3)
=====
1       4       0.025     0.08      0.05  7850
2       4       0.02     0.05      0.017 7850
3       5       0.02     0.12      0.017 7850
4       6       0.025     0.08      0.05  7850
5       6       0.02     0.05      0.017 7850
6       10      0.025     0.077     0.05  7850
7       10      0.02     0.05      0.017 7850
8       12      0.2       0.0556    0.03  7850

% Bearing properties
id      node  kxx (N/m)  kyy (N/m)  kxy (N/m)  kyx (N/m)  cxx (N/m)  cyy (N/m)  cxy (N/m)  cyx (N/m)
=====
1       2     1e+010    1e+010     0          0     1e+006    1e+006     0          0
2       8     1e+010    1e+010     0          0     1e+006    1e+006     0          0
3       11    1e+010    1e+010     0          0     1e+006    1e+006     0          0
4       13    1e+010    1e+010     0          0     1e+006    1e+006     0          0

% Flexible coupling properties
node  kx (N/m)  ky (N/m)  kz (N/m)  kfix (Nm/rad)  kfiy (Nm/rad)  kfiz (Nm/rad)
=====
9     14730    14730     41900     1000           1000           18115

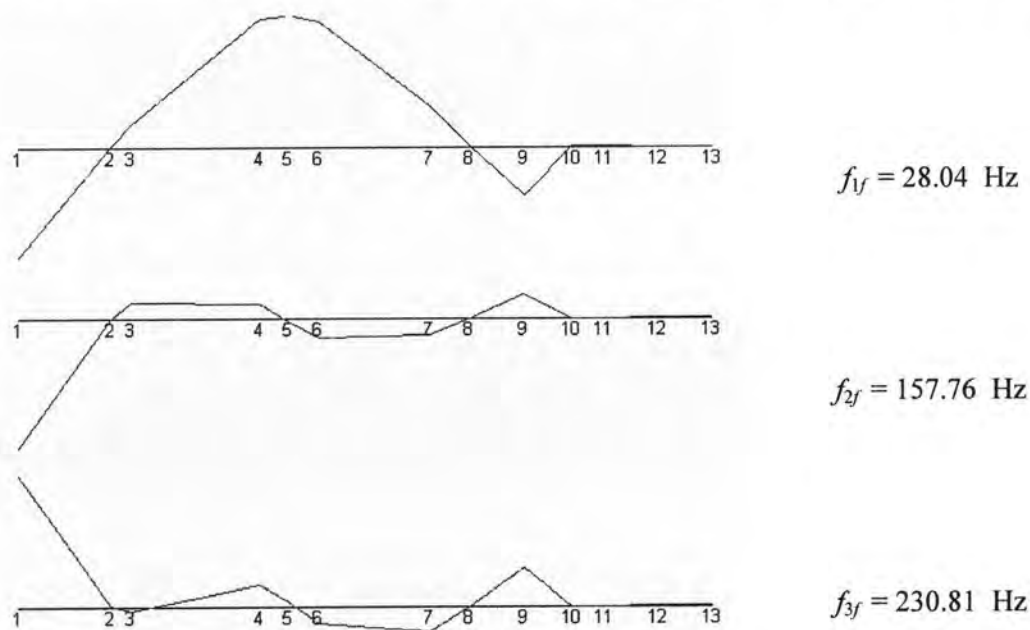
```

Slika 4.35. Ispis podataka o analiziranom rotoru iz baze programa RotorDyn

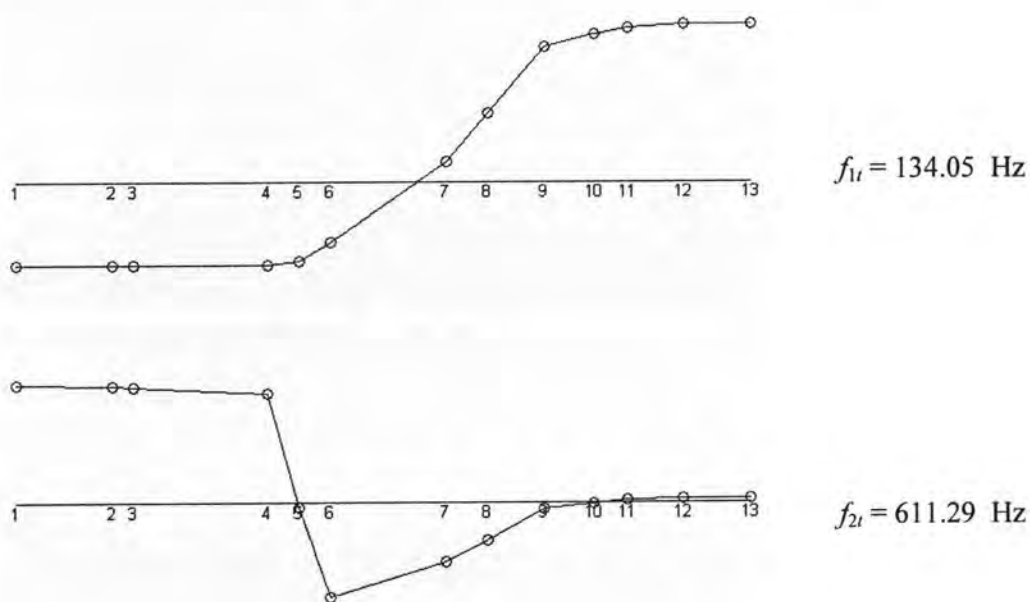
dijelu te ih je bilo jednostavnije opisati kao dva zasebna diska ali u istom čvoru. Iako je spomenuto da su ležajevi kruti oni su definirani kao elastični samo sa velikim koeficijentom krutosti. Kao što je vidljivo sa slike 4.35 pretpostavljeno je radi jednostavnosti da su ležajevi izotropni. Poprečno-spregnuti članovi nisu uzeti u obzir. Prigušenje u ležajevima je također uzeto u obzir. Krutosti spojke su definirane u torzijskom smislu na osnovi tvorničkih podataka

dok su ostale vrijednosti dobivene eksperimentalno. Podaci o statoru odnosno statorskom prstenu vidljivi su iz slike 4.29., dok su isto tako podaci o parametrima kontakta vidljivi iz slike 4.32. pri čemu će se posebno naglašavati odstupanja od navedenih parametara. Podaci o nelinearnoj krutosti i prigušenju preuzeti su iz literature [12].

Analiza vlastitih frekvencija pomoću potprograma *Eigen\_Analysis\_fla* te *Eigenvectors* izračunala je vlastite frekvencije i pripadne vlastite oblike vibriranja tzv. modove kako to prikazuju slike 4.36. i 4.37. Fokusiranjem na frekventno područje 0-200 Hz otpadaju 3, fleksijska i druga torzijska frekvencija. Slika 4.38 prikazuje *Campbellov* dijagram za

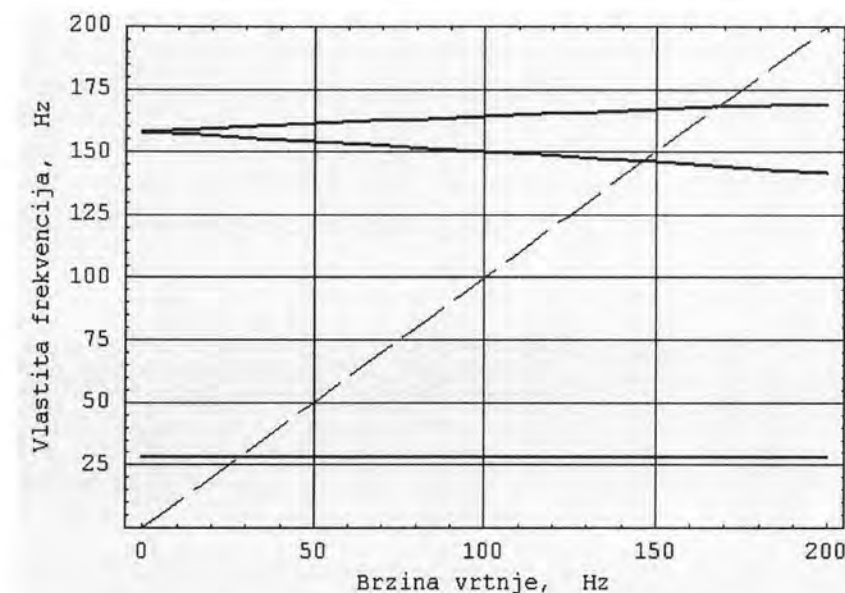


Slika 4.36. Fleksijski vlastiti oblici vibriranja KE modela rotora



Slika 4.37. Torzijski vlastiti oblici vibriranja KE modela rotora

frekventno područje upravo 0-200 Hz iz koje se da vidjeti da utjecaj giroskopskog efekta na prvu vlastitu frekvenciju (fleksijsku) zanemariv dok je na drugu primjetan. Kritične brzine vrtnje uslijed uzbude prvim harmonikom navedene su u tablici 4.4.



Slika 4.38. Campbellov dijagram

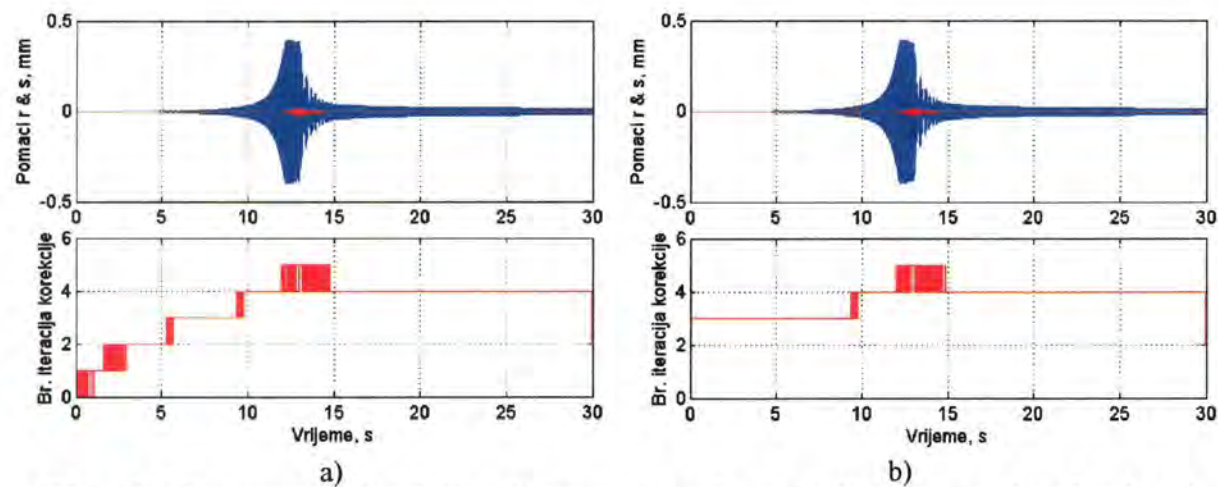
Tablica 4.4. Kritične brzine vrtnje KE modela rotora

Br,	Kritična brzina, Hz
1	28.03
2	28.05
3	146.26
4	167.80

#### 4.2.3. Komparativna analiza dodira rotora sa elastičnim statorom bez i sa utjecajem torzije

U ovom primjeru provedena je analiza utjecaja torzije na ukupan odziv sustava rotor-stator pri ubrzanju rotora od 0 – 4200 min<sup>-1</sup> u vremenu od 30 s. Za model normalne sile uzet je Nelinearni model sa krutošću  $k_c = 2.4 \cdot 10^9 \text{ N/m}$  i  $\alpha = 5 \text{ s/m}$ . Zračnost između rotora i statora je  $C_r = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Koeficijent trenja između dodirnih ploha rotora i statorskog prstena za sve provedene simulacije je bio  $\mu = 0.2$ , dok je primijenjeni vremenski korak metode direktne integracije bio  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ . Konačno-elementni model sustava rotor-stator, bez utjecaja torzije, imao je 54 stupnjeva slobode (52 od rotora i 2 od statorskog prstena) dok je isti model sa utjecajem torzije imao 68 stupnjeva slobode (65 rotorskih i 3 statorska). U svim simulacijama bila je primijenjena Generalizirana  $\alpha$  metoda sa parametrima  $\alpha_f = 0.08$  i

$\alpha_m = 0.05$ . Pošto se radi o metodi koja izračunava odziv u dva koraka; tzv. predikciji i korekciji za vrijeme svake simulacije zapisivan je ostvareni broj korekcija po svakom vremenskom koraku. Navedeni parametar bio je važan kao indikator konvergencije rješavača te je iz praktičkih razloga bio ograničen sa 100 iteracija korekcije po svakom vremenskom koraku. Ukoliko bi došlo do ostvarenja maksimalnog broja iteracija korekcije to je trebalo ponoviti simulaciju sa finijim vremenskim korakom. Slike 4.39.a) i 4.39.b) prikazuju broj ostvarenih korekcija po pojedinom vremenskom koraku za slučajeve bez i sa utjecajem torzije na simulaciju prolaska rotora kroz kritičnu brzinu vrtnje pri ubrzavanju. Iz slika se može vidjeti da je maksimalan broj iteracija korekcije za obje numeričke simulacije jednak 5 i to se očekivano događa pri kontaktu rotora s statorom i neposredno nakon njega pri istitravanju tranzijenta.

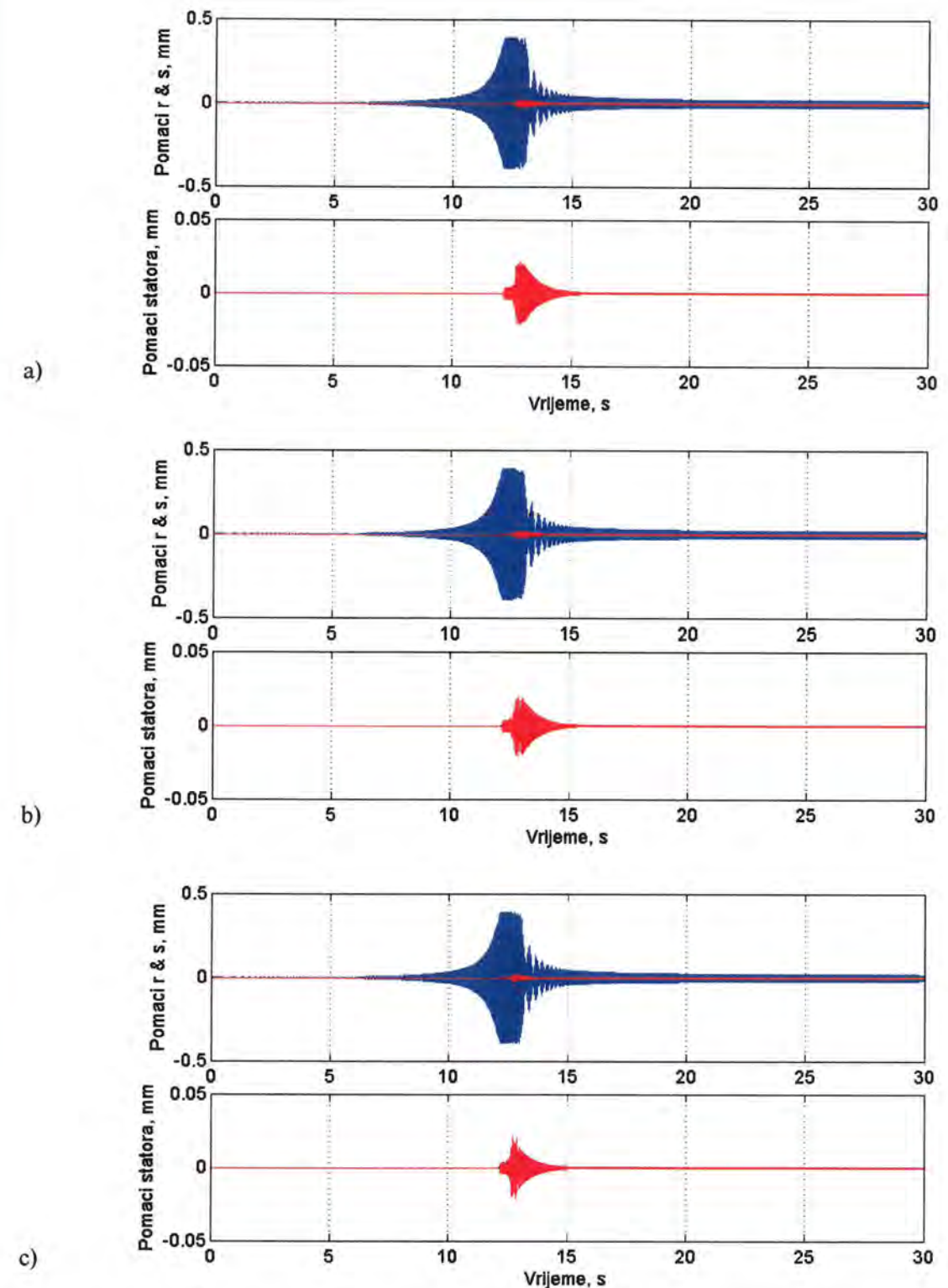


**Slika 4.39.** Broj ostvarenih korekcija nelinearnog rješavača po pojedinom vremenskom koraku pri simulaciji prolaska rotora kroz kritičnu brzinu vrtnje uz kontakt sa statorom za slučajeve: a) bez torzije i b) sa utjecajem torzije

U nastavku će biti navedeni i međusobno komparirani rezultati tri simulacije prolaska rotora kroz kritičnu brzinu vrtnje pri ubrzavanju i to. Prve dvije simulacije približno odgovaraju parametrima eksperimentalnog modela analiziranog u poglavlju 6, dok su parametri u trećoj simulaciji izmijenjeni u smislu postavljanja vlastite torzijske frekvencije rotora u područje neposredno iznad fleksijske vlastite frekvencije tako da se naglasi pobuđivanje torzijskih vibracija. Specifičnosti svake simulacije su slijedeće:

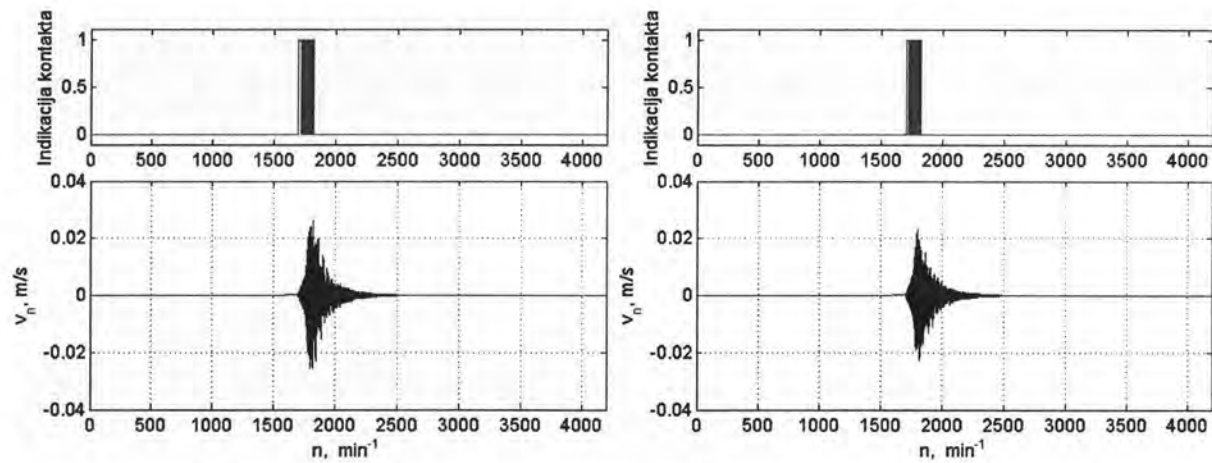
- Simulacija prolaska kroz kritičnu brzinu vrtnje pri ubrzavanju rotora bez utjecaja torzije,  $f_{1f} = 28.04$ , Hz
- Simulacija prolaska kroz kritičnu brzinu vrtnje pri ubrzavanju rotora sa utjecajem torzije,  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 134.05$  Hz
- Simulacija prolaska kroz kritičnu brzinu vrtnje pri ubrzavanju rotora sa utjecajem torzije,  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 28.5$  Hz

Slika 4.40 tako prikazuje usporedni prikaz odziva 4. čvora rotora (pozicija mjernog diska) i statora u obliku poprečnih pomaka u horizontalnom smjeru, za navedene tri simulacije. Može se vidjeti da nema bitnih razlika u odzivu rotora tek male razlike u obliku odziva statora.



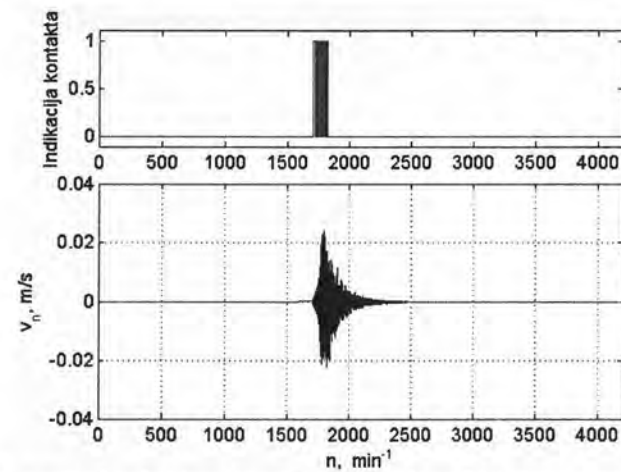
**Slika 4.40.** Odziv 4. čvora rotora i statora u horizontalnom smjeru u vremenskoj domeni za simulacije: a)  $f_{1f} = 28.04$ , Hz, b)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 134.05$  Hz i c)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 28.5$  Hz

Na slici 4.41. mogu se vidjeti relativne brzine između rotora i statora projicirane na normalu sa indikacijom kontakta. One su također međusobno jako slične što je i razumljivo pošto se radi o laganom i kratkom dodiru. Vidljive su tek nešto veći intenziteti kod simulacije a) bez torzije, u odnosu na ostala dva slučaja. To je zbog toga što se sva energija unesena u kontakt troši na poprečne pomake rotora odnosno statora, dok se u ostala dva slučaja dio energije transformira u torzijske rotacijske pomake.



a)

b)

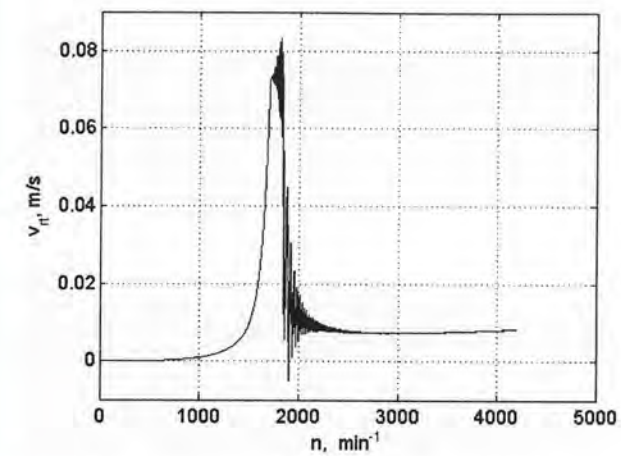


c)

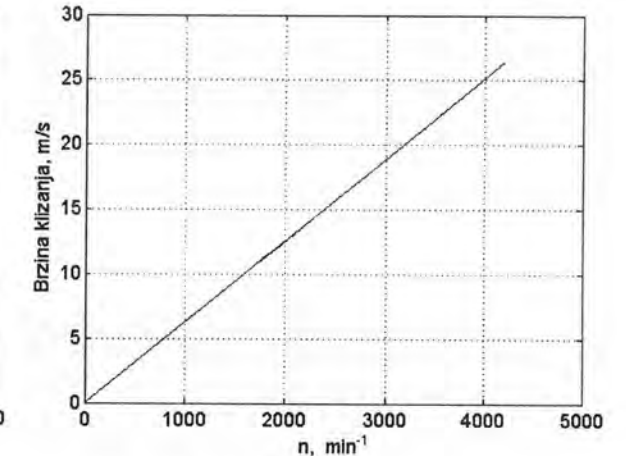
Slika 4.41. Relativne normalne brzine između rotora (čvor 5) i statora sa indikacijom kontakta:

a)  $f_{1f} = 28.04$ , Hz, b)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 134.05$  Hz i c)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 28.5$  Hz

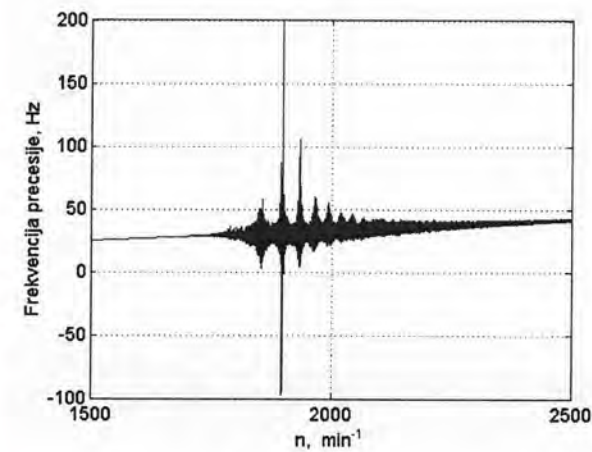
Tangencijalne brzine središta kontaktnog diska (čvor 5) u sva tri analizirana slučaja zbog izvođenja napredne precesije imaju pretežno pozitivne vrijednosti i nebitno se razlikuju od simulacije do simulacije stoga se na slici 4.42. navodi slučaj simulacije b). Paralelno na slici 4.43. naveden je odgovarajući (simulacija b) prikaz relativnih brzina klizanja između periferne točke rotora i najbliže točke na statoru (odnosno dodirne točke ukoliko je ostvaren dodir). Sa slike 4.43. vidljiva je dominantna komponenta obodne brzine uslijed rotacije rotora dok je komponenta brzine uslijed precesije rotora zanemariva. Slika 4.44 nadalje prikazuje usporedni prikaz frekvencije precesije rotora, a slika 4.45 usporedni prikaz normalnih sila dodira, za sve tri simulacije.



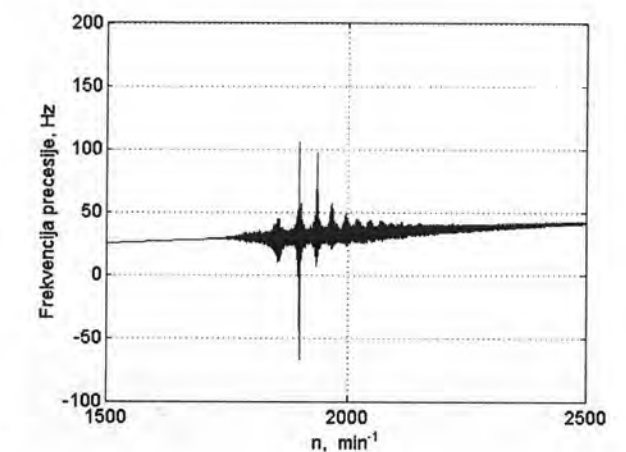
Slika 4.42. Tangencijalna brzina središta diska rotora (čvor 5) uslijed precesije, simulacija b)



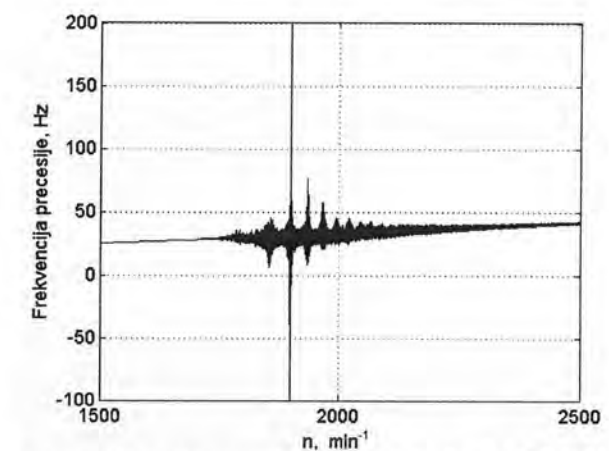
Slika 4.43. Relativna brzina klizanja između najbližih točaka rotora i statora



a)



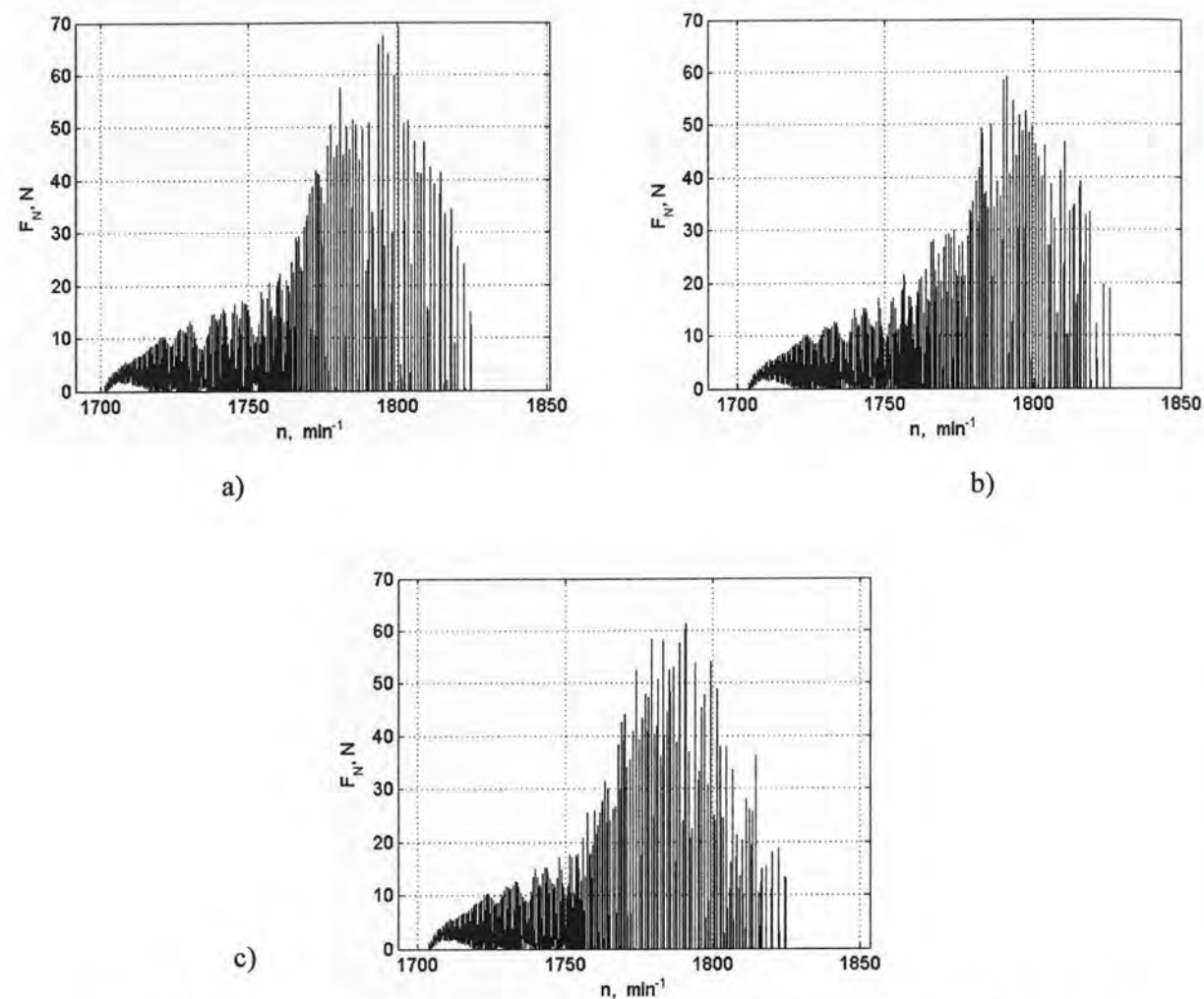
b)



c)

Slika 4.44. Frekvencija precesije rotora za simulacije: a)  $f_{1f} = 28.04$ , Hz, b)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 134.05$  Hz i c)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 28.5$  Hz

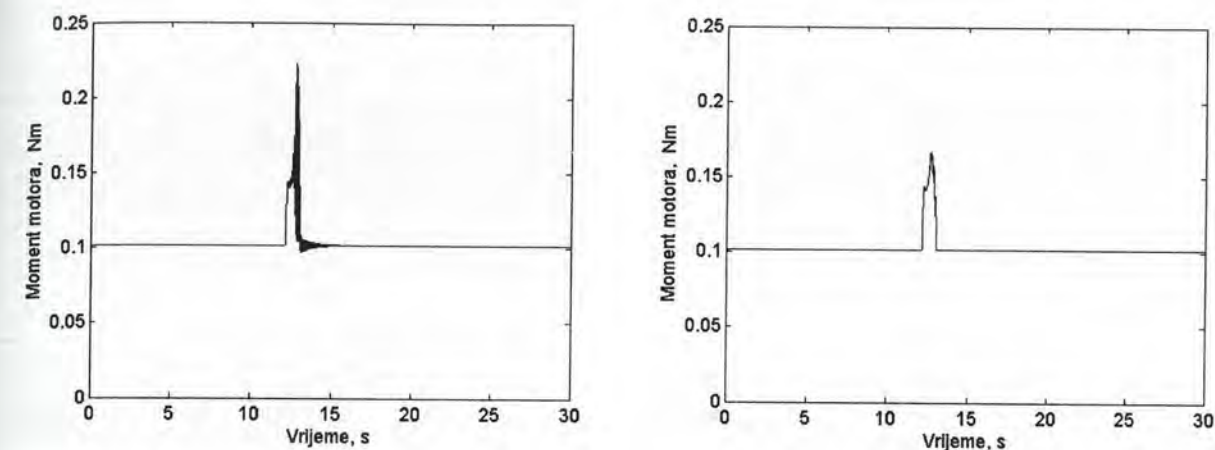




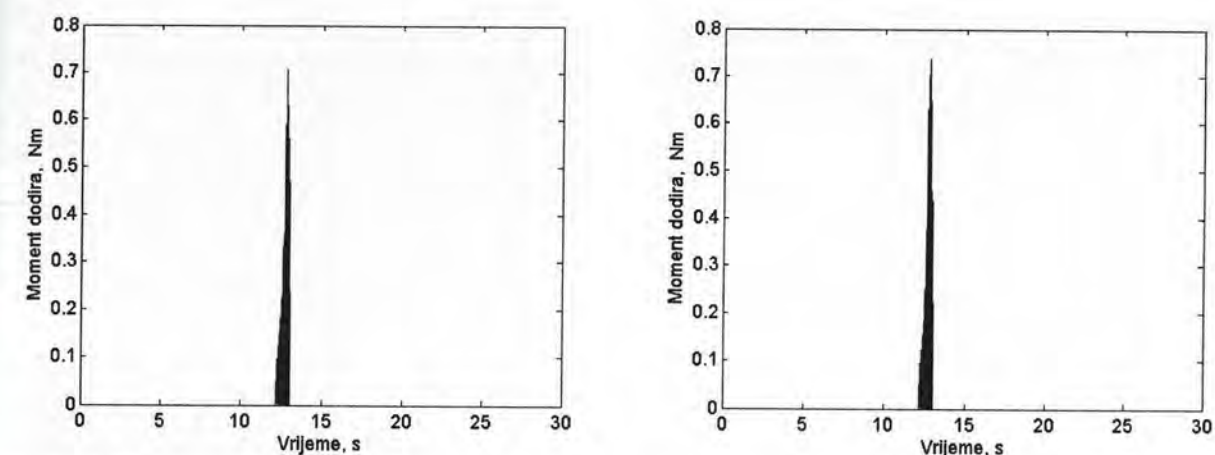
Slika 4.45. Normalne sile dodira za simulacije: a)  $f_{1f} = 28.04$ , Hz, b)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 134.05$  Hz i c)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 28.5$  Hz

Iz usporedbe normalnih sila prikazanih na slici 4.45. za sve tri simulacije može se reći da su maksimalni intenziteti sila kod prve simulacije (bez torzije) veći u odnosu na intenzitete ostalih dviju simulacija (sa torzijom). Pri usporedbi simulacije b) i c) može se pak reći da vidljiva manja razlika samo u kvalitativnom smislu dok su intenziteti približno jednaki. Zaključno sa slikom 4.45. završava usporedni prikaz tri simulacije i nastavlja se usporedba dviju simulacija sa implementiranom torzijom.

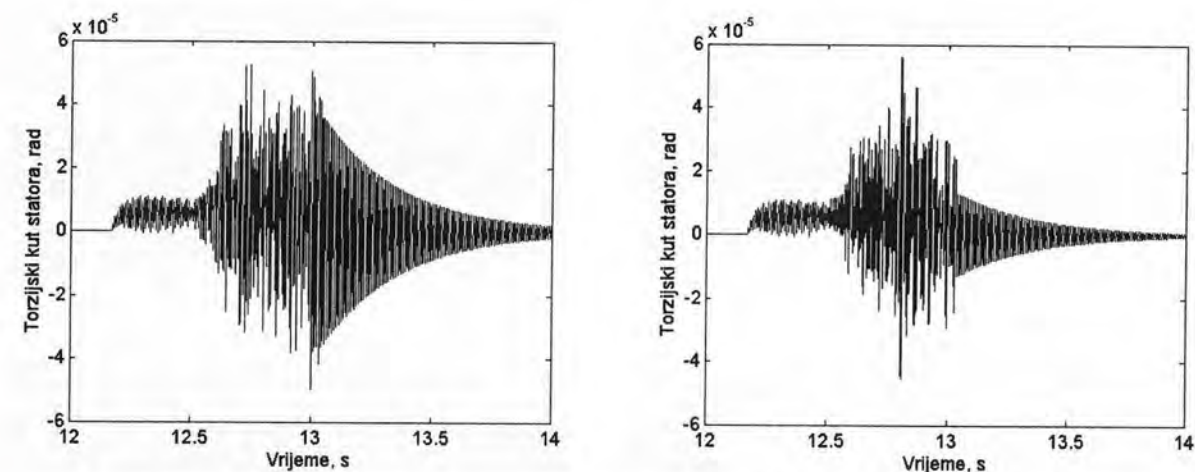
U nastavku će biti prikazani veličine koje se moguće analizirati samo sa implementiranim torzijskim kutnim pomacima. Tako je dana usporedba angažiranih momenata motora (slika 4.46), momenata dodira rotora i statora (slika 4.47), torzijskih kutova statora (slika 4.48) i torzijskih kutova rotora (slika 4.49). Veće razlike između rezultata pojedinih simulacija uočljive su na slici 4.46. (moment motora), te slici 4.49. (torzijski kut rotora), dok je razlika na prikazima torzijskog kuta statora (slika 4.48) samo kvalitativne prirode.



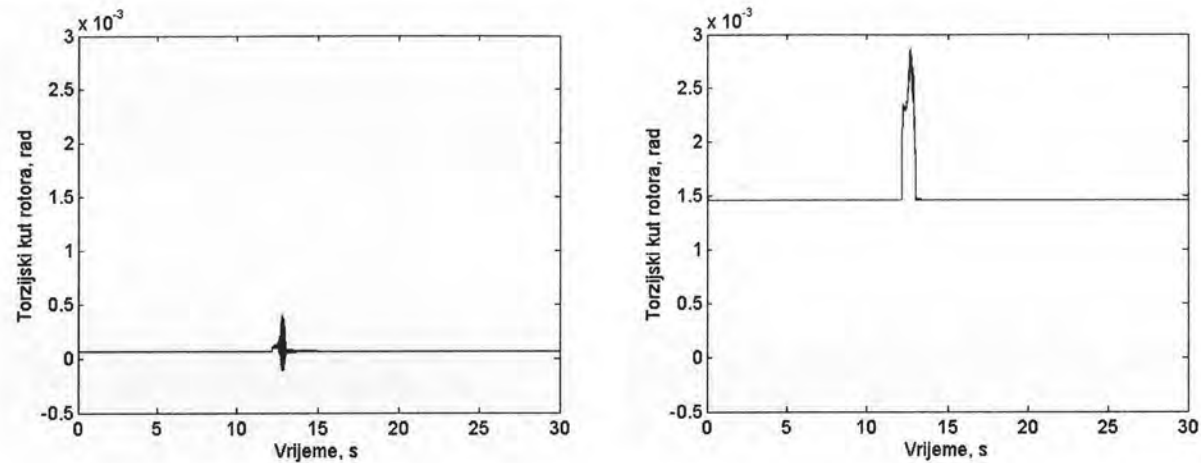
Slika 4.46. Moment motora za simulacije: b)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 134.05$  Hz i c)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 28.5$  Hz



Slika 4.47. Moment dodira između rotora i statora za simulacije: b)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 134.05$  Hz i c)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 28.5$  Hz

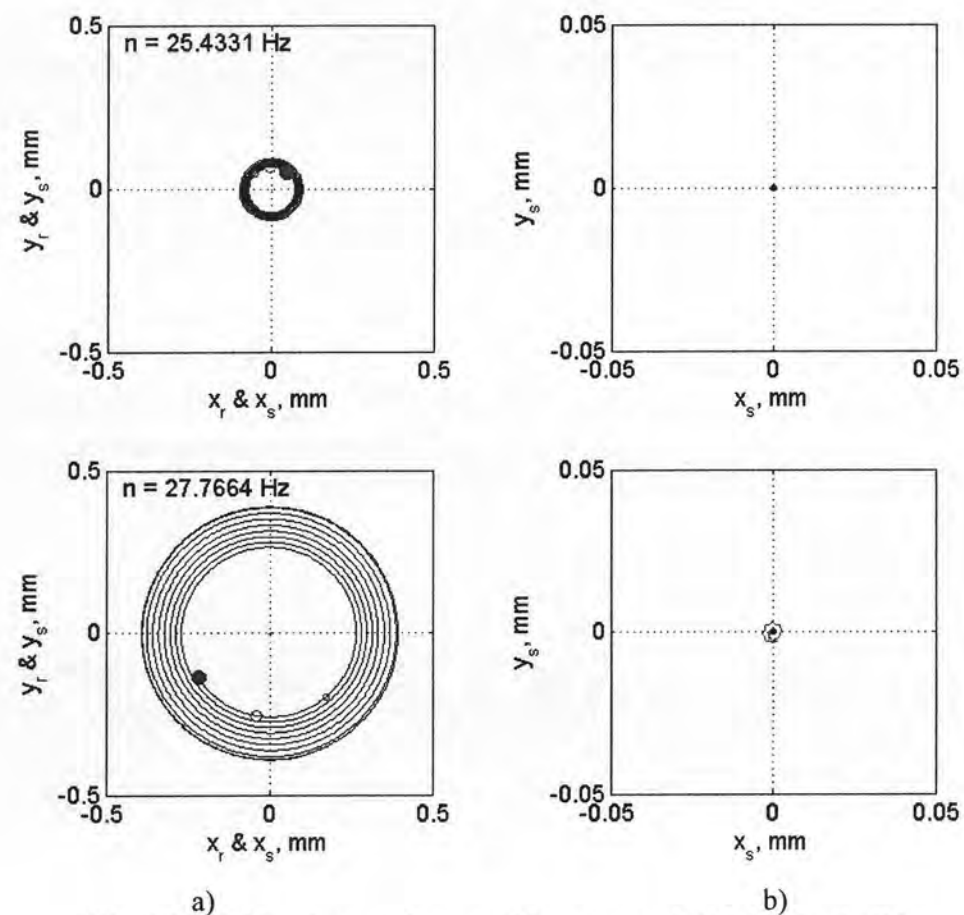


Slika 4.48. Torzijski kut statora za simulacije: b)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 134.05$  Hz i c)  $f_{1f} = 28.04$  Hz,  $f_{1t} = 28.5$  Hz

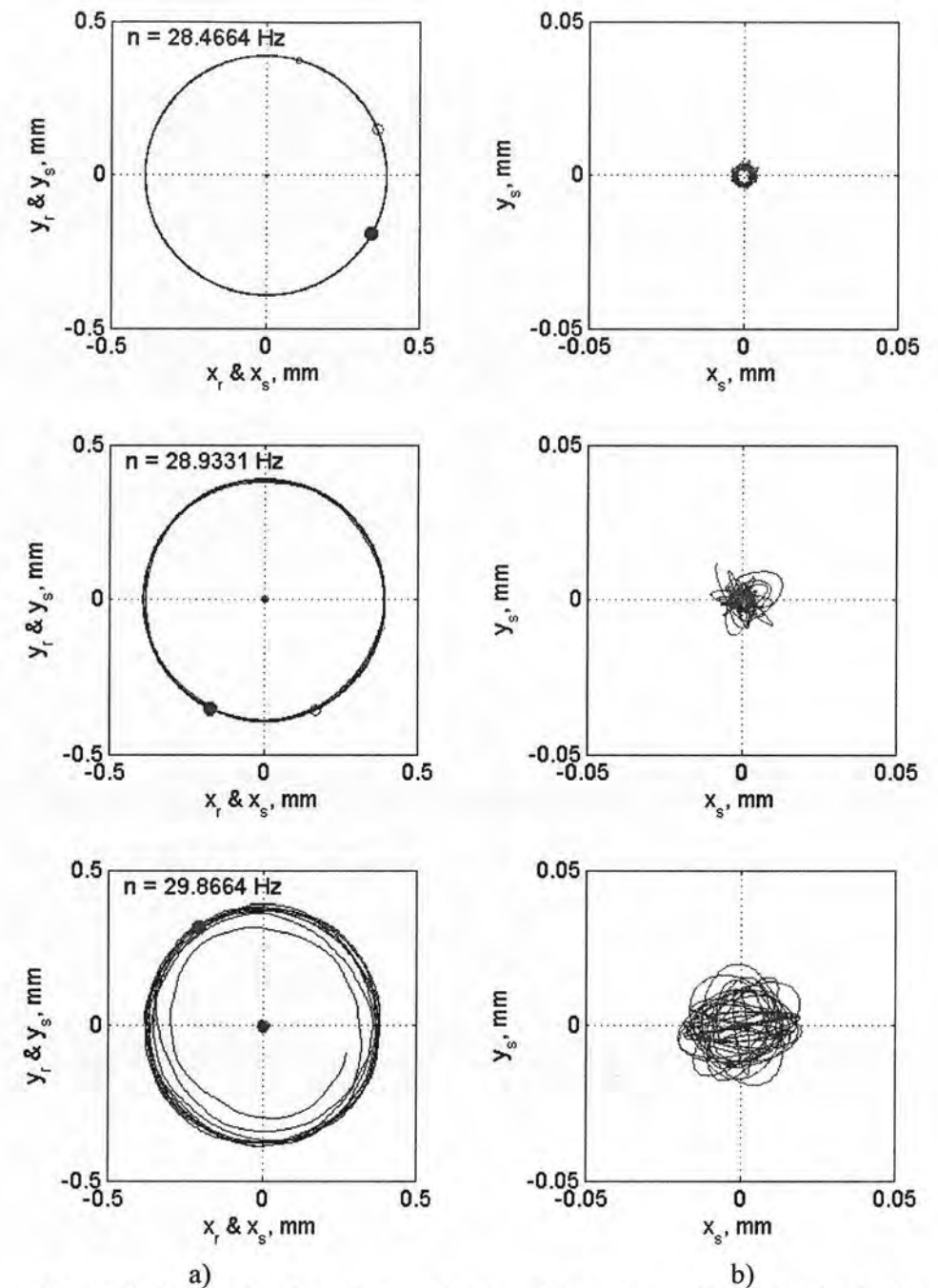


Slika 4.49. Torzijski kut rotora za simulacije: b)  $f_{lf} = 28.04$  Hz,  $f_{lr} = 134.05$  Hz i c)  $f_{lf} = 28.04$  Hz,  $f_{lr} = 28.5$  Hz

Radi usporedbe s kasnije razmatranim rezultatima eksperimentalne analize u nastavku je prikazano nekoliko orbita rotora i statora. Orbite se odnose na simulaciju b) sa uključenom torzijom, a parametri odgovaraju eksperimentalnom modelu sustava rotor-stator. Prikazane orbite odnose se redom za podkritično područje bez uspostave dodira, ulazak u dodir rotora i statora nekoliko situacija tijekom kontakta te izlazak iz kontakta.



Slika 4.50. Orbite a) rotora i statora, b) statora, za FEM simulaciju (b)



Slika 4.50. Nastavak orbite a) rotora i statora, b) statora, za FEM simulaciju (b)

#### 4.2.4. Analiza numeričkih simulacija otpadanja lopatica rotora

Ova simulacija pokušava oponašati uvjete koji se događaju kad turbini (parnoj ili plinskoj) iz određenih razloga otpadne jedna ili više lopatica te uslijed toga dođe do naglog porasta neuravnoteženja. Parametri su preuzeti od prethodno analiziranog primjera. Eksperimentalna analiza otpadanja lopaticice nije izvršena zbog nemogućnosti izazivanja takve pobude, a i zbog opasnosti od oštećenja koja pritom mogu nastati. Pretpostavka je da će zbog gubitka dijela mase doći do porasta nivoa vibracija na stacionarnim dijelovima turbine (ležajevi osovine) te da će se zbog toga aktivirati alarm koji će pokrenuti proceduru

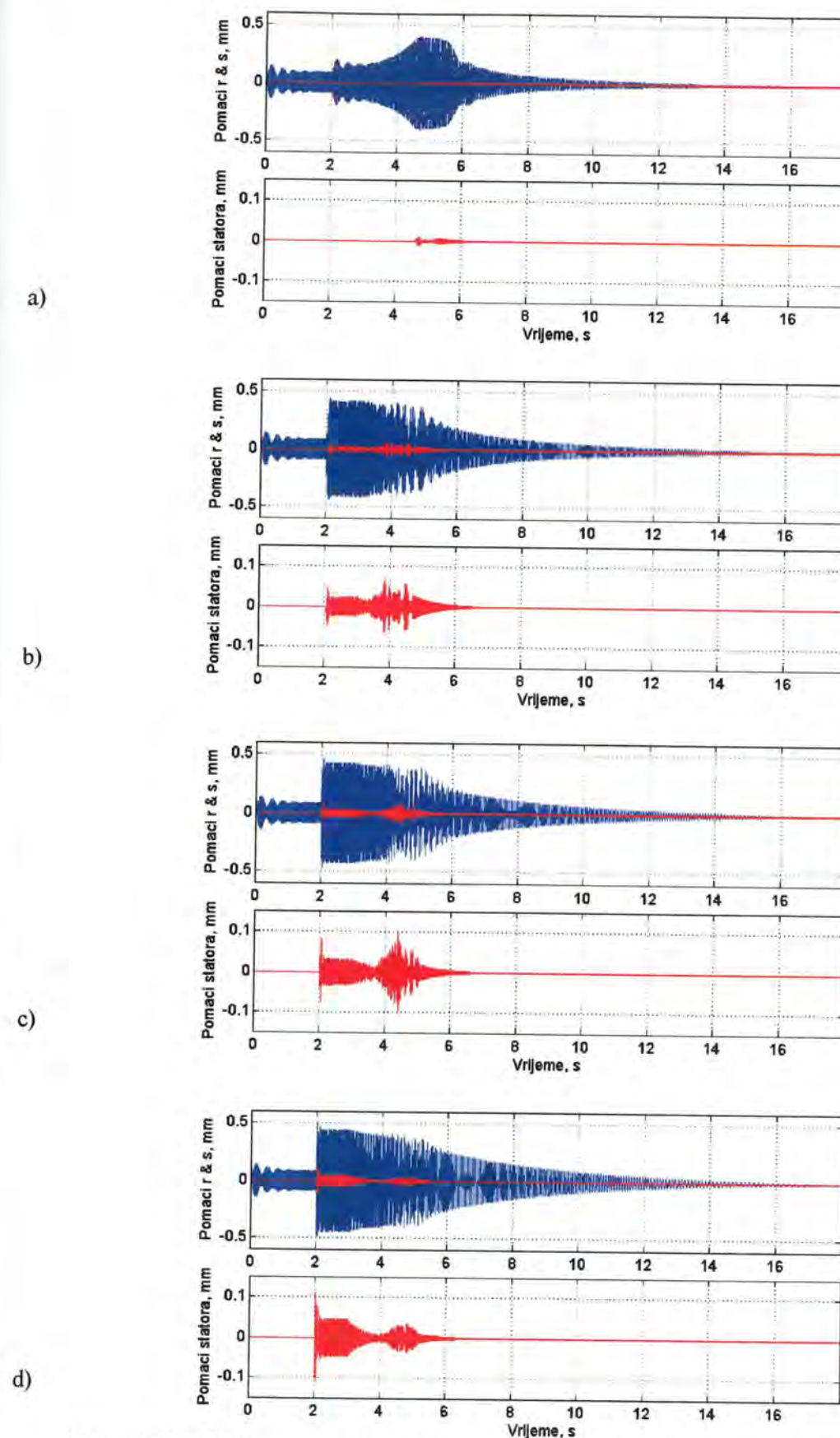
zaustavljanja turbine. Slijedeća pretpostavka je da turbina radi u natkritičnom području sa brzinom vrtnje  $n = 31$  Hz što je u odnosu na kritičnu brzinu vrtnje od  $n_{kr} = 28$ , Hz više za 10.7 % što granično prihvatljiv uvjet u praksi.

Za sve simulacije vrijede slijedeće vremenske sekvence: 1)  $t_1 = 2$  s – istitravanje uslijed početnih uvjeta, 2)  $t_2 = 1$  s – vrijeme od trenutka otpadanja lopatice do trenutka aktiviranja alarma (isključivanja pogona), 3)  $t_3 = 15$  s – zaustavljanje rotora uz prolazak kroz kritičnu brzinu vrtnje sa isključenim pogonom.

U ovom primjeru analizira se utjecaj mase otpadnute lopatice uz koeficijent trenja iz prethodnog primjera  $\mu = 0.2$ . Pretpostavka je da se otpadanjem lopatice stvara višak mase neuravnoteženja  $m_{add}$  na faznom kutu  $\phi = 0^\circ$  koji se poklapa sa faznim kutom inicijalne mase neuravnoteženja  $m_{0d} = 1.3 \cdot 10^{-3}$  kg na radijusu 0.05 m. Radi jednostavnosti uzeto je da je mjesto otpadanja upravo čvor 5 konačno-elementnog modela što odgovara poziciji glavnog diska koji može doći u dodir sa statorskim prstenom. Kod turbine izgledno mjesto kontakta rotora sa statorom je međustupanjaska brtva koja je malo pomaknuta u odnosu na mjesto otpadanja lopatice. Promjena koeficijenta trenja  $\mu$  tijekom simulacije nije uzeta u obzir. U ovom su primjeru za razliku od prošlog uzeti dodatni otpori kako bi se rotor nakon isključenja pogona počeo zaustavljati. Tako su uzeti otpori uslijed trenja u kotrljajućim ležajevima  $M_{fB} = -\mu_B F_{NB} r_B$  sa koeficijentom trenja  $\mu_B = 0.015$ , srednjim radijusom u ležaju  $r_B = 0.014$  m i  $F_{NB}$  – statičkom normalnom silom po svakom ležaju te fluidni otpori u ventilatoru elektromotora (sličan efekt se javlja i na lopaticama turbine nakon što se isključi dovod pare)  $M_f = -k_f \Omega^2$  sa koeficijentom fluidnih otpora  $k_f = 1 \cdot 10^{-6}$  i trenutnom kutnom brzinom rotora  $\Omega$ . U nastavku su prikazani rezultati 4 simulacije sa slijedećim iznosima mase dodatnog neuravnoteženja (uslijed otpadanja lopatice):

- Simulacija prisilnog zaustavljanja modela rotora sa masom dodatnog neuravnoteženja  $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$  kg,
- Simulacija prisilnog zaustavljanja modela rotora sa masom dodatnog neuravnoteženja  $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$  kg
- Simulacija prisilnog zaustavljanja modela rotora sa masom dodatnog neuravnoteženja  $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$  kg
- Simulacija prisilnog zaustavljanja modela rotora sa masom dodatnog neuravnoteženja  $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$  kg

Slike 4.51. do 4.60. prikazuju razne odzive analiziranog sustava rotor-stator sa uključenim torzijskim stupnjevima slobode gibanja. Na početku slika 4.51. prikazuje odzive rotora i statora u obliku poprečnih pomaka u horizontalnom smjeru u vremenskoj domeni za sve četiri simulacije. Ako se uzme u obzir da je zračnost između rotora i statora  $C_r = 0.4$  mm tada je vidljivo iz slike 4.51.a) da otpadanjem mase neuravnoteženja u iznosu od  $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$  kg još nije došlo do dodira između rotora i statora. Kontakt se uspostavlja tek u sekvenci zaustavljanja nailaskom na fleksijsku kritičnu brzinu vrtnje. Kod ostale tri simulacije rotor ulazi u kontakt sa statorom već u trenutku aktiviranja dodatne mase neuravnoteženja (otpadnute lopatice) u 2. sekundi simulacije.



Slika 4.51. Odzivi rotora i statora za slijedeće mase otpadnute lopatice: a)  $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$  kg, b)  $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$  kg, c)  $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$  kg, d)  $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$  kg,

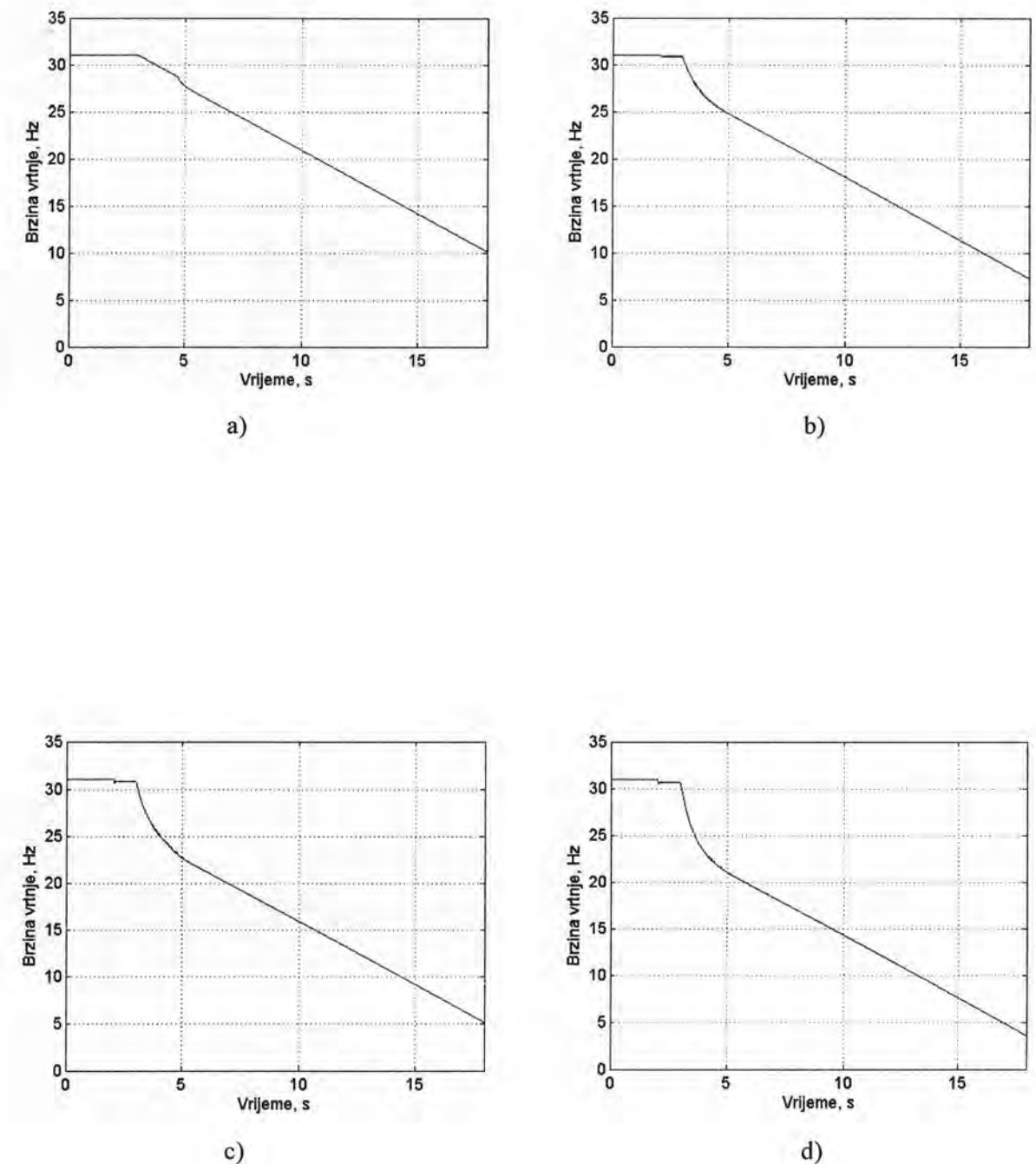
Slika 4.52 prikazuje usporedbu prikaza brzine vrtnje rotora gdje se vidi porast intenziteta usporavanja sa porastom mase neuravnoteženja. Na istoj slici vidljivo je da je pogon relativno jak odnosno da ima tvrdi momentnu karakteristiku pošto je pad brzine u drugoj vremenskoj sekvenci ( $t = 2-3$  s) i kod najvećeg neuravnoteženja (simulacija-d) zanemariv.

Na slici 4.53 koja prikazuje relativne normalne brzine između rotora (čvor 5) i statora sa indikacijom kontakta vidljivo je širenje perioda zadržavanja rotora u kontaktu sa statorom te povećanje maksimalnih intenziteta relativnih brzina, sa porastom mase neuravnoteženja (vidi prikaz indikacije kontakta na slikama 4.53.a), b) i c)). Daljnjim porastom mase otpadnute lopatice (slike 4.53.c) i d)) prestaje širenje ukupnog vremenskog perioda kontakta no širi se vremenski period permanentnog kontakta to izaziva kontra efekt smanjenje relativnih normalnih brzina između rotora i statora. Slika 4.53. je isto tako dobar indikator valjanosti primjene nelinearnog modela normalne sile prema Huntu i Crossleyu [55] pošto relativna brzina udara rotora u stator ne smije biti veća od 0.5 m/s a taj uvjet je zadovoljen.

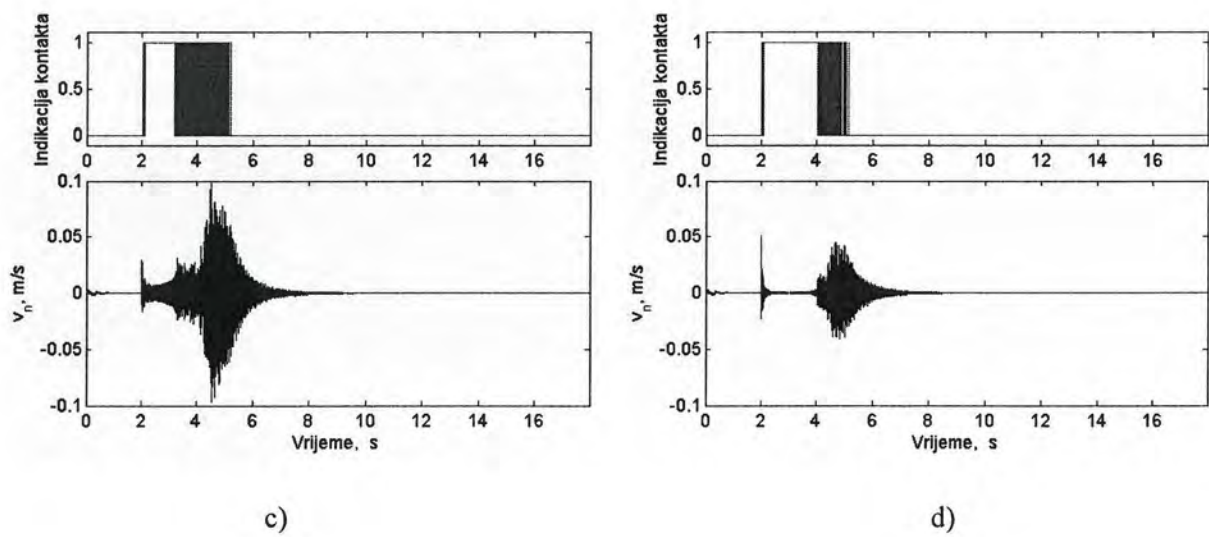
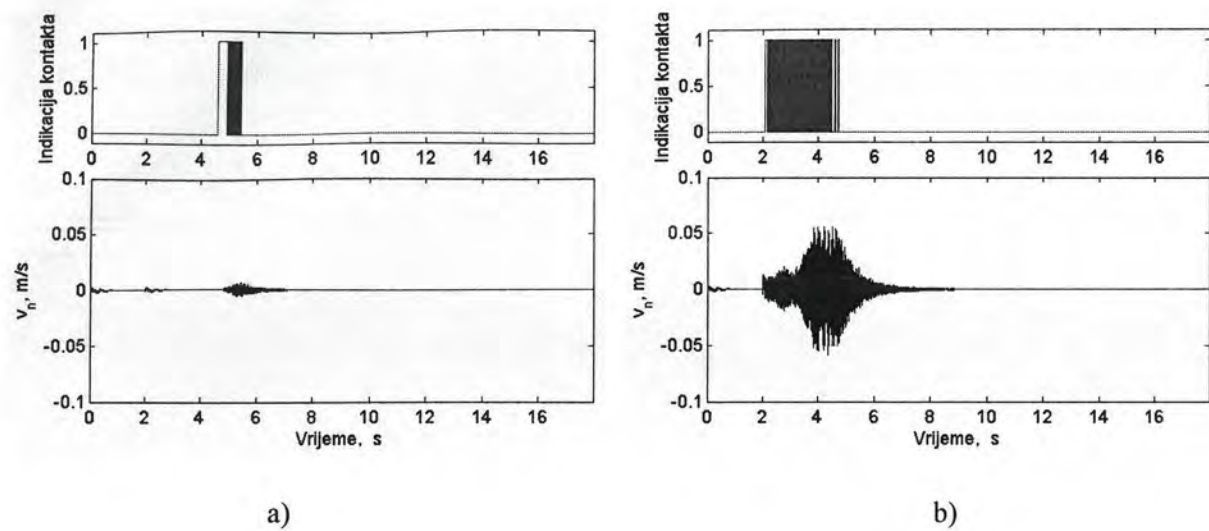
Veće oscilacije normalne brzine između rotora i statora (slika 4.53.c) izazivaju i veće oscilacije frekvencije natražne precesije (slika 4.54.c). Što se tiče slike 4.53. treba napomenuti da osim simulacije c) nema pojave natražne precesije.

Dulji permanentni kontakt uz klizanje (slika 4.54.) dodirnih površina izaziva veću transformaciju unesene energije u usporenje brzine vrtnje rotora dok dulja faza isprekidanog kontakta (4.53.b) predstavlja veću opasnost u smislu pobuđivanja torzijskih oscilacija analiziranog modela rotora (4.60.b). Kod torzijskog odziva statora (slika 4.59) amplitude rastu sa povećanjem mase  $m_{add}$  uniformno no one su puno manje od rotorskih što je i slučaj u praksi gdje u pravilu torzijski puca rotor.

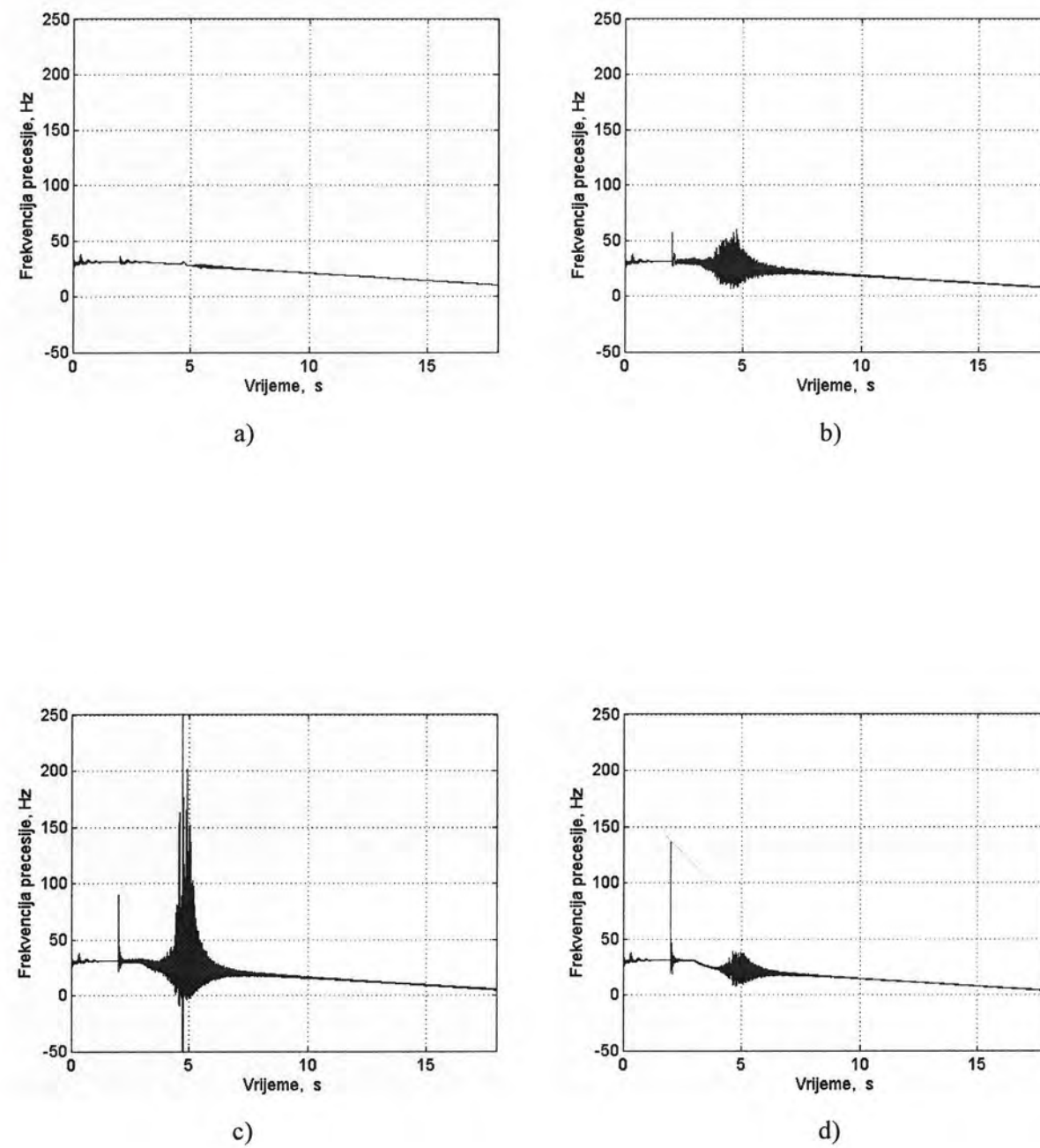
Analizom odziva torzijskih kutova rotora prikazanih na slici 4.60. uočen je nejednolik trend povećanja maksimalnih amplituda torzijskih oscilacija rotora s porastom dodatne mase neuravnoteženja. Nejednolikost se ogleda u porastu maksimalnih amplituda torzijskih oscilacija kod simulacija s manjim masama neuravnoteženja (otpadnute lopatice) da bi nakon toga uslijedilo područje opadanja maksimalnih amplituda torzijskih oscilacija sa daljnjim povećanjem mase neuravnoteženja. To se može tumačiti na način da kod malih neuravnoteženja porastom mase raste i uzbuda torzijskih oscilacija. Nakon određene kritične vrijednosti neuravnoteženja poraste statička komponenta torzijskog momenta trenja uslijed kontakta rotora i statora te veliko neuravnoteženje tada počne djelovati i kao prigušivač torzijskih oscilacija.



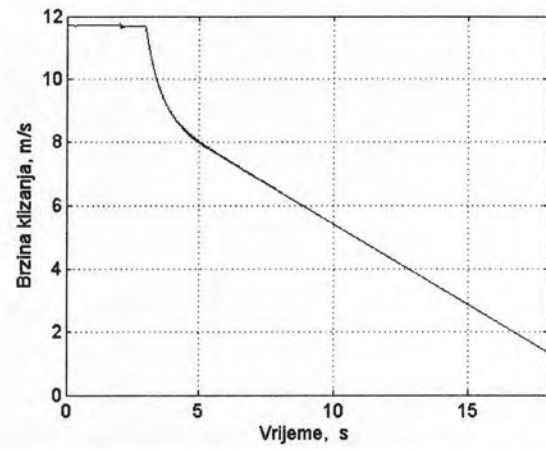
Slika 4.52. Brzina vrtnje rotora za slijedeće mase otpadnute lopatice: a)  $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$  kg, b)  $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$  kg, c)  $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$  kg, d)  $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$  kg,



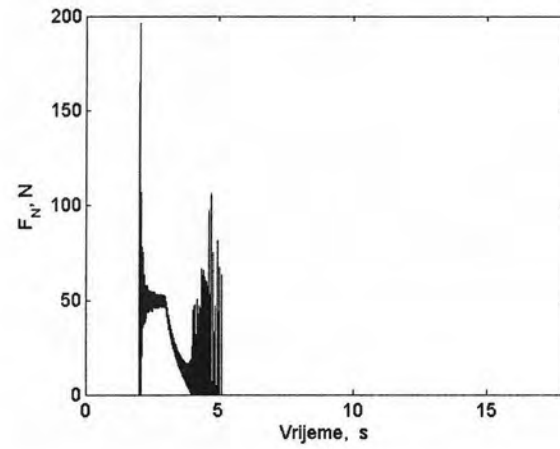
Slika 4.53. Relativne normalne brzine između rotora (čvor 5) i statora sa indikacijom kontakta:  
 a)  $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$  kg, b)  $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$  kg, c)  $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$  kg, d)  $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$  kg,



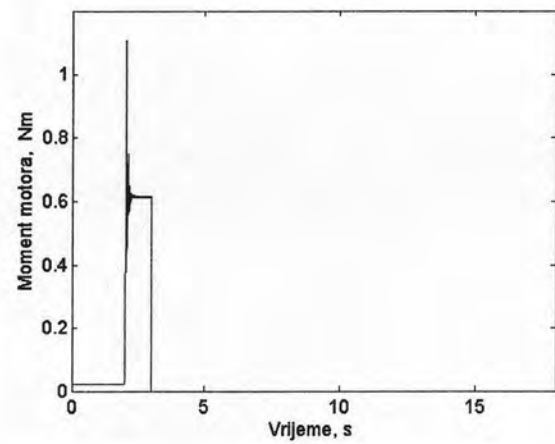
Slika 4.54. Frekvencija precesije rotora za uvjete: a)  $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$  kg, b)  $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$  kg,  
 c)  $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$  kg, d)  $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$  kg,



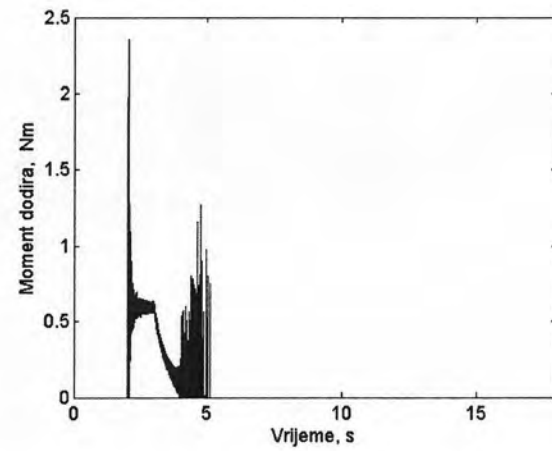
Slika 4.55. Relativna brzina klizanja, simulacija  
d)  $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$  kg



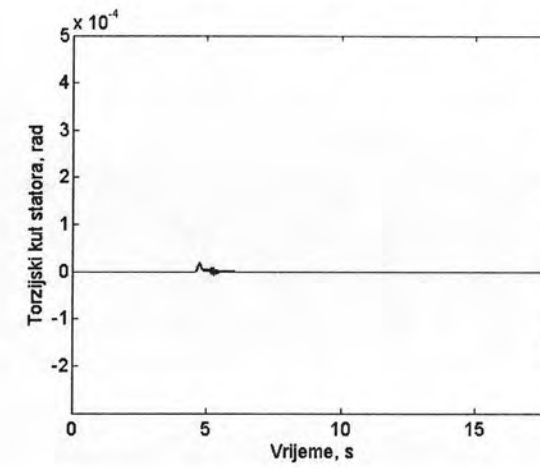
Slika 4.56. Normalna sila dodira, simulacija  
d)  $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$  kg



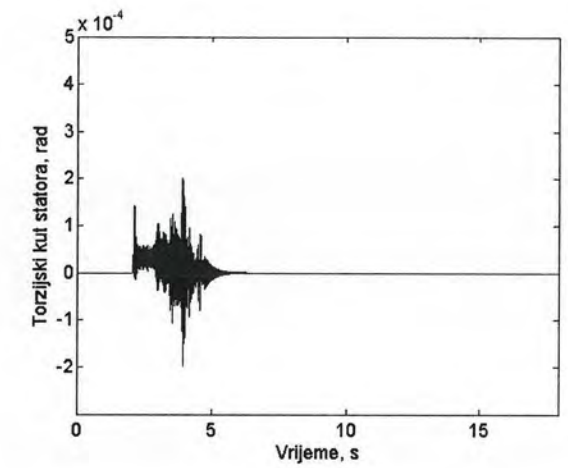
Slika 4.57. Moment motora, simulacija  
d)  $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$  kg



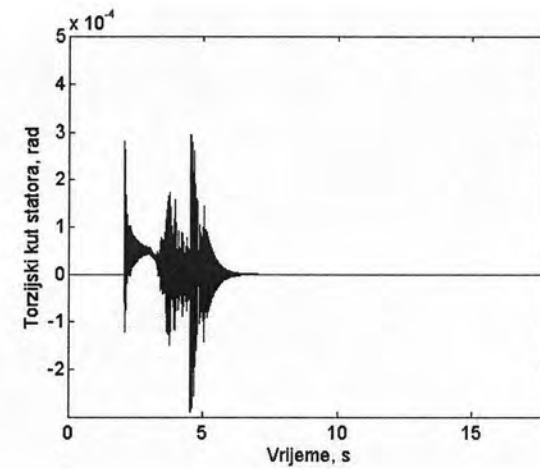
Slika 4.58. Moment dodira, simulacija  
d)  $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$  kg



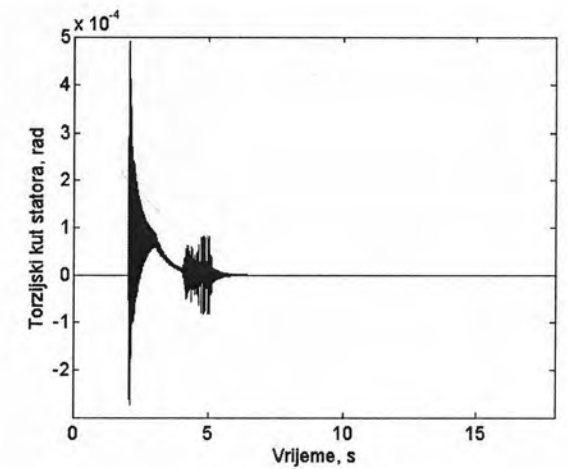
a)



b)

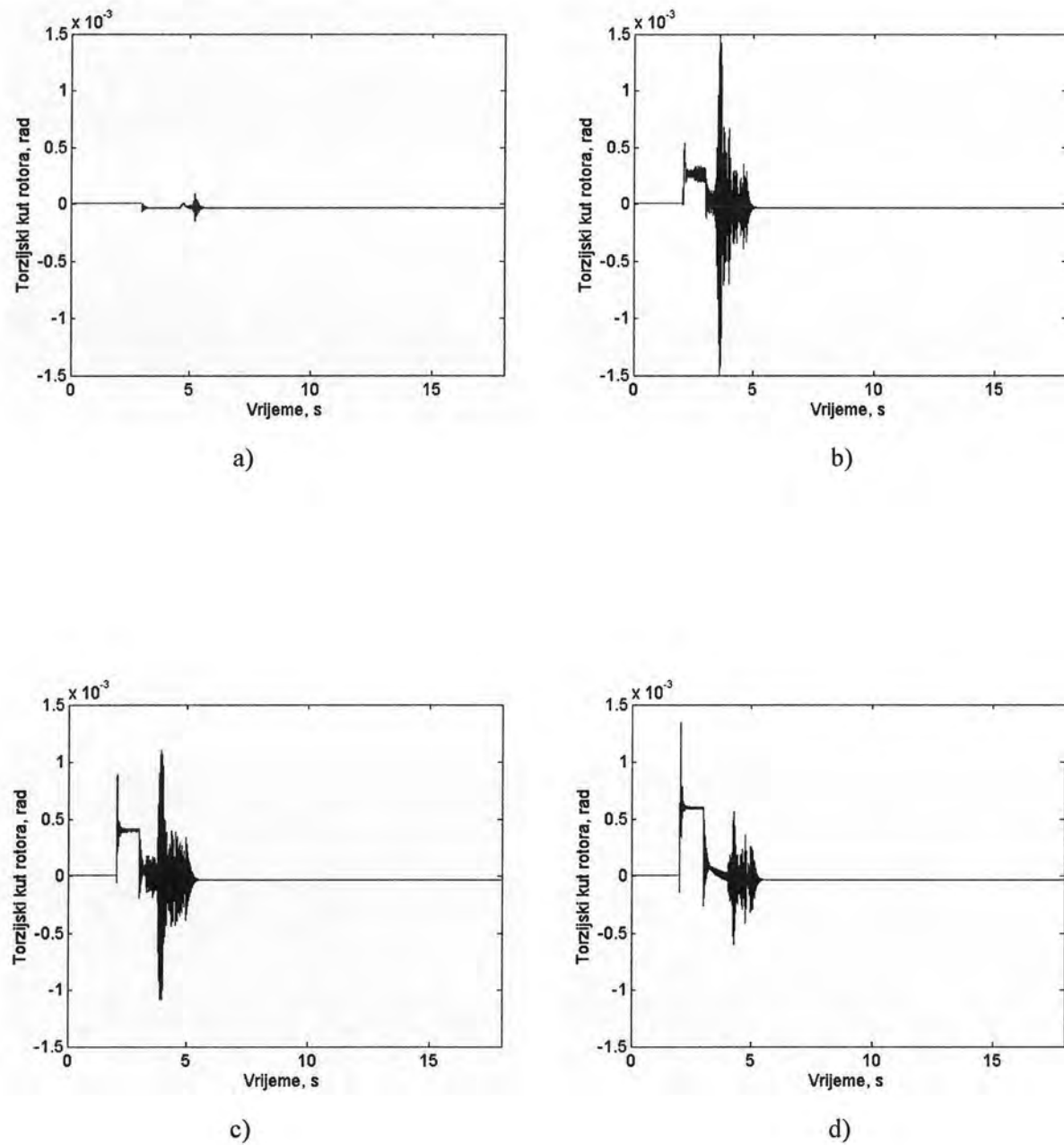


c)



d)

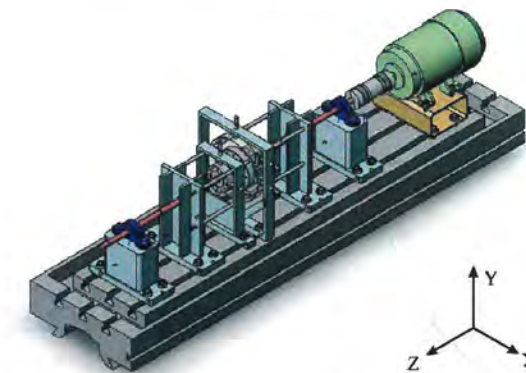
Slika 4.59. Torzijski kut statora za uvjete: a)  $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$  kg, b)  $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$  kg,  
c)  $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$  kg, d)  $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$  kg,



Slika 4.60. Torzijski kut rotora za uvjete: a)  $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$  kg, b)  $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$  kg, c)  $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$  kg, d)  $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$  kg,

## 5. Opis eksperimentalnog uređaja

Eksperimentalni uređaj za analizu dinamike rotora u uvjetima dodira između rotora i statora napravljen je kako bi se provjerili rezultati dobiveni analizom numeričkih modela sustava rotor – stator. Eksperimentalni uređaj je pažljivo konstruiran kako bi se mogla izvesti specifična mjerenja vibracija na rotoru i statoru uz istovremeno izbjegavanje neželjenih vanjskih utjecaja na sama mjerenja. Slika 5.1. prikazuje eksperimentalni uređaj vlastite konstrukcije a koji se sastoji od slijedećih bitnih dijelova: temeljnih nosača, montažne ploče, kugličnih ležajeva sa nosačima, rotora, statora, elastične spojke, električnog pogona sa regulacijom brzinom vrtnje, posebno konstruiranih nosača beskontaktnih senzora pomaka, sustava za više-kanalno mjerenje vibracija sa sensorima i odgovarajućim softwareom. Slika 5.2. prikazuje fotografiju izvedenog eksperimentalnog uređaja u Laboratoriju za dinamiku strojeva, Tehničkog fakulteta, Sveučilišta u Rijeci.



Slika 5.1. Eksperimentalni uređaj za istraživanje dinamike rotora u uvjetima kontakta rotora i statora



Slika 5.2. Fotografija eksperimentalnog uređaja za istraživanje dinamike rotora

## 5.1. Rotor

Rotor se sastojao od osovine i tri čelična diska koji su spojeni na osovinu preko tzv. ležajne ljske (košuljice) proizvođača SKF. Diskovi su se na taj način mogli pomicati uzduž osovine u cilju ostvarivanja željene konfiguracije. Osovina je bila ukupne dužine 1 m. Promjer osovine bio je  $\phi 17$  mm iz razloga što je to bila najmanja dimenzija komercijalno dobavljive ljske (slika 5.3.) za spajanje diskova na osovinu. Iz razloga kompatibilnosti sa ranije korištenim rotorima odlučeno je da promjer rukavaca osovine na oba njena kraja bude  $\phi 15$  mm što je također najmanja komercijalna dimenzija za ležajni blok sa samopodešavajućim kugličnim ležajem proizvođača SKF. U cilju ostvarivanja konfiguracije rotora koja što više sličići tzv. Jeffcottovom rotoru a koji je opširno bio numerički analiziran u prvom dijelu prethodnog poglavlja, glavni disk promjera  $\phi 120$  mm bio je pričvršćen na osovinu na sredini raspona između dva ležaja. Spomenuti disk koristio se za uspostavu dodira između rotora i statora. Iz razloga nemogućnosti mjerenja direktno na disku koji zapinje o stator te zbog opasnosti od oštećenja senzora, ugrađena su dva manja tzv. mjerna diska promjera  $\phi 80$  mm i širine 25 mm i to simetrično s obje strane glavnog diska. Dok je jedan mjerni disk služio je za mjerenja položaja rotora beskontaktnim sensorima pomaka, drugi je služio za mjerenje faznog kuta, i brzine vrtnje, optičkim faznim sensorom. Slika 5.4. prikazuje diskove raspoređene duž osovine zajedno sa posebno konstruiranim nosačima senzora. Svi diskovi su imali posebno izrađene provrte sa urezanim navojem M5 za uravnotežavanje. Slika 5.5. prikazuje ležajni blok sa samopodesivim kugličnim ležajem pričvršćen na nosač ležaja.

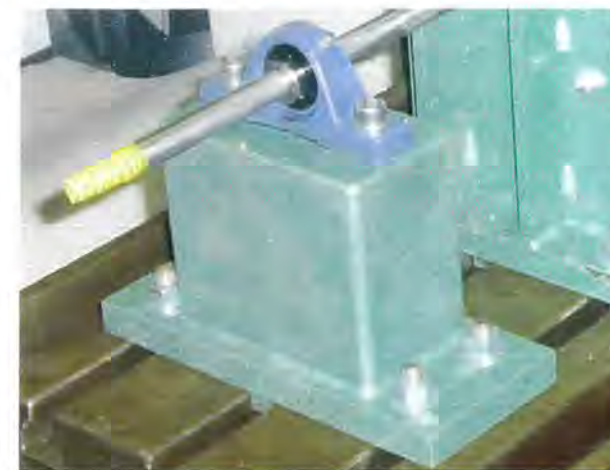
Prije početka sustavnih mjerenja vibracija eksperimentalnog uređaja u radu izvršena je provjera modalnih parametara svih njegovih pojedinih dijelova. Tablica 5.1. tako prikazuje vlastite frekvencije i koeficijente relativnog prigušenja za prva dva vlastita oblika vibriranja rotora izmjerene na osnovi impulsne uzbuđe čekićem.



Slika 5.3. Ljuska za spajanje diskova na osovinu



Slika 5.4. Raspored diskova na osovinu



Slika 5.5. Ležajni blok sa samopodesivim kugličnim ležajem

Tablica 5.1. Vlastite frekvencije i relativna prigušenja rotora izmjerene na osnovi impulsne uzbuđe

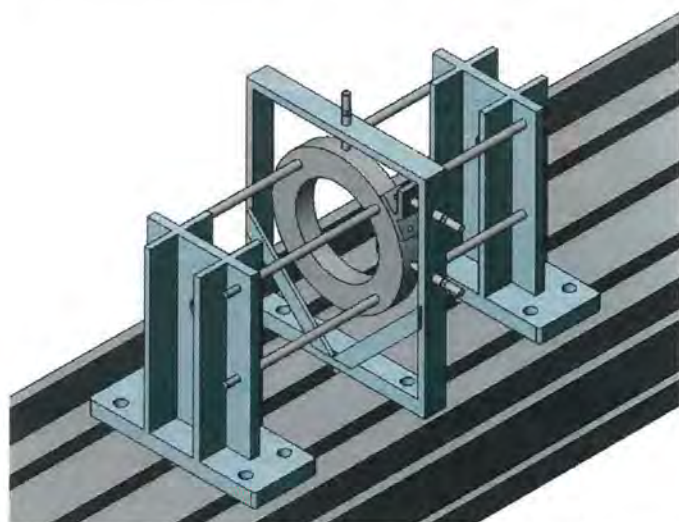
Oblik vibriranja	Vlastita frekvencija $f$ , Hz	Relativno prigušenje $\zeta$
1. fleksijski	28,00	0.015
1. torzijski	135,25	0.005
2. fleksijski	145,00	0.01

## 5.2. Stator

Stator je bio izveden kao sklop iz dva robusna nosača, četiri cilindrične šipke, promjera  $\phi 10$  mm dužine 400 mm koje su povezivale nosače te statorskog prstena postavljenog na šipke simetrično između dva nosača sve iz čelika. Statorski prsten je bio pozicioniran tako da se nalazio točno iznad glavnog diska rotora, a imao je slijedeće dimenzije: promjere  $\phi 121/\phi 190$  i širinu 25 mm (5 mm širi od glavnog diska rotora). Unutarnji promjer prstena bio je tako za 1 mm veći od vanjskog promjera glavnog diska što je davalo radijalnu zračnost  $C_r = 0.5$  mm. Za mjerenje statora bila su predviđena su tri beskontaktna senzora smještena na posebno konstruiranom nosaču sa vlastitom frekvencijom znatno iznad maksimalne projektne brzine vrtnje eksperimentalnog uređaja  $n = 100$  s<sup>-1</sup>. Slika 5.6. prikazuje statorski sklop sa nosačem beskontaktnih senzora. Na slici 5.6. je vidljivo da dva senzora ciljaju u zamišljeno središte statorskog prstena, i to jedan na horizontalnom a jedan u vertikalnom pravcu omogućavajući na taj način praćenje putanje središta statora (orbite) u normalnoj ravnini. Treći senzor pri vrhu na horizontalnom pravcu je pak služio da u kombinaciji sa prvim sensorom na horizontalnom pravcu mjeri relativne torzijske kutove statora.

Tablica 5.2. prikazuje vlastite frekvencije i koeficijente relativnog prigušenja za prva dva vlastita oblika vibriranja rotora izmjerene na osnovi impulsne uzbuđe čekićem.





Slika 5.6. Statorski sklop sa nosačem beskontaktnih senzora

Tablica 5.2. Vlastite frekvencije i relativna prigušenja statora izmjerene na osnovi impulsne uzbude

Oblik vibriranja	Vlastita frekvencija $f$ , Hz	Relativno prigušenje $\zeta$
1. fleksijski	90,00	0.0025
1. torzijski	103, 5	0.002

### 5.3. Pogonski sustav

Za pogon modela rotora koristio se Siemensov asinkroni kavezni elektromotor u kombinaciji sa pretvaračem napona i frekvencije MICROMASTER 440. Tehničke karakteristike elektromotora dane su u tablici 5.3. dok su tehničke karakteristike pretvarača napona i frekvencije dane u tablici 5.4.

Tablica 5.3. Tehničke karakteristike asinkronog kaveznog elektromotora

Nazivna snaga	1.5 kW
Frekvencija mreže	50 Hz
Nominalna brzina vrtnje	2860 min <sup>-1</sup>
Nominalni moment	5 Nm
Prekretni moment	10.25 Nm
Brzina vrtnje kod prekreta	2400 min <sup>-1</sup>
Moment inercije	0.0014 kgm <sup>2</sup>

Tablica 5.4. Tehničke karakteristike pretvaračem napona i frekvencije

Nazivna snaga	1.5 kW
Ulazna frekvencija mreže	47-63 Hz
Maksimalna izlazna frekvencija	0-650 Hz
Vrijeme uzlazne rampe	0-650 s
Vrijeme silazne rampe	0-650 s

Nominalna brzina vrtnje elektromotora od 47.6 Hz vrijedi za dugotrajni pogon i nominalno opterećenje motora. Kratkotrajno elektromotor se može ubrzati na 100 Hz. Maksimalna brzina tijekom ispitivanja bila je 70 Hz.

U cilju kompenziranja grešaka u centričnosti osi rotora i osi elektromotora rotor je bio spojen s elektromotorom preko torzijski krute a fleksijski elastične spojke. Karakteristike spojke dane su u tablici 5.5. Slika 5.7. prikazuje spoj rotora s elektromotorom preko elastične spojke.

Tablica 5.5. Tehničke karakteristike elastične spojke

Nazivni moment	30 Nm
Maksimalna brzina vrtnje	6700 min <sup>-1</sup>
Maksimalna radijalna nepodešenost	1 mm
Maksimalna kutna nepodešenost	1°
Maksimalna aksijalna nepodešenost	2 mm
Fleksijska krutost	14730 N/m
Torzijska krutost	18115 Nm/rad
Aksijalna krutost	41900 N/m



Slika 5.7. Spoj rotora s elektromotorom preko elastične spojke

### 5.4. Sustav za mjerenje i analizu vibracija

Za mjerenja korištena su dva odvojena sustava. Prvi, stariji ali zato referentni sustav za mjerenja u dinamici rotora bio je dvokanalni *Vibroport 41* proizvođača Carl Schenck AG, Darmstadt, Njemačka. Navedeni sustav čini jednu kompaktnu cjelinu od multifunkcijskog uređaja, dva akceleracijska senzora AS-020, dva beskontaktna senzora pomaka IN-085 te optičkog senzora faznog pomaka P-84 sa popratnim priborom te PC softwareom za analizu izmjerenih vibracija Vibroexpert CM-S40. Navedeni sustav može vršiti simultana mjerenja s

dva analogna kanala (bilo od akceleracijskih senzora ili beskontaktnih senzora pomaka) plus fazni signal. Navedeni sustav je najviše bio korišten za potrebe uravnotežavanja rotora u dvije ravnine koje se učestalo moralo ponavljati a za što ima integriranu rutinu u samom uređaju te za modalna testiranja (određivanje vlastite frekvencije i relativnog prigušenja) pojedinih dijelova *Eksperimentalnog uređaja za analizu dinamike rotora*.

Drugi noviji mjerni sustav, na neki način proizišao je iz ovog prvog na način da je usvojen standard već korištenih senzora (prvenstveno beskontaktnih senzora pomaka) koji su dokupljeni. Kako je okosnicu novog mjernog sustava činila kvalitetna PCI kartica NI 4472 proizvođača National Instruments sa 8 analognih kanala čije je područje ulaznih napona 0 – 10 V (ili -10 – 0 V), moralo se prići izradi posebne adaptacije u smislu povezivanja kartice sa postojećim sensorima. Sensori su bili namijenjeni industrijskim mjerenjima tako da je njihov rad bio na većim naponima (-22 – 0 V) s tim što su dodatno morali biti napajani s naponom od -24 V. Mirenjem ova dva standarda dobila se oprema kompatibilna s postojećom opremom. Navedena PCI kartica, posebne namjene za mjerenja vibracija i buke, omogućavala je simultana mjerenja sa 8 analognih ulaznih kanala sa maksimalnim brzinom uzorkovanja do 100 kHz (51.6 kHz alias free) po svakom kanalu pri rezoluciji od 24 bita. Navedene karakteristike nisu nikad bile u potpunosti iskorištene pošto je maksimalna frekvencija akceleracijskih senzora 20 kHz a beskontaktnih senzora pomaka 10 kHz. U radu su se koristile brzine uzorkovanja od 1 kHz (minimalna podesiva za karticu) do 10 kHz. Najčešće se ipak koristila brzina uzorkovanja od 4 kHz što prema FFT analizi daje maksimalnu frekvenciju od 2 kHz a što je bilo sasvim dovoljno s obzirom da je fokus u analizi bio usmjeren na pojave u području od 0 do 100 Hz (maksimalna projektna brzina eksperimentalnog uređaja). Dodatan razlog da se nije išlo na maksimalne moguće brzine uzorkovanja je taj da je oprema izvodila kontinuirana mjerenja sa 7 kanala u trajanju i do 120 s, čime se zauzeće jednog mjerenja penje na više desetaka MB. Za snimanje prikupljenih podataka koristila se posebno izrađena aplikacija u programskom paketu LabView 7.1 koja je za vrijeme snimanja očitavala brzinu vrtnje rotora zbog provjere rada senzora faznog pomaka. Prije početka svakog snimanja provjerila bi se ispravnost rada svih priključenih senzora, u posebno izrađenoj aplikaciji, pri brzini vrtnje 5 Hz iz razloga što bi se u signalu beskontaktnih senzora pomaka (rade na principu indukcije magnetskog polja) povremeno pojavio intenzivan šum generiran od strane pogonskog sustava a preko nosača senzora. Iz tog razloga svaki pojedini senzor morao je biti pažljivo elektromagnetski izoliran od metalnog nosača. Snimku vibracija pohranjenu u obliku lvm (LabView measurement) datoteke, kasnije se analiziralo u aplikacijama Sound and Vibration Toolkit i Order Analysis Toolseta unutar LabView programskog paketa odnosno u posebno izrađenim aplikacijama u programu Matlab 7.1.

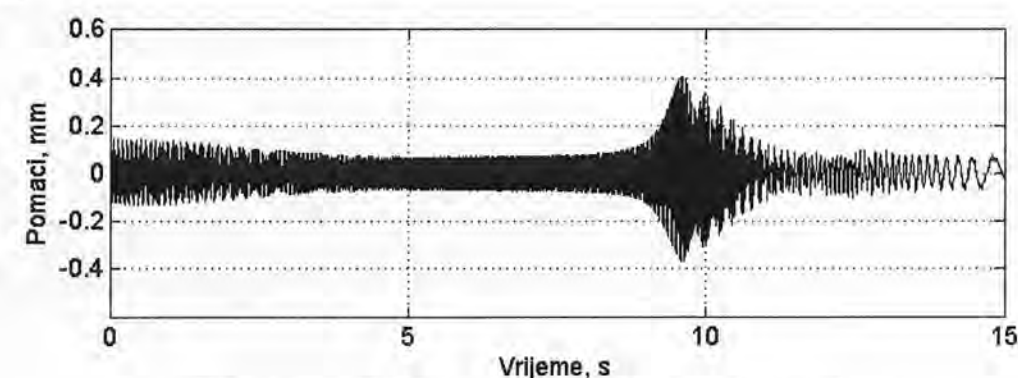
## 6. Eksperimentalna analiza

### 6.1. Pregled analize

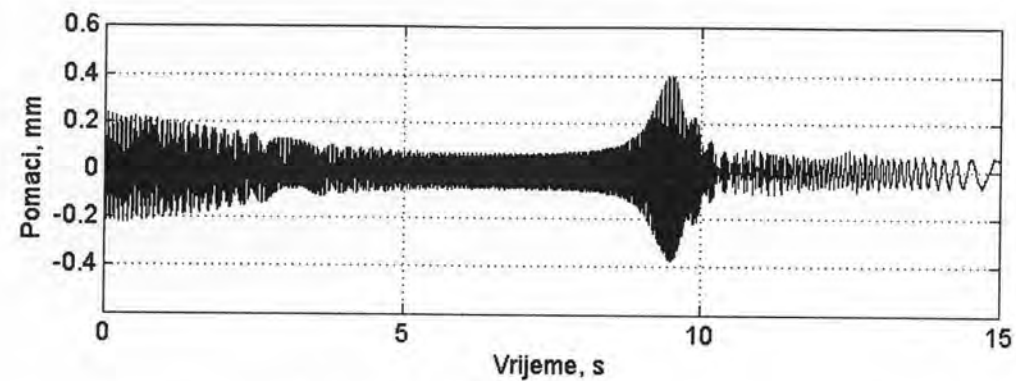
Kao što je napomenuto u prethodnom poglavlju cilj eksperimentalne analize je potvrda valjanosti numeričkih modela analiziranih u 4. poglavlju. Eksperimentalna analiza je provedena na posebno izrađenom eksperimentalnom uređaju opisanom u 5. poglavlju. Naglasak analize je na ispitivanju pojava pri dodiru rotora i statora a pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak kroz vlastitu frekvenciju odnosno zaustavljanje rotora uz prolazak kroz vlastitu frekvenciju. Kako bi se odredio preostali intenzitet neuravnoteženja analizirane su amplitude pomaka rotora u rezonanciji bez dovođenja rotora u kontakt sa statorom. Nakon toga slijedi analiza rotora pri pojavi dodira sa statorom. Za vrijeme ispitivanja dodira rotora sa statorom dodirne površine su bile sustavno lagano podmazivane sa WD40 sprejom po preporuci [5, 9] kako bi se smanjio koeficijent trenja te na taj način smanjila opasnost od uništenja senzora i ostalih konstrukcijskih dijelova eksperimentalnog uređaja.

### 6.2. Analiza rotora bez pojave dodira sa statorom

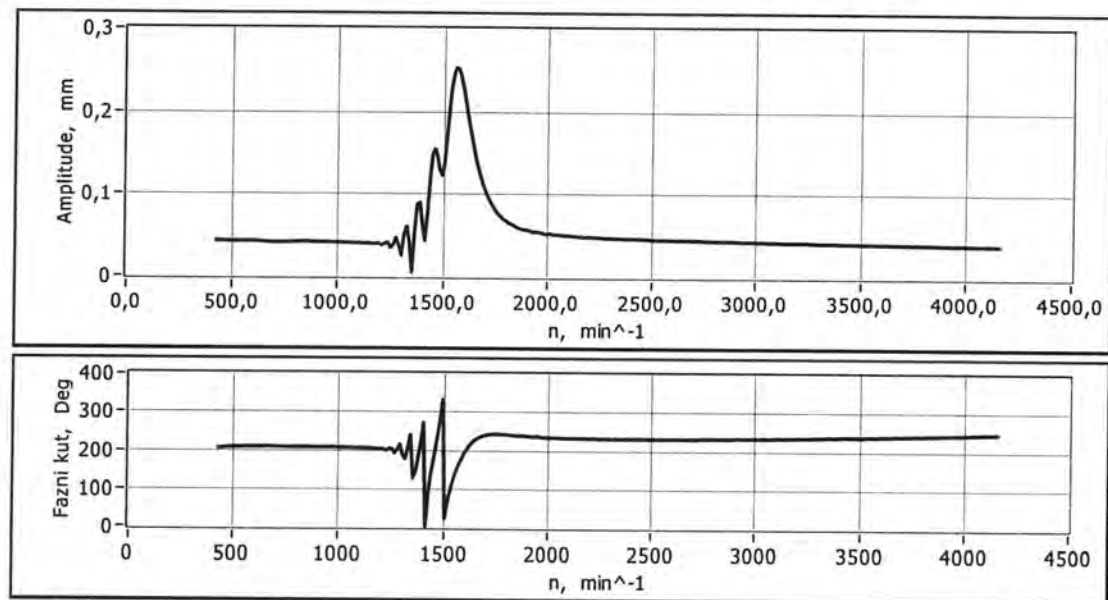
Za vrijeme ove analize statorski prsten bio je pomaknut bočno tako da disk rotora pri prolasku kroz kritičnu brzinu vrtnje ne može doći s njime u dodir. Podaci vezani uz geometriju analiziranog rotora dani su u 4. poglavlju kod opisa konačnoelementnog modela. Svi rezultati prikazani u ovom dijelu vrijede za jedno mjerenje zaustavljanja rotora od 70 – 90 Hz u vremenu od 60 s. Kao što je već rečeno u poglavlju 5.4. svako mjerenje je bilo snimljeno u vremenskoj domeni te je naknadno analizirano pomoću raznih aplikacija u LabViewu odnosno Matlabu. Slike 6.1. i 6.2. tako prikazuju odziv u vidu poprečnih pomaka rotora u vremenskoj domeni u horizontalnom odnosno vertikalnom smjeru. Slike 6.3. i 6.4. prikazuju amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom odnosno vertikalnom smjeru.



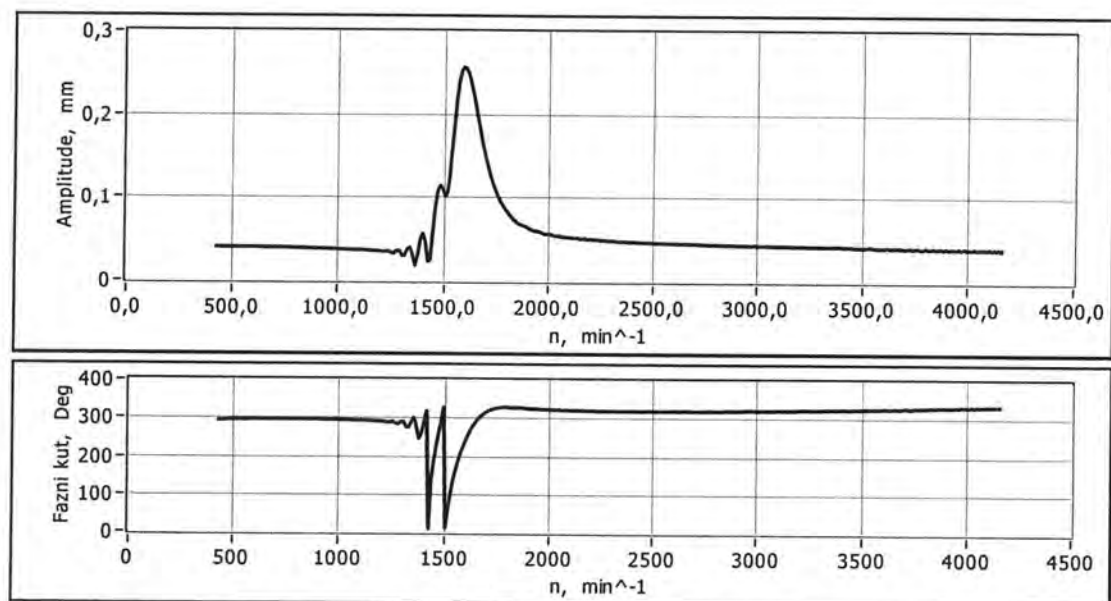
Slika 6.1. Radijalni pomaci rotora u horizontalnom smjeru



Slika 6.2. Radijalni pomaci rotora u vertikalnom smjeru

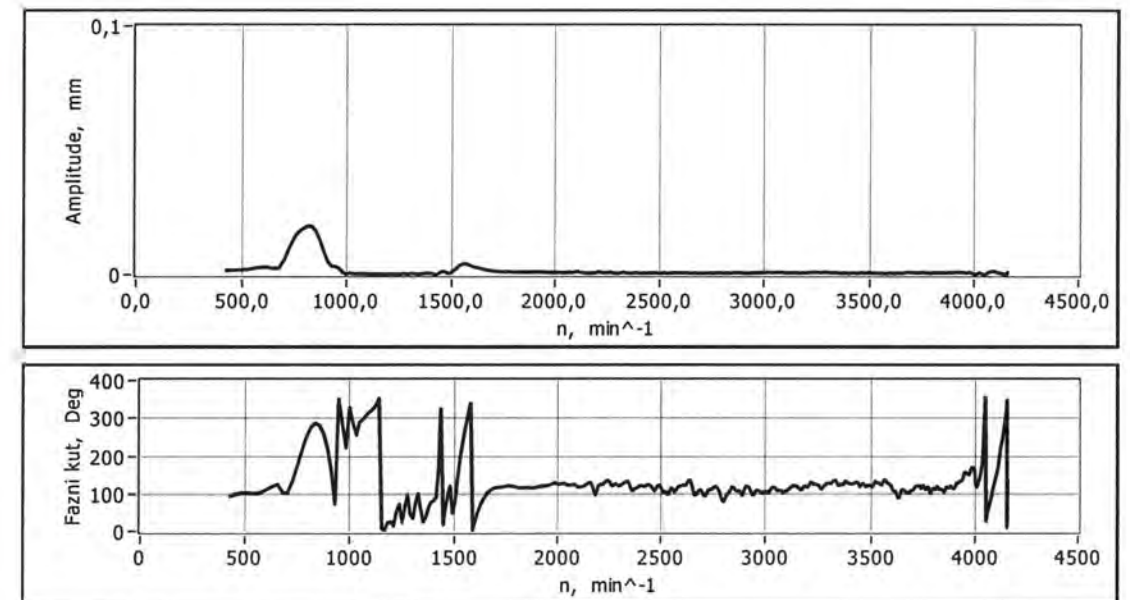


Slika 6.3. Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru

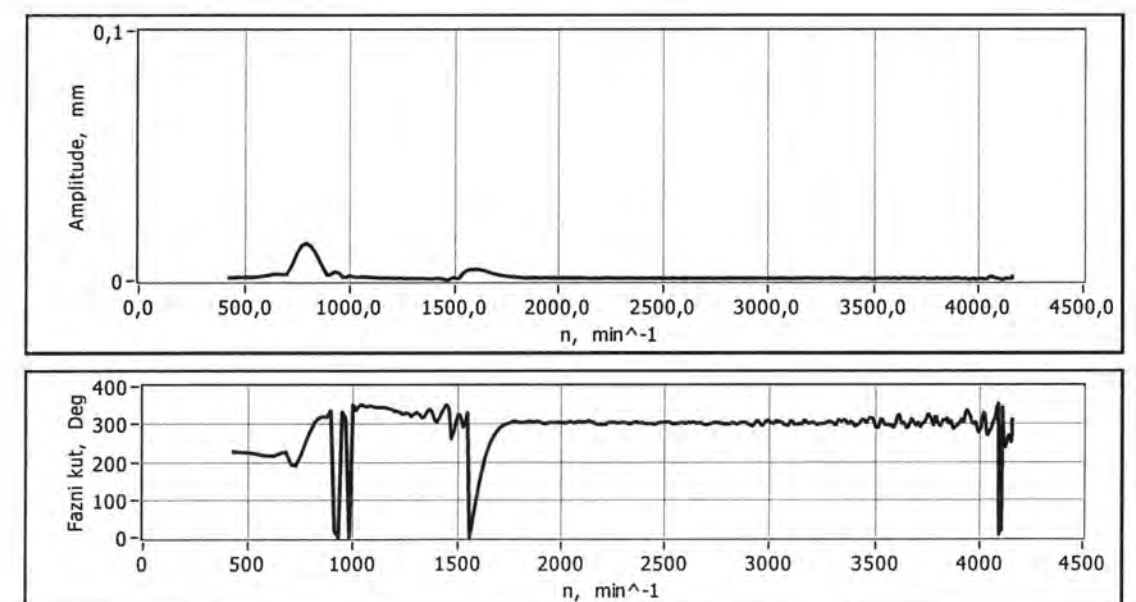


Slika 6.4. Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru

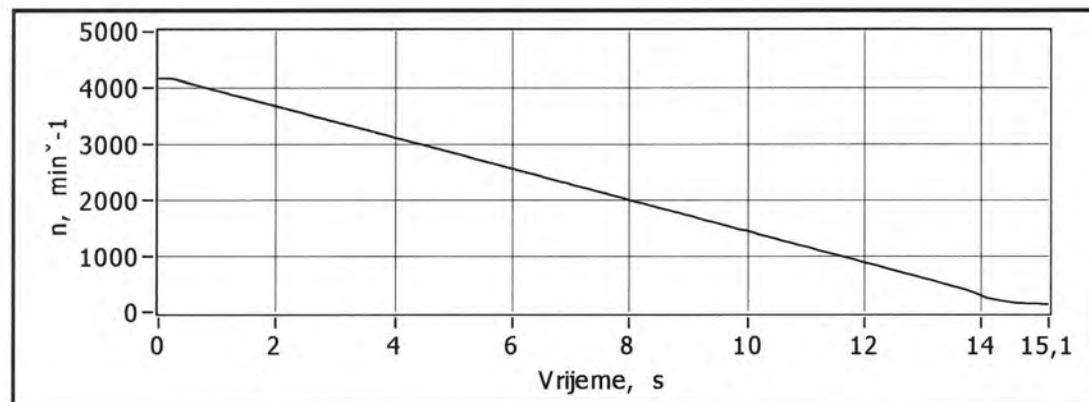
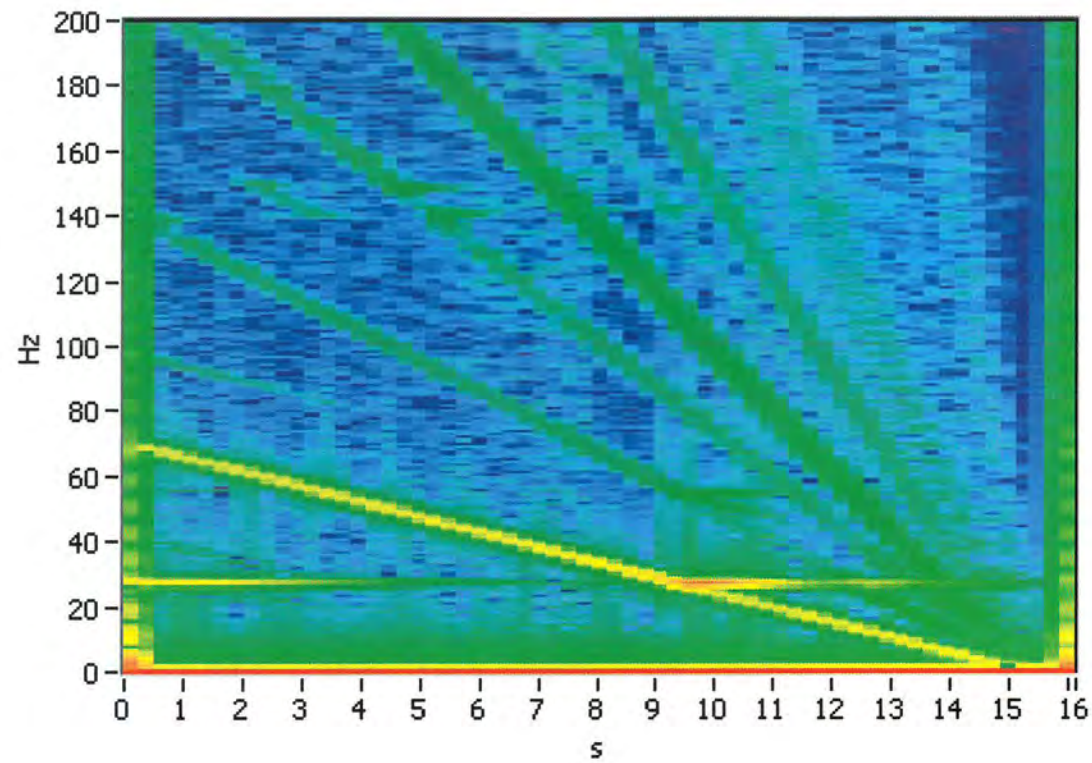
Slike 6.5. i 6.6. nadalje prikazuju amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u horizontalnom odnosno vertikalnom smjeru. Iz usporedbe prvog i drugog harmonika vidljiva je korelacija pošto se kod drugog harmonika javlja odziv na dvostruko nižoj brzini vrtnje od kritične brzine vrtnje  $n_{kr} = 1680 \text{ min}^{-1}$ . Uzrok pojave drugog harmonika je radijalna nepodešenost osi rotora i osi elektromotora. U nastavku na slici 6.7. prikazana je spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer zajedno sa izmjerenom brzinom vrtnje u vremenu. Na slikama 6.8. mogu se vidjeti orbite izmjerene na mjernom disku rotora u području oko kritične brzine vrtnje počevši od nadkritičnog područja prema podkritičnom području. Sve orbite prikazuju naprednu precesiju.



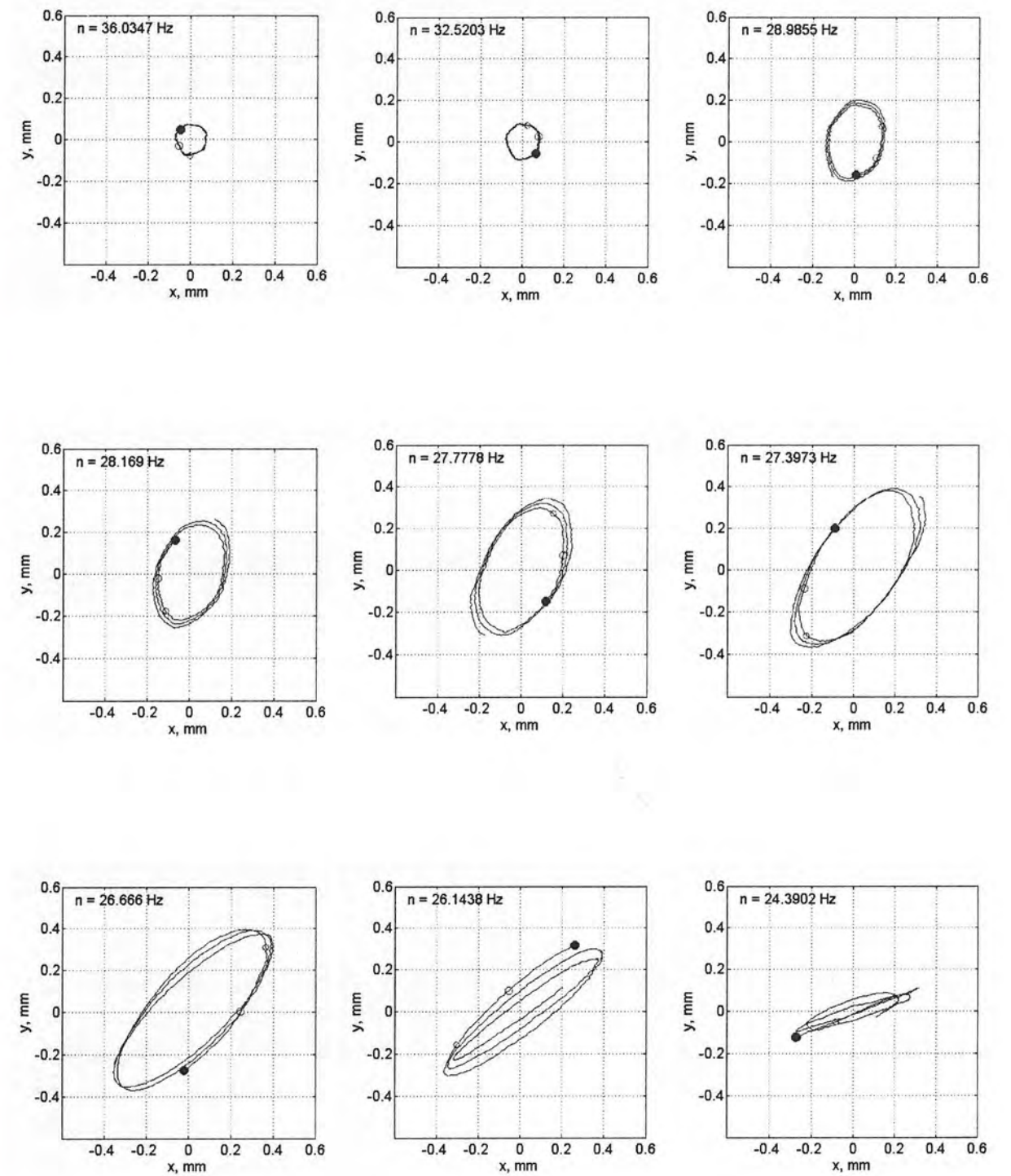
Slika 6.5. Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u horizontalnom smjeru



Slika 6.6. Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u vertikalnom smjeru



Slika 6.7. Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer zajedno sa izmjerenom promjenom brzine vrtnje u vremenu



Slika 6.8. Izmjerene orbite rotora za slučaj bez pojave dodira s statorom

### 6.3. Analiza rotora pri pojavi dodira sa statorom

U ovom dijelu analiziran je rotor u uvjetima kada se statorski prsten nalazio simetrično iznad glavnog diska rotora. Statorski prsten bio je podešen pomoću ispitnih listića tzv. „špijuna“, na način da radijalna zračnost u svim smjerovima bude što je moguće ujednačena tj. jednaka nominalnoj zračnosti  $C_r = 0.5$  mm. Dodirne površine glavnog diska rotora i statorskog prstena bile su sustavno podmazivane sa WD 40 sprejom, no od mjerenja do mjerenja nije bilo moguće u potpunosti održavati isti nivo podmazanosti čime je dolazilo do varijacije u koeficijentu trenja. U ovom dijelu prikazani su rezultati četiri mjerenja:

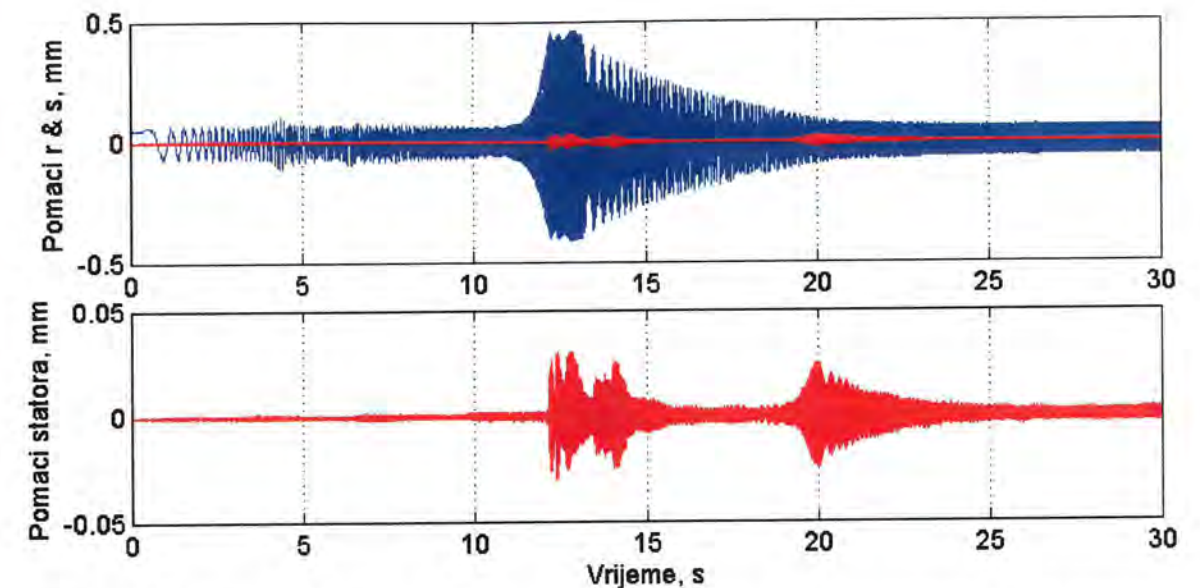
- Ubrzavanje rotora kroz kritičnu brzinu sa stanjem neuravnoteženosti kao u poglavlju 6.2.
- Usporavanje rotora kroz kritičnu brzinu sa stanjem neuravnoteženosti kao u poglavlju 6.2.
- Ubrzavanje rotora kroz kritičnu brzinu sa povećanim stanjem neuravnoteženosti za  $m_d = 2.7$  g u odnosu na stanje u poglavlju 6.2.

#### 6.3.1. Analiza dinamike rotora pri pojavi dodira sa statorom – manja neuravnoteženost

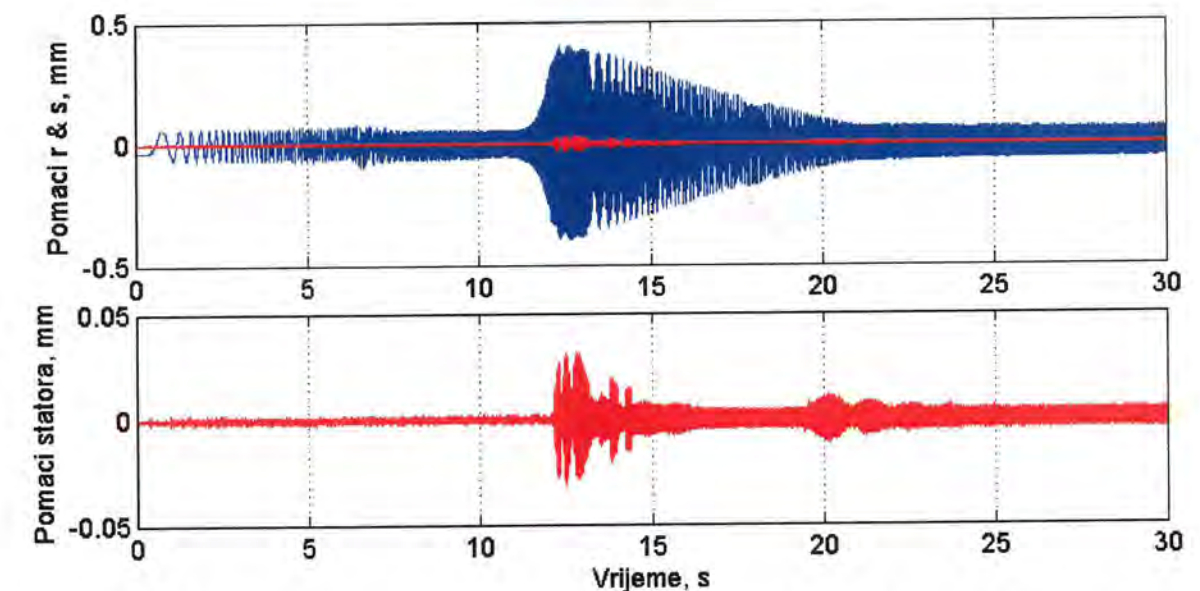
##### 6.3.1.1. Ubrzavanje rotora

Ovaj dio analize može se usporediti sa analizom u poglavlju 6.2. pošto se radi o istom nivou uravnoteženosti. Slike 6.9 i 6.10. prikazuju radijalne pomake rotora i statora zajedno te statora posebno uvećano u horizontalnom odnosno vertikalnom smjeru. Vidljivo je da su pomaci statora za cijeli red veličine manji u odnosu na rotor što je i razumljivo pošto je fleksijska krutost statora 11 puta veća od krutosti rotora. Slike 6.11. do 6.15. prikazuju odzive pojedinih harmonika rotora u horizontalnom odnosno vertikalnom smjeru. Slika 6.16. prikazuje odziv 3. harmonika statora u horizontalnom smjeru pri čemu se može vidjeti pobuđivanje prve fleksijske forme vibriranja statora, trećim harmonikom rotora. Slike 6.17. i 6.18. prikazuju spektralne mape rotora odnosno statora, u horizontalnom smjeru, pri pojavi dodira između njih međusobno. Na slici 6.19. vidljiva je promjena brzine vrtnje u vremenu.

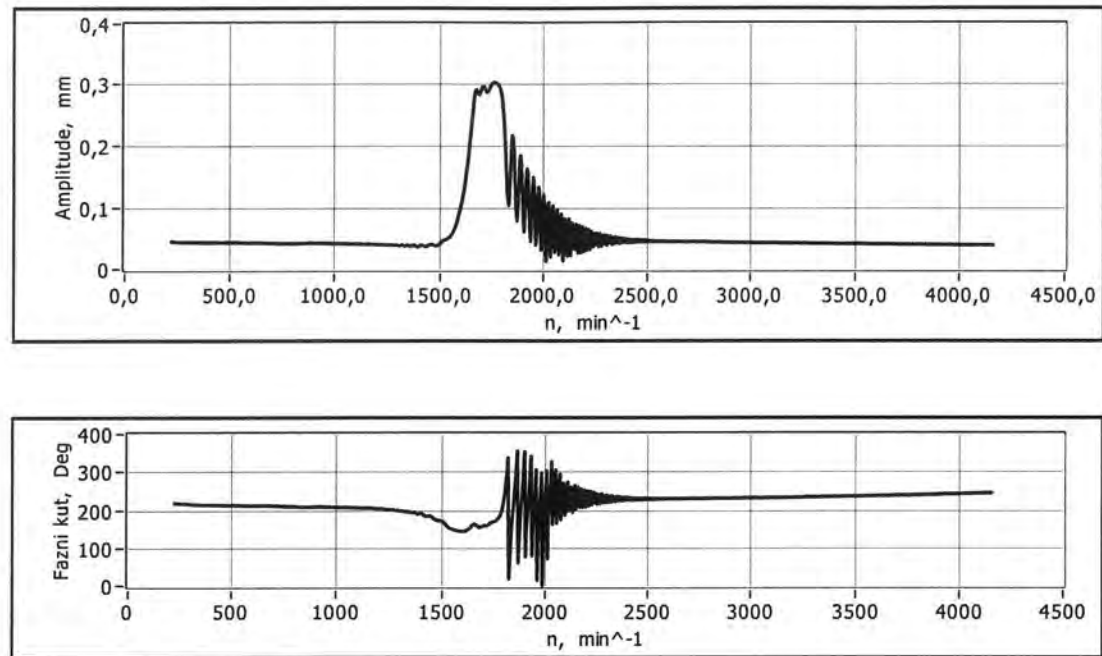
Na slikama 6.20. do 6.29. usporedo su prikazane orbite rotora i statora te poprečni pomaci rotora i statora u te torzijski kut statora (mjeren pomoću para beskontaktnih senzora u horizontalnom smjeru) u vremenskoj domeni pri različitim brzini vrtnje.



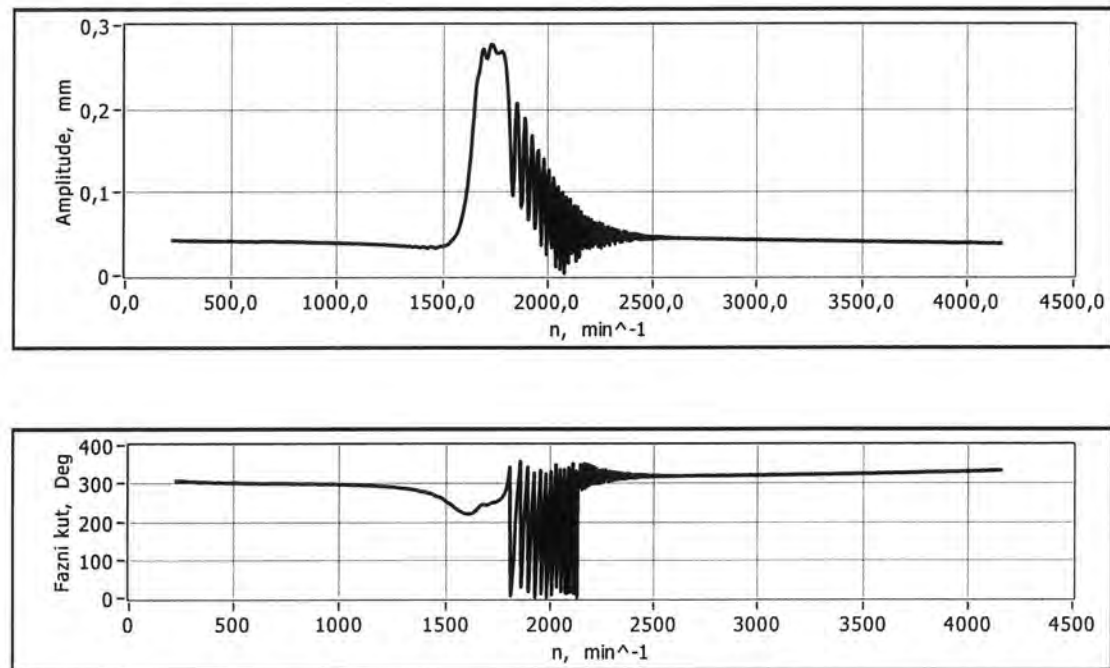
Slika 6.9. Radikalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u horizontalnom smjeru



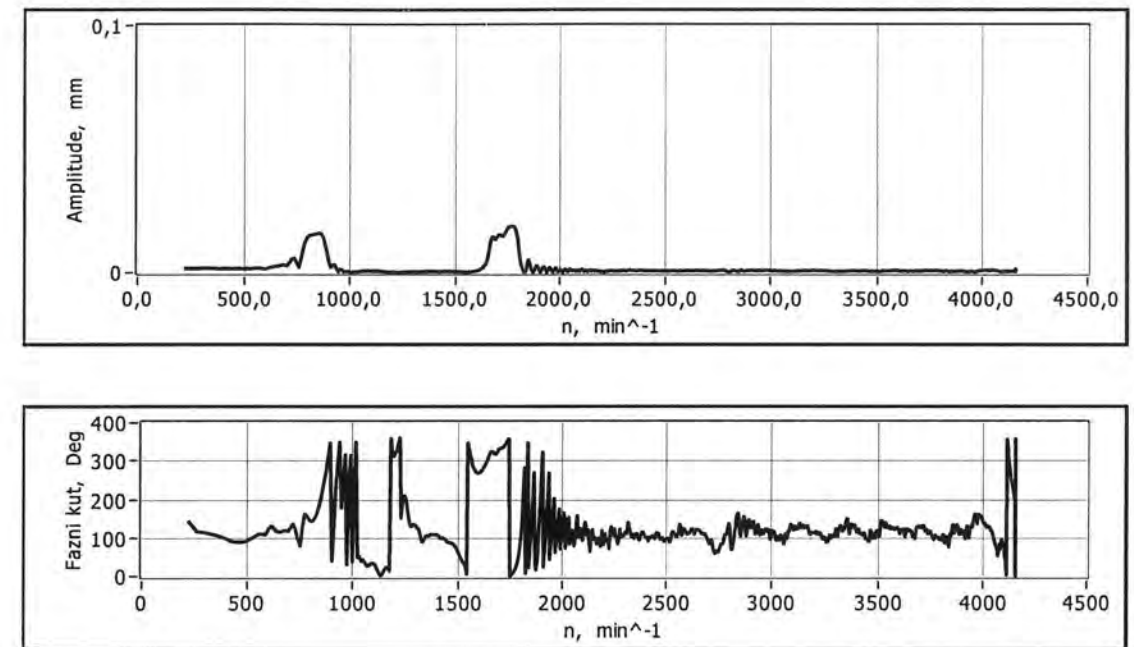
Slika 6.10. Radikalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u vertikalnom smjeru



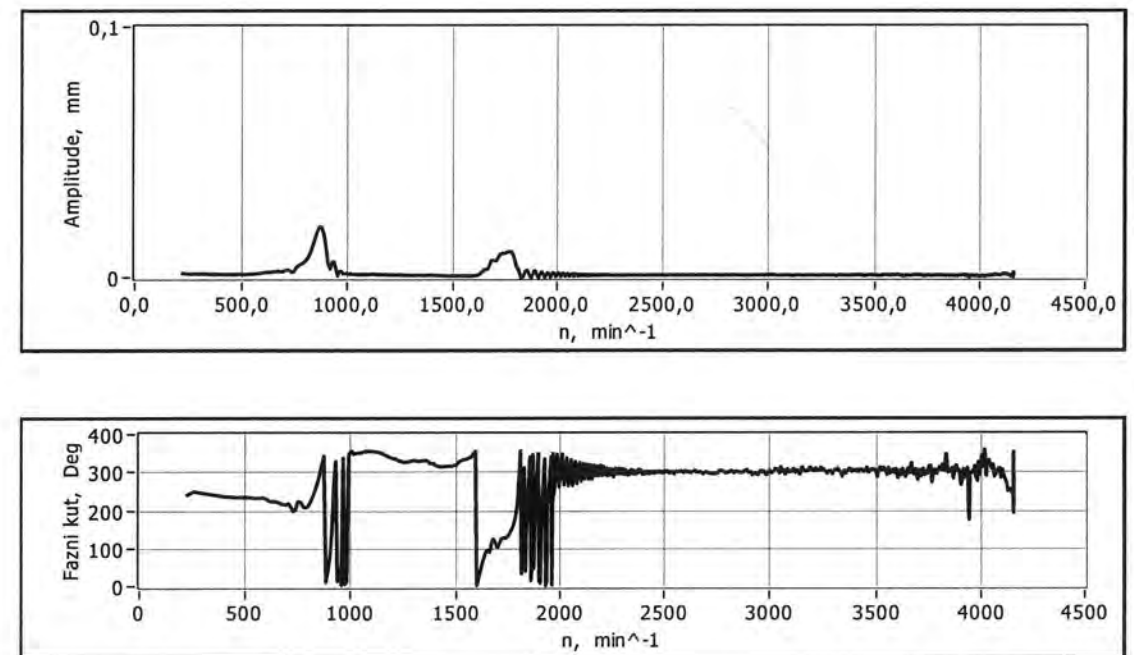
Slika 6.11. Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom



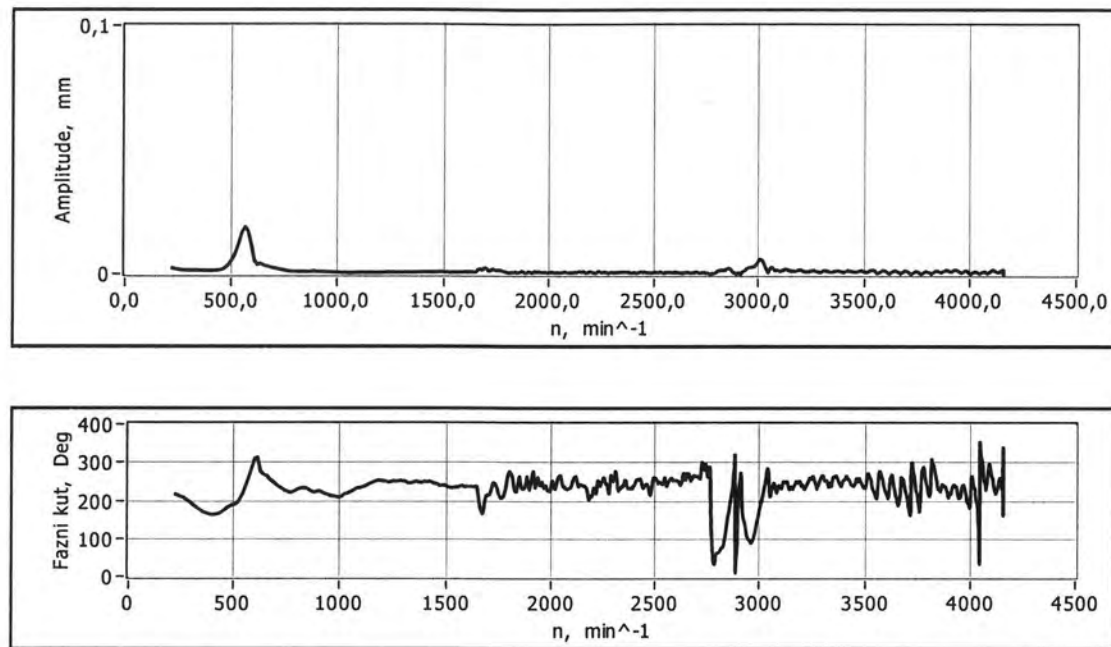
Slika 6.12. Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri kontaktu sa statorom



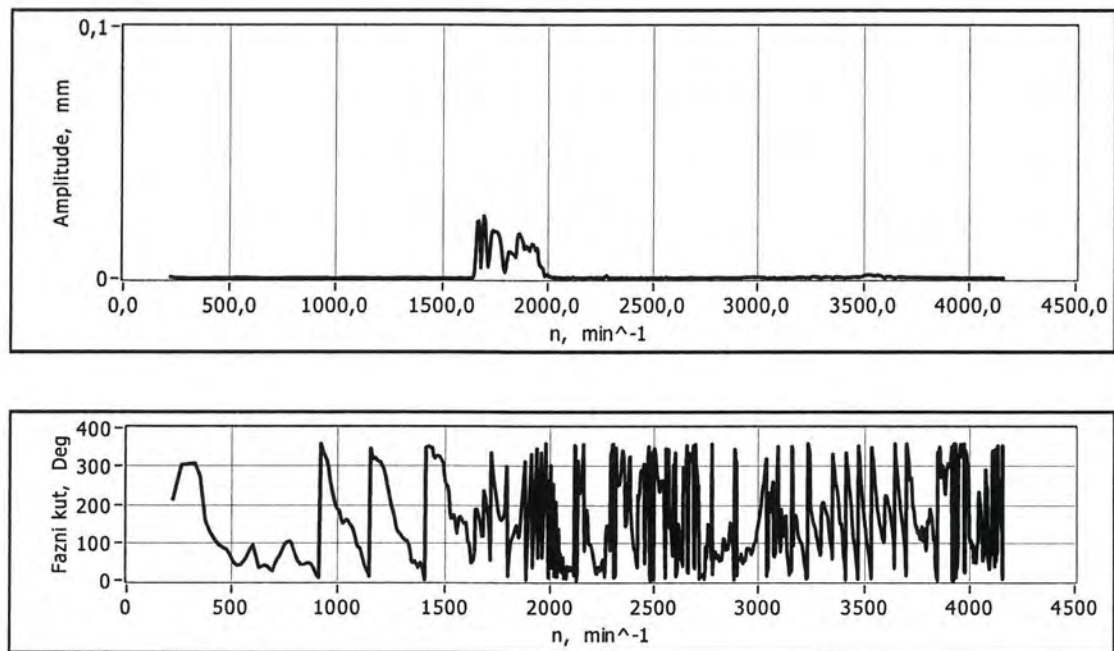
Slika 6.13. Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom



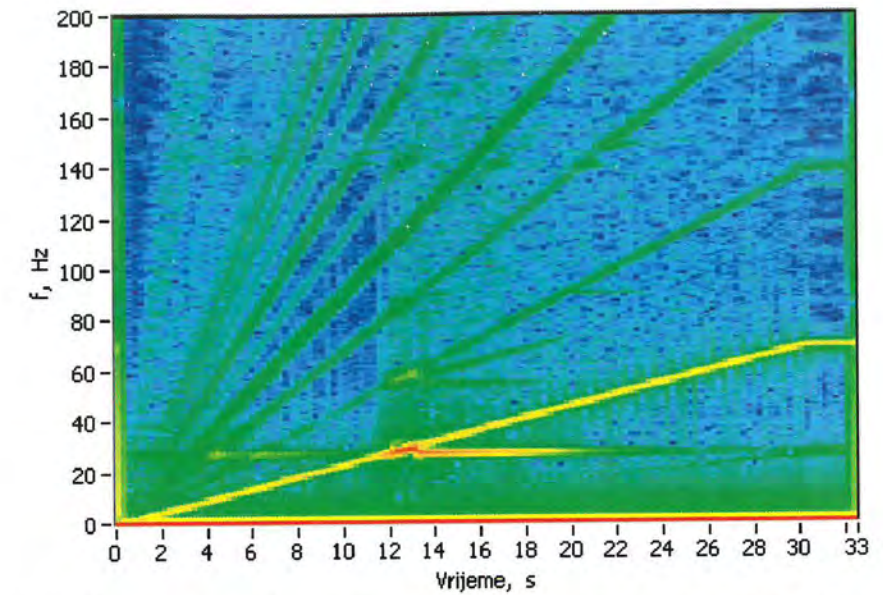
Slika 6.14. Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri kontaktu sa statorom



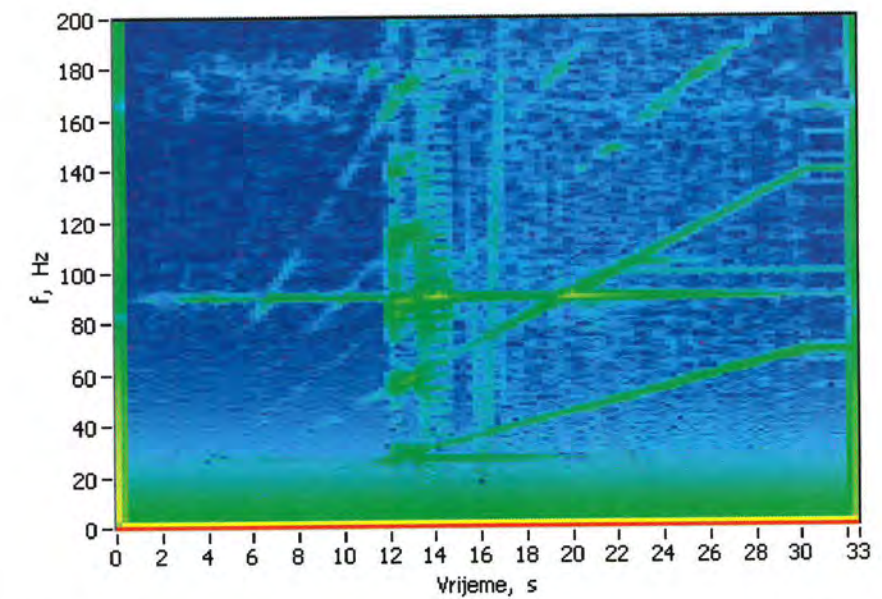
Slika 6.15. Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom



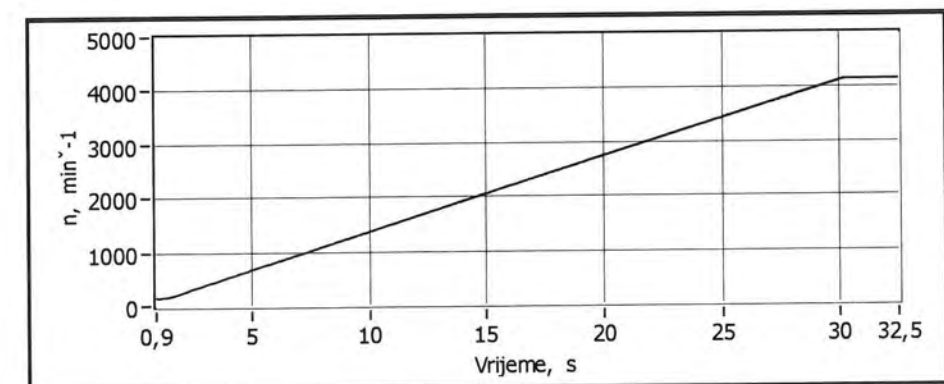
Slika 6.16. Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika statora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa rotorom



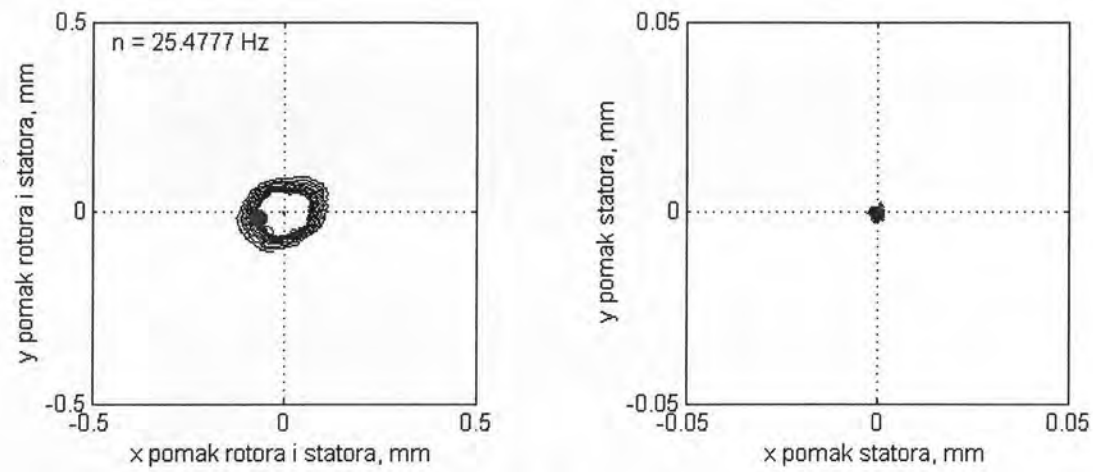
Slika 6.17. Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer pri pojavi dodira sa statorom



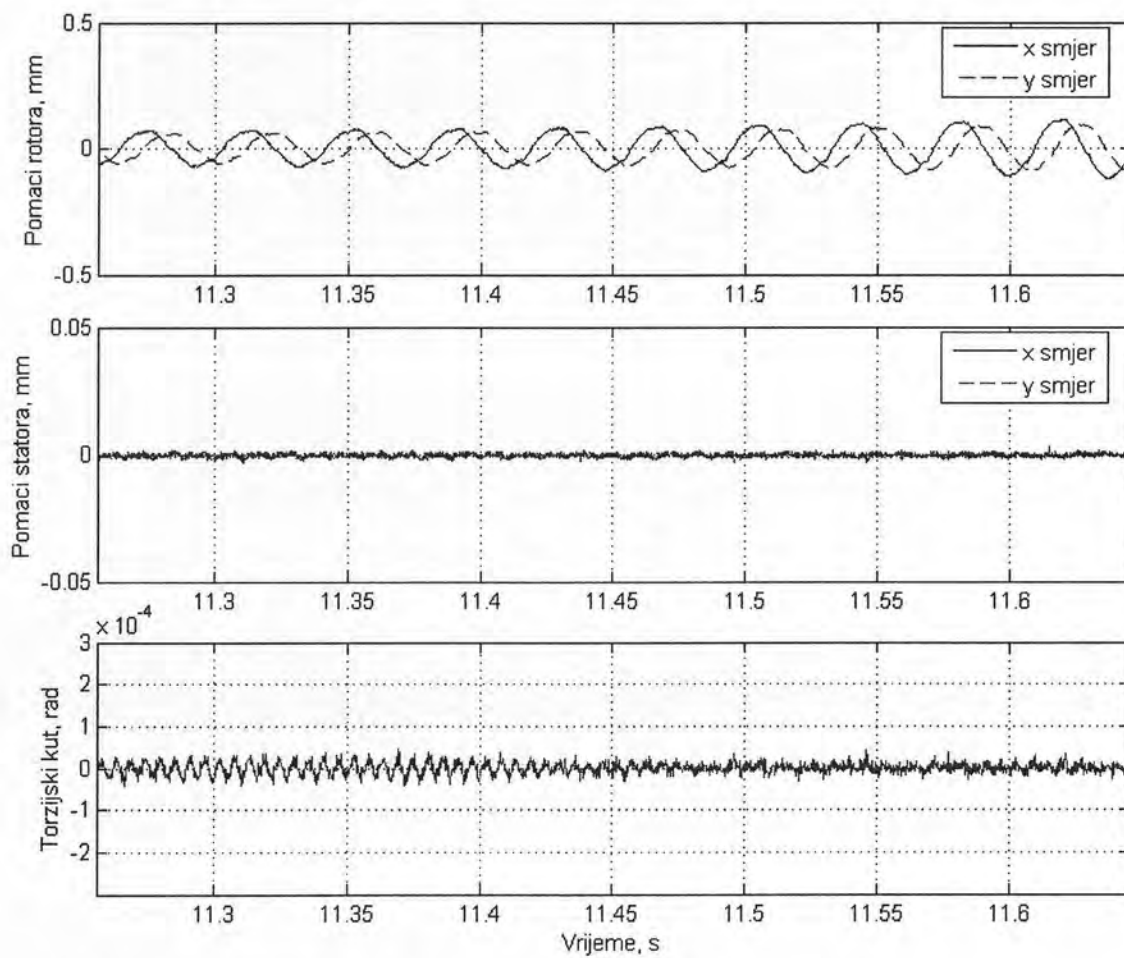
Slika 6.18. Spektralna mapa odziva statora za horizontalni smjer pri pojavi dodira sa rotorom



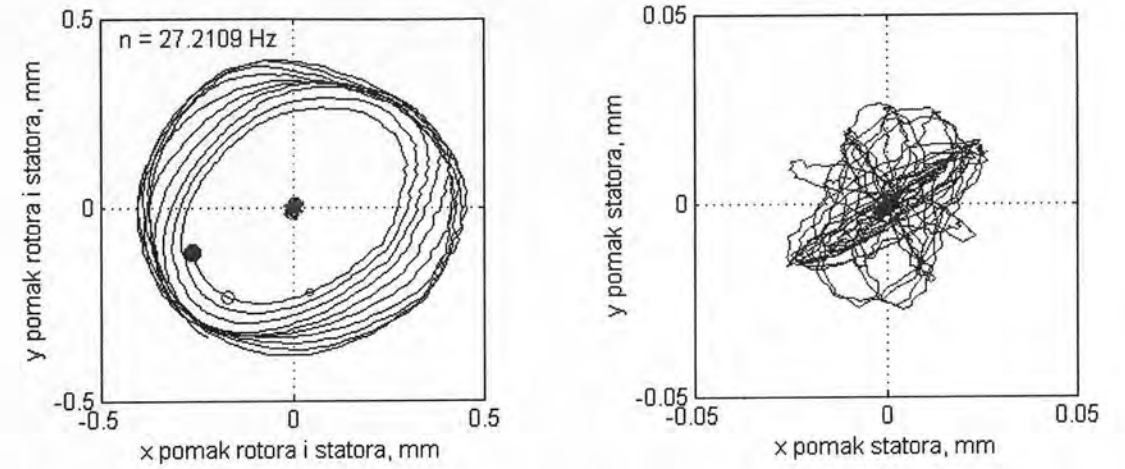
Slika 6.19. Promjena brzine vrtnje u vremenu



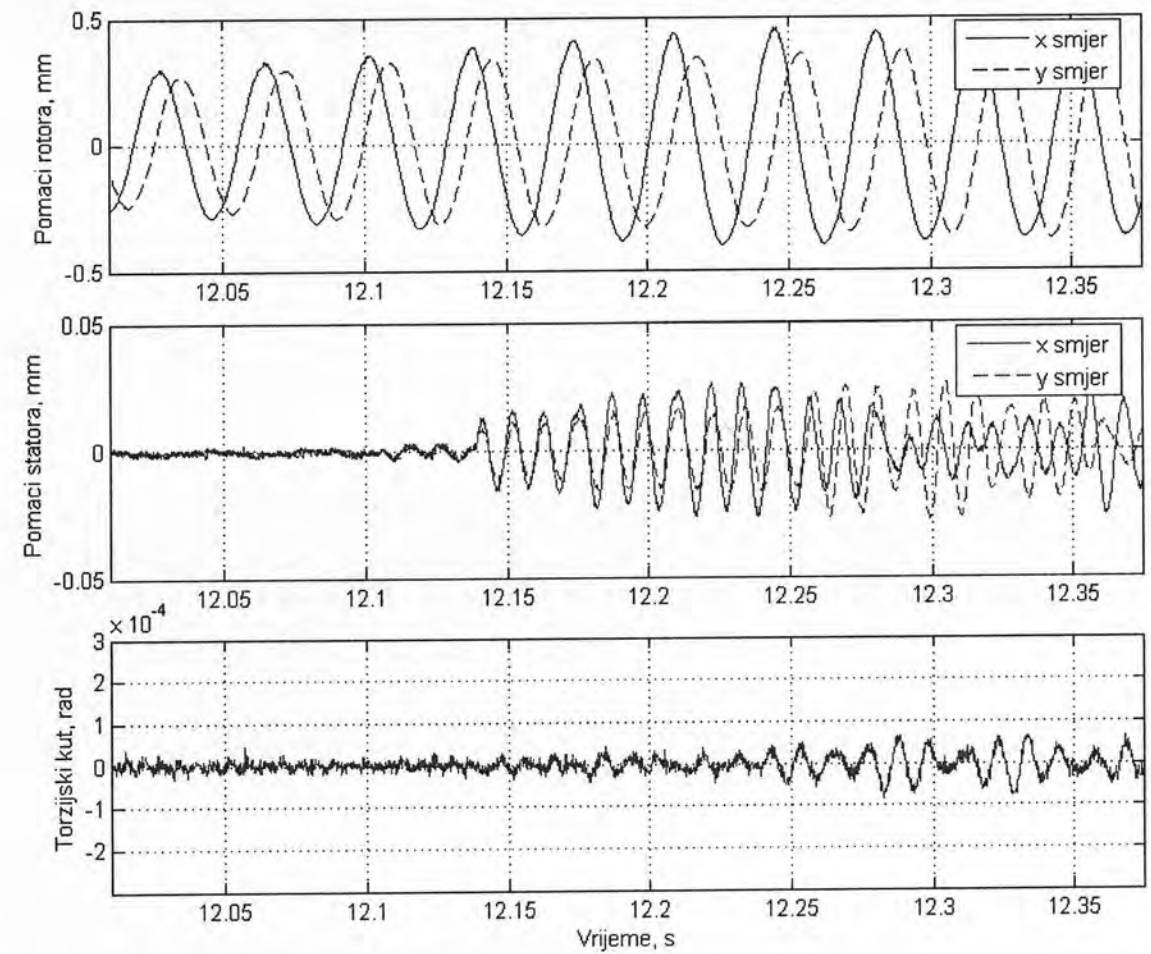
Slika 6.20. Orbite a) rotora i statora, b) statora. Mjerenje ubrzanja rotora sa manjim neuravnoteženjem pri brzini vrtnje  $n = 25.477$  Hz



Slika 6.21. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 25.477$  Hz

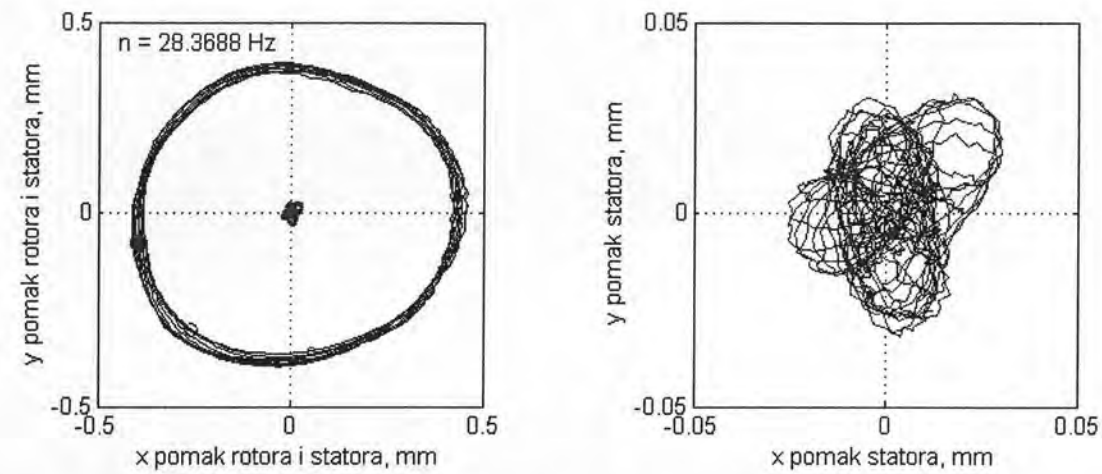


Slika 6.22. Orbite a) rotora i statora, b) statora. Mjerenje ubrzanja rotora sa manjim neuravnoteženjem pri brzini vrtnje  $n = 27.21$  Hz

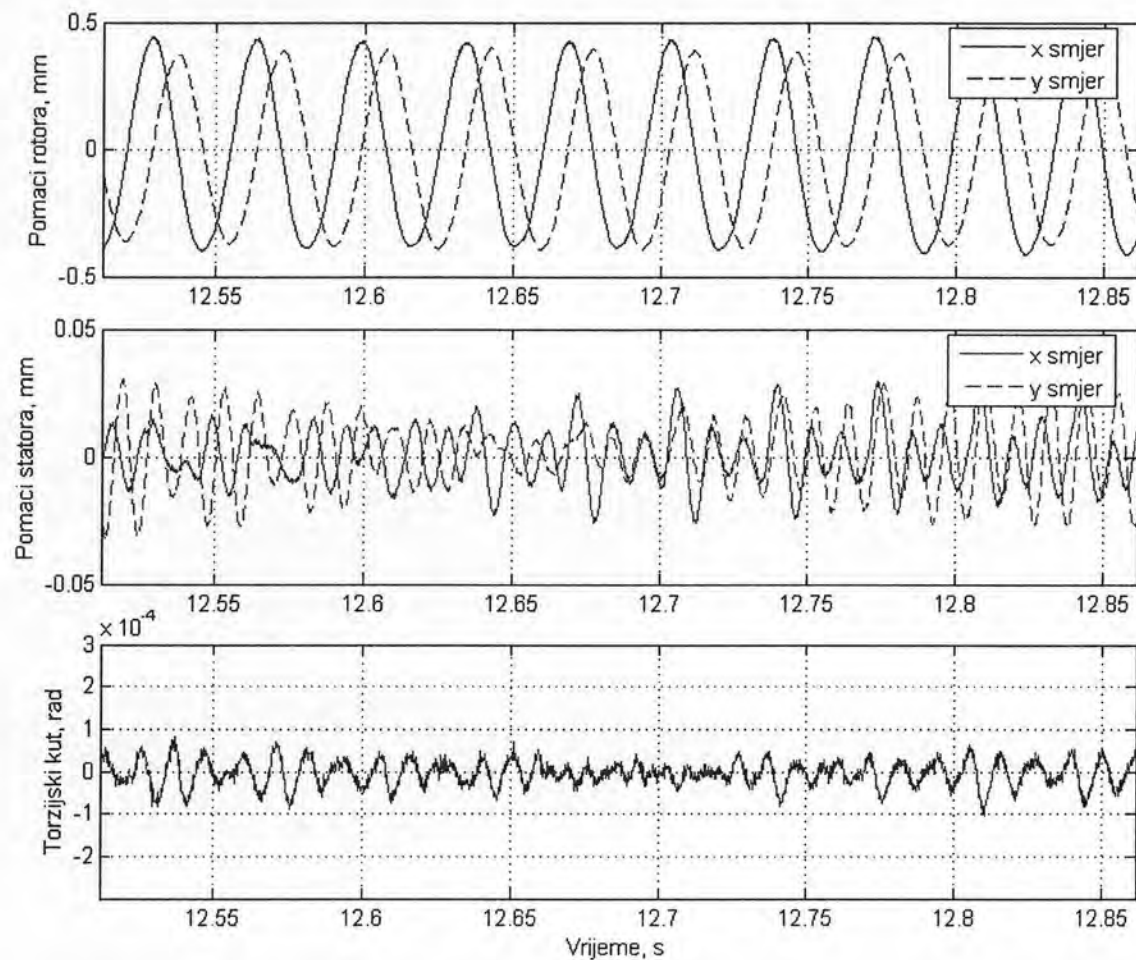


Slika 6.23. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 27.21$  Hz

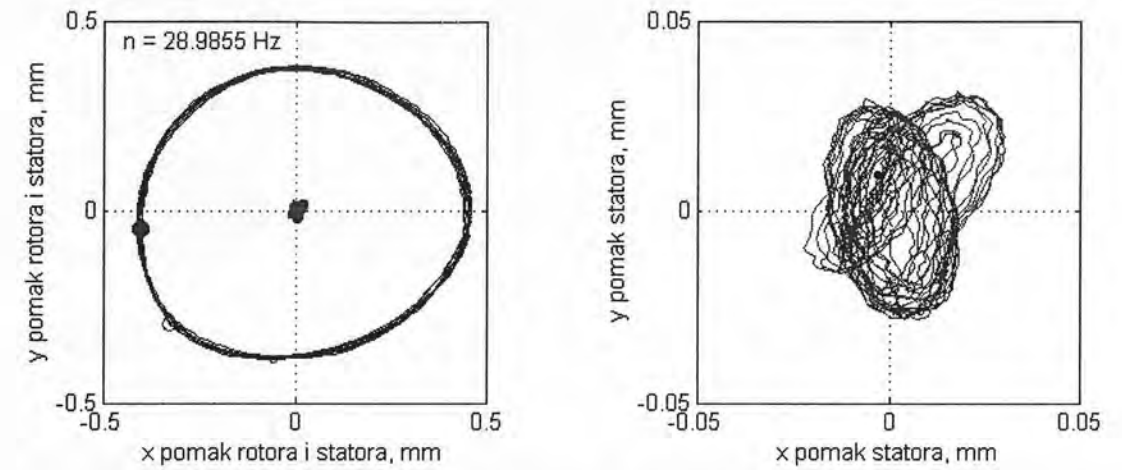




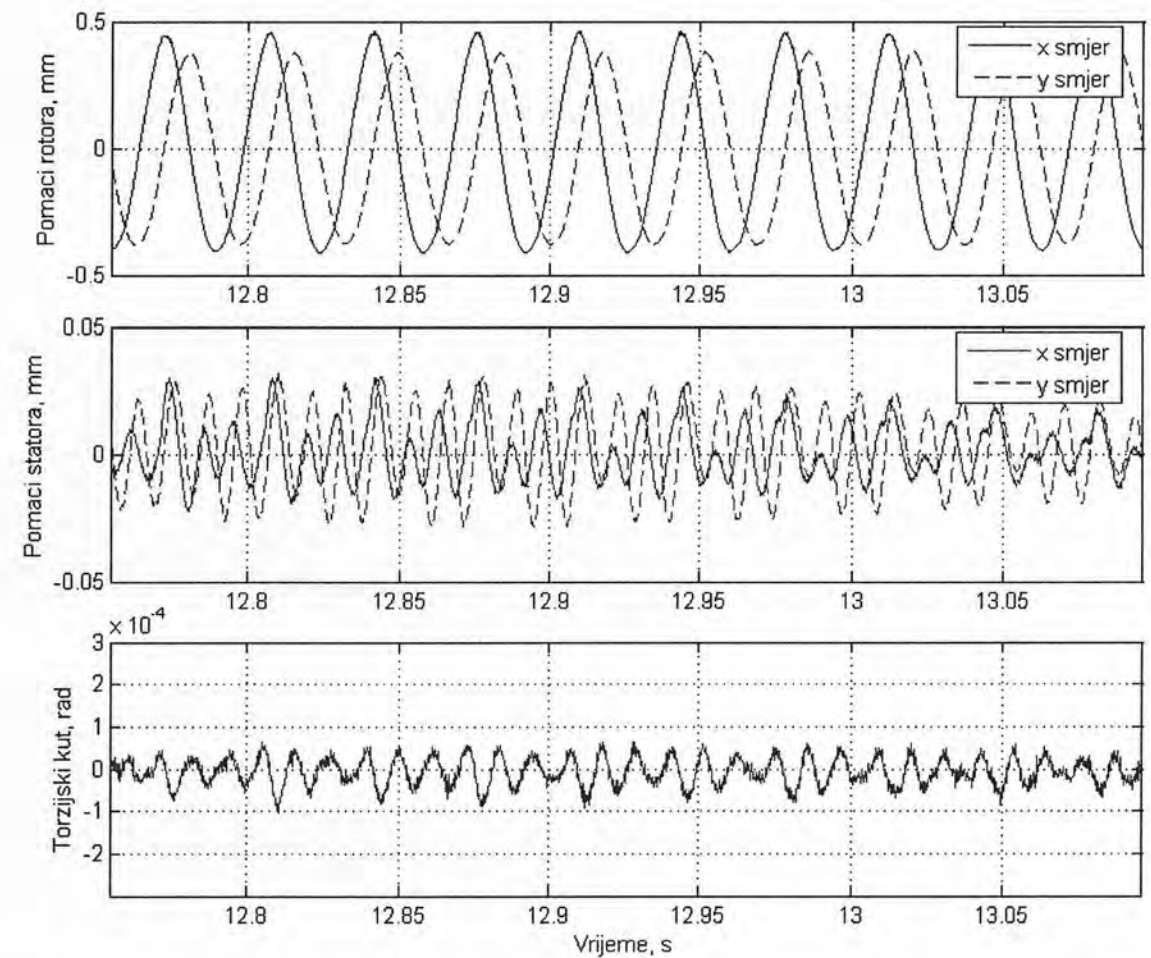
Slika 6.24. Orbite a) rotora i statora, b) statora. Mjerenje ubrzavanja rotora sa manjim neuravnoteženjem pri brzini vrtnje  $n = 28.37$  Hz



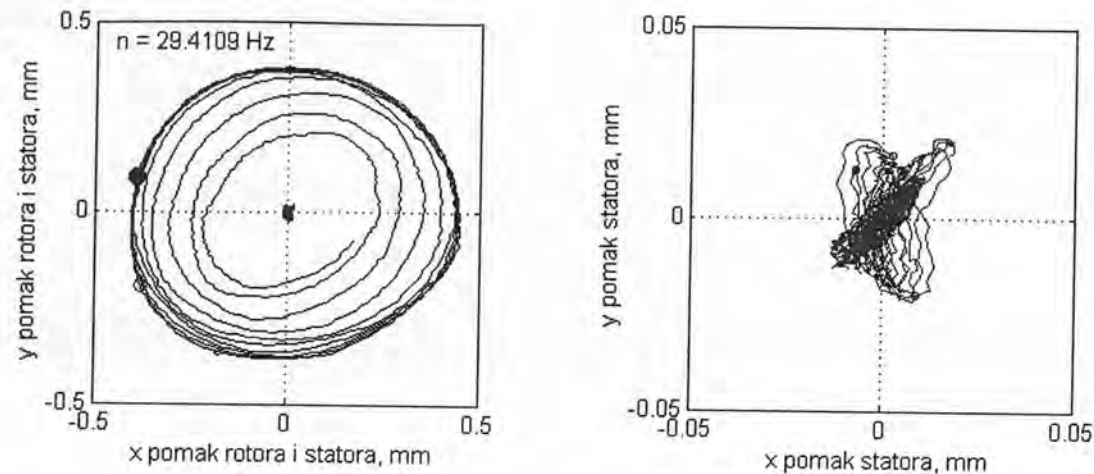
Slika 6.25. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 28.37$  Hz



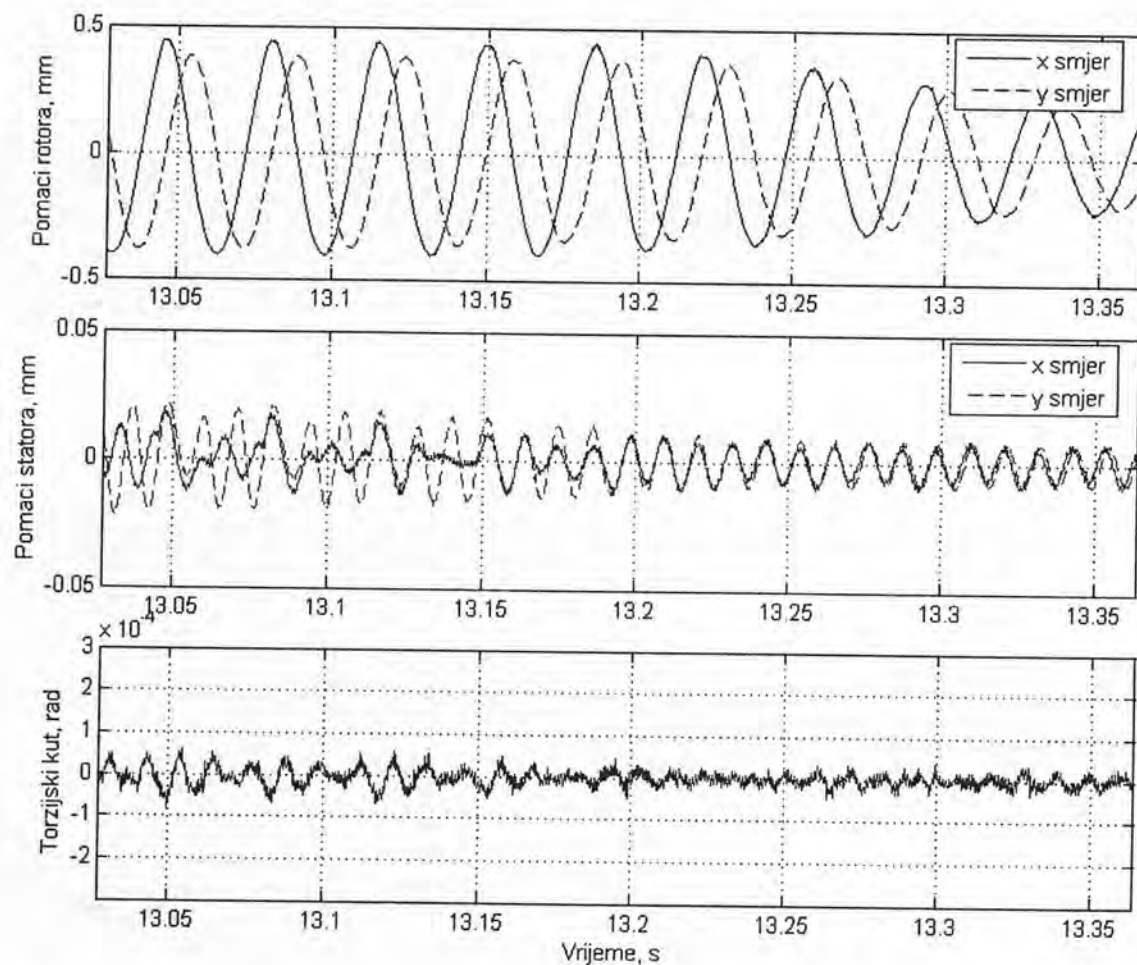
Slika 6.26. Orbite a) rotora i statora, b) statora. Mjerenje ubrzavanja rotora sa manjim neuravnoteženjem pri brzini vrtnje  $n = 28.99$  Hz



Slika 6.27. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 28.99$  Hz



**Slika 6.28.** Orbite a) rotora i statora, b) statora. Mjerenje ubrzanja rotora sa manjim neuravnoteženjem pri brzini vrtnje  $n = 29.41$  Hz



**Slika 6.29.** Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 29.41$  Hz

### Komentar rezultata mjerenja i usporedba sa rezultatima numeričke simulacije – ubrzanje rotora

Za prve dvije simulacije, komparativne analize dodira rotora sa elastičnim statorom bez i sa utjecajem torzije, razmatrane u poglavlju 4.2.3. vrijede parametri koji odgovaraju eksperimentalnoj analizi razmatranoj u ovom poglavlju te je moguća njihova direktna komparacija. Usporedbom slike 4.40 i slike 6.9. vidljiva je dobra podudarnost maksimalnih amplituda rotora dok su amplitude statora kod eksperimentalne analize nešto veće u odnosu na rezultate simulacije. Na slici 6.9. odnosno 6.10. u odzivu statora kod eksperimentalne analize prisutna su dodatna dva rezonantna područja no kako se oni nalaze izvan područja kontakta a isto tako izvan rezonantnog područja statora oni predstavljaju odziv statora na uzbudu višim harmonicima prenesenim od strane rotora ali preko temeljne ploče.

Iz usporedbe odziva eksperimentalnog mjerenja za x (horizontalnih) i y (vertikalni) smjer prikazanih na slikama 6.9. i 6.10. te u prikazima prvog harmonika odziva rotora na slikama 6.11. i 6.12. vidljiva je razlika u maksimalnim amplitudama tj. odziv u horizontalnom smjeru je veći u odnosu na vertikalni smjer. To upućuje na ortotropnost sustava posebno ortotropnost rotora (različite krutosti u horizontalno i vertikalnom smjeru) pošto se iz slike 6.22 koja prikazuje orbitu neposredno prije ulaska u dodir vidi eliptičan oblik orbite rotora koja nakon kontakta polako dobiva kružni oblik. To potvrđuje i analiza rotora bez uspostave dodira sa statorom prikazana u poglavlju 6.2 iako ne dovoljno naglašeno pošto cijela analiza traje 15 sekundi od brzine vrtnje 70 Hz do zaustavljanja te je zbog toga naglašen utjecaj tranzijentnih vibracija. U poglavlju 6.2 vidi se, ulaskom rotora u kritično područje s natkritične strane, zakretanje glavne osi elipse od vertikalnog ka horizontalnom smjeru što govori da su krutosti ležajeva rotora veće u vertikalnom a manje u horizontalnom smjeru. S obzirom na činjenicu da je rotor blago ortotropan te da se osi rotora i statora najvjerojatnije ne poklapaju u potpunosti zbog manualnog podešavanja, razumljive su razlike između numeričke FEM simulacije prikazane u poglavlju 4.2.3. i eksperimentalne analize u ovom poglavlju.

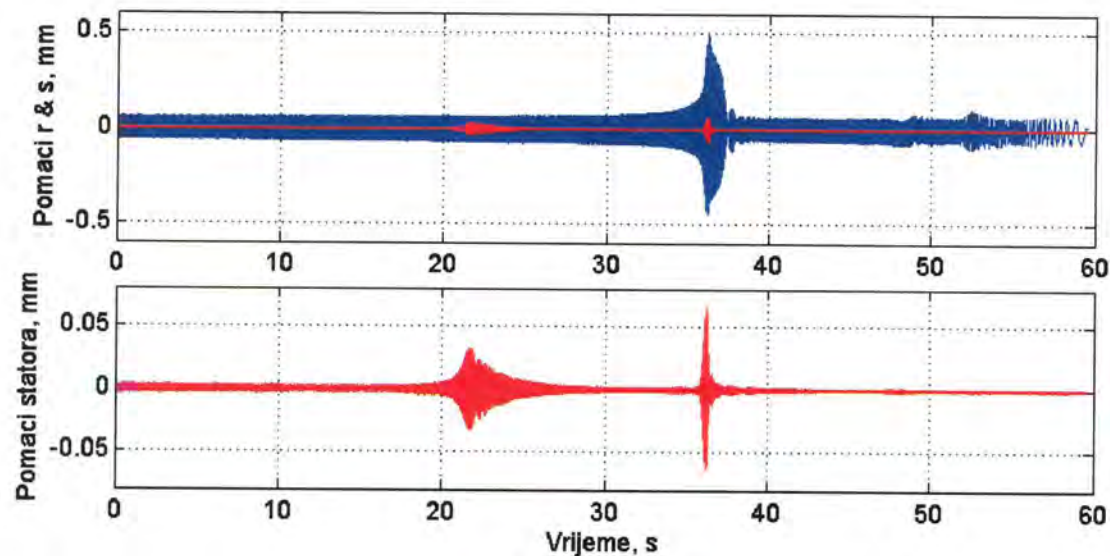
Na spektralnoj mapi prikazanoj na slici 6.17. vidi se 1. fleksijska vlastita frekvencija na 28 Hz no kako je njezin odziv prisutan pri gotovo svim brzinama vrtnje može se pretpostaviti na problem pojeve samo-uzbudnih vibracija.

Na slici 6.18. prikazana je spektralna mapa odziva statora za horizontalni smjer pri pojavi dodira sa rotorom. Na njoj je jasno vidljive horizontalne linije na 90 i oko 100 Hz što bi prema proračunu a i prema modalnom ispitivanju pripadalo 1. fleksijskoj i 1. torzijskoj vlastitoj frekvenciji.

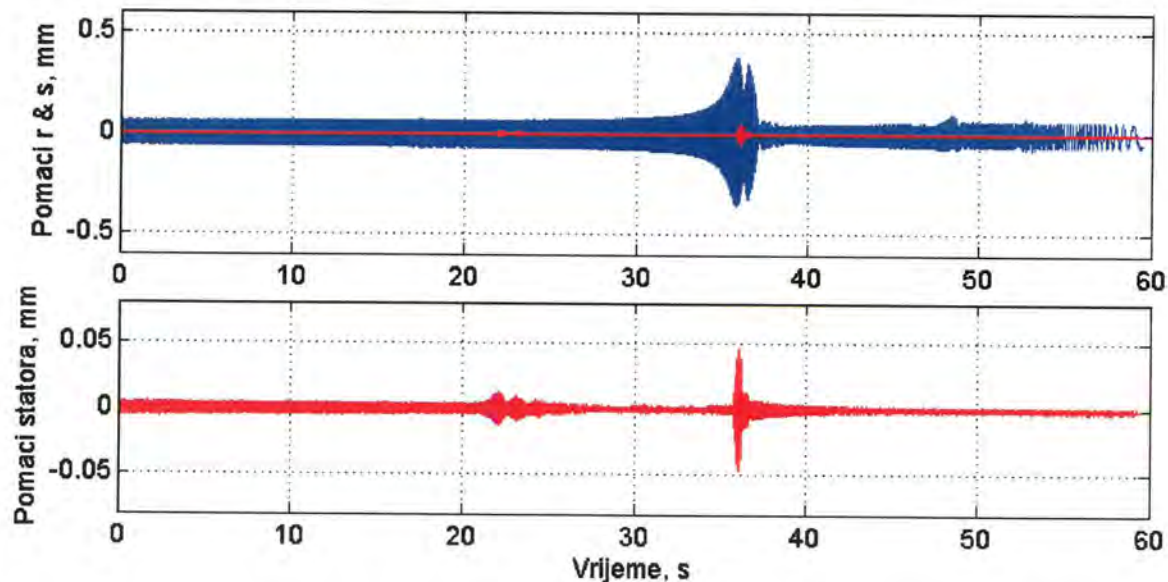
Praćenjem odziva rotora na slikama 6.20. do 6.28. (orbite) može se zaključiti da natražna precesija rotora nije uočena, što potvrđuje i numerička analiza.

## 6.3.1.2. Usporavanje rotora

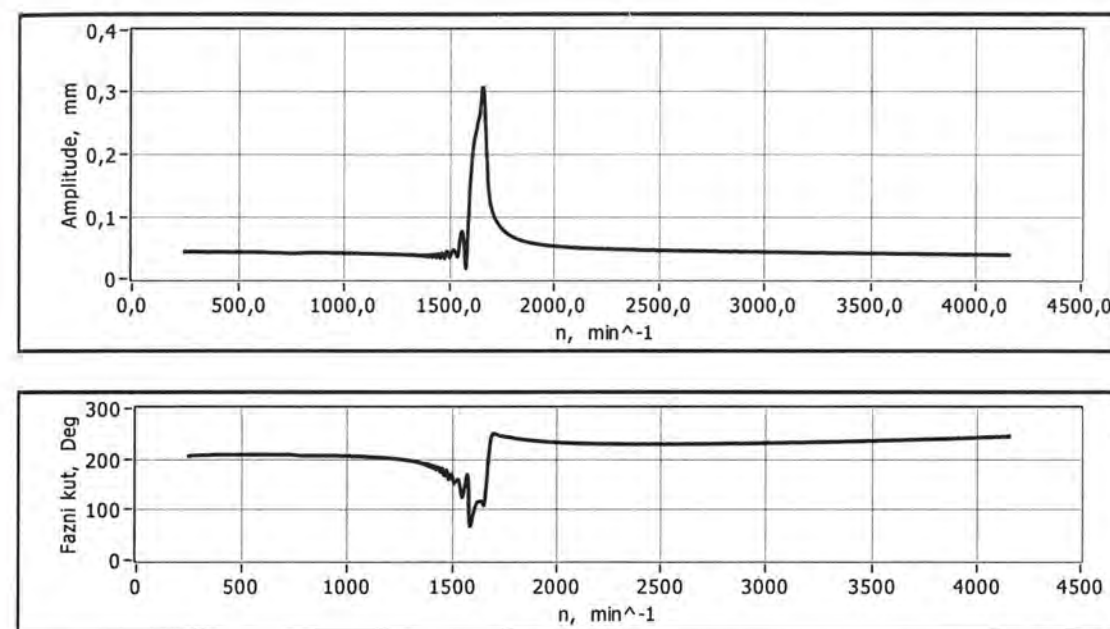
Ovaj dio analize može se direktno usporediti sa analizom u poglavlju 6.2. pošto se radi o istom nivou uravnoteženosti te također o usporavanju rotora (zaustavljanju). Slike 6.30 i 6.31. prikazuju radijalne pomake rotora i statora zajedno te statora posebno uvećano u horizontalnom odnosno vertikalnom smjeru. Kao i u prethodnoj analizi i ovdje je vidljivo da su pomaci statora za cijeli red veličine manji u odnosu na rotor. Slike 6.32. do 6.35. prikazuju odzive pojedinih harmonika rotora u horizontalnom odnosno vertikalnom smjeru. Na slici 6.36. prikazan je odziv 2. harmonika torzijskih kutova statora dok je na slici 6.37. prikazan 3. harmonika statora u horizontalnom smjeru. Slike 6.38. i 6.39. prikazuju spektralne mape rotora u horizontalnom smjeru odnosno statorskih torzijskih kutova, pri pojavi dodira između njih međusobno. Na slici 6.40. vidljiva je promjena brzine vrtnje u vremenu.



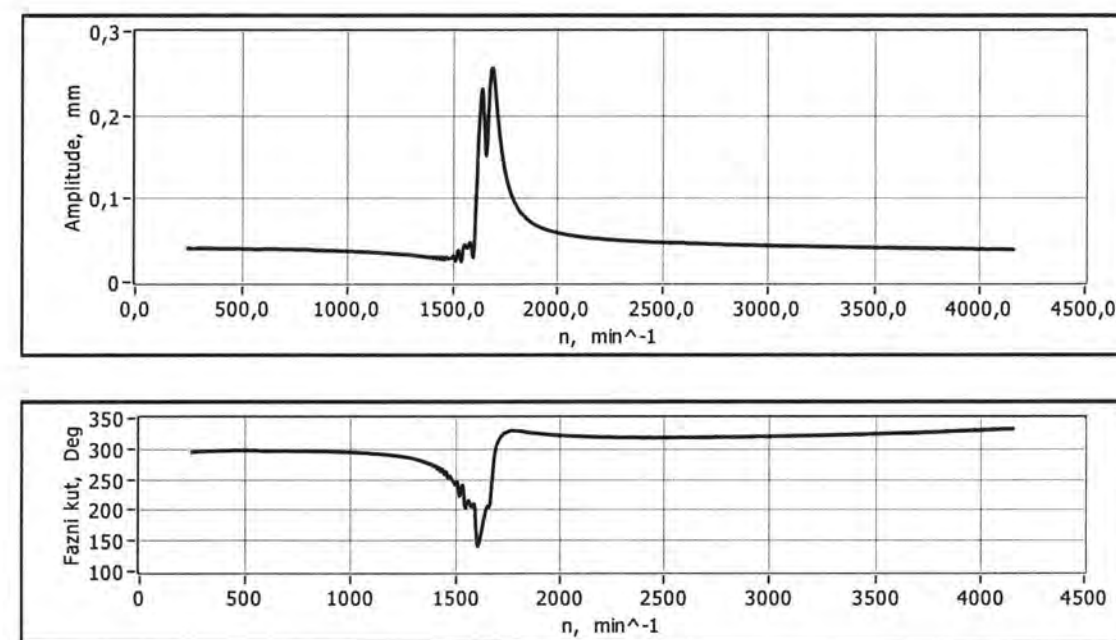
Slika 6.30. Radijalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u horizontalnom smjeru



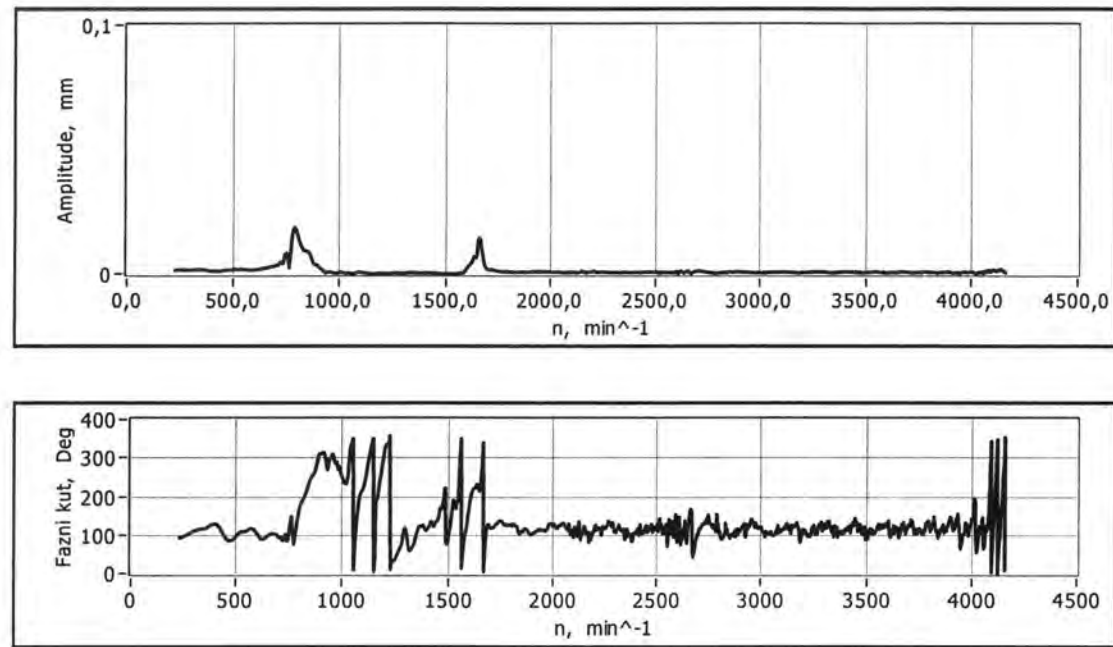
Slika 6.31. Radijalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u vertikalnom smjeru



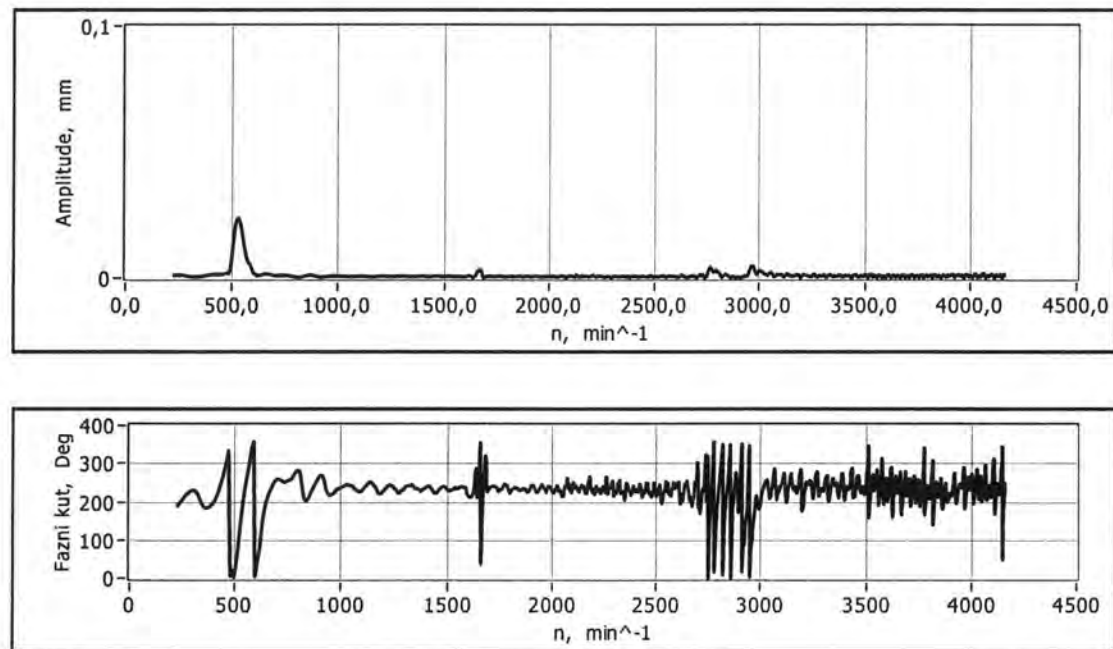
Slika 6.32. Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – usporavanje rotora



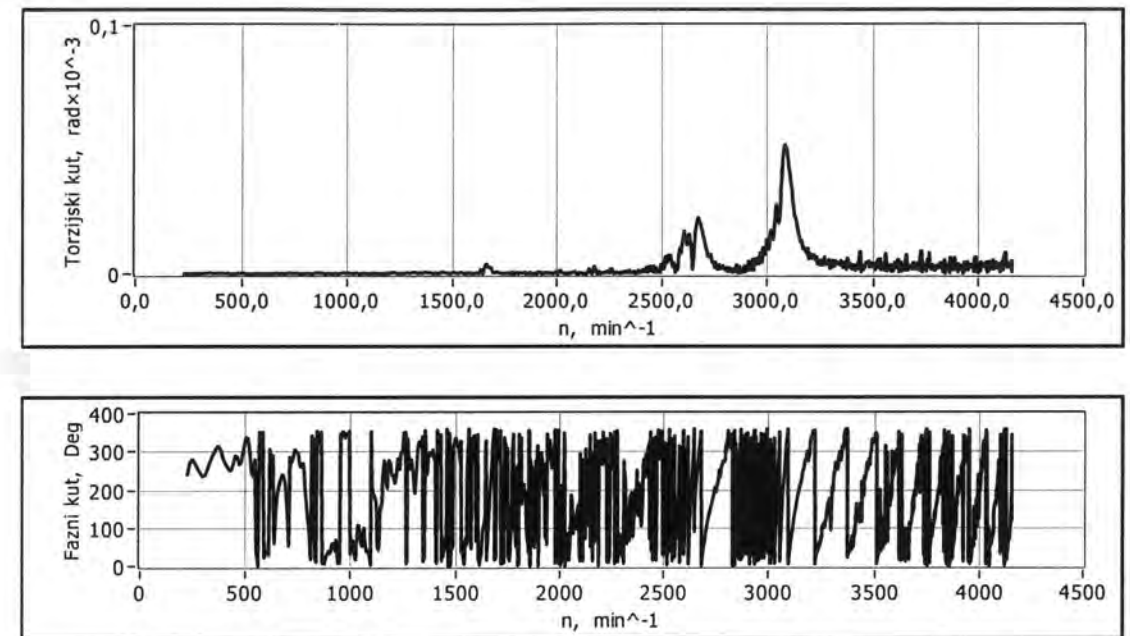
Slika 6.33. Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – usporavanje rotora



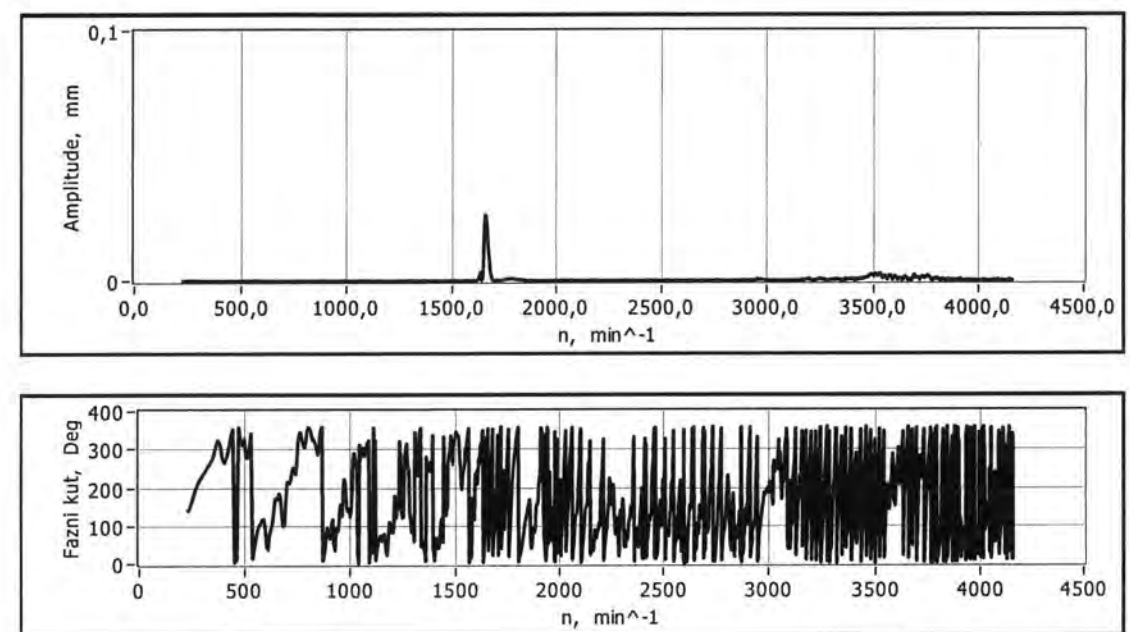
Slika 6.34. Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – usporavanje rotora



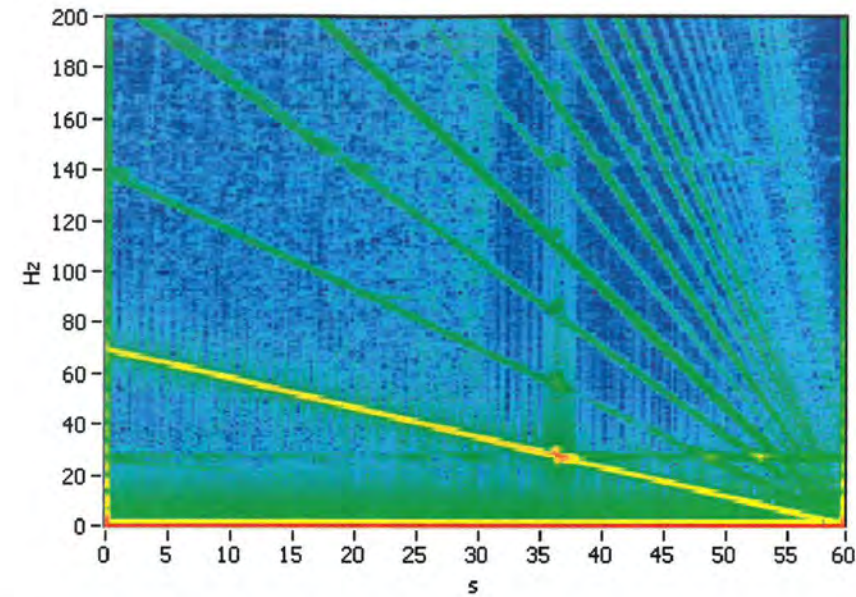
Slika 6.35. Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – usporavanje rotora



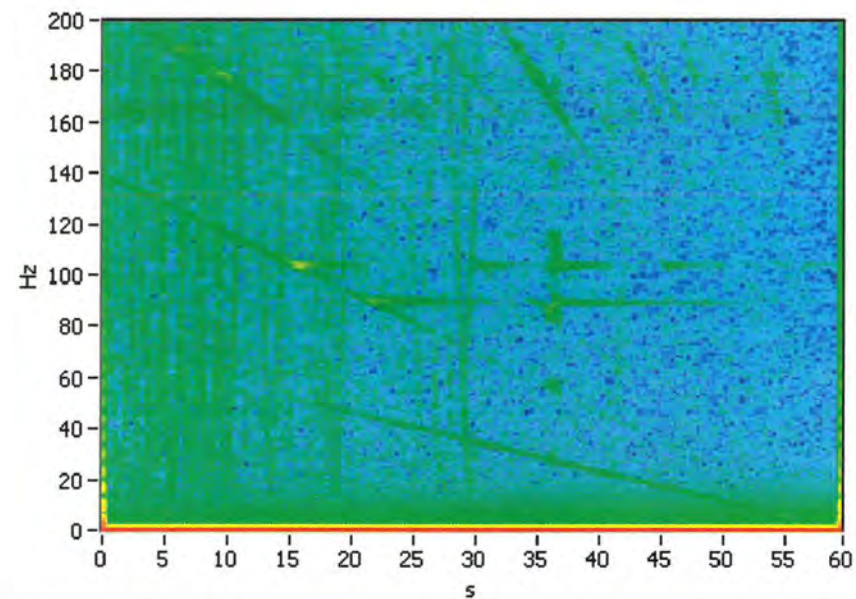
Slika 6.36. Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika torzijskih rotacija statora pri kontaktu sa rotorom – usporavanje rotora



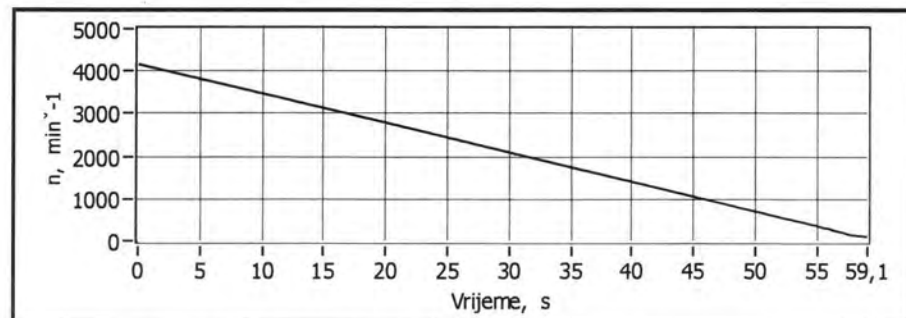
Slika 6.37. Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika statora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa rotorom



Slika 6.38. Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer pri pojavi dodira sa statorom



Slika 6.39. Spektralna mapa torzijskih kutova statora pri pojavi dodira sa rotorom, mjenjenih parom beskontaktnih senzora



Slika 6.40. Promjena brzine vrtnje u vremenu

### Komentar rezultata mjerenja – usporavanje rotora

Uslijed sporije promjene brzine vrtnje ( $70 - 0 \text{ Hz}$  u  $60 \text{ s}$ ) manje je izražen utjecaj tranzijentnih vibracija te su ostvareni uvjeti bliski stacionarnim. Uslijed takvog čisteg odziva uočena je ortotropnost. Na slikama 6.31. i 6.33. prvi put su uočene dvije vršne vrijednosti u području kritične brzine, što uz predviđeni slabi utjecaj giroskopskog efekta na prvu fleksijsku vlastitu frekvenciju upućuje na ortotropnost rotora.

Na slici 6.30. i 6.31. također se u odzivu statora vidi dodatno rezonantno područje u 22 sekundi. Ono pripada vlastitoj frekvenciji statora pobuđenoj sa drugim harmonikom rotora preko temeljne ploče kako je već bilo komentirano ranije.

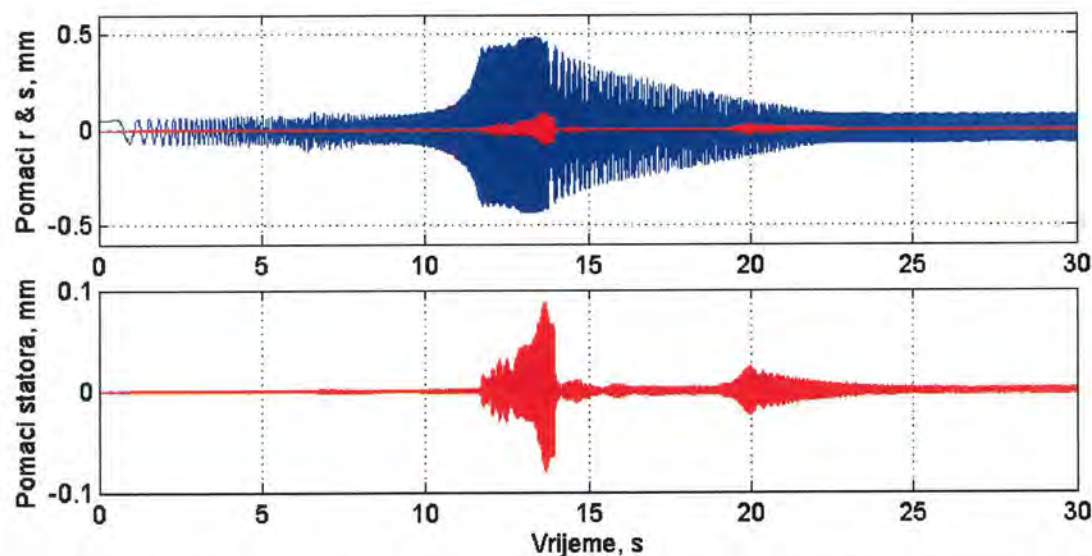
Iz slike 6.36. koja prikazuje amplitude pomaka drugog harmonika torzijskih rotacija statora pri kontaktu sa rotorom jasno se vidi pobuđivanje prve vlastite fleksijske i prve vlastite torzijske frekvencije statora drugim harmonikom.

### 6.3.2. Analiza dinamike rotora pri pojavi dodira sa statorom – veća neuravnoteženost

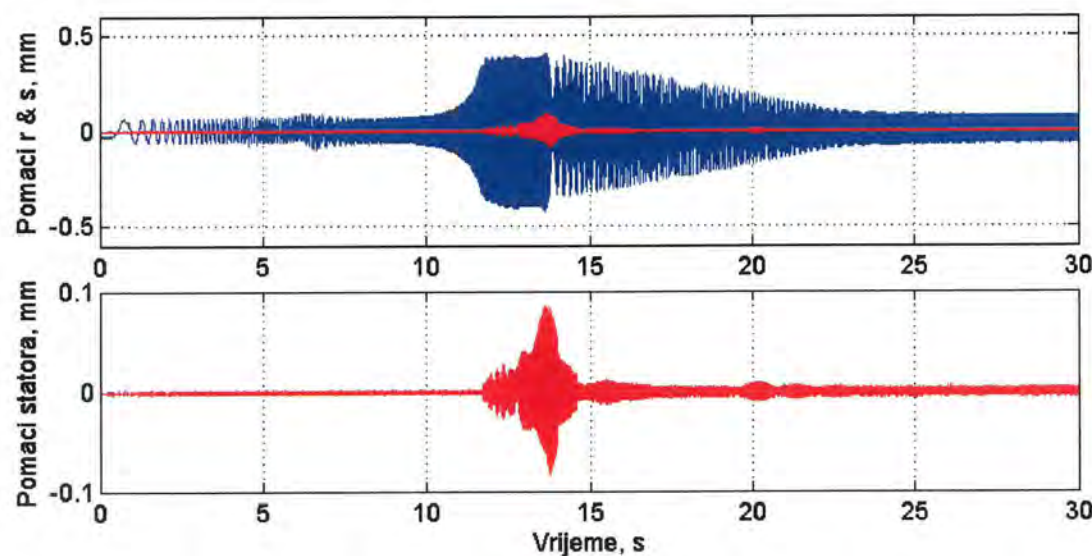
#### 6.3.2.1. Ubrzavanje rotora

U ovom dijelu analize je rotoru namjerno povećano neuravnoteženje za iznos  $m_d = 2.7$  g u odnosu na stanje iz poglavlja 6.2. odnosno također poglavlja 6.3.1.

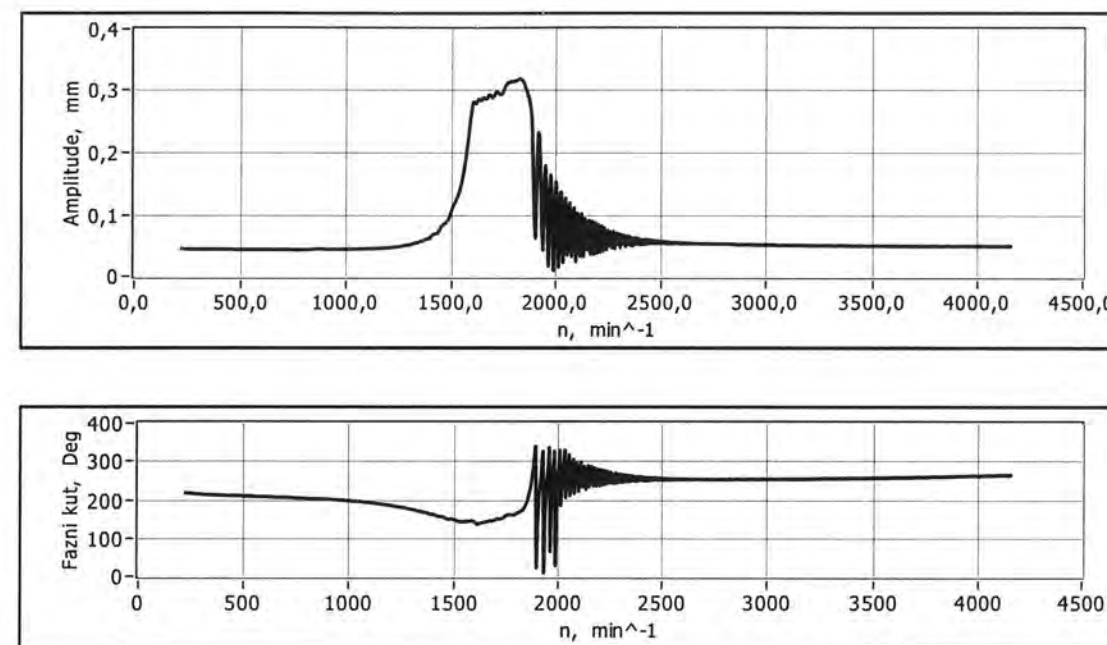
Slike 6.41 i 6.42. prikazuju radijalne pomake rotora i statora zajedno te statora posebno uvećano u horizontalnom odnosno vertikalnom smjeru. Slike 6.43. do 6.46. prikazuju odzive pojedinih harmonika rotora u horizontalnom odnosno vertikalnom smjeru. Na slici 6.47. prikazan je odziv 2. harmonika torzijskih kutova statora dok je na slici 6.48. prikazan 3. harmonika statora u horizontalnom smjeru. Slike 6.49. i 6.50. prikazuju spektralne mape rotora u horizontalnom smjeru odnosno statorskih torzijskih kutova, pri pojavi dodira između njih međusobno. Na slici 6.51. vidljiva je promjena brzine vrtnje u vremenu.



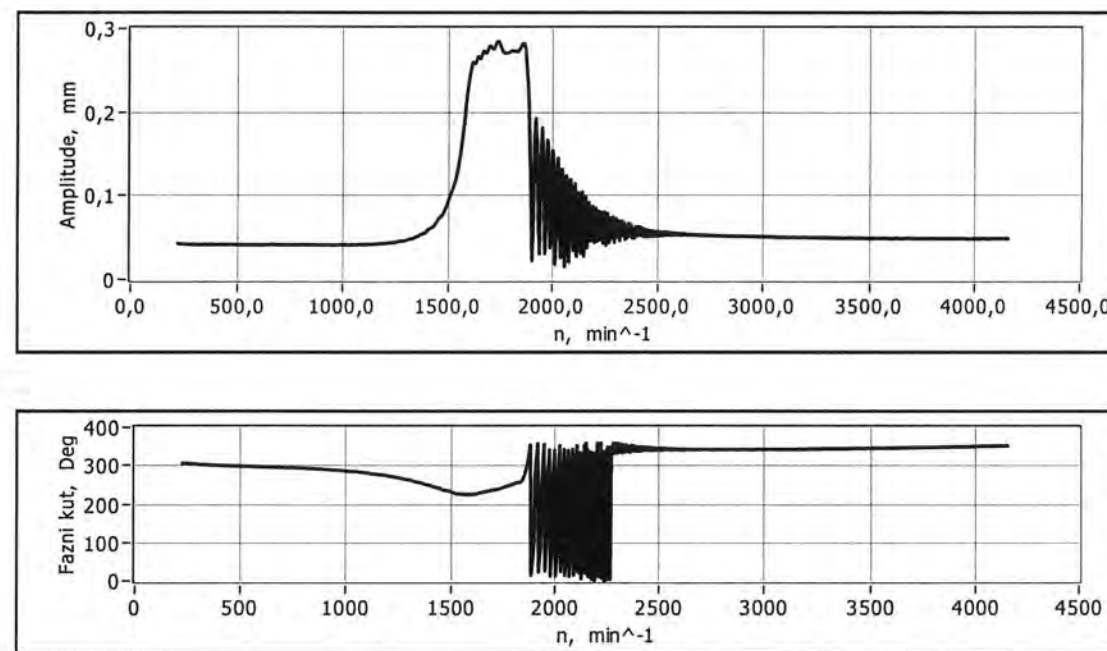
Slika 6.41. Radijalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u horizontalnom smjeru



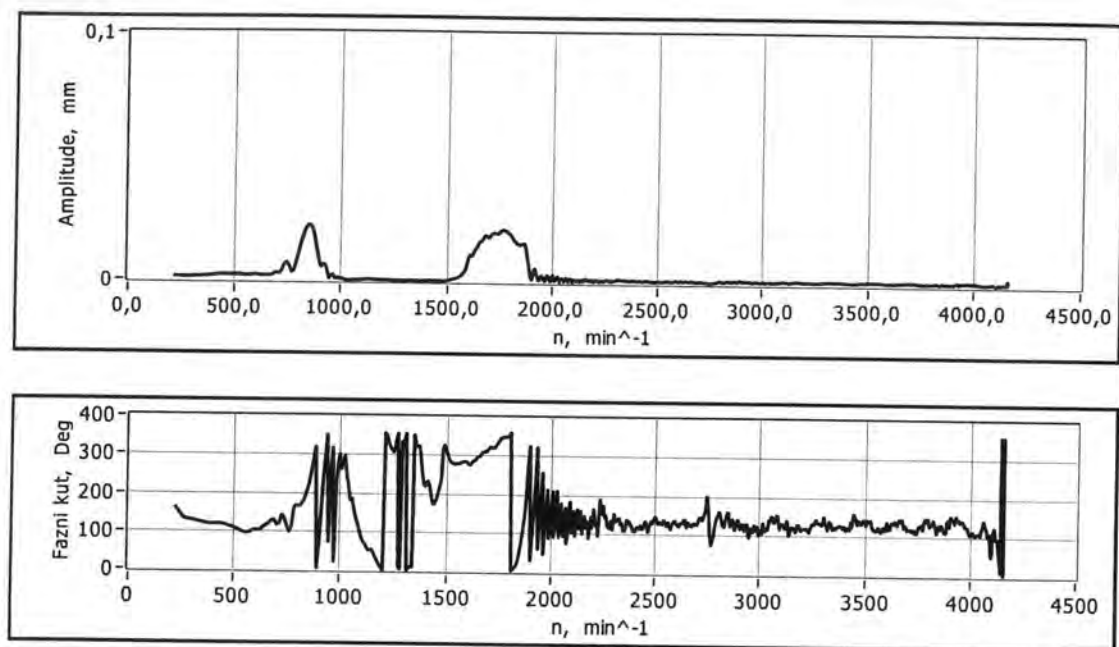
Slika 6.42. Radijalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u vertikalnom smjeru



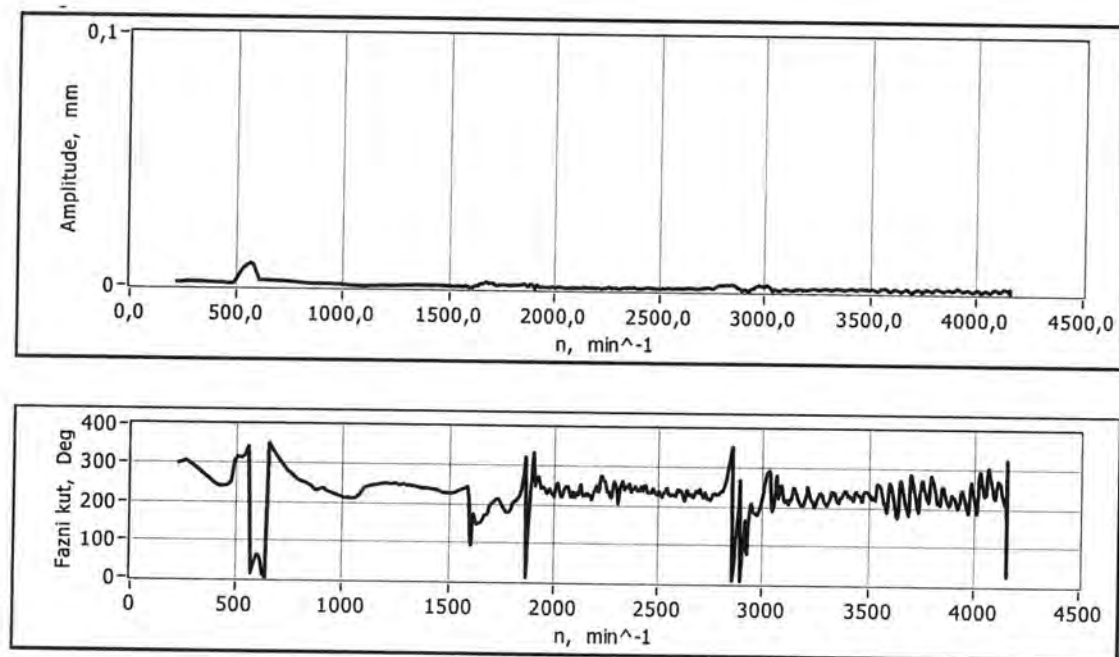
Slika 6.43. Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – povećano neuravnoteženje



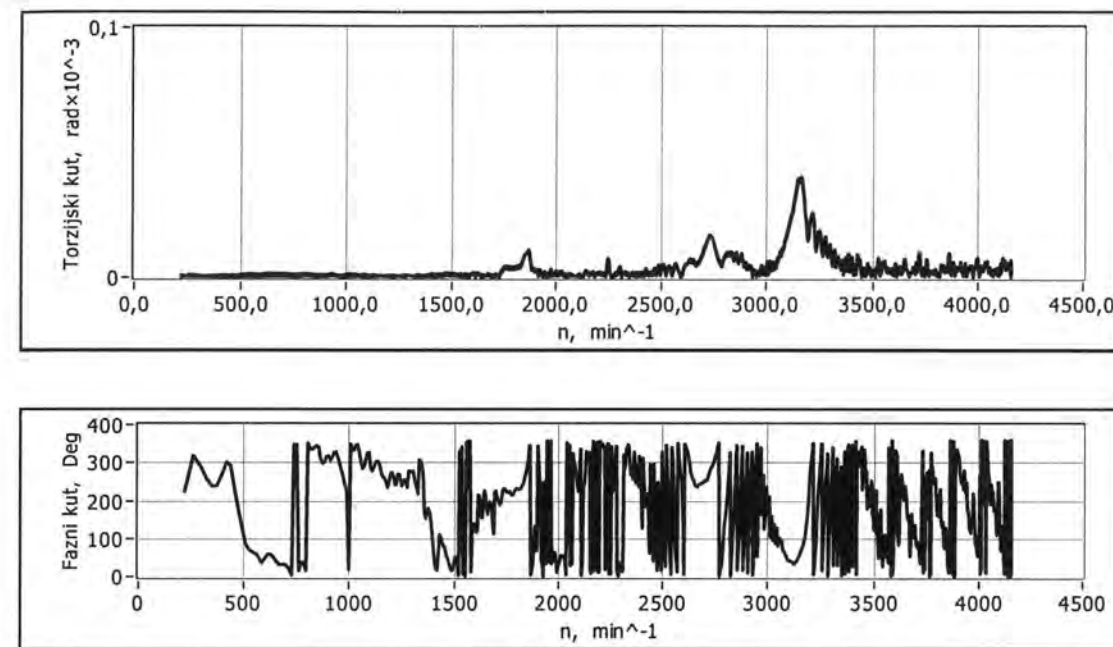
Slika 6.44. Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – povećano neuravnoteženje



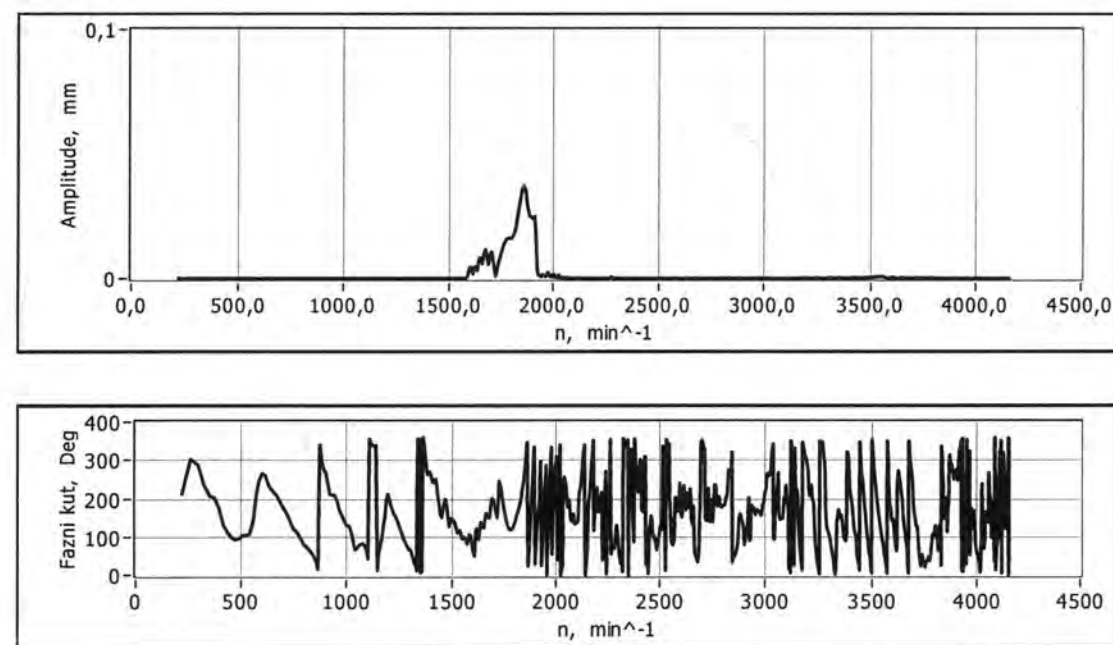
Slika 6.45. Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – povećano neuravnoteženje



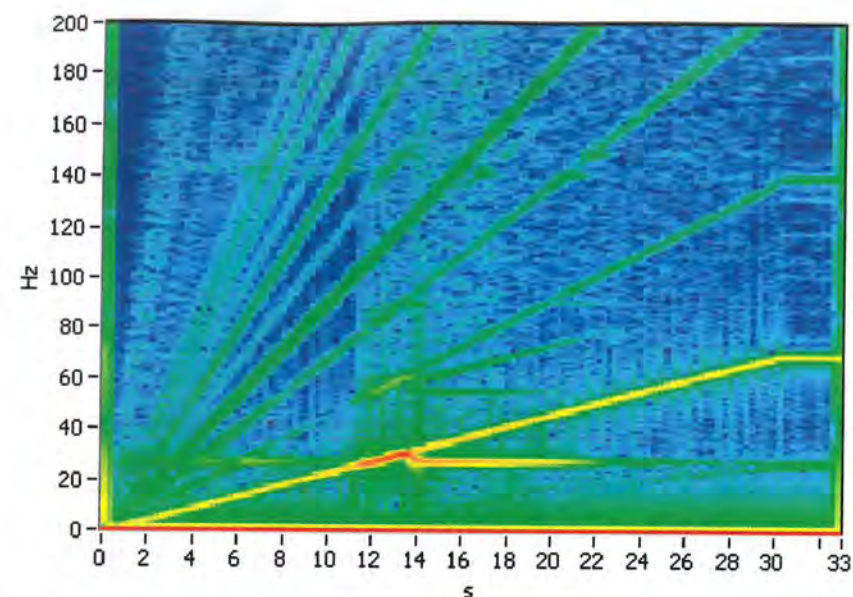
Slika 6.46. Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – povećano neuravnoteženje



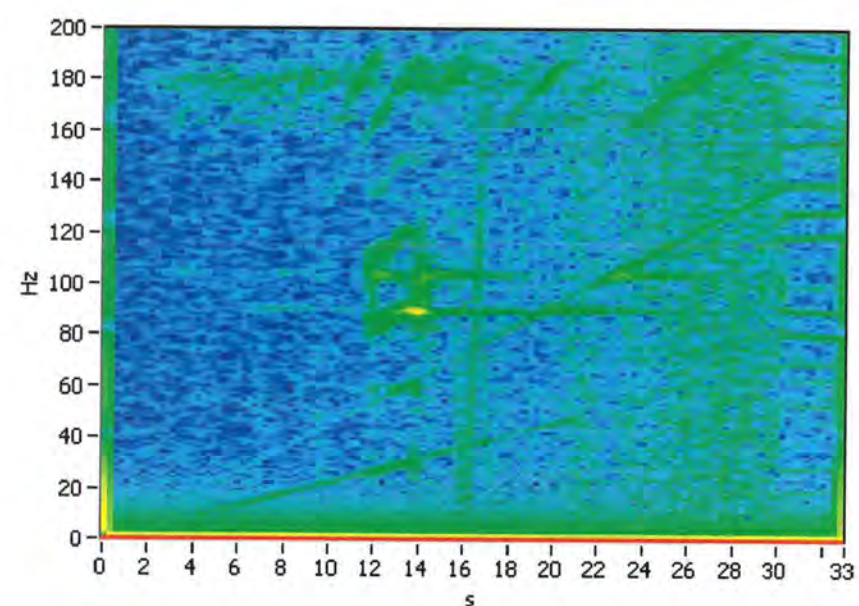
Slika 6.47. Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika torzijskih rotacija statora pri kontaktu sa rotorom – povećano neuravnoteženje



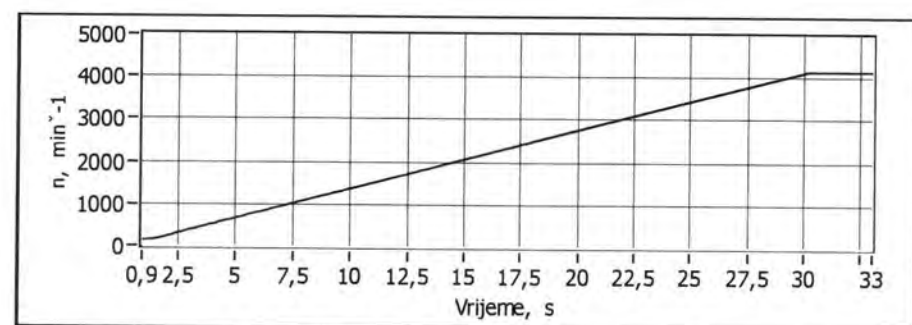
Slika 6.48. Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika statora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa rotorom - povećano neuravnoteženje



Slika 6.49. Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer pri pojavi dodira sa statorom



Slika 6.50. Spektralna mapa torzijskih kutova statora pri pojavi dodira sa rotorom, mjerenih parom beskontaktnih senzora



Slika 6.51. Promjena brzine vrtnje u vremenu

### Komentar rezultata mjerenja, veća neuravnoteženost, ubrzavanje rotora

Na prethodnim slikama konkretno slikama 6.41 i 6.42. koje prikazuju radialne pomake rotora i statora zajedno te statora posebno uvećano u horizontalnom odnosno vertikalnom smjeru vidljivo je širenje područja brzina vrtnje rotora u kojem su rotor i stator u kontaktu, u odnosu na ekvivalentnu situaciju sa manjim neuravnoteženjem (slike 6.9. i 6.10.), kao što je to bilo predviđeno od strane numeričkih modela.

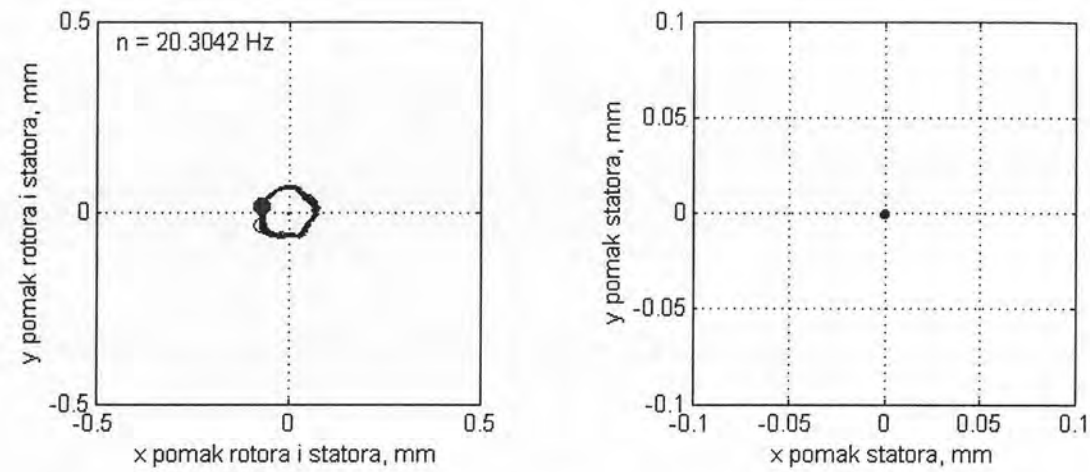
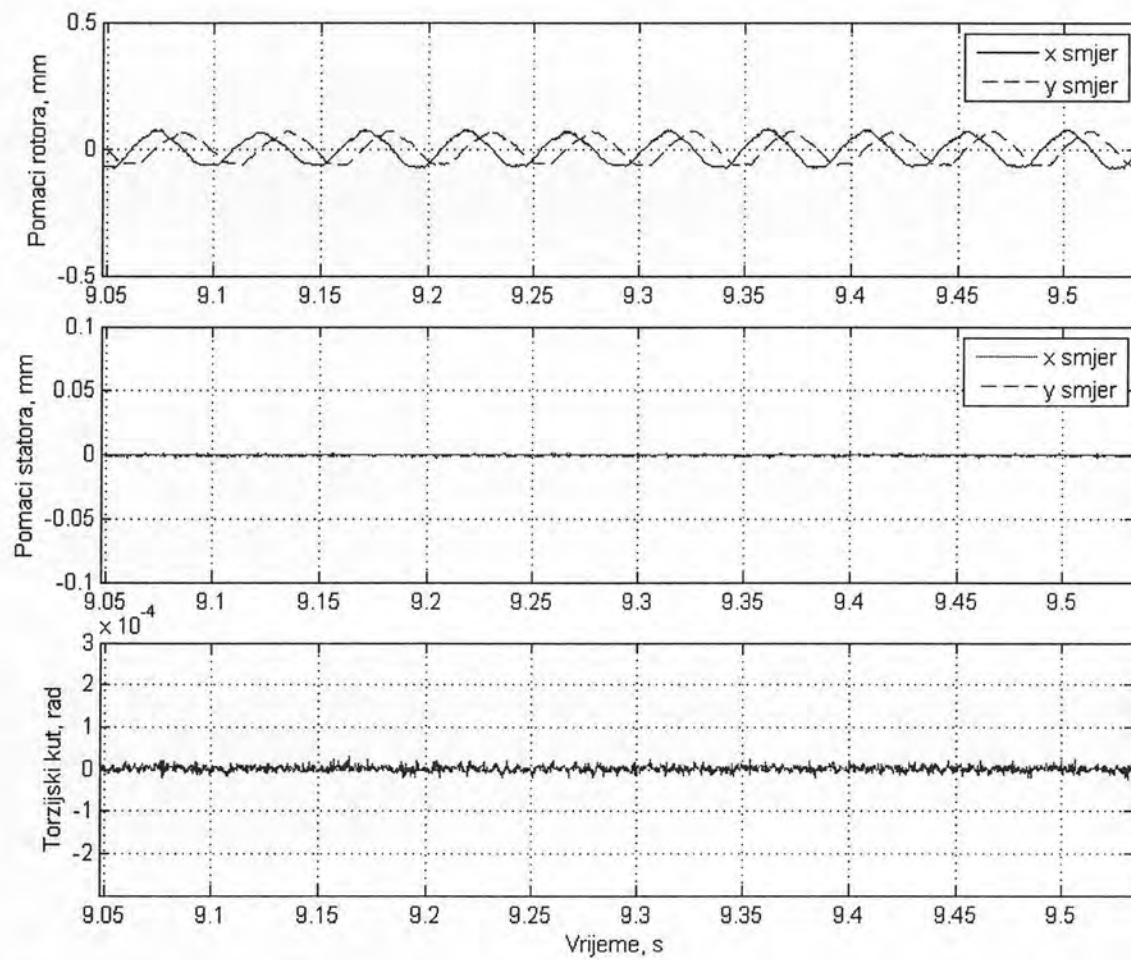
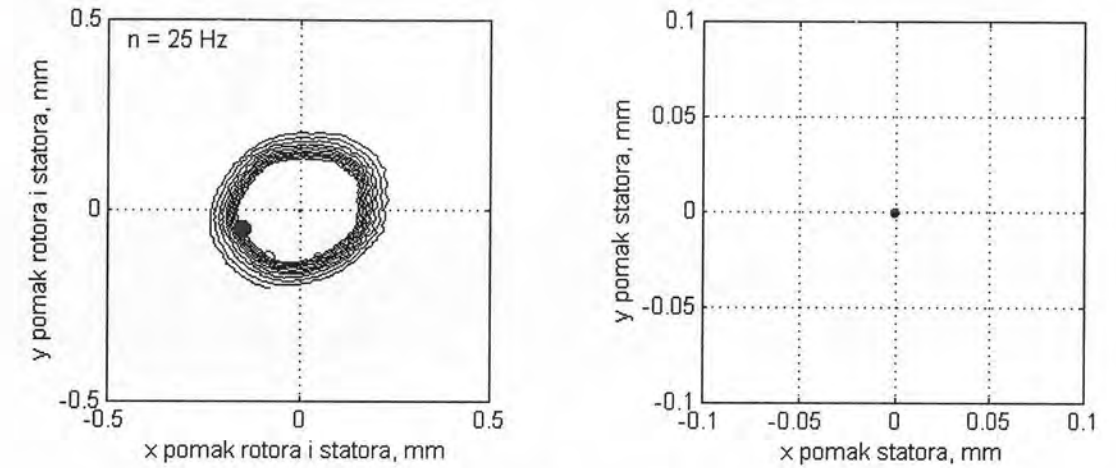
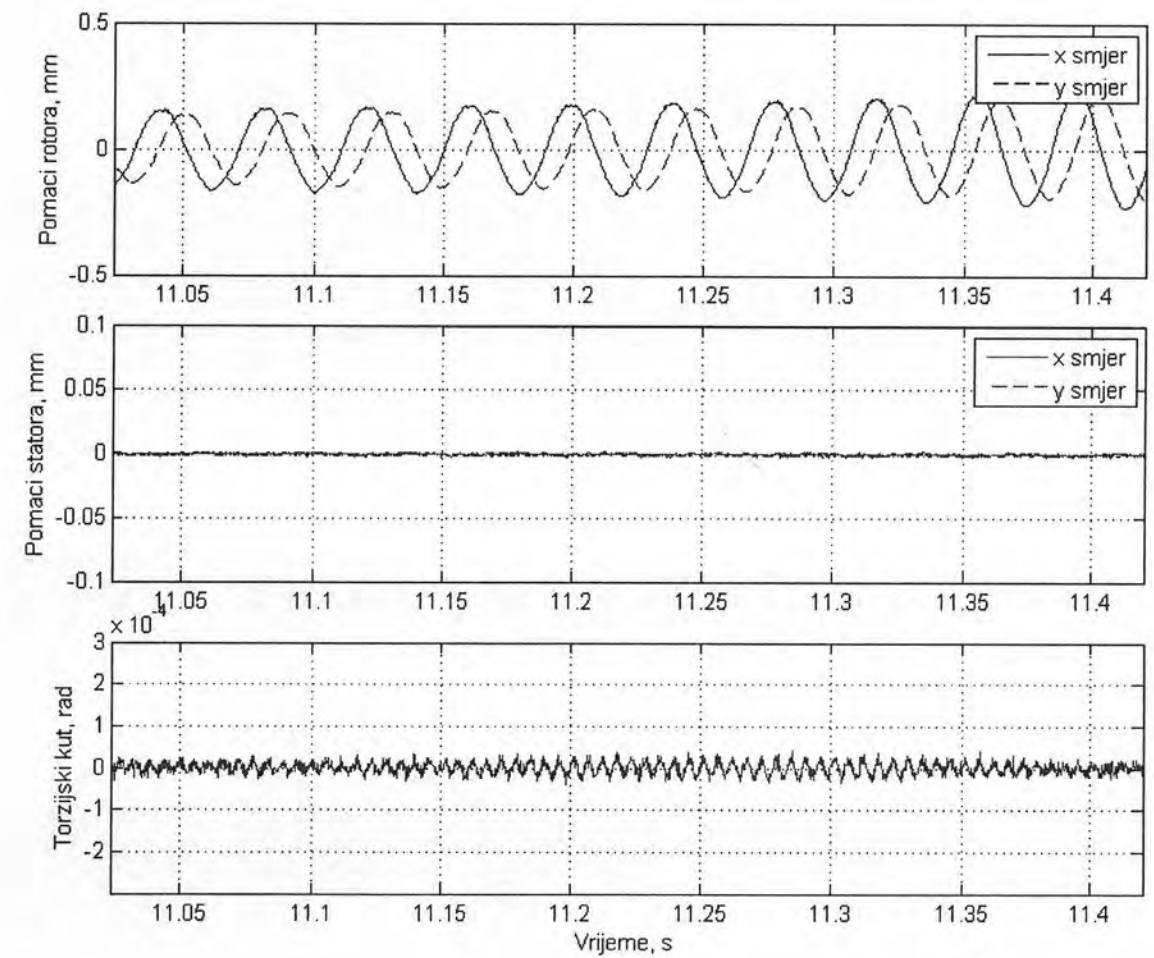
Slike 6.43. do 6.46. prikazuju odzive pojedinih harmonika rotora u horizontalnom odnosno vertikalnom smjeru. Amplitude prvog harmonika poprečnih pomaka rotora u horizontalnom smjeru prikazane na slici 6.43. i 6.44. pokazuju da dugo istitravanje prikazano na slikama 6.41. i 6.42. nije uslijed prvog harmonika već kako to prikazuje slika 6.49. ono događa pri prvoj vlastitoj frekvenciji što upućuje na samo-uzbudne vibracije najvjerojatnije uslijed spoja rotora sa kotrljajućim ležajevima preko spojke s vijcima.

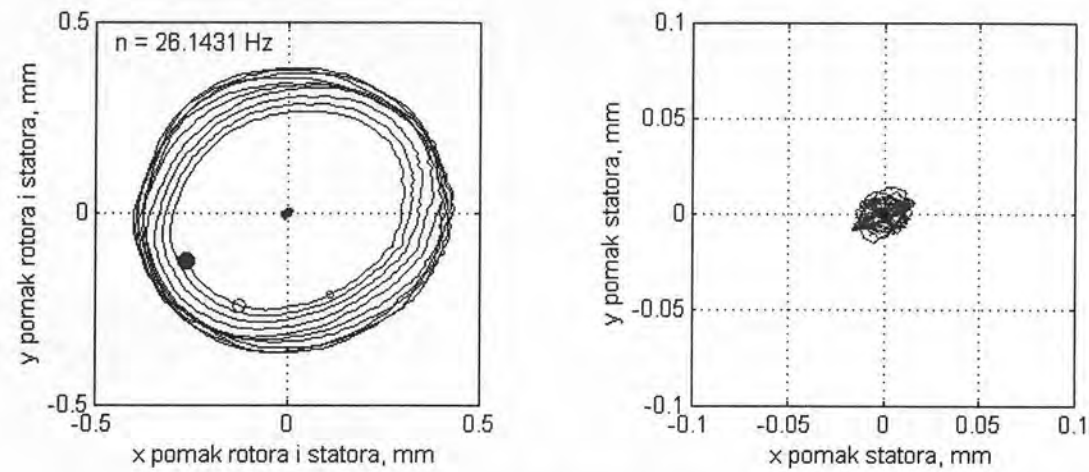
Na slici 6.47. prikazan je odziv 2. harmonika torzijskih kutova statora dok je na slici 6.48. prikazan odziv 3. harmonika statora u horizontalnom smjeru. Veća vršna vrijednost prikazana na slici 6.47. pripada 1. torzijskoj vlastitoj frekvenciji statora pobuđene drugim harmonikom dok manja vršna vrijednost u području od  $2700-2750 \text{ min}^{-1}$  pripada 1. fleksijskoj vlastitoj frekvenciji statora također pobuđene drugim harmonikom.

Slike 6.49. i 6.50. prikazuju spektralne mape rotora u horizontalnom smjeru odnosno statorskih torzijskih kutova, pri pojavi dodira između njih međusobno. Na slici 6.51. vidljiva je promjena brzine vrtnje u vremenu.

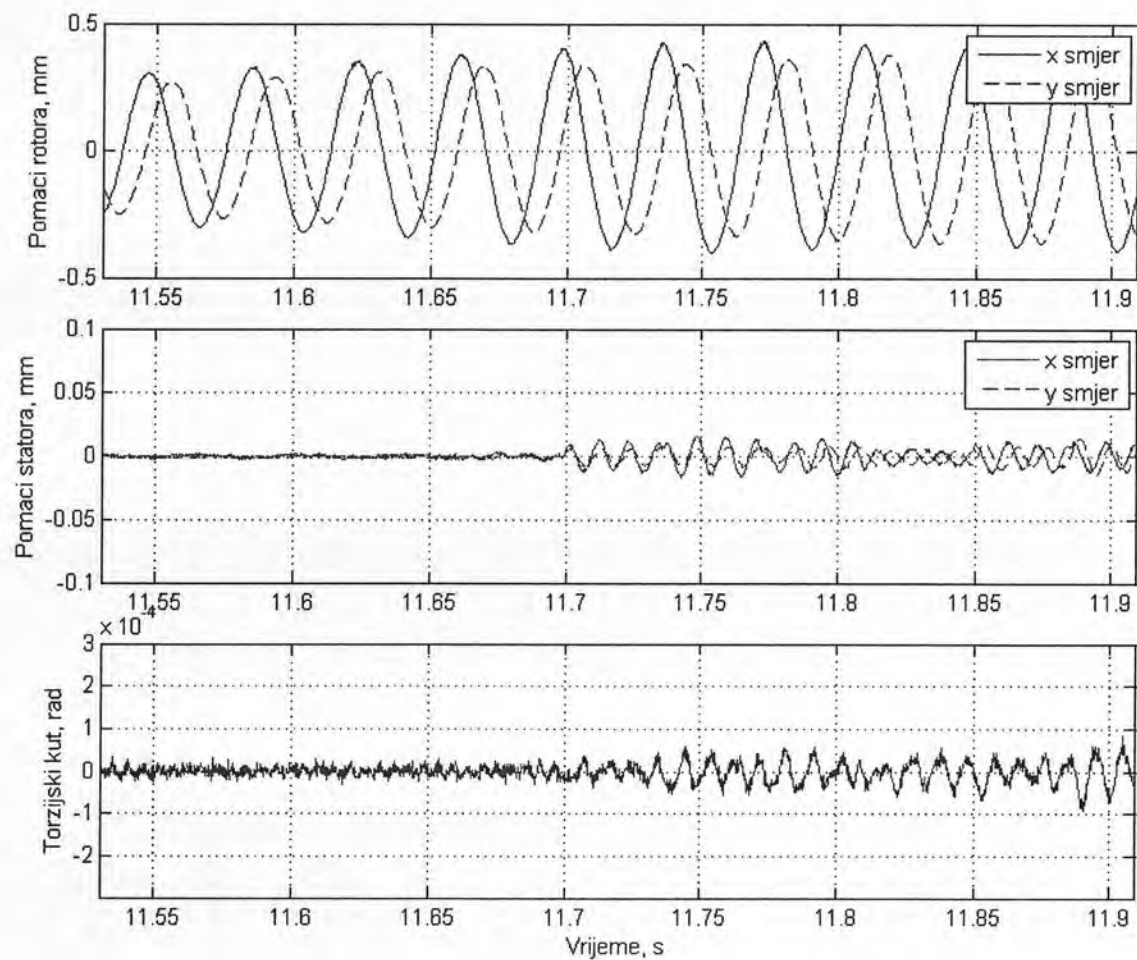
Na slikama koje slijede (slike 6.52. do 6.73.) usporedo su prikazane orbite rotora i statora te poprečni pomaci rotora, statora te torzijski kut statora (mjeren pomoću para beskontaktnih senzora u horizontalnom smjeru) u vremenskoj domeni pri različitim brzinama vrtnje. Očekivano odziv statora raste nakon uspostave kontakta do trenutka tzv. skoka (jump phenomenon) odnosno izlaska iz kontakta. Na slici 6.56. lijepo se vidi ulazak rotora u kontakt sa statorom dok izlazak iz kontakta nije tako jednostavan i kratak kao u slučaju manjeg neuravnoteženja već ga prati pojava udaranja ili lupanja tzv. beating što se lijepo vidi u odzivu rotora i torzijskom odzivu statora prikazanom na slici. 6.71.



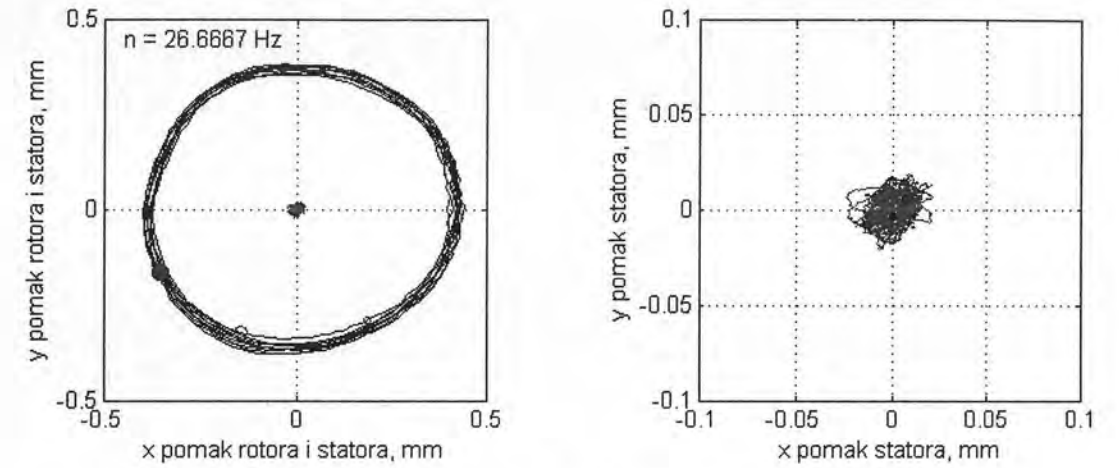
Slika 6.52. Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje  $n = 20.304 \text{ Hz}$ Slika 6.53. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 20.304 \text{ Hz}$ Slika 6.54. Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje  $n = 25 \text{ Hz}$ Slika 6.55. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 25 \text{ Hz}$



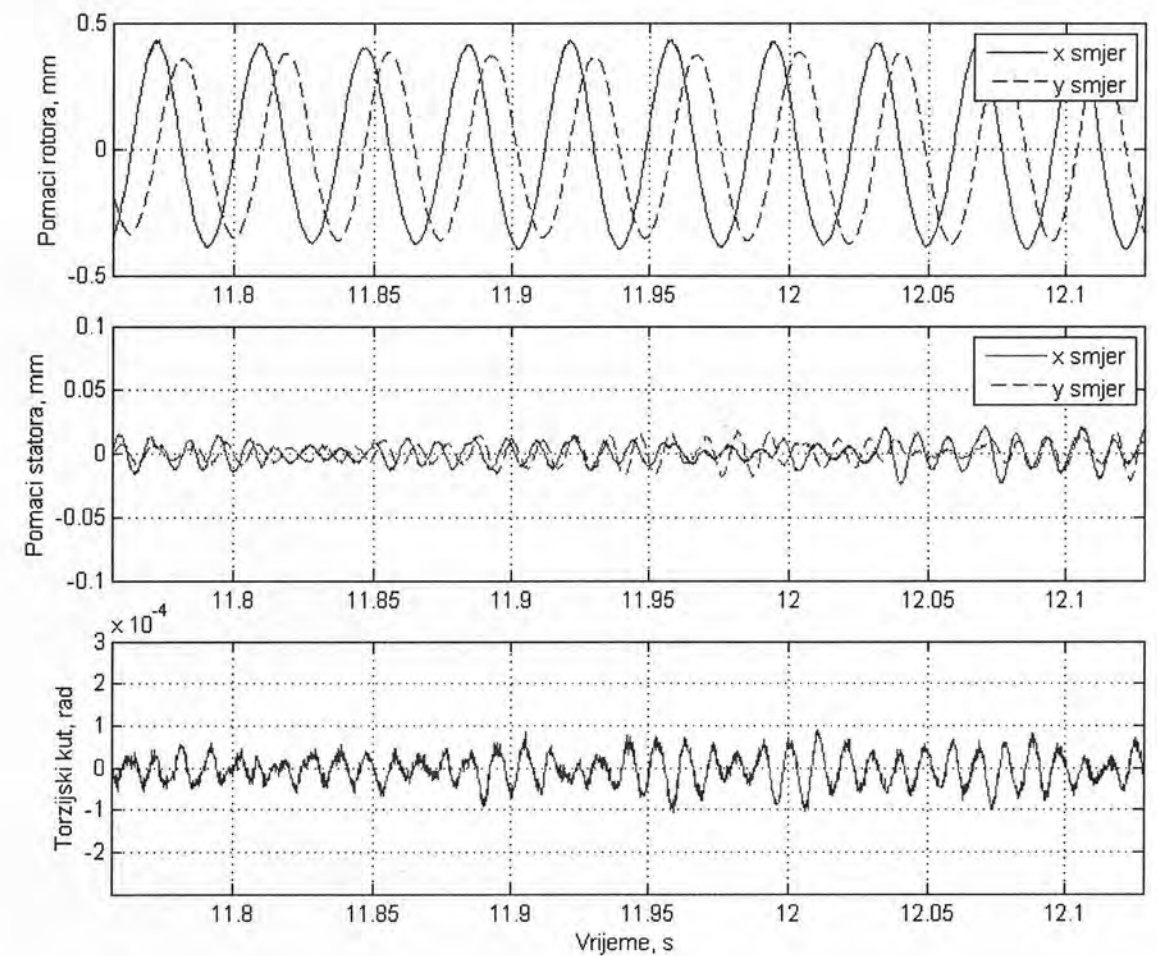
Slika 6.56. Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje  $n = 26.14$  Hz



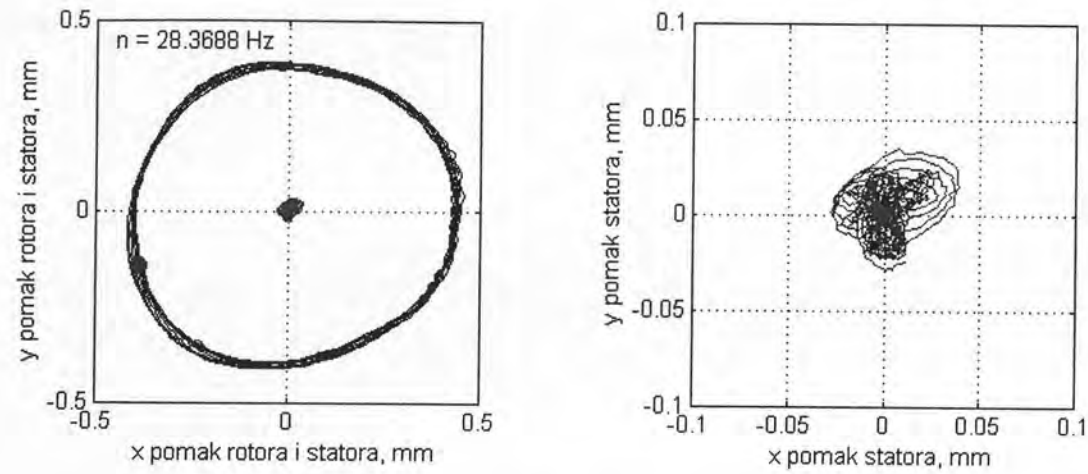
Slika 6.57. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 26.14$  Hz



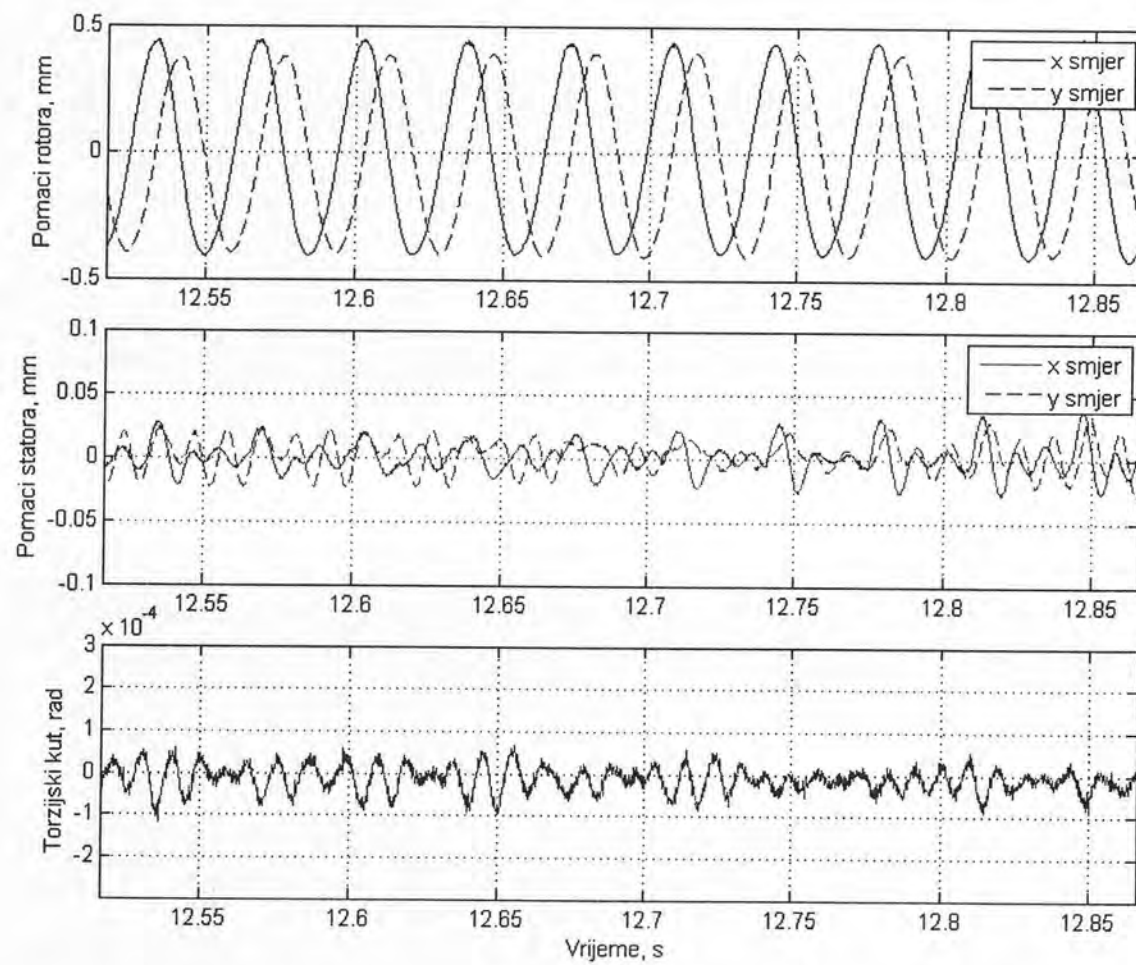
Slika 6.58. Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje  $n = 26.67$  Hz



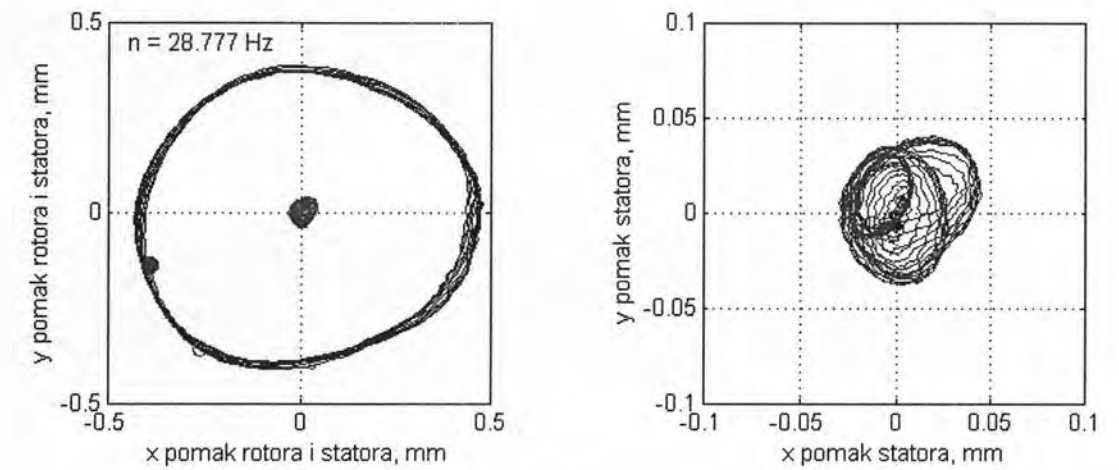
Slika 6.59. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 26.67$  Hz



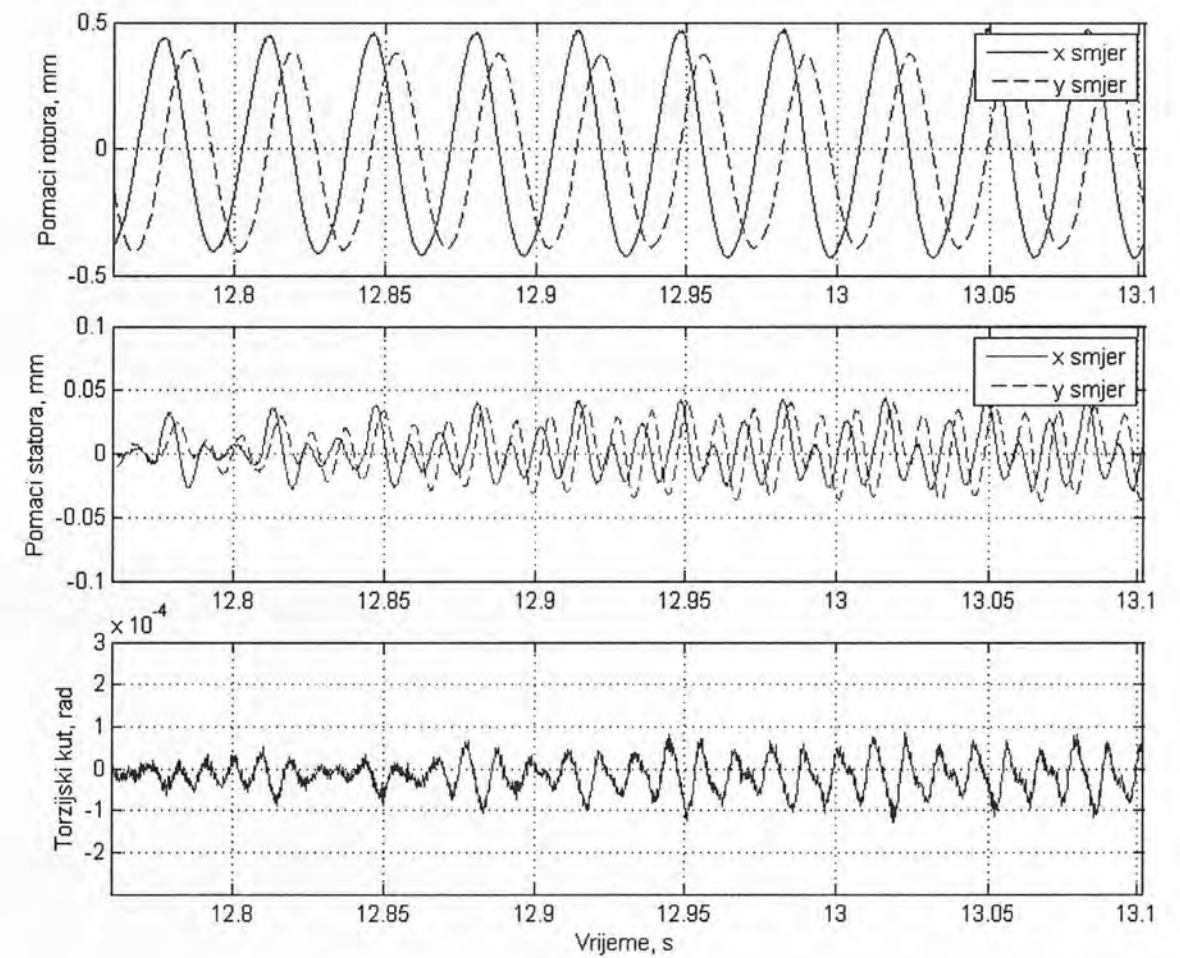
Slika 6.60. Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje  $n = 28.37$  Hz



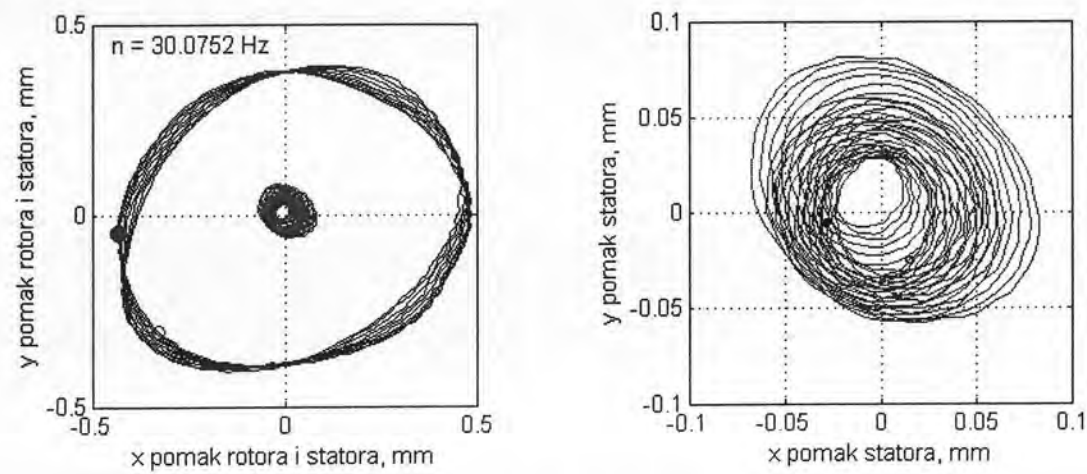
Slika 6.61. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 28.37$  Hz



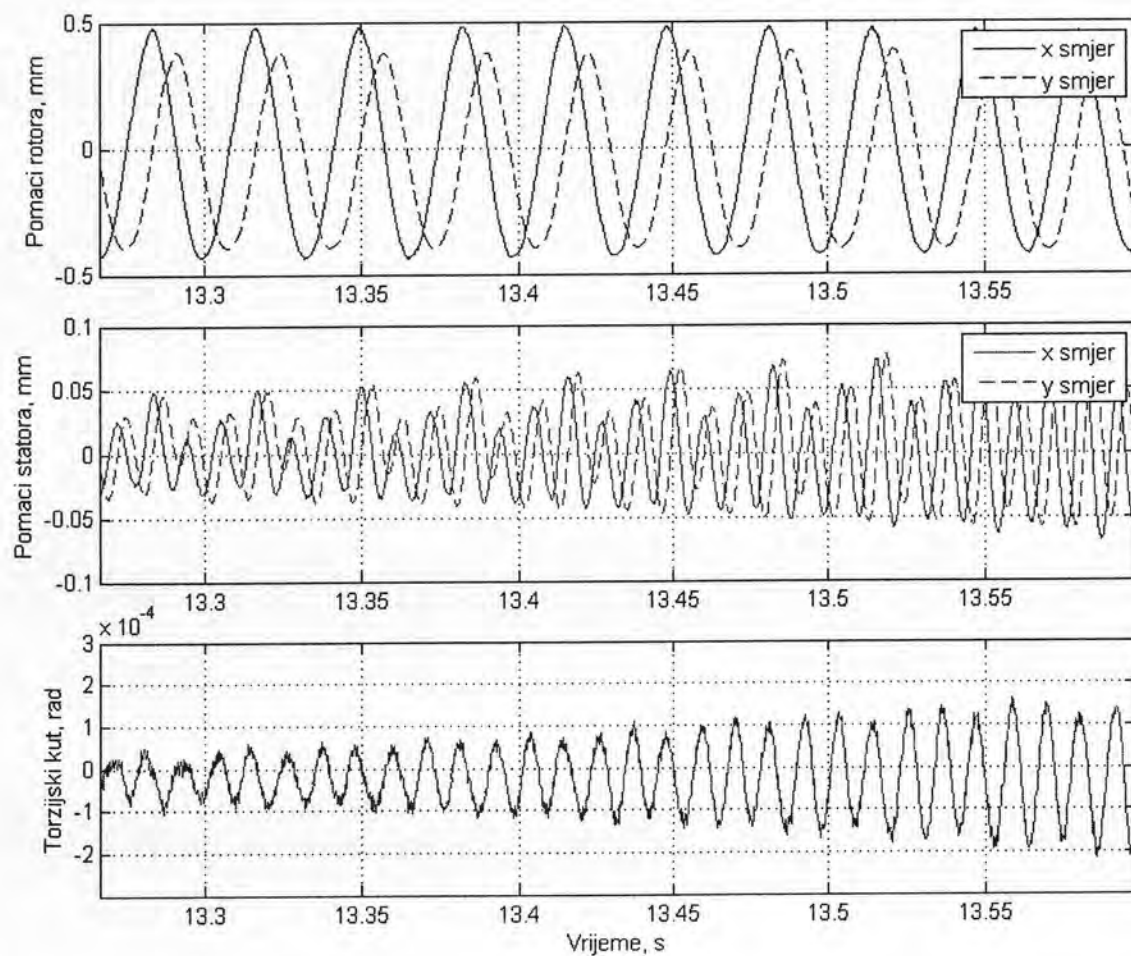
Slika 6.62. Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje  $n = 28.78$  Hz



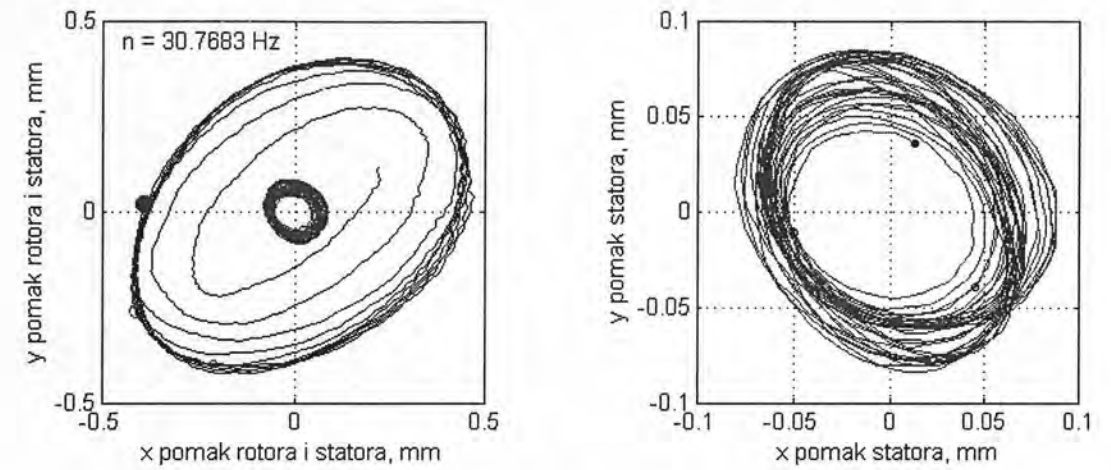
Slika 6.63. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 28.78$  Hz



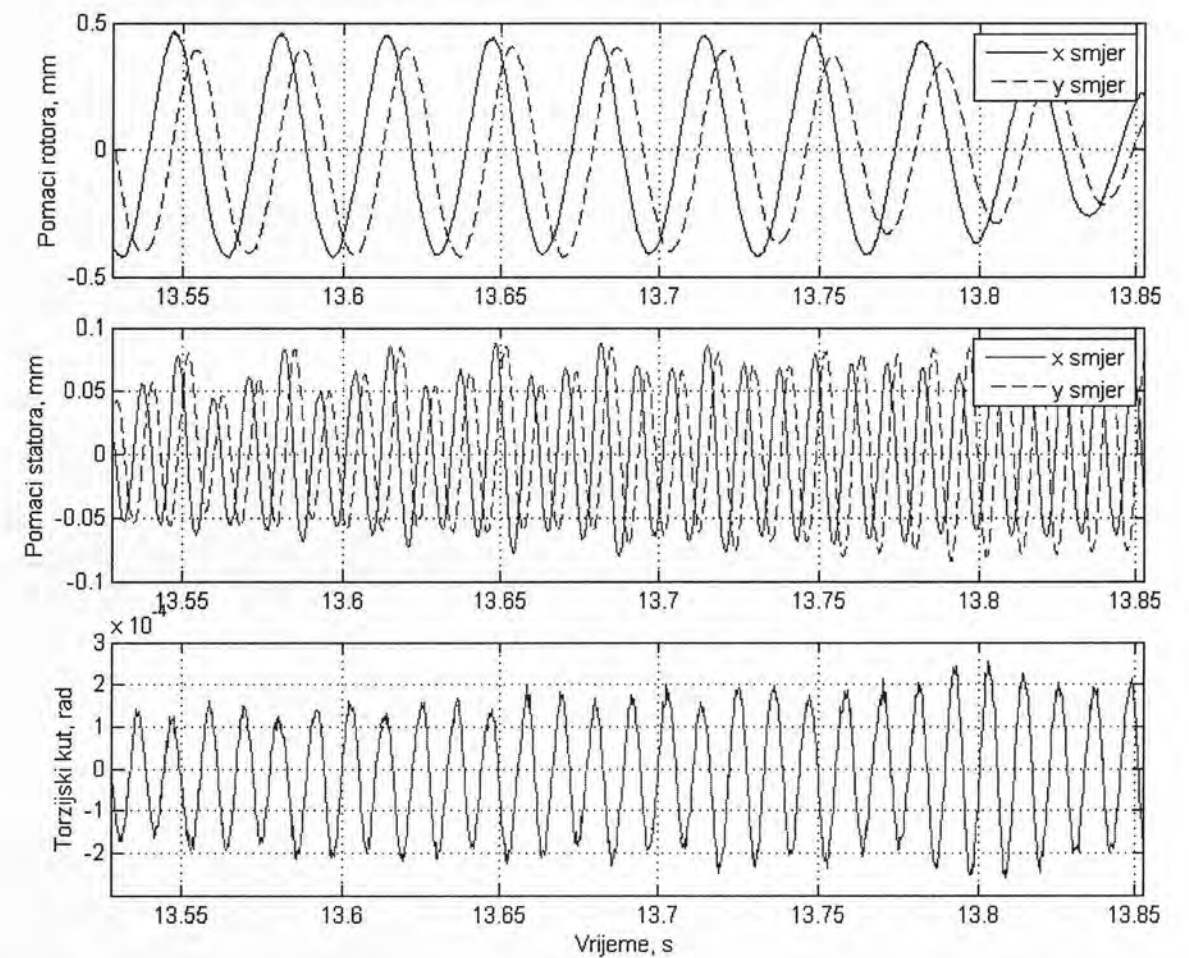
Slika 6.64. Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje  $n = 30.08$  Hz



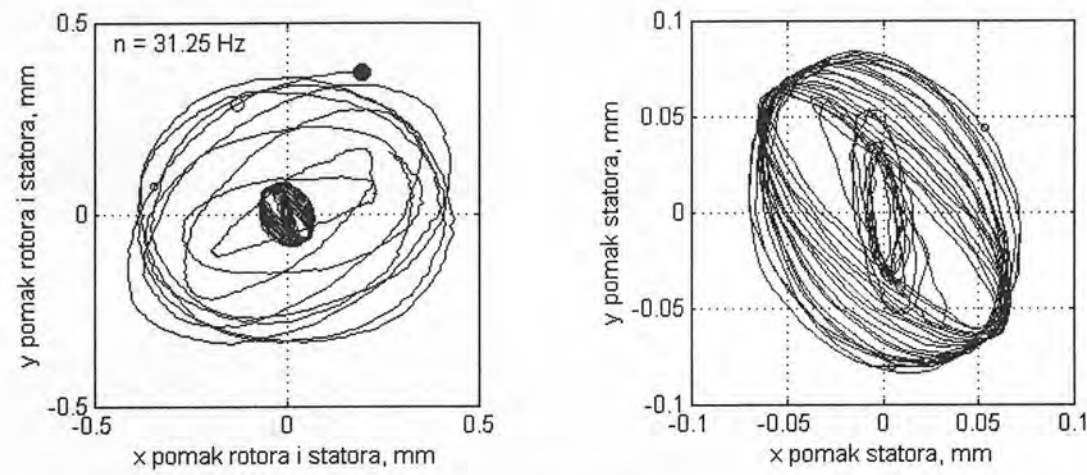
Slika 6.65. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 30.08$  Hz



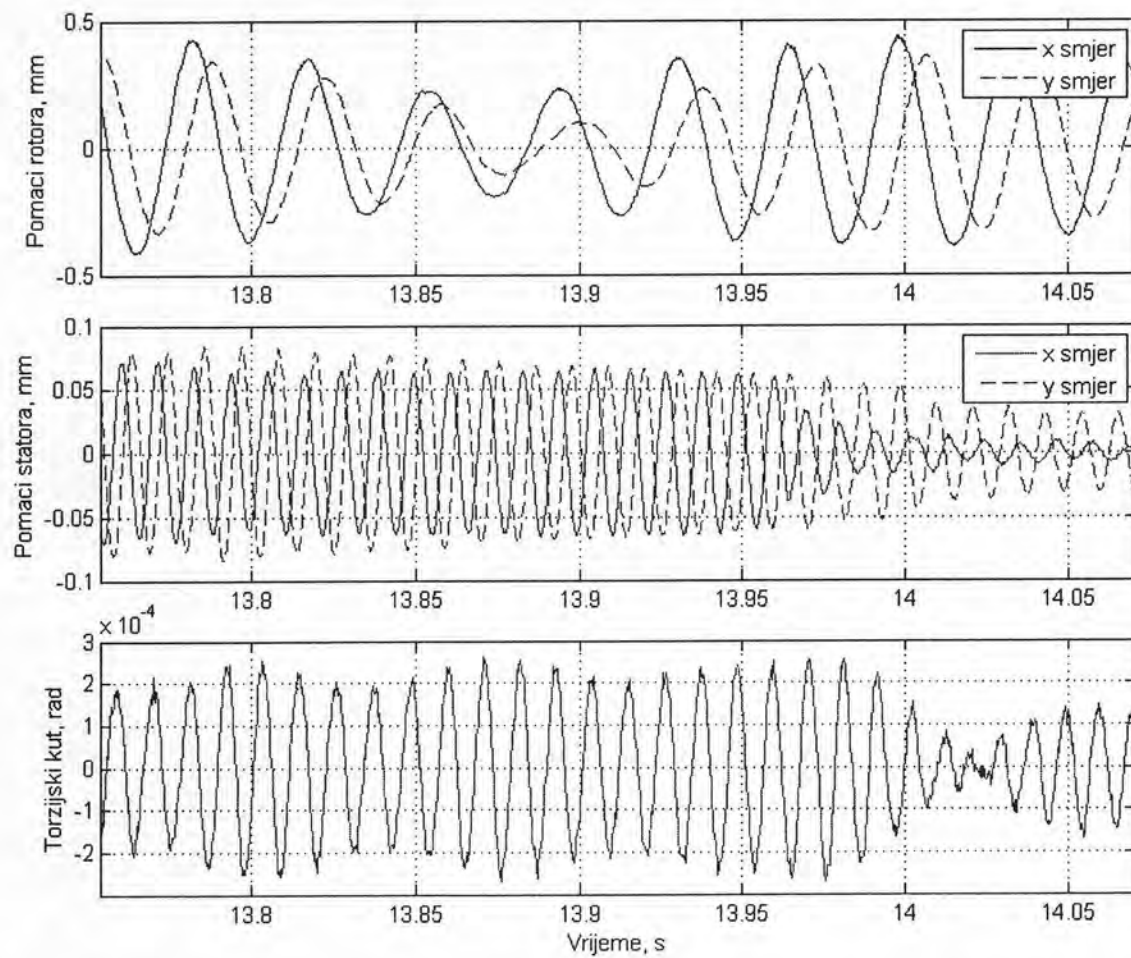
Slika 6.66. Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje  $n = 30.77$  Hz



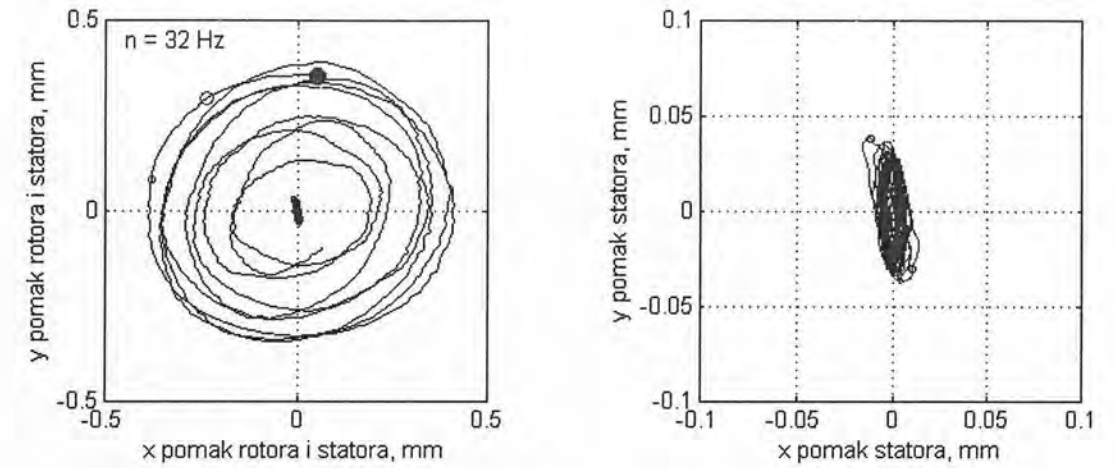
Slika 6.67. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 30.77$  Hz



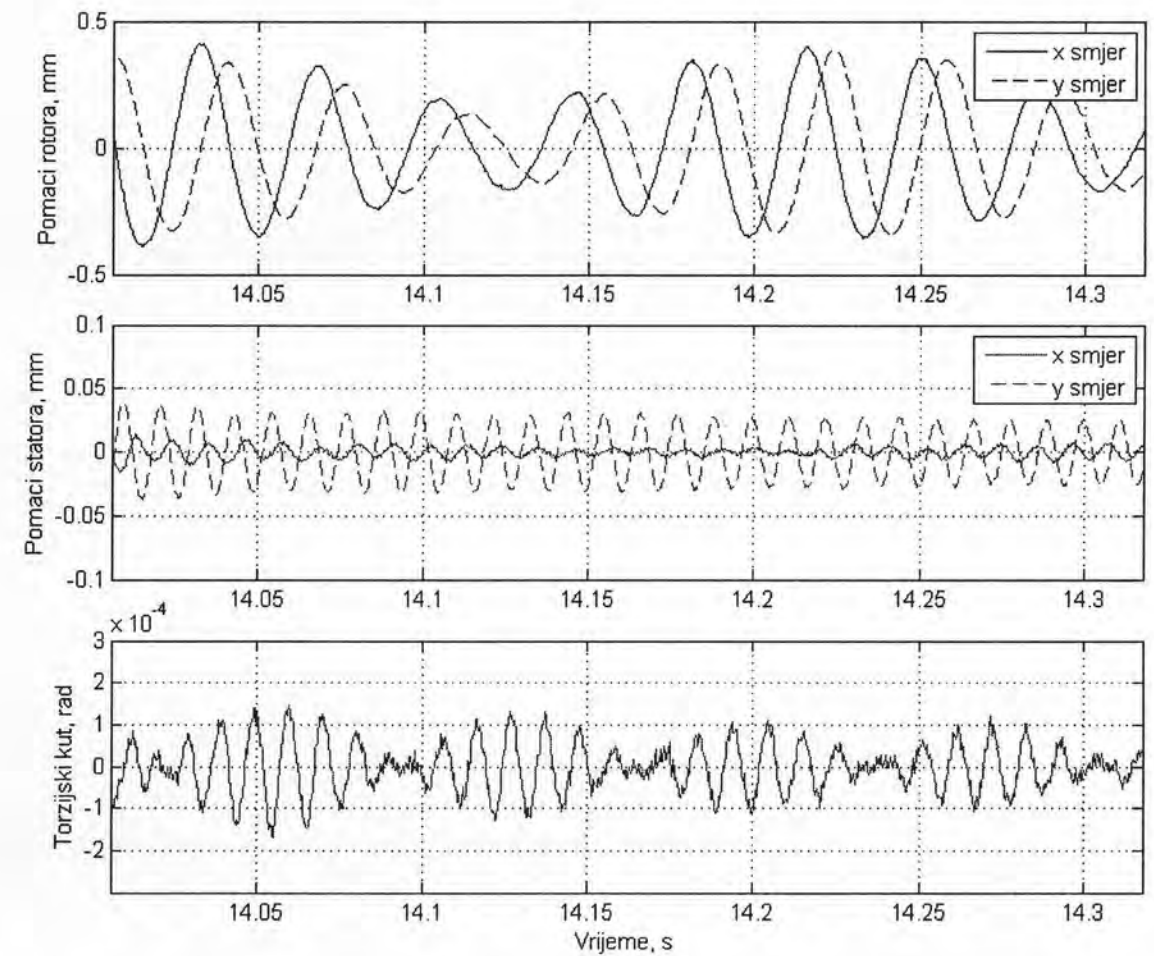
Slika 6.68. Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje  $n = 31.25$  Hz



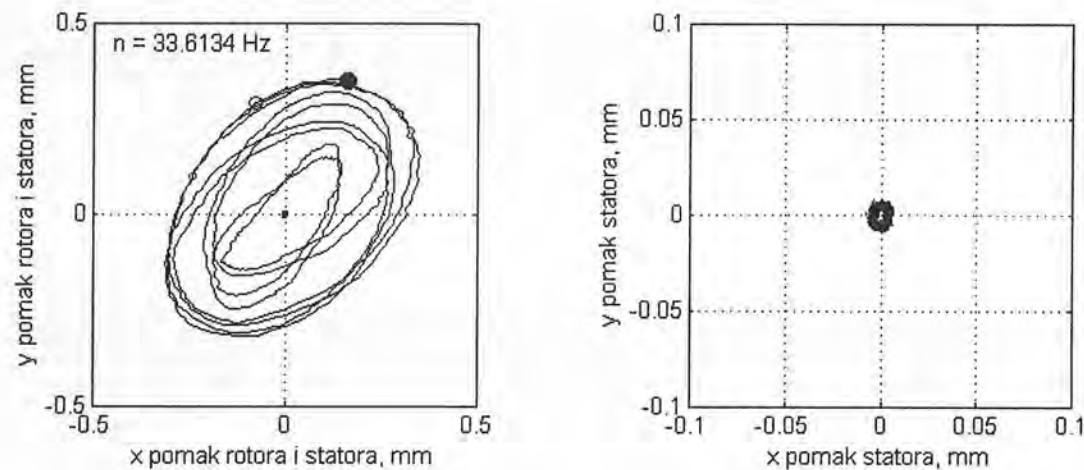
Slika 6.69. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 31.25$  Hz



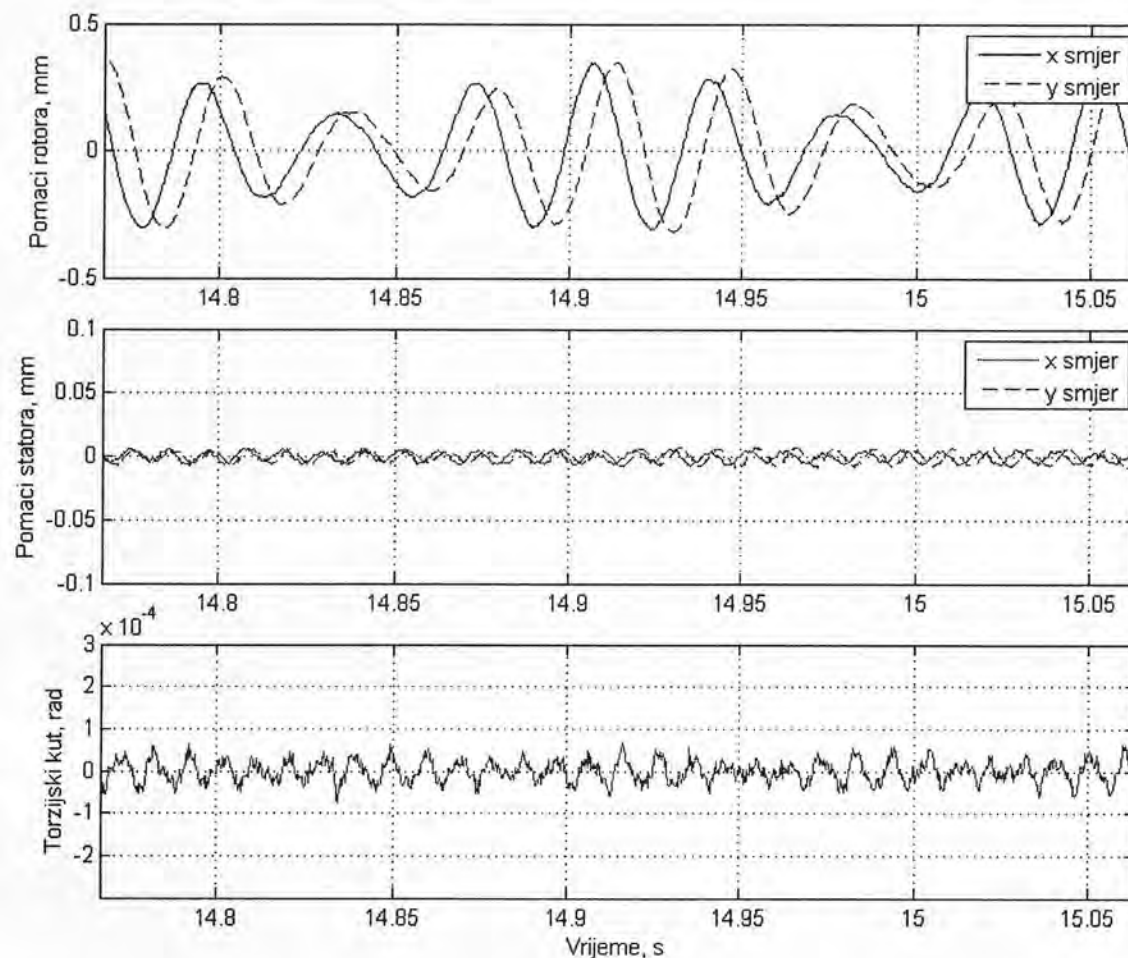
Slika 6.70. Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje  $n = 32.00$  Hz



Slika 6.71. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 32.00$  Hz



Slika 6.72. Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje  $n = 33.61$  Hz



Slika 6.73. Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje  $n = 33.61$  Hz

## 7. Zaključak

U ovoj disertaciji detaljno je istražena pojava dodira između rotora i statora i to numerički i eksperimentalno. Dosadašnje spoznaje proširene su uvođenjem kombiniranog fleksijsko – torzijskog pristupa rješavanju nelinearne pojave dodira rotora u radu sa stacionarnim ali elastičnim dijelovima strojeva kratko nazvanim stator.

Za potrebe numeričke analize ove pojave korištena su dva pristupa; pojednostavljeni rješavanjem modela izvedenih iz Jeffcottovog modela rotora i kompleksniji rješavanjem modela dobivenih metodom konačnih elemenata. Sva numerička rješenja programirana su u programskom paketu Matlab 7.0. Za rješavanje modela proizišlih iz Jeffcottovog rotora (reducirani broj stupnjeva slobode gibanja) diferencijalne jednadžbe drugog reda trebalo je najprije svesti na dvostruko veći broj diferencijalnih jednadžbi prvog reda da bi se u konačnici primijenila Runge-Kutta numerička metoda s napomenom da nisu korišteni standardni Matlabovi rješavači diferencijalnih jednadžbi iz razloga što oni koriste varijabilni vremenski korak a koji se u literaturi [4] okrivljuje za moguće nestabilnosti u rezultatima odziva rotora. Iz tog razloga programirana je nova rutina koja za vrijeme kontakta rotora i statora koristi konstantan vremenski korak. U drugom dijelu numeričke analize korištena je metoda konačnih elemenata. U tu svrhu izrađena je posebna aplikacija nazvana RotorDyn. Spomenuta aplikacija RotorDyn programirana je također u programskom paketu Matlab 7.0 te posjeduje dijaloge za komunikaciju korisnika sa programom. Aplikacija RotorDyn posjeduje sve bitne dijelove analize dinamike rotora sa posebnim naglaskom na analizu vlastitih frekvencija, pripadnih oblika vibriranja, izračun odziva linearnih prisilnih vibracija uslijed raznih tipova uzbuđe posebno uzbuđe uslijed neuravnoteženja rotora te konačno izračun nelinearnih prisilnih vibracija uslijed dodira rotora i statora. Za izračun nelinearnog odziva rotora i statora upotrijebljene su nelinearne metode direktne integracije i to Hilbert-Hughes-Taylorova (HHT)  $\alpha$  metoda i Generalizirana  $\alpha$  metoda koje u osnovi koriste princip predikcije i korekcije rješenja za pojedini vremenski trenutak. U obje analize (pojednostavljenu i konačno-elementnu) implementirana su dva modela normalne sile dodira i to linearni i nelinearni prema teoriji Hunta i Crossleya [45]. Pokazalo se da linearni model normalne sile daje stabilno rješenje u raznim uvjetima numeričke simulacije dok nelinearni model normalne sile, sukladno primjerima analiziranim u poglavlju 4.1.2. za određenu kritičnu kombinaciju parametara modela, iznosa neuravnoteženja i koeficijenta trenja  $\mu$  daje nestabilno rješenje. Zajedničke pretpostavke svim analizama su sljedeće; rotor je elastičan, disk rotora i statorski prsten su kruta (lokalno deformabilna) tijela postavljena na sredini između ležajeva, ležajevi su kruti, disk rotora i statorski prsten ulaze u kontakt po normali tj. njihove osi su cijelo vrijeme paralelne. Osnovne simulacije kojima su bili podvrgnuti pojedini modeli sustava rotor-stator bile su upuštanje rotora u pogon od stanja mirovanja do nominalne brzine, sa prolaskom kroz kritičnu brzinu vrtnje te zaustavljanju pogona od nominalne brzine do stanja

mirovanja također sa prolaskom kroz kritičnu brzinu vrtnje. Pri numeričkoj analizi konačno-elementnog modela sustava rotor-stator dodatno je provedena analiza simulacija otpadanja lopatice modela turbostroja pri radu u nadkritičnom području te prisilnog zaustavljanja prolaskom kroz kritičnu brzinu vrtnje uz isključeni pogon. Za interpretaciju rezultata pojedinih konačno-elementnih simulacija koristili su se prikazi pomaka rotora i statora u horizontalnom smjeru, prikazi relativne normalne brzine između rotora i statora sa indikacijom dodira, prikaz relativne brzine klizanja između dodirnih odnosno najbliži točaka, prikaz frekvencije precesije rotora i prikaz normalne sile dodira. Kod modela rotor-stator sa torzijskim stupnjevimima slobode gibanja dodatno se praćeni odzivi u obliku momenta elektromotora, momenta uslijed dodira, torzijskog kuta statora i torzijskog kuta rotora. Za pojedine simulacije dodatno su prikazane orbite rotora odnosno statora.

U sklopu ove disertacije izrađen je posebno konstruirani eksperimentalni uređaj za potrebe istraživanja dodira rotora i statora. U radu su opisane sve bitne karakteristike eksperimentalnog uređaja počevši od izvedbe rotora, statora zatim pogonskog sustava te konačno višekanalnog mjernog sustava. Okosnica mjerenja bilo je mjerenje beskontaktnim sensorima pomaka i to rotora sa dva kanala u horizontalnom i vertikalnom smjeru te statora sa tri kanala od kojih dva u horizontalnom i jedan u vertikalnom smjeru. Navedena dva kanala u horizontalnom smjeru bila su korištena u kombinaciji za relativno mjerenje torzijskog kuta zakreta statora. Proračunska torzijska kritična brzina rotora od 138 Hz bila je potvrđena samo modalnom analizom u mirovanju ali se nije uspjela izmjeriti u radu rotora zbog neadekvatnog sustava mjerenja i zbog činjenice da je maksimalna brzina rada rotora pri ispitivanju bila 70 Hz što bi eventualno moglo pobuditi torzijsku vlastitu frekvenciju putem jednog od viših harmonika uzbude no to nije evidentirano.

Zato se uspjelo mjerenjima potvrditi računsko predviđanje slijedećih vlastitih frekvencija: prve i druge vlastite fleksijske frekvencije rotora u iznosu od 28 Hz i 145 Hz te prve fleksijske forme statora (90 Hz) i prve torzijske forme statora (103.5 Hz).

Pri analizi mjerenja korišteni su specijalne aplikacije za mjerenja vibracija i to Sound and Vibration Toolkit i Order Analysis Toolseta unutar LabView 7.1 platforme proizvođača National Instruments, te posebno izrađene rutine unutar programskog paketa Matlab 7.0.

Za prve dvije simulacije, komparativne analize dodira rotora sa elastičnim satorom bez i sa utjecajem torzije, razmatrane u poglavlju 4.2.3. vrijede parametri koji odgovaraju eksperimentalnoj analizi razmatranoj u poglavlju 6.3.1.1. te je moguća njihova direktna komparacija. Iz usporedbe maksimalnih amplituda rotora vidljiva je dobra podudarnost dok su amplitude statora kod eksperimentalne analize nešto veći u odnosu na rezultate simulacije. Na slici 6.9. odnosno 6.10. u odzivu statora kod eksperimentalne analize prisutna su dodatna dva rezonantna područja no kako se oni nalaze izvan područja kontakta a isto tako izvan rezonantnog područja statora oni predstavljaju odziv statora na uzbudu višim harmonicima prenesenim od strane rotora ali preko temeljne ploče.

Analizom pojedinih simulacija otpadanja lopatice i njihovom međusobnom usporedbom uočeno je da kod ovakvih ekstremnih uvjeta rada, uz pretpostavku nepromjenjivog koeficijenta trenja  $\mu = 0.2$ , postoji nejednolik trend povećanja amplituda torzijskih oscilacija rotora s porastom dodatne mase neuravnoteženja. Nejednolikost se ogleda

u porastu amplituda torzijskih oscilacija kod analiza manjih masa otpadnute lopatica da bi nakon toga uslijedilo područje opadanja maksimalnih amplituda torzijskih oscilacija s povećanjem mase otpadnute lopatice. To se može tumačiti na način da kod malih neuravnoteženja porastom mase raste i uzbuda torzijskih oscilacija. Nakon određene kritične vrijednosti neuravnoteženja, poraste statička komponenta torzijskog momenta trenja uslijed kontakta rotora i statora te veliko neuravnoteženje tada počne djelovati i kao prigušivač torzijskih oscilacija.

Kao poseban znanstveni doprinos ove doktorske disertacije potrebno je naglasiti uvođenje kombiniranog fleksijsko - torzijskog pristupa rješavanju problema dinamike dodira rotora i statora pomoću metode konačnih elemenata. Time je omogućena i implementacija realnog elektromotornog pogona odnosno njegove momentne karakteristike te realnije i sveobuhvatnije sagledavanje ovog nelinearnog problema dinamike rotora. Rezultati numeričke simulacije uspoređeni su sa rezultatima eksperimentalnih ispitivanja te je potvrđena dobra podudarnost. Kod toga nije utvrđen veći međusobni utjecaj fleksijskih i torzijskih vibracija.

Doprinos rada očitava se i u primjeni navedenog kombiniranog fleksijsko - torzijskog pristupa rješavanju kontakta rotora i statora u simulaciji otpadanja jedne ili više lopatica turbo stroja.

Kao preporuku za buduća istraživanja predlaže se izrada eksperimentalnog modela sa puno nižom vlastitom torzijskom frekvencijom (Poželjno oko 50 Hz) te pokušaj izrade modela kojem bi se poklopile fleksijska i torzijska vlastita frekvencija. Sa takvim modelima moglo bi se doći do još dubljih spoznaja o zavisnosti ova dva tradicionalno odvojena vida istraživanja dinamike rotora. Također treba ubuduće posvetiti posebnu pažnju što kvalitetnijoj elektromagnetnoj izolaciji senzora kako bi probijanje šumova od strane varijabilnog pogonskog sustava bilo što manje.

**POPIS LITERATURE**

- [1] Rosenblum, V. I.: Entstehung mehrfacher Wellenbrüche nach dem Bruch einer Laufschaufel oder Radscheibe bei Dampfturbinen, Allianz Report 68 (1995), Heft 5, pp. 176-181,
- [2] Jiang, J.: Investigation of Friction in Blade / Casing Rub and Its Effect on Dynamics of a Rotor with Rubs, Doct. Thesis, Universität Essen, 2001,
- [3] Jiang, J., Ulbrich, H.: Derivation of coefficient of friction at high sliding speeds from energy conservation over the frictional interface, WEAR 247, 2001. pp. 66-75,
- [4] Von Groll, G., Ewins, D. J.: A Mechanism of Low Subharmonic Responce in Rotor/Stator Contact – Measurement and Simulation, Journal of Vibration and Acoustics, Vol.124, 2002., pp.350.-358.
- [5] Von Groll, G.: Windmilling in Aero-Engines, Doct. Thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, University of London, 2000.,
- [6] Ahrens, J., Jiang, J., Ulbrich, H., Ahaus, G.: Experimentelle Untersuchungen zum Schaufelanstreifen, Schwingungen in rotierenden maschinen – SIRM V Tagung, Wien, Austria, 2001., pp. 97-108,
- [7] Söffker, D., Ahrens, J., Ulbrich, H., Krajcin, I.: Modellgestützte Schätzung von Kontaktkräften und Verschiebungen an rotierenden Wellen, Schwingungen in rotierenden maschinen – SIRM VI Tagung, Darmstadt, Germany, 2003., pp. 81-88,
- [8] Bartha, A. R.: Dry Friction Induced Backward Whirl: Theory and Experiments, Fifth International IFToMM Conference on Rotor Dynamics, Darmstadt, Germany, 1998., pp.755-767,
- [9] Bartha, A. R.: Dry Friction Backward Whirl of Rotors, Doct. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 2000,
- [10] Fumagalli, M., Schweitzer, G.: Impact dynamics of high speed rotors in retainer bearings and measurement concepts, 4<sup>th</sup> International Symposium on Magnetic Bearings, 1994. ETH Zurich
- [11] Fumagalli, M., Schweitzer, G.: Measurements on a rotor contacting its housing, In Sixth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, pp. 779-788, Oxford, Institution of Mechanical Engineers, 1996.,
- [12] Fumagalli, M.A.: Modelling and Measurement Analysis of the Contact Interaction between a High Speed Rotor and its Stator, Doct. Thesis, Swiss Institute of Technology Zurich, 1997.,
- [13] Orth, M., Nordmann, R.: Wirbelbewegungen magnetgelagerter Rotoren bei Lagerausfall, VDI Tagung: "Gleit- und Wälzlagerungen 2002, Fulda, Germany, pp. 123-148,
- [14] Orth, M., Nordmann, R.: ANEAS; A modeling tool for nonlinear analysis of active magnetic bearing systems, 2<sup>nd</sup> IFAC Conference on Mechatronic Systems, 2002, Berkley, USA, pp. 357-362,



- [15] Erb, R., Orth, M., Nordmann, R.: Untersuchungen des Verhaltens eines magnetisch gelagerten Rotors bei Fanglagerkontakt, Schwingungen in rotierenden maschinen – SIRM V Tagung, Wien, Austria, 2001., pp. 109-116,
- [16] Orth, M., Nordmann, R.: Wirbelanalyse eines magnetgelagerten Rotors, Schwingungen in rotierenden maschinen – SIRM VI Tagung, Darmstadt, Germany, 2003., pp. 89-100,
- [17] Liebich, R.: Rub Induced Non-Linear Vibrations Considering the Thermo-Elastic Effect, Fifth International IFToMM Conference on Rotor Dynamics, Darmstadt, Germany, 1998., pp. 802-815,
- [18] Bachschmid, N., Pennacchi, P., Vania, A.: Spiral Vibrations Due to Rub: Numerical Analysis and Field Experiences, Schwingungen in rotierenden maschinen – SIRM V Tagung, Wien, Austria, 2001., pp. 61-74,
- [19] Vania, A.: Rotor-to-Stator Rubs: Analysis of Experimental Evidences, Schwingungen in rotierenden maschinen – SIRM V Tagung, Wien, Austria, 2001., pp. 87-96,
- [20] Hughes, T. J. R.: The Finite element method, Prentice Hall, New Jersey, 1987,
- [21] Hilbert, H. M., Hughes, T. J. R., Taylor, R. L., Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithm in Structural Dynamics, Earthquake engineering and structural dynamics, 5:283-292, 1977
- [22] Geradin, M., Rixen, D.: Mechanical Vibrations, Theory and Application to Structural Dynamics, John Wiley Sons, London, 1997.,
- [23] Wood, W. L., Bossak, M., Zienkiewicz, O. C., An Alpha Modification of Newmark method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15:1562-1566, 1981.,
- [24] Geradin, M., Cardona, A.: Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach, John Willey and Sons Ltd., Chichester, England, 2001.
- [25] Newkirk, B. L., Shaft rubbing, Mechanical Engineering, 48(8) pp. 830-832, 1926
- [26] Den Hartog, J.P.: Mechanical Vibrations, McGraw-Hill Book Company, 1956; New York, pp. 238-247.
- [27] Billett, R. A.: Shaft Whirl induced by Dry Friction; The Engineer, 1965, p. 713
- [28] Begg, I. C.: Friction induced rotor whirl – A study of stability, Journal of Engineering for Industry, 1974, pp. 450-454,
- [29] Black, H. F.: Interaction of a Whirling Rotor with a Vibrating Stator across a Clearance Annulus, Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 10, Nr. 1, 1968, pp.1-12,
- [30] Ehrich, F.F.: O'Connor, J.J.: Stator Whirl With Rotors in Bearing Clearance, Journal of Engineering for Industry, 1967, pg. 381.- 390., Paper No. 66-WA/MD-8,
- [31] Ehrich, F.F.: Identification and Avoidance of Instabilities and Self-Excited Vibrations in Rotating Machinery, Proceedings of third Seminar on Machinery Vibrations Boxborough, Massachusetts, September 18-20, 1979., pp.1-45.,
- [32] Muszynska, A.: Partial lateral rotor to stator rubs. Third International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, C281/84, IMechE, York, UK, 1984,
- [33] Muszynska, A.: Rotor/Seal Full Annular Rub, Proceedings of the Senior Mechanical Engineering Seminar, Bently Nevada Corp. Carson City, NV, USA, 1984,
- [34] Muszynska, A.: Synchronous and Self-Excited Rotor Vibrations Caused by a Full

- Annular Rub, Proceedings of the 8th Machinery Dynamics Seminar, Halifax, Nova Scotia, Canada, 1984,
- [35] Szczygielski, W. M., Schweitzer, G.: Dynamics of a High-Speed Rotor Touching a Boundary, Proceedings of a Multibody Systems IUTAM/IFTToMM Symposium, Udine, Italy, 1985, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, pp.287-298,
- [36] Choy, F. K., Padovan, J., Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events, Journal of Sound and Vibration, 113(3) 1987, pp. 529-545,
- [37] Zhang, W.: Dynamic instability of multi-degree-of-freedom flexible rotor systems due to full annular rub, Fourth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery. I. Mech. Eng. London, 1988, pp. 305-310,
- [38] Muszynska, A.: Rotor-to-stationary element rub-related vibration phenomena in rotating machinery - literature survey. Shock and Vibration Digest, 21(3) pp. 3-11, 1989.
- [39] Lingener, A.: Experimental Investigation of Reverse Whirl of a Flexible Rotor, Trans. IFTToMM, Third International IFTToMM Conference on Rotordynamics, Lyon, France, 1990, pp. 13-18,
- [40] Crandall, S. H., From whirl to wip in rotordynamics, 3rd International IFTToMM Conference on Rotordynamics, , Lyon, France, 1990, pp 19-26,
- [41] Williams, R. J.: Measurements of Reverse Whirl Instability for Speeds Up to and Including the First Critical Speed. BRITE-EURAM 5463 ROSTADYN project, Technical report, Brussels, 1996,
- [42] Fatarella, F.: On the dynamics of Reverse Whirl Due to Rotor/Stator Interaction, Tesi di laurea, Politecnico do Torino – Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, 1999.
- [43] Goldman, P. and Muszynska, A., Chaotic behaviour of rotor/stator systems with rubs, Transactions of the ASME, Journal for Engineering for Gas Turbines and Power, 1994, pp. 692-701,
- [44] Choi, Y.-S., Noah, S. T., Nonlinear steady-state response of a rotor support syste., Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 109(1), 1987, pp. 255-261.
- [45] Choi, Y.-S., Noah, S. T., Forced periodic vibraton of unsymmetric piecewiselinear systems, Journal of Sound and Vibration, 121(1), 1988, pp. 117-126,
- [46] Chu, F., Zhang, Z.: Bifurcation and Chaos in a Rub-Impact Jeffcott Rotor System, Journal of Sound and Vibration, Vol.210, 1998., pp.1.-18.
- [47] Sun, Z., Xu, J., Zhou, T.: Analysis on Complicated Characteristics of a High-Speed Rotor System with Rub-Impact, Mech. Mach. Theory Vol.37, pp.659.-672, 2002,
- [48] Childs, D. W., Turbomachinery Rotordynamics, Phenomena, Modeling, and Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [49] Faik, S., Witteman, H.: Modeling of Impact Dynamics: A Literature Survey, 2000 International ADAMS User Conference, Orlando, Florida, USA, 2000, pp. 1-11,
- [50] Goldsmith, W.: Impact, Edward Arnold Publishers, London, 1960.
- [51] Brach, R. M.: Mechanical Impact Dynamics: Rigid Body Collisions, John Wiley &

- Sons, New York, 1991.
- [52] Zukas, J. A., Nicholas, T., Swift, H. F., Greszczuk, L. B., Curran, D. R.: *Impact Dynamics*, Krieger Publishing Company, Malabar, FL, 1992.
- [53] Kuwabara, G. and Kono K.: Restitution Coefficient in a Collision Between Two Spheres, *Jap. J. of Appl. Physics*, Vol. 26, No. 8, 1987, pp. 1230-1233.
- [54] Falcon, E., Laroche C., Fauve S., Coste C.: Behavior of One Elastic Ball Bouncing Repeatedly off the Ground, *The European Physical Journal B*, Vol. 3, 1998, pp. 45-57.
- [55] Hunt, K. H. and Crossley, F. R. E., Coefcient of restitution interpreted as damping in vibroimpact, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, pp. 440-445, 1975.
- [56] Timoshenko, S., Goodier, J. N.: *Teorija elastičnosti*, Građevinska knjiga Beograd, 1962.
- [57] Johnson, K. L.: *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985.
- [58] Rivin, E. I.: *Stiffness and Damping in Mechanical Design*, Marcel Dekker. Inc. New York, 1999,
- [59] Markert, R., Wegener, G.: Influence of contact and impacts on the dynamics of an elastic rotor with an elastic retainer bearing, *Proceedings of the EUROMECH Colloquium on Dynamics of Vibro-Impact Systems*, 1998,
- [60] Markert, R., Wegener, G.: *Transient Vibrations of Elastic Rotors in Retainer Bearings*, 7th ISROMAC Conference, Bird Rock Publishing House, 1998., pp.764.-774.
- [61] Ostermeyer, G.: *Thesen zur Modellierung von Reibung und Verschleiß*, *Tribologie und Schmierungstechnik*, 4/2003. pp. 18-22,
- [62] Czichos, H., Habig, K. H.: *Tribologie Handbuch; Reibung und Verschleiss*, Vieweg, Berlin, 1992,
- [63] Rabinowitz, E.: *Friction and Wear of Materials*, John Willey and Sons, New York, 1995,
- [64] Isaksson, J. L., *On the dynamics of a rotor interacting with non-rotating parts*, *Doct. thesis*, Linköping University, 1994.
- [65] Isaksson, J. L., *Unbalance response analysis of a two-mass rotor system including rubbing effects*, In *Sixth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, pp. 395-403, Oxford. Institution of Mechanical Engineers, 1996.
- [66] Yamamoto, T., Ishida, Y.: *Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications*, John Willey & Sons, Inc., New York, 2001.
- [67] Bose, B. K.: *Modern power electronics and AC drives*, Prentice Hall PTR, 2002.
- [68] Dubey, G. K.: *Fundamentals of Electrical Drives*, Alpha Science International Ltd. Pangbourne, UK, 2002,
- [69] Jurković, B.: *Elektromotorni pogoni*, Školska knjiga, Zagreb, 1990,
- [70] Nelson, D., McVaugh, J. M., *The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements*, *Journal of Engineering for Industry*, pp. 593 - 600, Paper No. 75-WA/DE-19, May 1976,
- [71] Gasch, R., Knothe, K., *Strukturdynamik II*. Springer. 1989.
- [72] Genta, G., *Whirling of unsymmetrical rotors: A finite element approach based on*

- complex co-ordinates*, *Journal of Sound and Vibration*, 124(1) pp. 27-53, 1988.
- [73] Genta, G., *Vibration of Structures and Machines*, Springer, third edition, 1999.
- [74] Lalanne, M., Ferraris, G.: *Rotordynamics Prediction in Engineering*, John Wiley, Sons, London, 1998,
- [75] Brnić, J., *Elastomehanika i plastomehanika*, Školska knjiga Zagreb, 1996.
- [76] Diana, G., Curami, A., Pizzigoni, B., *Computer Analysis of Rotor Bearing System, P.A.L.L.A.: A Package to Analyze the Dynamic Behavior of a Rotor-Supporting Structure System, Rotordynamics 2 – Problems in Turbomachinery*, CISM Courses and Lectures No. 297, Udine, 1988.
- [77] Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [78] Krämer, E., *Dynamics of Rotors and Foundations*, Springer – Verlag, Berlin, 1993.
- [79] Lees, A.W., Friswell, M. I., *The Evaluation of Rotor Imbalance in Flexibly Mounted Machines*, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 208(5), pp. 671-683, 1997.
- [80] Butković, M., Žigulić, R., Braut, S., *Behaviour of Rotor in Insufficiently Lubricated Plain Bearings with Large Clearances*, *Proceedings of the 3rd International Congress of Croatian Society of Mechanics*, Cavtat-Dubrovnik, Croatia, September 28-30, 2000, pp. 525-532.
- [81] Chen, S. L., Geradin, M.: *Finite element simulation of non-linear transient response due to rotor-stator contact*, *Engineering Computations*, Volume 14, Number 6, 1997 pp. 591-603,
- [82] Geradin, M. and Kill, N., *Non-linear dynamic analysis of flexible rotors*, In *Fourth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, pages 627-634. Institution of Mechanical Engineers, 1988.
- [83] Žigulić, R.: *Dinamika rotora u kliznim ležajevima*, *Doktorska disertacija*, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2001.
- [84] Žigulić, R., Butković, M., Braut S.: *Nonlinear dynamics of multy-disc rotor in dry friction bearings*, *IFTOMM, Sixth International Conference on Rotor Dynamics*, *Proceedings - Vol. 2*, Editors: E. J. Hahn, R. B. Randall, Sydney, Australia, 2002., pp. 960-967.
- [85] Žigulić, R., Braut, S., Skoblar, A., Butković, M.: *Adaptive time-step implicit methods for solving contact problems in rotordynamics*, *Proceedings of the 4th International Congress of Croatian Society of Mechanics*, Bizovac, Croatian Society of Mechanics, 2003. pp. 593-600,
- [86] Žigulić, R., Braut, S., Skoblar, A., Butković, M.: *Comparison of a Different Implicit Time-integration Methods for the Numerical Solving of Contact Problem of the Rotor in Two Dry Friction Bearings*, *The 11th World Congress in Mechanism and Machine Science*, *Proceedings*, Tianjin, China, 2004. pp. 2148-2152.
- [87] Braut, S., Žigulić, R., Skoblar, A., Butković, M.: *Modal testing of rotordynamic test rig for rotor-stator rub investigation*, *22nd Danubia-Adria Symposium on Experimental Methods in Solid*, Parma, Italy, 2005. pp. 246-247
- [88] ...: *Vibroexpert CM-S40*, *Technische Dokumentation*, Carl Schenck, Darmstadt
- [89] Ewins, D. J.: *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press, 1984.

## POPIS OZNAKA I SIMBOLA

$c, c_x$	koeficijent prigušenja rotora odnosno statora, Ns/m
$c_{I_r}, c_{I_s}$	koeficijent torzijskog prigušenja rotora odnosno statora, Nm·s/rad
$C_B$	matrica prigušenja ležaja
$C_e$	matrica prigušenja konačnog elementa
$C^t$	Tangentna matrica prigušenja
$c_{kr}$	kritično prigušenje, Ns/m
$C_r$	zračnost između rotora i statora, m
$d_S$	promjer osovine (rukavca) u ležaju, m
$d_D$	unutarnji promjer diska, m
$D_D$	vanjski promjer diska, m
$dQ_x, dQ_y$	diferencijalna opterećenja neuravnoteženosti za smjerove $x$ i $y$
$e$	baza prirodnog logaritma
$e, e_d$	ekscentričnost mase diska, polumjer uzbudne mase, m
$E$	modul elastičnosti, N/m <sup>2</sup>
$E_k$	kinetička energija, J
$E_{kD}$	kinetička energija diska, J
$E_{kS}$	kinetička energija osovine, J
$E_{kU}$	kinetička energija mase neuravnoteženja, J
$E_{ps}, E_{pu}$	potencijalna energija deformacije, J
$E_{pv}$	potencijalna energija uslijed vanjskog opterećenja, J
$f$	vlastita frekvencija, Hz
$\mathbf{f}$	globalni vektor generaliziranih sila
$F(t)$	sila uzbude, N
$f_0$	uniformno raspodijeljeno vertikalno opterećenje konačnog elementa, N/m
$F_0$	amplituda uzbudne sile, N
$\mathbf{f}_{CI}$	vektor koncentriranih sila
$\mathbf{f}_e$	vektor ekvivalentnog opterećenja čvorova
$\mathbf{f}_{eC}$	vektor utjecaja koncentriranih sila na konačni element
$\mathbf{f}_K$	vektor unutrašnjih elastičnih sila kao doprinos tangentnoj matrici krutosti
$\mathbf{f}_C$	vektor unutrašnjih disipacijskih i giroskopskih sila kao doprinos tangentnoj matrici prigušenja
$\mathbf{f}_{con}$	vektor vanjskih nelinearnih sila kontakta
$\mathbf{f}_{es}, \mathbf{f}_{es}$	vektor kosinusnih i sinusnih sila neuravnoteženja
$F_{qt}$	poopćena sila
$F_U$	sila neuravnoteženja, N
$F_x, F_y$	Sila dodira prijicirana u smjerovima $x$ i $y$ , N
$F_N, F_T$	Normalna i tangencijalna sila dodira (kontakta), N
$F_k$	Elastični (konzervativni) dio kontaktne sile, N
$F_c$	Disipacijski dio kontaktne sile uslijed viskoznog prigušenja, N
$F_p$	Disipacijski dio kontaktne sile uslijed plastične deformacije, N
$F_{x,e}, F_{y,e}$	sve ostale sile koje djeluju na disk u smjerovima $x$ i $y$ , N

$F_{x,s}, F_{y,s}$	stacionarne komponente sile, N
$F_z$	kompleksna sila
$F_\zeta$	kompleksna sila u rotirajućem koordinatnom sustavu
$g$	gravitacijsko ubrzanje, m/s <sup>2</sup>
$G$	težina rotora, kg; modul smika, N/m <sup>2</sup>
$\mathbf{g}$	vektor vanjskih linearnih sila
$\mathbf{G}_e$	matrica giroskopskog efekta
$\mathbf{G}_D$	matrica giroskopskog efekta diska
$\mathbf{H}$	sumarna matrica matrice prigušenja i matrice giroskopskog efekta konstrukcije
$h_{ij}$	utjecajni koeficijenti pomaka, m/N
$i$	imaginarna jedinica
$I$	moment inercije poprečnog presjeka
$i_p, i_d$	polumjeri inercije mase tijela oko uzdužne i poprečne osi, m
$J_p, J_d$	moment inercije mase oko uzdužne i poprečne osi po jedinici duljine, kgm
$J_p, J_d$	moment inercije diska oko poprečne osi te oko uzdužne osi, kgm <sup>2</sup>
$J, J_s, J_m$	moment inercije rotora, statora, motora
$k$	koeficijent krutosti, N/m
$k_{xx}, k_{xy}, k_{yx}, k_{yy}$	koeficijenti krutosti u ležaju, N/m
$\mathbf{k}$	jedinični vektor u $z$ smjeru
$\mathbf{K}$	matrica krutosti sustava
$\mathbf{K}^t$	Tangentna matrica krutosti
$\mathbf{K}_B$	matrica krutosti ležaja
$\mathbf{K}_e$	matrica krutosti konačnog elementa
$\mathbf{K}_{eC}$	cirkulacijska matrica krutosti konačnog elementa
$\mathbf{K}_{eT}$	matrica utjecaja promjenjive kutne brzine na gredni konačan element osovine rotora
$\mathbf{K}_{etorz}$	matrica torzijske krutosti grednog konačnog elementa
$\mathbf{K}_{dI}$	matrica utjecaja promjenjive kutne brzine na disk rotora
$\mathbf{K}_{eI}, \mathbf{K}_{eIj}, \mathbf{K}_{eIi}, \mathbf{K}_{eIj}$	podmatrice krutosti konačnog elementa
$\hat{\mathbf{K}}$	efektivna matrica krutosti
$l$	duljina, duljina konačnog elementa, m
$L$	Lagrangeova funkcija
$m$	masa, masa diska rotora, kg
$m_s$	masa statorskog prstena, kg
$m_l$	masa po jedinici duljine grednog konačnog elementa, kg/m
$m_u$	masa neuravnoteženja, kg
$M$	moment, Nm
$M_p$	Prekretni moment motora, Nm
$M_{pg}$	Moment generatorskog kočenja asinkronog motora, Nm
$\mathbf{M}$	matrica inercije sustava
$M_x, M_y$	momenti u smjerovima $x$ i $y$
$\mathbf{M}_e$	matrica inercije konačnog elementa
$\mathbf{M}_{eR}$	matrica inercije konačnog elementa uslijed rotacije
$\mathbf{M}_{eT}$	matrica inercije konačnog elementa uslijed translacije
$\mathbf{M}_{etorz}$	matrica inercije konačnog elementa uslijed torzije

$\mathbf{M}_D$	matrica inercije diska
$n_{kr}$	kritična brzina vrtnje, $\text{min}^{-1}$
$\mathbf{n}_0$	jedinični vektor normale
$\mathbf{N}_e$	matrica interpolacijskih funkcija
$\mathbf{N}_g$	pomoćna matrica za dobivanje matrice giroskopskog efekta
$\mathbf{N}_r$	matrica interpolacijskih funkcija za rotacijske pomake
$N_1, N_2, N_3, N_4, N_5,$	interpolacijske funkcije
$p_x(z), p_y(z)$	raspodjele neuravnoteženosti mase za stacionarne ravnine X-Z i Y-Z
$\mathbf{q}_0$	amplitude pomaka
$\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$ i $\ddot{\mathbf{q}}_0$	vektor početnih vrijednosti pomaka, brzine i ubrzanja
$\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ i $\ddot{\mathbf{q}}$	globalni vektor pomaka, brzina i ubrzanja
$\mathbf{q}_e$	vektor pomaka čvorova konačnog elementa
$\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_s$	vektor kosinusnih i sinusnih pomaka
$\mathbf{q}_{n0}$	vektor pomaka jednog čvora konačnog elementa
$\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t$ i $\ddot{\mathbf{q}}_t$	vektor pomaka, brzine i ubrzanja u trenutku $t$
$\mathbf{q}_{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ i $\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$	vektor pomaka, brzine i ubrzanja u trenutku $t+\Delta t$
$r$	relativni radijalni pomak između rotora i statora, m
$r_r, r_s$	polumjer rotora i polumjer statora, m
$r_u$	polumjer neuravnoteženja, m
$R_B$	polumjer provrta kliznog ležaja, m
$R_D$	polumjer diska, m
$\mathbf{R}_1, \mathbf{I}_1,$	vektori realnih i imaginarnih pomaka prve vlastite frekvencije
$\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s$	vektor položaja središta rotora odnosno statora
$\mathbf{r}$	vektor ostatka u iterativnom postupku izračuna nelinearnog odziva sustava
$s_{pn}$	nominalno klizanje asinkronog motora u točki prekretna
$\mathbf{S}$	Jakobijeva tangentska matrica
$t$	vrijeme, s
$u$	funkcija pomaka unutar konačnog elementa
$\mathbf{u}, \ddot{\mathbf{u}}$	vektor pomaka i vektor ubrzanja unutar konačnog elementa
$u(z, t)$	funkcija pomaka unutar konačnog elementa
$u_1, v_1, u_2, v_2$	radijalni pomaci 1. i 2. čvora konačnog elementa u smjerovima $x$ i $y$
$u_{ri}, u_{is}, v_{ri}, v_{is}$	realni i imaginarni radijalni pomaci $i$ -tog čvora konstrukcije (rotora)
$v_{01}, v_{02}$	brzine tijela 1 i tijela 2 prije sudara
$v_1, v_2$	brzine tijela 1 i tijela 2 nakon sudara
$v_{rm}, v_{sn}$	brzine rotora odnosno statora projicirane na normalu dodira, m/s
$v_{kl}$	relativna brzina klizanja površine diska rotora u odnosu na površinu statora, m/s
$\mathbf{v}_A$	vektor brzine točke A na površini osovine
$\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_s$	vektor brzine središta rotora odnosno statora
$x$	pomak mase u odnosu na položaj statičke ravnoteže, m
$x, y, z$	koordinate lokalnog koordinatnog sustava
$X, Y, Z$	koordinate globalnog koordinatnog sustava
$x_s, y_s$	pomaci središta diska rotora, m
$x_s, y_s$	pomaci središta statora, m
$x_0$	amplituda pomaka, m
$x_0'$	amplituda pomaka za slučaj uzbude neuravnoteženjem, m

$x_{0\max}$	maksimalna amplituda pomaka, m
$x_H, x_P$	homogeni i partikularni dio rješenja odziva vibracija, m
$x_n$	pomak u vremenu $t_0$
$x_{n+1}$	pomak u vremenu $t_0+T_p$
$\alpha$	parametar nelinearnog prigušenja u kontaktu, s/m
$\alpha_i$	kut otklona ravnine diska pri određenoj vlastitoj frekvenciji
$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$	rotacijski pomaci 1. i 2. čvora konačnog elementa u smjerovima $x$ i $y$
$\alpha_f, \alpha_m$	parametri generalizirane $\alpha$ metode
$\delta, \delta'$	relativna deformacija rotora i statora pri dodiru i brzina relativne deformacije
$\dot{\epsilon}$	derivacija deformacije po vremenu, derivacija relativne ekcentričnosti ležaja po vremenu
$\epsilon$	koeficijent restitucije
$\varphi$	omjer frekvencije pretvarača i nominalne frekvencije strujne mreže
$\gamma_s$	kutni otklon pravca normale provučen kroz točku dodira rotora i statora, rad
$\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$	kutna brzina, rad/s i ubrzanje diska oko osi osovine, $\text{rad/s}^2$
$\varphi_3, \varphi_4$	kutovi rotacije diska oko poprečnih osi, rad
$\vartheta$	logaritamski dekrement; temperatura, °C
$\lambda$	parametar prigušenja
$\mu$	koeficijent trenja
$\mu_0$	koeficijent statičkog trenja
$\mu_{potr}$	potreban koeficijent trenja
$\Omega$	kutna brzina rotora, kružna frekvencija uzbudne sile, rad/s
$\omega$	vlastita kružna frekvencija, rad/s
$\omega_{rot}$	kutna brzina rotacije rotora, rad/s
$\omega_{np}$	kutna brzina natražne precesije, rad/s
$\omega_{r0}$	vlastita kružna frekvencija rotora, rad/s
$\Omega_{kr}$	kritična kutna brzina, rad/s
$\psi'$	fazni kut, kapacitet unutarnjeg prigušenja u osovini, relativna zračnost u cilindričnom kliznom ležaju, kompleksna vrijednost rotacija diska
$\psi', \ddot{\psi}$	prva i druga derivacija kompleksne vrijednosti rotacija diska po vremenu
$\dot{\psi}$	kutna brzina natražne precesije
$\zeta_r, \zeta_s$	omjer prigušenja, rotora i statora,
$d$	diferencijal
$\Delta$	konačna razlika
$\delta$	varijacija
$\cos, \sin, \tan$	trigonometrijske funkcije kosinusa, sinusa i tangensa
$d/dt, d^2/dt^2$	prva i druga derivacija po vremenu $t$
$\partial/\partial\varphi, \partial^2/\partial\varphi^2$	prva i druga parcijalna derivacija po kutu $\varphi$

## POPIS SLIKA

Slika 1.1.	Idejno rješenje eksperimentalnog uređaja	4
Slika 2.1.	Jeffcottov rotor	7
Slika 2.2.	Dodir diska Jeffcottovog rotora sa statorom	8
Slika 2.3.	Potreban koeficijent trenja u ovisnosti od kružne frekvencije	13
Slika 2.4.	Model kontaktne sile – sustav opruge i prigušivača	18
Slika 2.5.	Modeli kontaktne sile	20
Slika 2.6.	Reakcija hrapave podloge na tangencijalnu silu povlačenja	23
Slika 2.7.	Stribeck-ova krivulja, a) za suho trenje, b) za trenje sustava s mazivom	24
Slika 2.8.	Definicija sila u kontaktu koje djeluju na rotor odnosno stator	24
Slika 2.9.	Modeli trenja, a) Model Coulombovog trenja klizanja, b) Model a) + statičko trenje c) Model b) + Stribeckovo trenje, d) Model c) + „viskozno“ trenje	25
Slika 3.1.	Model rotora sa krutim statorom	27
Slika 3.2.	Model rotora sa fleksijski elastičnim statorom	28
Slika 3.3.	Definicija smjerova sile dodira između rotora i statora	29
Slika 3.4.	Model rotora sa fleksijski i torzijski elastičnim statorom te modelom elektromotora	30
Slika 3.5.	Niz momentnih krivulja asinkronog elektromotora nominalne snage $P = 1.5 \text{ kW}$	31
Slika 3.6.	Definicija vektora potrebnih za određivanje brzine lokalne deformacije $\delta$	32
Slika 3.7.	Osnovni gredni konačni element	34
Slika 3.8.	Gredni konačni element za prostornu analizu dinamike rotora	37
Slika 3.9.	Krutosti i prigušenja ležaja	40
Slika 3.10.	Stupnjevi slobode za kruti disk	41
Slika 3.11.	Kinematika stacionarnog odziva	46
Slika 3.12.	Newt.-Raphsonov iteracijski postupak za rješavanje vibracija sustava s jednim stupnjem slobode gibanja	49
Slika 4.1.	Tranzijentni odziv rotora pri kutnom ubrzanju $\varepsilon = 100\pi, \text{ rad/s}^2$ (odnosno usporenju $\varepsilon = -100\pi, \text{ rad/s}^2$ )	53
Slika 4.2.	Usporedni prikaz stacionarnog i tranzijentnog odziva rotora u ovisnosti od brzine vrtnje pri različitim kutnim ubrzanjima $\varepsilon = (100\pi, 30\pi \text{ i } 10\pi) \text{ rad/s}^2$ (odnosno istim usporenjima)	53
Slika 4.3.	Tranzijentni odziv rotora pri dodiru s krutim statorom a sa kutnim ubrzanjem $\varepsilon = 6\pi, \text{ rad/s}^2$ , a) Amplitude pomaka, b) Normalna sila dodira	54
Slika 4.4.	Tranzijentni odziv rotora pri dodiru s krutim statorom a sa kutnim ubrzanjem $\varepsilon = 2\pi, \text{ rad/s}^2$ , a) Amplitude pomaka, b) Normalna sila dodira	54
Slika 4.5.	Tranzijentni odziv rotora pri dodiru s krutim statorom a sa kutnim usporenjem $\varepsilon = -6\pi, \text{ rad/s}^2$	54
Slika 4.6.	Tranzijentni odziv rotora pri dodiru s krutim statorom a sa kutnim usporenjem $\varepsilon = -2\pi, \text{ rad/s}^2$ , a) Amplituda pomaka, b) Normalna sila dodira	55
Slika 4.7.	Kontaktna sila u ovisnosti od deformacije dobivena na osnovi a) linearnog modela, b) nelinearnog modela	56
Slika 4.8.	Tranzijentni odzivi rotora i statora za slučaj a) upućivanja i slučaj b) zaustavljanja	57

Slika 4.9.	Normalna sila dodira vezano uz odzive sa slike 4.8. a) za slučajeve a) upućivanja i b) zaustavljanja	57
Slika 4.10.	Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim kutnim ubrzanjima	57
Slika 4.11.	Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim koeficijentima trenja $\mu$ , a) Amplitude pomaka, b) Normalne sile dodira, c) Tangencijalna brzina središta diska rotora	58
Slika 4.12.	Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim omjerima mase statora i rotora, a) Amplitude pomaka, b) Normalne sile dodira	59
Slika 4.13.	Odzivi rotora (i statora) pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim omjerima krutosti statora i rotora; a) Amplitude pomaka rotora pri omjerima krutosti $k_s/k_r = 4, 10$ , b) Normalna sila dodira pri $k_s/k_r = 4, 10$ , c) Amplitude pomaka rotora i statora pri $k_s/k_r = 16$ , d) Normalna sila dodira pri $k_s/k_r = 16$	60
Slika 4.14.	Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim iznosima neuravnoteženja, a) Stacionarni odzivi bez kontakta sa statorom, b) Tranzijentni odzivi pri kontaktu sa statorom,	60
Slika 4.14.	Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim iznosima neuravnoteženja, c) Normalne sile dodira pri različitim neuravnoteženjima	61
Slika 4.15.	Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim omjerima prigušenja rotora $\zeta_r$ , a) Amplitude pomaka, b) Normalne sile dodira $F_N$	61
Slika 4.16.	Odzivi rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu pri različitim omjerima prigušenja statora $\zeta_s$ , a) Amplitude pomaka, b) Odzivi statora	61
Slika 4.16.	Nastavak, c) Normalne sile dodira $F_N$	62
Slika 4.17.	Odzivi rotora i statora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu sa realnim parametrima linearnog modela kontakta, a) Amplitude pomaka, b) Normalne sile dodira $F_N$	62
Slika 4.18.	Odzivi rotora i statora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu sa realnim parametrima nelinearnog modela kontakta te koeficijentom trenja $\mu = 0.1$ , a) Ampl. pomaka, b) Normalne sile dodira $F_N$	63
Slika 4.19.	a) Odziv rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu sa realnim parametrima nelinearnog modela kontakta te koeficijentom trenja $\mu = 0.15$ , b) Odziv statora, c) Relativna normalna brzina između rotora i statora sa indikacijom kontakta, d) Tangenc. brzina središta diska rotora, e) Frekvencija precesije rotora, f) Elastična i prigušna sila dodira	64
Slika 4.19.	Nastavak, g) Brzina klizanja u dodirnoj točki rotora i statora	65
Slika 4.20.	Orbite središta diska rotora za slučaj sa slike 4.19	65
Slika 4.20.	Orbite središta diska rotora za slučaj sa slike 4.19 (nastavak)	66
Slika 4.21.	a) Odziv rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu sa realnim parametrima nelinearnog modela kontakta te koeficijentom trenja $\mu = 0.2$ , b) Odziv statora, c) Relativna normalna brzina između rotora i statora sa indikacijom kontakta, d) Tangencijalna brzina središta diska rotora, e) Frekvencija precesije rotora, f) Brzina klizanja u dodirnoj točki rotora i statora	67
Slika 4.22.	a) Odziv rotora pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu sa asimetrično postavljenim statorom te koeficijentom trenja $\mu = 0.15$ , b) Odziv statora, c) Relativna normalna brzina, d) Tangencijalna brzina središta diska rotora	68
Slika 4.23.	Radijalni odziv rotora i statora u horizontalnom smjeru pri ubrzanju kroz kritičnu brzinu za model sa implementiranom torzijom	69
Slika 4.24.	Relativni torzijski kut između motora i diska na kojem se ostvaruje kontakt	70

<b>Slika 4.25.</b> Torzijski kut statora za slučajeve: a) $\zeta_{is} = 0.001$ , b) $\zeta_{is} = 0.005$ i c) $\zeta_{is} = 0.01$ .....	70
<b>Slika 4.26.</b> Korisničko sučelje programa RotorDyn .....	71
<b>Slika 4.27.</b> Korisničko sučelje dijaloga za upisivanje podataka o konačnim elementima .....	72
<b>Slika 4.28.</b> Korisničko sučelje dijaloga za upisivanje podataka o elastičnim spojkama .....	72
<b>Slika 4.29.</b> Korisničko sučelje dijaloga za upisivanje podataka o statoru .....	72
<b>Slika 4.30.</b> Korisničko sučelje dijaloga za upisivanje podataka o traženim vlastitim frekvencijama ..	73
<b>Slika 4.31.</b> Korisničko sučelje za definiciju parametara pri traženju linearnog odziva rotora .....	73
<b>Slika 4.32.</b> Korisničko sučelje dijaloga za upisivanje podataka o kontaktu .....	73
<b>Slika 4.33.</b> Korisničko sučelje za definiciju parametara pri određivanju nelinearnog odziva uslijed kontakta rotora i statora .....	74
<b>Slika 4.34.</b> Korisničko sučelje dijaloga za prikaz vlastitih vektora .....	74
<b>Slika 4.35.</b> Ispis podataka o analiziranom rotoru iz baze programa RotorDyn .....	75
<b>Slika 4.36.</b> Fleksijski vlastiti oblici vibriranja KE modela rotora .....	76
<b>Slika 4.37.</b> Torzijski vlastiti oblici vibriranja KE modela rotora .....	76
<b>Slika 4.38.</b> Campbellov dijagram .....	77
<b>Slika 4.39.</b> Broj ostvarenih korekcija nelinearnog rješavača po pojedinom vremenskom koraku pri simulaciji prolaska rotora kroz kritičnu brzinu vrtnje uz kontakt sa statorom za slučajeve: a) bez torzije i b) sa utjecajem torzije .....	78
<b>Slika 4.40.</b> Odziv 4. čvora rotora i statora u horizontalnom smjeru u vremenskoj domeni za simulacije: a) $f_{1f} = 28.04$ , Hz, b) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 134.05$ Hz i c) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 28.5$ Hz .....	79
<b>Slika 4.41.</b> Relativne normalne brzine između rotora (čvor 5) i statora sa indicijom kontakta: a) $f_{1f} = 28.04$ , Hz, b) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 134.05$ Hz i c) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 28.5$ Hz .....	80
<b>Slika 4.42.</b> Tangencijalna brzina središta diska rotora (čvor 5) uslijed precesije, simulacija b) .....	81
<b>Slika 4.43.</b> Relativna brzina klizanja između najbližih točaka rotora i statora .....	81
<b>Slika 4.44.</b> Frekvencija precesije rotora za simulacije: a) $f_{1f} = 28.04$ , Hz, b) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 134.05$ Hz i c) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 28.5$ Hz .....	81
<b>Slika 4.45.</b> Normalne sile dodira za simulacije: a) $f_{1f} = 28.04$ , Hz, b) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 134.05$ Hz i c) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 28.5$ Hz .....	82
<b>Slika 4.46.</b> Moment motora za simulacije: b) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 134.05$ Hz i c) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 28.5$ Hz .....	83
<b>Slika 4.47.</b> Moment dodira između rotora i statora za simulacije: b) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 134.05$ Hz i c) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 28.5$ Hz .....	83
<b>Slika 4.48.</b> Torzijski kut statora za simulacije: b) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 134.05$ Hz i c) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 28.5$ Hz .....	83
<b>Slika 4.49.</b> Torzijski kut rotora za simulacije: b) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 134.05$ Hz i c) $f_{1f} = 28.04$ Hz, $f_{1r} = 28.5$ Hz .....	84
<b>Slika 4.50.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, za FEM simulaciju (b) .....	84
<b>Slika 4.50.</b> Nastavak orbite a) rotora i statora, b) statora, za FEM simulaciju (b) .....	85

<b>Slika 4.51.</b> Odzivi rotora i statora za slijedeće mase otpadnute lopatice: a) $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$ kg, b) $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$ kg, c) $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$ kg, d) $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$ kg, .....	87
<b>Slika 4.52.</b> Brzina vrtnje rotora za slijedeće mase otpadnute lopatice: a) $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$ kg, b) $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$ kg, c) $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$ kg, d) $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$ kg, .....	89
<b>Slika 4.53.</b> Relativne normalne brzine između rotora (čvor 5) i statora sa indicijom kontakta: a) $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$ kg, b) $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$ kg, c) $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$ kg, d) $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$ kg, .....	90
<b>Slika 4.54.</b> Frekvencija precesije rotora za uvjete: a) $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$ kg, b) $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$ kg, c) $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$ kg, d) $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$ kg, .....	91
<b>Slika 4.55.</b> Relativna brzina klizanja, simulacija d) $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$ kg .....	92
<b>Slika 4.56.</b> Normalna sila dodira, simulacija d) $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$ kg .....	92
<b>Slika 4.57.</b> Moment motora, simulacija d) $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$ kg .....	92
<b>Slika 4.58.</b> Moment dodira, simulacija d) $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$ kg .....	92
<b>Slika 4.59.</b> Torzijski kut statora za uvjete: a) $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$ kg, b) $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$ kg, c) $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$ kg, d) $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$ kg, .....	93
<b>Slika 4.60.</b> Torzijski kut rotora za uvjete: a) $m_{add} = 1 \cdot 10^{-3}$ kg, b) $m_{add} = 5 \cdot 10^{-3}$ kg, c) $m_{add} = 11 \cdot 10^{-3}$ kg, d) $m_{add} = 20 \cdot 10^{-3}$ kg, .....	94
<b>Slika 5.1.</b> Eksperimentalni uređaj za istraživanje dinamike rotora u uvjetima kontakta rotora i statora .....	95
<b>Slika 5.2.</b> Fotografija eksperimentalnog uređaja za istraživanje dinamike rotora .....	95
<b>Slika 5.3.</b> Ljuska za spajanje diskova na osovinu .....	96
<b>Slika 5.4.</b> Raspored diskova na osovinu .....	96
<b>Slika 5.5.</b> Ležajni blok sa samopodesivim kugličnim ležajem .....	97
<b>Slika 5.6.</b> Statorski sklop sa nosačem beskontaktnih senzora .....	98
<b>Slika 5.7.</b> Spoj rotora s elektromotorom preko elastične spojke .....	99
<b>Slika 6.1.</b> Radijalni pomaci rotora u horizontalnom smjeru .....	101
<b>Slika 6.2.</b> Radijalni pomaci rotora u vertikalnom smjeru .....	102
<b>Slika 6.3.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru .....	102
<b>Slika 6.4.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru .....	102
<b>Slika 6.5.</b> Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u horizontalnom smjeru .....	103
<b>Slika 6.6.</b> Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u vertikalnom smjeru .....	103
<b>Slika 6.7.</b> Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer zajedno sa izmjerenom promjenom brzine vrtnje u vremenu .....	104
<b>Slika 6.8.</b> Izmjerene orbite rotora za slučaj bez pojave dodira s statorom .....	105
<b>Slika 6.9.</b> Radijalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u horizontalnom smjeru ...	107
<b>Slika 6.10.</b> Radijalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u vertikalnom smjeru .....	107
<b>Slika 6.11.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom .....	108
<b>Slika 6.12.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri kontaktu sa statorom .....	108
<b>Slika 6.13.</b> Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom .....	109
<b>Slika 6.14.</b> Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri kontaktu sa statorom .....	109
<b>Slika 6.15.</b> Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom .....	110

<b>Slika 6.16.</b> Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika statora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa rotorom .....	110
<b>Slika 6.17.</b> Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer pri pojavi dodira sa statorom .....	111
<b>Slika 6.18.</b> Spektralna mapa odziva statora za horizontalni smjer pri pojavi dodira sa rotorom .....	111
<b>Slika 6.19.</b> Promjena brzine vrtnje u vremenu .....	111
<b>Slika 6.20.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora. Mjerenje ubrzavanja rotora sa manjim neuravnoteženjem pri brzini vrtnje $n = 25.477$ Hz .....	112
<b>Slika 6.21.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 25.477$ Hz .....	112
<b>Slika 6.22.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora. Mjerenje ubrzavanja rotora sa manjim neuravnoteženjem pri brzini vrtnje $n = 27.21$ Hz .....	113
<b>Slika 6.23.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 27.21$ Hz .....	113
<b>Slika 6.24.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora. Mjerenje ubrzavanja rotora sa manjim neuravnoteženjem pri brzini vrtnje $n = 28.37$ Hz .....	114
<b>Slika 6.25.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 28.37$ Hz .....	114
<b>Slika 6.26.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora. Mjerenje ubrzavanja rotora sa manjim neuravnoteženjem pri brzini vrtnje $n = 28.99$ Hz .....	115
<b>Slika 6.27.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 28.99$ Hz .....	115
<b>Slika 6.28.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora. Mjerenje ubrzavanja rotora sa manjim neuravnoteženjem pri brzini vrtnje $n = 29.41$ Hz .....	116
<b>Slika 6.29.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 29.41$ Hz .....	116
<b>Slika 6.30.</b> Radijalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u horizontalnom smjeru ...	118
<b>Slika 6.31.</b> Radijalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u vertikalnom smjeru .....	118
<b>Slika 6.32.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – usporavanje rotora .....	119
<b>Slika 6.33.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – usporavanje rotora .....	119
<b>Slika 6.34.</b> Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – usporavanje rotora .....	120
<b>Slika 6.35.</b> Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – usporavanje rotora .....	120
<b>Slika 6.36.</b> Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika torzijskih rotacija statora pri kontaktu sa rotorom – usporavanje rotora .....	121
<b>Slika 6.37.</b> Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika statora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa rotorom .....	121
<b>Slika 6.38.</b> Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer pri pojavi dodira sa statorom .....	122
<b>Slika 6.39.</b> Spektralna mapa torzijskih kutova statora pri pojavi dodira sa rotorom, mjerenih parom beskontaktnih senzora .....	122
<b>Slika 6.40.</b> Promjena brzine vrtnje u vremenu .....	122
<b>Slika 6.41.</b> Radijalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u horizontalnom smjeru ...	124
<b>Slika 6.42.</b> Radijalni pomaci rotora i statora zajedno te statora uvećano u vertikalnom smjeru .....	124

<b>Slika 6.43.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – povećano neuravnoteženje .....	125
<b>Slika 6.44.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – povećano neuravnoteženje .....	125
<b>Slika 6.45.</b> Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – povećano neuravnoteženje .....	126
<b>Slika 6.46.</b> Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa statorom – povećano neuravnoteženje .....	126
<b>Slika 6.47.</b> Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika torzijskih rotacija statora pri kontaktu sa rotorom – povećano neuravnoteženje .....	127
<b>Slika 6.48.</b> Amplitude pomaka i fazni kut trećeg harmonika statora u horizontalnom smjeru pri kontaktu sa rotorom – povećano neuravnoteženje .....	127
<b>Slika 6.49.</b> Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer pri pojavi dodira sa statorom .....	128
<b>Slika 6.50.</b> Spektralna mapa torzijskih kutova statora pri pojavi dodira sa rotorom, mjerenih parom beskontaktnih senzora .....	128
<b>Slika 6.51.</b> Promjena brzine vrtnje u vremenu .....	128
<b>Slika 6.52.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje $n = 20.304$ Hz .....	130
<b>Slika 6.53.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 20.304$ Hz .....	130
<b>Slika 6.54.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje $n = 25$ Hz .....	131
<b>Slika 6.55.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 25$ Hz .....	131
<b>Slika 6.56.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje $n = 26.14$ Hz .....	132
<b>Slika 6.57.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 26.14$ Hz .....	132
<b>Slika 6.58.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje $n = 26.67$ Hz .....	133
<b>Slika 6.59.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 26.67$ Hz .....	133
<b>Slika 6.60.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje $n = 28.37$ Hz .....	134
<b>Slika 6.61.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 28.37$ Hz .....	134
<b>Slika 6.62.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje $n = 28.78$ Hz .....	135
<b>Slika 6.63.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 28.78$ Hz .....	135
<b>Slika 6.64.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje $n = 30.08$ Hz .....	136
<b>Slika 6.65.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 30.08$ Hz .....	136
<b>Slika 6.66.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje $n = 30.77$ Hz .....	137
<b>Slika 6.67.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 30.77$ Hz .....	137
<b>Slika 6.68.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje $n = 31.25$ Hz .....	138
<b>Slika 6.69.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 31.25$ Hz .....	138
<b>Slika 6.70.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje $n = 32.00$ Hz .....	139
<b>Slika 6.71.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 32.00$ Hz .....	139

<b>Slika 6.72.</b> Orbite a) rotora i statora, b) statora, pri brzini vrtnje $n = 33.61$ Hz .....	140
<b>Slika 6.73.</b> Poprečni pomaci rotora i statora te torzijski kut statora u vremenskoj domeni pri brzini vrtnje $n = 33.61$ Hz .....	140

## POPIS TABLICA

<b>Tablica 4.1.</b> Podaci o analiziranom modelu dodira rotora s krutim statorom .....	53
<b>Tablica 4.2.</b> Vrijednosti parametara koje vrijede za sve simulacije ako nije drukčije navedeno .....	56
<b>Tablica 4.3.</b> Podaci o analiziranom modelu dodira rotora s fleksijski i torzijski elastičnim statorom .....	69
<b>Tablica 4.4.</b> Kritične brzine vrtnje KE modela rotora .....	77
<b>Tablica 5.1.</b> Vlastite frekvencije i relativna prigušenja rotora izmjerene na osnovi impulsne uzbude .....	97
<b>Tablica 5.2.</b> Vlastite frekvencije i relativna prigušenja statora izmjerene na osnovi impulsne uzbude .....	98
<b>Tablica 5.3.</b> Tehničke karakteristike asinkronog kaveznog elektromotora .....	98
<b>Tablica 5.4.</b> Tehničke karakteristike pretvarača napona i frekvencije .....	98
<b>Tablica 5.5.</b> Tehničke karakteristike elastične spojke .....	99





### Prilog B: Matrice krutog diska za fleksijsko-torzijsku analizu dinamike rotora

Ovdje prikazane matrice vezane su uz izvod jednadžbi gibanja za kruti disk prikazan u poglavlju 3.3.3.1. kada su uključeni torzijski stupnjevi slobode gibanja.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\phi} \mathbf{G}_D \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\phi} \mathbf{K}_{DT} \mathbf{q} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_p \end{bmatrix} \quad (B1)$$

$$\mathbf{G}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p & 0 \\ 0 & 0 & -J_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B2)$$

$$\mathbf{K}_{DT} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B3)$$

pri čemu je:  $\dot{\phi}$  – kutna brzina konačnog elementa  
 $\ddot{\phi}$  – kutno ubrzanje konačnog elementa  
 $J_p$  – moment inercije mase diska oko uzdužne osi  
 $J_d$  – moment inercije mase diska oko poprečne osi

**Napomena:** Iste matrice se mogu koristiti i za slučaj čiste fleksijske analize s time da se onda odbacuje peti redak i peti stupac.

### Prilog C: Matrice grednog konačnog elementa za fleksijsko-torzijsku analizu dinamike rotora

Ovdje prikazane matrice vezane su uz izvod jednadžbi gibanja za gredni konačni element za prostornu analizu dinamike rotora iz poglavlja 3.3.3.2. kada su uključeni torzijski stupnjevi slobode gibanja.

$$(\mathbf{M}_{eT} + \mathbf{M}_{eR}) \ddot{\mathbf{q}}_e + \dot{\phi} \mathbf{G}_e \dot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{K}_e + \ddot{\phi} \mathbf{K}_{eT}) \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e \quad (3.63)$$

$$\mathbf{M}_{etorz} \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_{etorz} \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e \quad (3.66)$$

Matrice  $\mathbf{M}_{eT}$ ,  $\mathbf{M}_{eR}$ ,  $\mathbf{G}_e$  te  $\mathbf{K}_e$  imaju isti oblik kao u prilogu A s tom razlikom da ih treba proširiti sa 5 i 10 retkom odnosno stupcem sukladno obliku vektora pomaka konačnog elementa (3.61)

$$\mathbf{K}_{eT} = \ddot{\phi} \frac{\rho I}{15l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 0 & 36 & 0 & 0 & -3l & 0 \\ 3l & 0 & 0 & 4l^2 & 0 & -3l & 0 & 0 & -l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3l & 0 & -36 & 0 & 0 & 3l & 0 \\ 3l & 0 & 0 & -l^2 & 0 & -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

pri čemu je:  $I$  - moment inercije poprečnog presjeka  
 $\rho$  - gustoća materijala konačnog elementa  
 $l$  - duljina konačnog elementa

$$\mathbf{M}_{etorz} = \frac{I_p l}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

$$K_{\text{torz}} = \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

## ŽIVOTOPIS

Sanjin Braut rođen je 4. siječnja 1973. godine u Rijeci, Republika Hrvatska. Osnovnu školu pohađa u Viškovu nakon koje se upisuje u Tehnički školski centar Rijeka za zanimanje *Strojarski tehničar-Opći smjer*. Srednju školu završava u lipnju 1991. godine da bi iste godine upisao studij strojarstva na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci. Na završnoj godini drži demonstrature iz predmeta *Termodinamika binarnih smjesa* i *Tehnika hlađenja*. Dobitnik je stipendije Sveučilišta u Rijeci za najbolje studente završnih godina. 6. 12. 1996. godine završava studij obranom diplomskog rada s temom *Generator pare na ispušne plinove u plinskoj elektrani* pod vodstvom mentora izv. prof. dr. Zmagoslava Preleca čime stječe stručni naziv diplomiranog inženjera strojarstva.

Na odsluženje vojnog roka odlazi 1997. godine. U veljači 1998. godine zapošljava se na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci kao znanstveni novak na Zavodu za tehničku mehaniku i računarsko inženjerstvo gdje u svojstvu asistenta drži vježbe iz predmeta *Mehanika II*, *Kinematika*, *Dinamika*, *Teorija oscilacija* i *Dinamika strojeva*. Sudjeluje na Znanstvenom projektu *Mehanička sigurnost strojeva* pod vodstvom glavnog istraživača prof. dr. Mirka Butkovića. Istovremeno upisuje i poslijediplomski studij strojarstva smjer *Računarska mehanika*.

U 1999. godini boravi na Strojarskom fakultetu tehničkog sveučilišta u Brnu (Češka) u okviru *CEEPUS stipendije*. Iste godine preko *Stipendije u okviru visokodiferentnih programa* Županijske primorsko-goranske boravi na Zavodu za mehatroniku Tehničkog sveučilišta u Darmstadtu (Njemačka) pod vodstvom prof. dr.-ing. Rainer Nordmann-a.

Magistarski rad pod nazivom *Analiza dinamike rotora* uspješno je obranio 20. lipnja 2002. godine pod vodstvom mentora prof. dr. sc. Mirka Butkovića.

Od 1999. do 2001. godine sudjelovao je u bilateralnom Hrvatsko – Slovenskom znanstvenom projektu *Vibracije i sigurnost strojeva* pod vodstvom prof. dr. sc. Mirka Butkovića s hrvatske strane, a trenutno sudjeluje na znanstvenom projektu *Nelinearna dinamika rotacijskih strojeva* također pod vodstvom glavnog istraživača prof. dr. sc. Mirka Butkovića.

Do sada je kao koautor objavio 18 znanstvenih radova te jedan sveučilišni udžbenik. Aktivno se služi engleskim, a pasivno njemačkim jezikom. Oženjen je i otac dvoje djece.

## PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

### 1. AUTOR

Ime i prezime: Sanjin Braut

Datum i mjesto rođenja: 04. 01. 1973. Rijeka

Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Strojarsvo 1996.

Naziv fakulteta, smjera i godina završetka poslijediplomskog studija: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Računarska mehanika, 2002.

Sadašnje zaposlenje: Asistent, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

### 2. DOKTORSKA DISERTACIJA

Naslov: Analiza dinamike rotora pri dodiru rotora i statora

Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka: 167, 161, 9, 89

Znanstveno polje i grana: Strojarsvo, opće strojarstvo; Druge temeljne i tehničke znanosti, tehnička mehanika i mehanika fluida

Voditelj rada: Red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing.

Fakultet na kojem je rad obranjen: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

### 3. OBRANA I OCJENA

Datum prijave teme: 26. rujna 2003.

Datum predaje rada: 14. travnja 2006.

Datum prihvaćanja ocjene rada: 26. svibnja 2006.

Sastav Povjerenstva za ocjenu: izv. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing.  
red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing.  
red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, dipl. ing.

Datum obrane: 09. lipnja 2006.

Sastav Povjerenstva za obranu: red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, dipl. ing.  
red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing.  
prof. dr. -ing. Rainer Nordmann

Datum promocije:

## ANALIZA DINAMIKE ROTORA PRI DODIRU ROTORA I STATORA

Sanjin Braut

Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
Hrvatska

Ključne riječi: dinamika rotora  
dodir rotora i statora  
fleksijske i torzijske vibracije  
trenje klizanja i kotrljanja  
metoda konačnih elemenata  
numeričko modeliranje  
mjerenje vibracija

### Sažetak:

U radu je prikazan numerički pristup rješavanju problema dodira (kontakta) rotora i statora pomoću jednostavnih modela, Runge-Kutta metodom, te kompleksnijih konačnolementnih modela sa posebno razvijenom aplikacijom nazvanom RotorDyn. U radu je prikazan novi pristup rješavanju problema kontakta rotora i statora uvođenjem torzijskih stupnjeva slobode gibanja. U programski paket RotorDyn implementirani su linearni i nelinearni modeli normalne sile dodira te različiti modeli trenja dobiveni proširenjem osnovnog Coulombovog modela. Nelinearna analiza dinamike rotora ostvarena je primjenom metoda direktne integracije; HHT  $\alpha$  metode i generalizirane  $\alpha$  metode. Izvedena je detaljna parametarska analiza pojedinih utjecaja na pojavu kontakta između rotora i statora.

Dobiveni rezultati uspoređeni su sa eksperimentalnim i numeričkim rezultatima drugih autora dostupnim iz literature, te vlastitim eksperimentalnim rezultatima dobivenim osam-kanalnom mjernom opremom na posebno konstruiranom eksperimentalnom uređaju.

Rad nije objavljen.

Mentor: red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing.  
Komentor: izv. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing.  
Povjerenstvo za ocjenu: izv. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing.  
red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing.  
red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, dipl. ing.  
Povjerenstvo za obranu: red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, dipl. ing.  
red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing.  
prof. dr. –ing. Rainer Nordmann

Datum obrane: 09.lipnja 2006.

Datum promocije:

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.  
(167 stranica, 161 slika, 9 tablica, 89 bibliografskih podataka, hrvatski jezik)

UDK 519.6:531.395:534.1:531.46:534.83:004.42(043)

Ključne riječi:  
dinamika rotora  
dodir rotora i statora  
fleksijske i torzijske vibracije  
trenje klizanja i kotrljanja  
metoda konačnih elemenata  
numeričko modeliranje  
mjerenje vibracija

I. Analiza dinamike rotora pri  
dodiru rotora i statora

I. Sanjin Braut

II. Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
Hrvatska

DD

Code: DD No:

UDC 519.6:531.395:534.1:531.46:534.83:004.42(043)

## ANALYSIS OF THE ROTOR-STATOR CONTACT DYNAMICS

Sanjin Braut

University of Rijeka  
Faculty of Engineering  
Croatia

Keywords: Rotordynamics  
Rotor-Stator Contact  
Flexural and Torsional Vibrations  
Sliding and Rolling Friction  
Finite Element Method  
Numerical Modeling  
Vibration Measurement

### Summary:

In this thesis, numerical approach for solving the contact phenomena between rotor and stator is shown. As well as simple contact models, complex FEM models are analyzed too. For simple models Runge-Kutta method were used but for complex model special application, called RotorDyn, was programmed. In this thesis, a new approach in solving the contact phenomena was presented by introducing a torsional degrees of freedom. In program package RotorDyn linear and also nonlinear normal force model are implemented as well as different friction force models based on Coulomb friction model. In RotorDyn program package different integration scheme are implemented like HHT  $\alpha$  method and Generalized  $\alpha$  method. Detailed parameter studies were performed with analysis of a numerous effects on rotor – stator contact.

Obtained results are compared with experimental and numerical results found in literature, also with own experimental results obtained by eight-channel measuring equipment on specially designed test rig and presented in a form of time and frequency plots, orbits and spectral maps.

This thesis has not been published.

Mentor: Prof. D. Sc. Mirko Butković  
Co-mentor: Assoc. Prof. D. Sc. Roberto Žigulić  
Reviewers: Assoc. Prof. D. Sc. Roberto Žigulić  
Prof. D. Sc. Mirko Butković  
Prof. D. Sc. Ivo Alfirević  
Examiners: Prof. D. Sc. Ivo Alfirević  
Prof. D. Sc. Mirko Butković  
Prof. Dr. –Ing. Rainer Nordmann

Presentation: July 9, 2006 Degree conferred:

This thesis is deposited in the library of the University of Rijeka, Faculty of Engineering.  
(167 pages, 161 figures, 9 tables, 89 references, croatian language)

DD

UDC 519.6:531.395:534.1:531.46:534.83:004.42(043)

1. Analysis of the Rotor-Stator  
Contact Dynamics

I. Sanjin Braut

II. University of Rijeka  
Faculty of Engineering  
Croatia

Key words:

Rotordynamics  
Rotor-Stator Contact  
Flexural and Torsional Vibrations  
Sliding and Rolling Friction  
Finite Element Method  
Numerical Modeling  
Vibration Measurement