

# Numerička analiza nelinearnih izotermičkih i neizotermičkih procesa plastičnog deformiranja metala

---

Čanadija, Marko

Doctoral thesis / Disertacija

2002

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:188:780830>

Rights / Prava: [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-06**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka Library - SVKRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

NUMERIČKA ANALIZA NELINEARNIH  
IZOTERMIČKIH I NEIZOTERMIČKIH PROCESA  
PLASTIČNOG DEFORMIRANJA METALA

Doktorska disertacija

Marko Čanadija

Mentor: Red. prof. dr. sc. Josip Brnić

Rijeka 2002.

100823069

Sveučilište u Rijeci  
TEHNIČKI FAKULTET  
- Fakultetsko vijeće -  
Klasa: 602/04-99-01/10  
Ur.br.: 2170-57-43-99-04  
Rijeka, 01. lipnja 1999.

Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na svojoj 10. sjednici (u šk.god. 1998./99.), održanoj 31. svibnja 1999. godine, donijelo je sljedeću

### ODLUKU

1.) Prihvaća se izvješće Stručnog povjerenstva u sastavu: red.prof.dr.sc. Josip Brnić, dipl.ing., red.prof.dr.sc. Ivo Alfirević, dipl.ing. – FSB-Zagreb i red.prof.dr.sc. Mirko Butković, dipl.ing. te se utvrđuje da **asis.mr.sc. MARKO ČANAĐIJA, dipl.ing.** ispunjava uvjete članka 51. Zakona o visokim učilištima i da može pristupiti izradbi i obrani doktorske disertacije izvan dokorskog studija, naslovljene:

"NUMERIČKA ANALIZA NELINEARNIH IZOTERMIČKIH I NEIZOTERMIČKIH  
MODELA PROCESA PLASTIČNOG DEFORMIRANJA METALA"

2.) Mentorom pristupniku imenuje se red.prof.dr.sc. Josip Brnić, dipl.ing.



DCD 79  
2002

DUF-528

Dekan

Prof.dr.sc. Bernard Franković, dipl.ing.

Sveučilište u Rijeci  
TEHNIČKI FAKULTET  
Vukovarska 58, Rijeka 1

- Dostaviti:

- 1.) Asis.mr.sc. Marko Čanađija, dipl.ing.
- 2.) Mentoru – red.prof.dr.sc. Josipu Brniću, dipl.ing.
- 3.) Povjerenstvo za poslijediplomske studije  
i doktorate znanosti
- 4.) Evidencija studija (dosje)
- 5.) Opća i kadrovska služba
6. Pismohrana F.V.

421107084

*Sva naša znanost, u usporedbi s stvarnošću, primitivna je i djetinjasta – a ipak najdragocjenija stvar koju imamo.*

Albert Einstein (1879-1955)

Ovaj rad razmatra ponašanje metala pri velikim plastičnim deformacijama u izotermnim i neizotermnim uvjetima. Ukratko je predstavljena fenomenološka osnova plastične deformacije. Slijedi pregled jednadžbi mehanike kontinuuma koje su temelj numeričkog algoritma. Daje se njihov oblik u materijalnoj i prostornoj formulaciji. Nadalje, predstavljene su konstitutivne jednadžbe prikladne za plastično ponašanje metala i predlaže se funkcija slobodne energije. Plastičnost se opisuje pomoću izotropnog i kinematičkog očvršćivanja. Numerički se tretman spregnutog sustava temelji na razdvajanju algoritma u mehaničku i termičku fazu. Za ove algoritme izvodi se prikladna metoda radijalnog povratka. Izvedena je i varijacijska formulacija problema, te provedena diskretizacija metodom konačnih elemenata. Posebno se ističe izvod konzistentnih tangencijalnih matrica krutosti. Sve je ovo izvedeno uzimajući u obzir promjenjivost materijalnih značajki ovisno o temperaturi. Primjenjivost i efikasnost predložene metodologije ilustrirana je putem sedam reprezentativnih primjera.

## Abstract

---

This dissertation deals with metal behaviour under large plastic strains in the both isothermal and nonisothermal conditions. Phenomenological basics of plastic deformation are briefly considered. Fundamental equations of continuum mechanics are presented in spatial and material formulation. They present a starting point for numerical algorithms that follow. Constitutive equations and free energy function suitable for description of plastic deformation of metals are given. Hardening is described by isotropic and kinematic laws. Numerical treatment of coupled system is based on staggered scheme and includes mechanical and thermal phase. For these phases radial return method is derived. Variational formulation is introduced and discretization by finite element method is carried out. Consistent tangential stiffness matrices are given. All calculations are performed by introducing temperature dependence of material properties. Applicability and efficiency of proposed method is provided by seven representative examples.

## Predgovor

---

Želio bih izraziti moju zahvalnost redovitom profesoru dr. sc. Josipu Brniću, dipl. ing. na vodstvu tijekom trajanja mojega poslijediplomskog studija i što je rezultiralo mentorstvom na ovom istraživanju. Njegova sposobnost pristupa problemima na nove i inovativne načine bila mi je od neizmjerne pomoći tijekom cijele suradnje. Zahvalio bih se također i svim članovima Povjerenstva za ocjenu doktorske disertacije povodom dragocjenih komentara na predloženi rukopis.

Rad na ovome istraživanju ne bi bio moguć bez financijske potpore Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske kroz projekt br. 069-001 "Numerička optimizacija u projektiranju i proizvodnji" s redovitim profesorom Josipom Brnićem kao glavnim istraživačem. Zahvaljujem se na ovoj potpori.

Suradnja s dijelom kolega i prijatelja posebno me je zadužila. Njihovo znanje i prijateljska potpora bila mi je dodatni izvor snage tijekom proteklih četiri godine koliko je trajao rad na ovoj disertaciji. Između brojnih imena izdvojio bih docenta dr. sc. Gorana Turkalja, dipl. ing., asistenta mr. sc. Domagoja Lanca, dipl. ing., asistenticu Sandru Roščić, dipl. ing. i asistenta Zlatana Čehića, dipl. ing.. Korisne mi je savjete također pružio dr. sc. Bojan Ničeno, dipl. ing. s TU Delft, Nizozemska. Radujem se daljnjoj suradnji i prijateljstvu.

Od velike je pomoći bila i biblioteka Tehničkog fakulteta. Trud djelatnika biblioteke na pribavljanju literature umnogome mi je olakšao istraživački rad.

Mojoj obitelji dugujem veliku zahvalnost. Roditeljima koji su mi od malih nogu otvarali svijet znanja i novih tehnologija, te sestri s obitelji.

Konačno, zahvaljujem se supruzi Jasmini i sinu Josipu na njihovom strpljenju, razumijevanju i ohrabrivanju kroz cijeli poslijediplomski studij. Oni su učinili bezbrojne žrtve i ustupke u nadi da će ovaj rad ugledati svjetlo dana. Stoga je ova disertacija posvećena njima.

## Sadržaj

---

---

<b>1. Uvod .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Dosadašnje spoznaje.....</b>	<b>5</b>
<b>3. Fizikalne osnove plastične deformacije metala .....</b>	<b>9</b>
3.1. Mehanizmi deformacije .....	9
3.2. Bauschingerov efekt .....	13
3.3. Oporavak i rekristalizacija .....	13
3.4. Utjecaj temperature i brzine. Puzanje.....	14
<b>4. Osnove mehanike kontinuuma za spregnutu termoplastičnost.....</b>	<b>17</b>
4.1. Kinematika tijela .....	18
4.1.1. Tijelo i konfiguracija.....	18
4.1.2. Koordinatni sustavi i opisi .....	19



4.1.3. Krivolinijski koordinatni sustavi .....	19
4.1.4. Gibanje.....	22
4.1.5. Pomak, brzina i ubrzanje .....	22
4.1.6. Gradijent deformacije .....	23
4.1.7. Tenzori deformacije.....	24
4.1.8. Tenzori rotacije i izduženja .....	25
4.1.9. Gradijent brzine, brzina deformacije i vrtložnost.....	25
4.1.10. Transformacija materijalnih značajki u prostorne i obratno .....	26
4.1.11. Lie-ova derivacija .....	27
4.1.12. Piola transformacija.....	27
<b>4.2. Zakoni održanja.....</b>	<b>28</b>
4.2.1. Zakon održanja mase .....	28
4.2.2. Zakon održanja količine gibanja.....	29
4.2.3. Zakon održanja momenta količine gibanja.....	30
4.2.4. Zakon održanja energije .....	30
4.2.5. Entropija i drugi zakon termodinamike .....	31
<b>5. Konstitutivni zakoni izotermne i neizotermne plastičnosti.....</b>	<b>37</b>
5.1. Hiperelastičnost i multiplikativna dekompozicija.....	37
5.2. Multiplikativna dekompozicija gradijenta deformacije .....	38
5.3. Unutarnja energija i unutarnje varijable .....	40
5.4. Disipacija.....	42

<b>5.5. Princip maksimalne plastične disipacije i zakoni tečenja .....</b>	<b>44</b>
<b>5.6. Evolucija temperature.....</b>	<b>47</b>
<b>5.7. Termomehanički model <math>J_2</math> za metale s materijalnim značajkama kao funkcijama temperature .....</b>	<b>48</b>
5.7.1. Definiranje članova funkcije slobodne energije.....	49
5.7.2. Izotropno i kinematičko očvršćivanje .....	51
5.7.3. Termomehanička disipacija .....	53
5.7.4. Elasto-plastično strukturno zagrijavanje .....	54
<b>6. Numerički algoritmi za termoplastičnost.....</b>	<b>57</b>
6.1. Spregnuti sustavi i njihova analiza.....	57
6.2. Izotermička podjela termoplastičnog sustava .....	60
6.2.1. Mehanički algoritam .....	60
6.2.2. Termički algoritam.....	62
6.3. Metoda radijalnog povratka .....	64
<b>7. Varijacijska formulacija i metoda konačnih elemenata.....</b>	<b>69</b>
7.1. Mješovita varijacijska formulacija .....	69
7.1.1. Nežaka formulacija izotermalnog koraka .....	70
7.1.2. Nežaka formulacija toplinskog koraka .....	71
7.2. Diskretizacija konačnim elementima.....	73
7.3. Rješavanje nelinearnih algebarskih jednadžbi dobivenih diskretizacijom metodom konačnih elemenata.....	76

7.4. Linearizacija kinematičkih veličina .....	78
7.5. Tangencijalna matrica krutosti za neizotermički problem....	79
7.5.1. Linearizacija mehaničke nejake formulacije .....	80
7.5.2. Linearizacija termičke nejake formulacije .....	91
7.6. Tangencijalna matrica krutosti za izotermički problem.....	95
<b>8. Numeričke simulacije .....</b>	<b>97</b>
8.1. Osnovne značajke programa FemFem .....	97
8.2. Izotermički procesi deformiranja.....	100
8.2.1. Ekspanzija debelostijenog cilindra .....	100
8.2.2. Sužavanje epruvete cilindričnog poprečnog presjeka.....	102
8.3. Neizotermički problemi.....	109
8.3.1. Ekspanzija debelostijenog cilindra .....	109
8.3.2. Ekspanzija debelostijene sfere .....	116
8.3.3. Neizotermičko sužavanje epruvete kružnog poprečnog presjeka pri aksijalnom ispitivanju.....	127
8.3.4. Pojava materijalne nestabilnosti u vidu Lüderovih traka pri aksijalnom ispitivanju epruvete pravokutnog poprečnog presjeka.....	136
8.3.5. Cikličko savijanje debele ploče .....	143
<b>9. Zaključak.....</b>	<b>147</b>
<b>Popis literature.....</b>	<b>151</b>
<b>Popis oznaka i simbola .....</b>	<b>161</b>

<b>Popis slika .....</b>	<b>165</b>
<b>Popis tablica .....</b>	<b>171</b>
<b>Životopis .....</b>	<b>173</b>

U ovoj se disertaciji razmatra problem izotermne i neizotermne plastičnosti pri velikim deformacijama. Pritom je posebna pažnja posvećena formulaciji u mehanici kontinuuma, numeričkim postupcima i načinima rješavanja takvih problema. Predstavljene formulacije i postupci prikladni su za analize u dvije i tri prostorne dimenzije. Također, predstavljene se jednadžbe diskretiziraju konačnim elementima bilo kojeg stupnja interpolacije. Posebna je pažnja posvećena uključivanju kinematičkog očvršćivanja i materijalnih značajki u funkciji temperature. Na ovaj način područje primjene postaje znatno šire.

Motivacija koja je vodila autora pri izradi ovoga rada bila je kompleksnost pojava u termomehanici. Ovo se posebno odnosi na područje trajnih deformacija kao čestog slučaja u praksi. U prvome se redu trajne deformacije pojavljuju pri plastičnom oblikovanju metala i analizi ekstremnih stanja u elementima termoenergetskih postrojenja. Procjene stanja naprezanja i temperature u ovim procesima često se svode na empirijske procjene i vrlo grube analitičke proračune. Nerijetko se mehanički efekti razmatraju neovisno od termičkih, i obratno.

Numerički su pak postupci izrazito složeni, i kod starijih algoritama, podložni pogreškama u određenim režimima proračuna. Uzrok tome su brojne nelinearnosti. Kategorizacija se nelinearnosti može provesti na sljedeći način, Wriggers [1, str. 2-3]:

- geometrijske nelinearnosti,
- velike deformacije,
- materijalna nelinearnost,
- geometrijska i materijalna stabilnost,
- nelinearni rubni uvjeti i
- spregnuti problemi.

Problemi analizirani u ovoj disertaciji sadržavaju elemente svih šest tipova nelinearnosti. Geometrijska se nelinearnost pojavljuje uvijek kada je riječ o velikim deformacijama. Plastično ponašanje materijala uzrokuje materijalnu nelinearnost. Materijalna se stabilnost pojavljuje u vidu problema lokalizacije deformacije, primjerice u pojavi Lüderovih traka pri aksijalnom ispitivanju epruveta pravokutnog poprečnog presjeka. Nelinearnost s aspekta rubnih uvjeta može se očitovati u kontaktnim rubnim uvjetima između dvaju ili više tijela, ili kako je to slučaj u ovome radu, u postojanju opterećenja koje se mijenja ovisno o promjeni geometrije. Problem je po svojoj prirodi spregnut i ne može se razdvojiti na dva sekvencijalna proračuna kao što je to slučaj u linearnoj termoelastičnosti.

Nelinearni se problemi ove vrste tipično obrađuju pomoću metode konačnih elemenata. Zbog ograničenosti formulacije temeljene samo na pomacima, moraju se rabiti mješoviti konačni elementi s dodatnim poljima varijabli. Ovakav algoritam zahtijeva brza računala s velikim kapacitetom. Na sreću, osobna računala posljednje generacije dostatna su za primjereno brzu analizu.

Na osnovu ovoga, može se zaključiti da je riječ o vrlo složenom problemu. Danas se u svijetu i dalje intenzivno radi na ovome području i nema konačnih rezultata dovoljne univerzalnosti.

Postojeća rješenja ne uzimaju u obzir promjenjivost materijalnih značajki o temperaturi. Stoga je osnovni cilj ovoga rada bilo uključiti iste u razmatranje. Uvođenje kinematičkog očvršćivanja od daljnjeg je značaja pri razmatranju procesa deformacije koji sadrže opterećivanje i rasterećivanje.

Rad je organiziran kako slijedi.

Drugo poglavlje predstavlja kratki pregled povijesnog razvoja plastičnosti i njezine sprege s toplinskim pojavama. Daje se kraći pregled današnje situacije na tom području.

U trećem se poglavlju ukratko prikazuju osnovni mehanizmi i uzroci plastičnog ponašanja metala s aspekta mikrostrukture. Opisuje se pojedine osobine metala pri režimu plastične deformacije i prateće toplinske pojave. Opisivanje ovih pojava motivira uvođenje određenih mehaničkih i toplinskih veličina u kasnijim poglavljima.

Četvrto poglavlje daje uvid u osnovne jednadžbe mehanike kontinuuma. Predstavljaju se u materijalnoj i prostornoj formulaciji. Riječ je o vrlo složenoj grani fizike i na ovome mjestu bilo je moguće samo enciklopedijski obraditi sadržaje neophodne za numeričku obradu termomehanike.

Peto poglavlje uvodi konstitutivne zakonitosti i na taj način uspostavlja vezu između deformacije i naprezanja. Konstitutivne zakonitosti predstavljaju se u okviru neizotermskih uvjeta. Izotermske se formulacije dobivaju jednostavnim izbacivanjem toplinskih efekata iz formulacije. Uvode se i varijable stanja koje su usklađene s pojavama opisanim u trećem poglavlju. Definišu se i članovi funkcije slobodne energije kao osnove za predstavljeni termomehanički model.

Šestim se poglavljem prikazuju numerički algoritmi u termoplastičnosti. Objašnjava se numerička obrada spregnutih sustava, te metodologija adekvatna za ovaj rad. Konačno, detaljno se izvodi metoda radijalnog povratka prilagođena za neizotermsku plastičnost pri velikim deformacijama.

Sedmo poglavlje obrađuje numerički tretman jednadžbi prikazanih u prethodnim poglavljima. Detaljno je prikazana varijacijska formulacija. Objašnjava se temporalna i prostorna diskretizacija konačnim elementima. Pritom se rabe mješoviti konačni elementi s pet polja. Posebno valja naglasiti detaljni izvod algoritamske tangencijalne matrice krutosti za mehaničku i termičku fazu.

Osmo poglavlje je po opsegu najveće i predstavlja numeričku aplikaciju predložene formulacije. Početni dio predstavlja u potpunosti novi računalni program FemFem razvijen od strane autora ove disertacije. Nakon ovoga kroz dva je primjera ilustrirana primjena metode u izotermskoj plastičnosti. Poglavlje završava s prikazom pet primjera iz područja neizotermske plastičnosti. Obradeni primjeri pripadaju osnosimetričnim problemima i ravninskom stanju deformacije te demonstriraju široku primjenjivost prikazanog algoritma. Usporedba s postojećim eksperimentalnim i numeričkim rezultatima drugih autora provedena gdje god je to bilo moguće. Na ovaj način detaljno obradeni primjeri od ključnog su značaja za daljnji rad u termomehanici.

Rad završava devetim poglavljem. Ono predstavlja zaključak kroz koji se naglašavaju prednosti i manjkavosti predložene procedure, te smjernice za daljnji rad.

Rad također sadrži popis oznaka, slika, tablica i literature.

# 2

## Dosadašnje spoznaje

---

---

Prvi počeci teorije plastičnosti smještaju se na kraj 18 stoljeća u kontekstu mehanike tla, Alfirević [2]. Osnovni je predstavnik toga perioda Ch. A. De Coulomb. Teorija plastičnosti počela se sustavnije i brže razvijati u drugoj polovici 19. stoljeća. Središnje figure bili su H. Tresca, B. De Saint-Venant i M. Lévy a razmatrali su problem postavljanja kriterija tečenja i torzije. 1886. godine Bauschinger opisuje pojavu koja po njemu dobiva ime. Nakon ovoga u prvoj polovici 20 stoljeća značajni doprinos ostvaruju R. von Mises, H. Hencky, M. T. Huber, L. Prandtl, Th. von Karman, A. Nadai, W. Lode i A. Reuss. Za potrebe vojne industrije u drugom svjetskom ratu, teorija se plastičnosti još brže počinje razvijati. U tom razdoblju posebno se ističu radovi A. Haara, R. Hilla, A. A. Iljušina, A. Ju. Išlinskog, I. M. Kačanova, F. K. G. Odquista, H. Quinneya i G. I. Taylora. Bridgman [3] (1940.-1952.) ispituje utjecaj pritiska na plastičnost metala. Za probleme plastičnosti pri konačnim deformacijama važno je još spomenuti Lee-a (1969.) koji uvodi multiplikativnu dekompoziciju gradijenta deformacije.

Početak razmatranja utjecaja temperature u mehaničkim problemima može se datirati u 1835. Te je godine Duhamel razmatrao utjecaj promjene temperature u okviru teorije elastičnosti. Značajniji se razvoj ostvaruje nakon drugog svjetskog rata. Knjiga Boley i Weiner [4] sustavno je prikupila dotadašnje spoznaje i postavila temelje analitičke termomehanike. Uz elastičnu analizu klasičnih inženjerskih struktura, dio se razmatranja odnosi i na neelastične fenomene poput puzanja i viskoelastičnosti.

Temelj ovoga rada svakako predstavlja mehanika kontinuuma. Između brojnih drugih radova, ovdje treba istaknuti knjige Truesdell i Toupin [5] iz 1960. i Truesdell i Noll [6] i 1965. Ove dvije knjige nezaobilazne su reference svih kasnijih radova iz termomehanike. Od radova ističe se još i Coleman i Gurtin [7] koji definiraju osnovne postavke termodinamike s unutarnjim varijablama. Coleman i Owen [8] razmatraju termodinamiku elastoplastičnih materijala s promjenjivim materijalnim značajkama. Nešto noviji rad, knjiga je Marsdena i Hughesa [9]. Iako usmjerena na teoriju elastičnosti, postavke tenzorske analize mehanike kontinuuma na jedinstveni način, kvalificiraju ovo djelo kao fundamentalnu referencu i za probleme termomehanike.

Prve konačno elemente formulacije za velike pomake i deformacije postavljene su u Bathe i dr. [10], Hibbit i dr. [11] i McMeeking i Rice [12]. Nakon ovih radova slijedi brzi razvoj numeričkih metoda u plastičnosti. Ove se metode u prvome redu temelje na metodi konačnih elemenata.

U ranim radovima plastičnosti pri velikim deformacijama posebno se ističu europski autori – grupa okupljena oko Argyrisa i Doltsinisa koja djeluje u Njemačkoj. Postavljaju metodologiju pogodnu za velike deformacije, i to ne samo u izotermičkom kontekstu. Njihov rad iz područja termomehanike, Argyris i Doltsinis [13], i danas je česta referenca. Druga je grupa predvođena Th. Lehmannom i također djeluje u Njemačkoj. Od radova relevantnih za ove probleme valja istaći Lehmann i Blix [14], Lehmann [15] te Zdebel i Lehmann [16]. Svi se ovi radovi iz ovoga razdoblja temelje na aditivnoj dekompoziciji tenzora deformacije u elastični i plastični dio.

Što se tiče teorije plastičnosti pri velikim deformacijama, danas je opće priznata činjenica da između hipoelastičnog i hiperelastičnog pristupa treba izabrati hiperelastični. Kao osnovnu figuru hiperelastične formulacije sigurno treba istaći J. C. Simoa, Stanford, SAD. Njegovi radovi, [17] i [18] iz 1988. postavili su okvire ove teorije temeljene na multiplikativnoj dekompoziciji gradijenta deformacije na elastični i plastični dio. Opus J. C. Simoa predstavlja jezgru ovoga rada. Još 1985. godine Simo i Ortiz [19] postavljaju osnovni okvir hiperelastične teorije. Simo i dr. [20] u 1985. postavljaju mješovitu formulaciju konačnih elemenata kojom zaobilaze probleme nestlačivosti plastične deformacije. Iste godine, Simo i Taylor [21] ukazuju na nužnost uporabe algoritamski konzistentne tangencijalne matrice krutosti ukoliko se želi ostvariti kvadratična konvergencija Newton-Raphsonove metode. Razmatranja stabilnosti rješenja otpočeta su u radu Simo [22]. Stabilnost

termoelastičnih algoritama razmatrana je u Armero i Simo [23] te termoplastičnih algoritama Armero i Simo [24]. Rad iz termoplastičnosti konačnih deformacija, Simo i Miehe [25], predstavljao je ishodišnu točku ove disertacije. Ovaj rad prvi uvodi hiperelastičnu formulaciju termoplastičnosti pri velikim deformacijama. Numerički se algoritam temelji na metodi konačnih elemenata, a sprega je razmatrana uobičajenom podjelom na mehaničku i termičku fazu. Bogata opremljenost primjerima ovoga rada predstavlja osnovnu referencu za usporedbe drugih metodologija. Rad Armero i Simo [24] također je od temeljnog značaja zbog postavljanja numerički bezuvjetno stabilne sheme izentropske podjele pri velikim termoplastičnim deformacijama. Nasuprot njoj, klasična podjela na mehaničku i termičku fazu samo je uvjetno stabilna. Ne navodeći ostale radove iz brojnog opusa, autor navodi samo posthumno izašlu monografiju Simo i Hughes [26] u kojoj se mogu naći i ostale reference J. C. Simoa.

Među prvim radovima iz područja plastičnosti pri velikim deformacijama temeljene na hiperelastičnim formulacijama svakako treba istaći i radove Eterovic i Bathe [27] te Sussman i Bathe [28]. Ovi se radovi temelje na uporabi logaritamskih tenzora deformacije.

Posljednjih je godina (1998. - ) francuska grupa okupljena oko A. Ibrahimbegovića svojim radovima Ibrahimbegović i dr. [29], Ibrahimbegović i Chorfi [30], Ibrahimbegovića i Gharzedine [31] i Ibrahimbegović i Chorfi [32] u mnogočemu nastavila rad pokojnog J. C. Simoa. To se primarno odnosi na proširivanje algoritma Simo i Miehe [25] na područje viskoplastičnosti s izotropnim i kinematičkim očvršćivanjem. Uključuje se i razmatranja pomoću višeslojnih ploha (eng. *manifold*) temeljena na postavkama iz Marsden i Hughes [9].

U zadnje je vrijeme nekoliko zapaženih radova publicirano iz područja infinitezimalne termoplastičnosti. Neki od ovih radova sadržavaju i formulacije s materijalnim značajkama ovisnim o temperaturi. Radovi su izrađeni prvenstveno za probleme lijevanja i stoga modeliraju fazne promjene, kontaktne rubne uvjete te termoplastično ponašanje metala. Ovdje spadaju radovi poput Celentano i dr. [33], Cervera i dr. [34], Celentano [35], [36], de Saracibar i dr. [37] i Celentano i dr. [38].

Proizvodnja topline trenjem i njezino uvođenje u formulaciju predmet su razmatranja radova de Saracibar [39], Laursen [40], te Wriggers i Miehe [41].

Problemom pohranjene energije u metalu prilikom plastične deformacije bave se radovi Rosakis i dr. [42] i Kamlah i Haupt [43]. Osobita se pažnja poklanja načinu

određivanja količine pohranjene energije i zastupa se teza težnje rješenjima koje se ne temelje na fiksnom postotku.

Od ostalih autora zapažene rezultate nedavno su imali za tzv. generalizirane standardne materijale Celigoj [44], za spregu termoplastičnosti i oštećenja Srikanth i Zabarar [45], na području stabilnosti rješenja Farhat i dr. [46], termoviskoplastičnosti Lion [47] i termoplastičnosti poroznih materijala Armero [48].

# 3

## Fizikalne osnove plastične deformacije metala

---

---

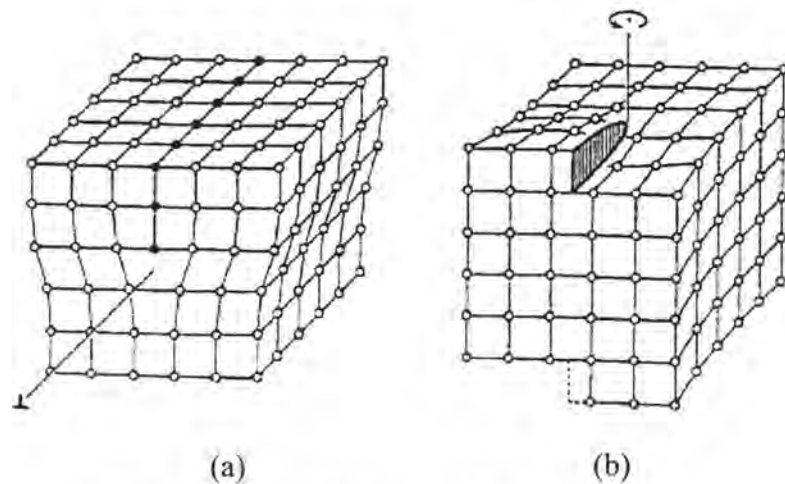
Pridjev “plastičan” dolazi od starogrčkog glagola *πλασσειν*, što znači “oblikovati”, pa tako opisuje materijale poput duktilnih metala, gline, kita ili slično. Osnovna je značajka ovih materijala da se njihov oblik lako može mijenjati uporabom odgovarajućeg opterećenja, te da nakon prestanka djelovanja opterećenja zadržavaju novodobiveni oblik. Dok se kod nekih materijala ovaj postupak lako provodi već na sobnoj temperaturi, kod nekih – primjerice metala – često je nužno omekšati materijal dovođenjem topline da bi se mogli tako obrađivati. Predmet ovoga rada jesu upravo ovi posljednji materijali – metali. Prije postavljanja okvira za numerički proračun termoplastičnih deformacija bit će razmotrena fenomenologija plastične deformacije. Na osnovu tako definiranih metalurških fenomena moguće je definirati varijable stanja koje se pojavljuju u konstitutivnim jednadžbama mehanike kontinuuma u nastavku ovoga rada.

### 3.1. Mehanizmi deformacije

Pri elastičnoj su deformaciji atomi u kristalnoj rešetki podvrgnuti manjim pomacima te se nakon prestanka djelovanja opterećenja vraćaju u svoj prvobitni ravnotežni položaj. Trajna deformacija podrazumijeva takav pomak atoma pri kojem neće biti moguć povratak atoma u prvobitni položaj. Realizacija se ovakve

neelastične deformacije u metalima očituje na nekoliko načina. Pri hladnoj obradi (ispod temperature rekristalizacije), tj. na temperaturama ispod  $0,5 \theta_m$ , gdje je  $\theta_m$  temperatura taljenja, osnovni je mehanizam plastične deformacije propagacija linijskih nesavršenosti - dislokacija - kroz kristalnu rešetku. Idealni bi kristal, bez ikakvih grešaka, mogao izdržati mnogo veća naprezanja nego što se to obično uočava kod metala. U takvome bi se kristalu plastična deformacija širila isključivo klizanjem jedne ravnine atoma po drugoj ravnini uz istovremeno kidanje svih veza između atoma. No, stvarno naprezanje tečenja mnogo je manje od teorijskog posmičnog naprezanja tečenja zbog prisustva brojnih nesavršenosti u strukturi kristalne rešetke. Postoji više vrsta nesavršenosti, Kovačiček i Novosel [49]:

- (a) točkaste (nuldimenzijske) - dva slučaja: prazna mjesta, tj. nepopunjena jednim atomom ili postoji jedan suvišni atom.
- (b) linijske nesavršenosti (jednodimenzijske) ili dislokacije – tri slučaja: bridne - koje predstavljaju dodatnu ravninu atoma u kristalnoj rešetki, sl. 3.1.a; vijčane – jedan dio kristalne rešetke pomaknut je u odnosu na drugi dio za jedan razmak među atomima, sl. 3.1.b; mješoviti – kombinacija prethodna dva slučaja.
- (c) površinske (dvodimenzijske) – koje se očituju u prisustvu nesavršenosti na granicama zrna (malokutne i velikokutne granice, granice dvojnika i fazne granice).
- (d) volumne (trodimenzijske) pogreške



Sl. 3.1. (a) bridne i (b) vijčane dislokacije

Prvi se mehanizam napredovanja dislokacija očituje kroz klizanje uzrokovano posmičnim silama. Klizanje se odvija na ravninama u kojima djeluju maksimalna posmična naprezanja. Ovo je napredovanje postupno i pritom klizu samo pojedini atomi pa je stoga potrebna i niža posmična sila. Dislokacija se premješta sve do granice monokristala. Sve dislokacije unutar monokristala težit će na taj način gomilanju na granici pa tako granice zrna postaju koncentracije nepravilnosti. Ove nakupine dislokacija uzrokuju pojavu tzv. povratnih naprezanja (*back stress*) jednakih posmičnim naprezanjima u ravnini klizanja. Ova naprezanja utječu na kretanje dislokacija neovisno o smjeru klizanja, te je iz toga razloga radi opisivanja ove pojave potrebno koristiti tenzorske veličine. U mehanici se kontinuuma ovo realizira uvođenjem povratnog tenzora naprezanja.

Tijekom stvaranja nakupina dislokacija premještanje jedne dislokacije može uzrokovati smetnje premještanju druge dislokacije i obratno. Ovo ima za rezultat porast sile s pomakom dislokacija prema rubu zrna. Opisano očvršćivanje na mikroskopskoj razini uvjetuje modeliranje i na makroskopskoj razini, što se i tretira primjerice putem uvođenja koncepta izotropnog očvršćivanja pri tečenju materijala. Nasuprot ovome, s porastom temperature povećava se i pokretljivost dislokacija te dolazi do pojave omekšivanja materijala. Iznalaženje načina za usporavanje gibanja dislokacija u materijalu osnovni je predmet istraživanja pri razvoju slitina povišene čvrstoće.

Deformacija pojedinih zrna u polikristalnoj strukturi metala nije neovisna o ponašanju drugih zrna. Zbog takvog se ponašanja na granicama zrna pojavljuje više pravaca klizanja. Stoga granice zrna predstavljaju zapreku daljnjem kretanju dislokacija i dodatno pojačavaju metal. Ukoliko se veličina zrna smanjuje, područje očvršćivanja se širi od granice prema središtu zrna. Slijedom navedenog, ukoliko su zrna manja metal će sadržavati i veći broj zapreka kretanju dislokacija. Može se zaključiti da će metal s finijom strukturom, tj. manjim zrnima, imati veću čvrstoću i tvrdoću, Gerold [50, str. 139].

Kod ovoga mehanizma deformacije brzina difuzije je vrlo mala, tako da difuzija ima zanemarivu ulogu.

Rad koji se uvodi troši se pri ovakvome procesu primarno na kidanje veza među atomima kristalne rešetke i disipira se kao toplina. No, upravo pri hladnoj obradi, gdje je klizanje dislokacija dominantni mehanizam plastične deformacije kristalne rešetke, dio energije ostaje zarobljen uslijed naprezanja. Ovo je naprezanje elastičnog karaktera i uzrokovano je međusobnom interakcijom dislokacija. Istraživanja su



pokazala da 5-15% rada utrošenog pri plastičnoj obradi ostaje na taj način zarobljen u vidu povećavanja unutarnje energije kristala, Hayden i dr. [51, str. 169]. Ovo treba uzeti u obzir pri makroskopskim razmatranjima kretanja energije i njezine disipacije tijekom plastične deformacije.

Drugi se mehanizam deformacije naziva dvojničanjem. Riječ je o promjeni orijentacije ili rotaciji dijela kristalne rešetke. Do ovoga dolazi usljed djelovanja posmičnih sila i ne odvija se postupno, poput klizanja, već vrlo brzo. Pri ispitivanju aksijalno opterećene epruvete ovo se očituje na dijagramu ispitivanja kroz skokove ili “zupčasti” oblik krivulje. Pojavljuje se uglavnom samo kod određenih tipova kristalnih rešetki (BCC – body-centered cubic i HCP – hexagonal close-packed) pri nižim temperaturama a pri velikoj brzini uvođenja opterećenja. Uzrok leži u činjenici što ovakav mehanizam zahtijeva veću smičnu silu od klizanja, te se ostvaruje samo pri otežanom klizanju što je slučaj kod brzog uvođenja opterećenja.

Treći vid gibanja dislokacija naziva se penjanjem ili skokom dislokacije i dolazi do izražaja pri zagrijanom stanju metala, točnije kada je  $\theta > 0,3 \theta_m$ . Gibanje bridnih dislokacija zbiva se na pravcu normale na ravninu klizanja dislokacije. U suštini, atomi iz bridne dislokacije difuzijskim se mehanizmom premještaju u prazna mjesta u susjednoj ravnini i tako uzrokuju premještanje dislokacije. Ova se difuzija atoma odvija na povišenoj temperaturi iz razloga što su tada praznine u kristalnoj rešetki pokretljivije, štoviše uz napredovanje plastične deformacije njihov se broj još više povećava. Ovo rezultira u “mekšem” ponašanju te uporabi manjeg rada potrebnog za oblikovanje metala na povišenoj temperaturi obrade. Treba naglasiti da je ovaj vid gibanja i dalje popraćen klizanjem dislokacija, no s porastom temperature potencijal za penjanje se povećava dok potencijal klizanja opada.

Rezultat ovakvih mehanizama plastične deformacije je i gubitak izotropije. Ukoliko se hladna obrada provodi opterećenjem na jednome pravcu, pojavit će se razlike u vlačnoj čvrstoći materijala obzirom na pravac uvođenja opterećenja i pravce okomite na istoga. Razlike mogu biti reda veličine 10% i često se zanemaruju u proračunima na makroskopskoj razini.

Na osnovu navedenog, plastična se deformacija metala očituje u premještanju atoma po kristalnoj rešetki. Usljed ovoga ne nastupa nikakva promjena volumena kristala, što se može poopćiti i na makroskopsku razinu. Iz mehanike kontinuuma poznato je da volumenski dio tenzora deformacije uzrokuje hidrostatički (sferni) dio tenzora naprezanja. Ovo vodi zaključku da hidrostatički pritisak ne može utjecati na

pojavu i razvoj plastične deformacije metala. Nepromjenjivost volumena pri plastičnoj deformaciji metala i neovisnost o hidrostatičkom pritisku eksperimentalno je istražena i detaljno dokumentirana u radu Bridgmana [3].

### 3.2. Bauschingerov efekt

Kod uzoraka koji su bili vlačno opterećeni iznad granice tečenja te zatim opterećeni tlačnim opterećenjem, uočava se da je granica pri tlačenju niža od one pri vlačnom opterećenju izvornog materijala. Ista se pojava može uočiti i kod inverznog redosljeda opterećivanja, ali i kod analognog posmičnog opterećenja kao što je to slučaj pri torziji. Ova se pojava naziva Bauschingerovim efektom.

S aspekta mikrostrukture materijala pojava se objašnjava na sljedeći način. Nagomilane dislokacije u grupi su u ravnoteži uslijed djelovanja vanjskog naprezanja  $\sigma$ , unutarnjeg naprezanja  $\sigma_i$  (granica elastičnosti) uzrokovanog raznim preprekama i povratnim naprezanjem  $\sigma_b$  zbog djelovanja ostalih dislokacija u grupi. Kada se djelovanje vanjskog naprezanja  $\sigma$  smanji, dislokacije se djelomično pomaknu, s vrlo malom plastičnom deformacijom. Ovi se pomaci odvijaju dok vrijednost unutarnjih naprezanja koja djeluju na dislokacije ne postignu vrijednost  $-\sigma_i$ . Nakon ovoga, dislokacije se mogu slobodno pomicati unatrag što rezultira u smanjivanju naprezanja za veličinu  $2\sigma_i$ , Lubliner [52, str. 95].

Uz ovu pojavu usko je vezana tzv. petlja histereze, koja se pojavljuje pri rasterećivanju i ponovnu opterećivanju plastično deformiranog metala.

U matematičkim makroskopskim modelima Bauschingerov efekt opisuje se uvođenjem kinematičkog očvršćivanja.

### 3.3. Oporavak i rekristalizacija

Uvođenje plastične deformacije klizanjem dislokacija hladnom obradom stvara veliki broj nepravilnosti u strukturi rešetke. Time su u mikrostrukturu uvedena dodatna naprezanja koja ostaju u materijalu i nakon uklanjanja opterećenja. Do uklanjanja ovih naprezanja može doći putem oporavka na nižim temperaturama ( $\theta < 0,3 \theta_m$ ) ili rekristalizacije na višim temperaturama ( $\theta > 0,5 \theta_m$ ).

Oporavak objedinjuje promjene strukture kojima na mikroskopskoj razini nisu promijenjene dimenzije i oblik zrna. Pri zagrijavanju smanjuje se broj praznih mjesta u rešetki, dolazi do penjanja dislokacija i općenito, gustoća dislokacija se smanjuje. Primjerice, dvije se dislokacije mogu spojiti u jednu i tako ukloniti nepravilnost u strukturi. Takva preraspodjela dislokacija ima za posljedicu smanjivanje zaostalih naprezanja u metalu. Osim toga, smanjuje se ranije povećana čvrstoća uzrokovana plastičnom deformacijom što prati i povećanje duktilnosti. Kod nekih se metala formiraju subzrna bez dislokacija u sklopu pojedinih zrna.

Oporavak se kategorizira kao statički ili dinamički. Statički se odvija nakon procesa plastične deformacije, dakle bez vanjskog opterećenja, zbog novostvorenih sila među dislokacijama i dislokacije teže stvaranju nove strukture s nižom razinom unutarnje energije. Dinamički se oporavak odvija u istome smislu, samo za vrijeme procesa deformiranja. Ovaj oporavak osnovni je uzrok smanjivanja brzine očvršćivanja u kasnijoj fazi plastične deformacije. Efekt ovoga oporavka posebice je izražen na višim temperaturama zbog povećane mobilnosti dislokacija. Oporavak je pri sobnoj temperaturi kod većine metala zanemariv

Rekristalizacija podrazumijeva formiranje novih kristalnih zrna i to na mjestima najveće gustoće dislokacija – na rubu postojećih zrna. Stvaranje i porast zrna uzrokuje prijelaz atoma iz susjednih zrna, što rezultira u smanjivanju ili čak nestajanju postojećih zrna. Brzina nestajanja naprezanja pri rekristalizaciji znatno premašuje onu pri oporavku. Nadalje, obrada metala iznad temperature rekristalizacije naziva se toplom obradom i ne uzrokuje Bauschingerov efekt, povećanje čvrstoće metala ili anizotropiju.

### 3.4. Utjecaj temperature i brzine. Puzanje.

Promatra li se utjecaj temperature na plastičnu deformaciju neovisno o drugim utjecajima, općenito se može ustvrditi da s porastom temperature metal omekšava, tj. vlačna čvrstoća opada. Utjecaj brzine deformiranja kroz brzinu uvođenja opterećenja očituje se kroz porast vlačne čvrstoće. Ovaj porast čvrstoće parcijalno se objašnjava ograničavanjem ili potpunom nemogućnošću odvijanja procesa dinamičkog oporavka materijala.

No, prethodna analiza oporavka i rekristalizacije ukazuje na usku povezanost temperature i brzine, pa je stoga od presudne važnosti poznavanje međusobne

interakcije ovih utjecaja. Pri povišenim temperaturama, ( $\theta > 0,5 \theta_m$ ), ova je interakcija značajna i uzrokuje pojavu puzanja materijala. Energija aktivacije potrebna za premještanje dislokacija sada je prvenstveno termičke prirode. Stoga se kao osnovni uzrok puzanja općenito uzima temperatura. Naprezanje je obično konstantno, te od sekundarnog značaja spram temperature i ima ulogu u određivanju toka dislokacija. Izostanak naprezanja pri ovim temperaturama naravno vodi procesima rekristalizacije i oporavka.

Brojni fizikalnokemijiski procesi koji su termički aktivirani mogu se opisati Arrheniusovom jednačbom, Evans i Wilshire [53, str. 20]:

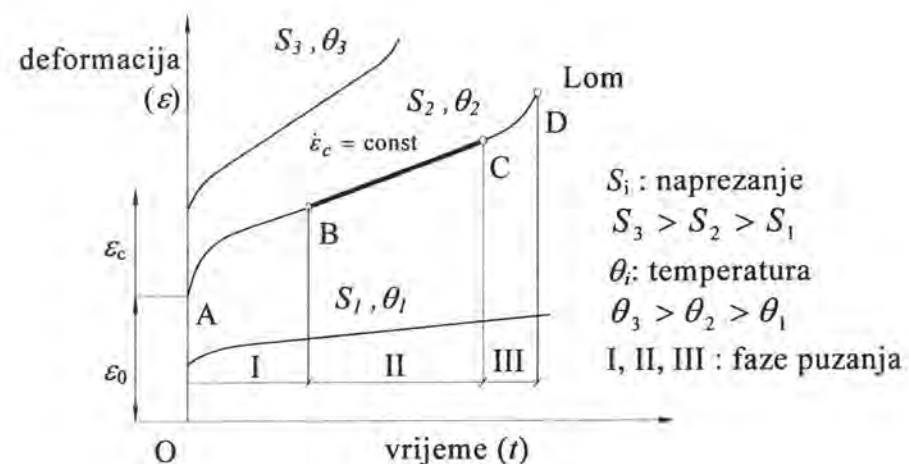
$$\text{brzina} \propto e^{-\Delta E/k\theta}, \quad (3.1)$$

gdje je  $k$  Boltzmannova konstanta ( $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ),  $\theta$  je apsolutna temperatura i  $\Delta E$  energija aktivacije procesa. Ova jednačba omogućava povezivanje temperature i brzine deformacije, a u proširenom obliku i naprezanja sa ovim veličinama.

Mehanizama puzanja s mikroskopskog stajališta ima nekoliko. Klizanje dislokacija odvija se zbog povećane energije aktivacije koja je uvedena termičkim putem. Povećana razina energije omogućava svladavanje prepreka koje pri nižim temperaturama nisu mogle biti savladane. Porastom temperature ovaj mehanizam puzanja ustupa mjesto difuzijskim procesima. Tako je pri višim temperaturama i nižim vrijednostima naprezanja dominantno tzv. Nabarro-Herringovo puzanje. Očituje se u difuziji atoma i praznina unutar zrna a uzrokovano je različitim gradijentima naprezanja. Difuzija između granica zrna dominira pri nižim temperaturama. Ovakav se tip puzanja naziva Coble puzanje. Često se pojavljuje i kombinacija ova dva difuzijska tipa puzanja. Klizanje dislokacija također može pratiti difuzijski izazvano puzanje, Smith [54].

S makroskopskog stajališta puzanje se opisuje na nekoliko načina. Najjednostavniji model opisivanja je linearni, gdje se za izotermički proces pretpostavlja linearna veza naprezanja, plastične (ili ukupne) deformacije i plastične (ili ukupne) brzine deformacije. Ova relacija analogna je linearnom modelu teorije viskoelastičnosti, Brnić, [55, str. 118]. Od brojnih nelinearnih modela puzanja najzastupljeniji su Andradeov, Nadai-ov i Bailey-Nortonov zakon puzanja. Za materijale na sobnoj temperaturi, neelastična deformacija ovisna o vremenu zanemariva je pri naprezanjima ispod granice tečenja. Za naprezanja iznad granice tečenja ovdje se najčešće koristi Binghamov ili Perzynin model (Peryzna [56]) kao najjednostavniji model viskoplastičnosti.

Standardna se krivulja puzanja može podijeliti u tri faze (Garofalo [57]): primarnu (tranzijentnu), sekundarnu (stacionarnu) i tercijarnu (ubrzavajuću), sl. 3.2. Puzanje se ne mora nužno sastojati od sve tri faze. Pri nižim vrijednostima naprežanja i temperatura, puzanje se sastoji samo od primarne faze u kojoj se do granične vrijednosti dolazi asimptotski. Sekundarna i tercijarna faza se ne pojavljuju. Opisivanje ovakvoga puzanja često se vrši pomoću linearne viskoelastičnosti. Za opis primarnog puzanja pri višim temperaturama koristi se ovisnost o logaritmu ( $\theta < 0,5 \theta_m$ ) odnosno potenciji ( $\theta > 0,5 \theta_m$ ). Iz tog je razloga za primarnu fazu još uobičajen i naziv logaritamsko puzanje, IIschner [58, str. 77].



Sl. 3.2. Krivulje puzanja metala u raznim mehaničkim i temperaturnim uvjetima (Brnić i dr. [59])

Sekundarna faza puzanja također se dobro može opisati modelima linearne viskoelastičnosti. Ova se faza često tretira kao najvažnija zbog toga što je njezino trajanje najdulje. Temperature ovisnosti u sekundarnoj fazi kvalitetno opisuje Arrheniusova jednačica.

Poput primarne, tercijarna je faza puno kraća od sekundarne. To je posljednja faza puzanja koja predstavlja značajno smanjenje čvrstoće i u konačnici lom materijala. Sve tri faze, a pogotovo treća, su i dalje predmet brojnih istraživanja, kako eksperimentalnih tako i analitičke i numeričke mehanike.

## 4

## Osnove mehanike kontinuuma za spregnutu termoplastičnost

U tekstu koji slijedi bit će ukratko prikazani kinematika kontinuuma i sustavi parcijalnih diferencijalnih jednačica koji definiraju osnove termodinamike kontinuuma. Cilj je postavljanje općeg okvira primjenjivog za širu formulaciju različitih oblika plastičnosti, a posebice s aspekta evolucije spregnutog termoplastičnog problema. Detaljniji prikaz svih značajki ovih parcijalnih diferencijalnih jednačica nije moguće niti je to nužno izvesti u ovome radu, već se u tom smislu čitatelj upućuje na brojnu literaturu iz ovog područja a posebice na fundamentalnu literaturu Truesdell i Toupin [5] i Truesdell i Noll [6]. Notacija koja se koristi na ovome mjestu u mnogočemu se podudara s onom iz Marsden i Hughes [9]. U ovome je radu pri razmatranju problematike mehanike kontinuuma konzultiran veći broj referenci, od kojih uz već spomenute valja istaknuti i slijedeće: Brnić [60], Chadwick [61], Ciarlet [62], Fung [63], Haupt [64], Gurtin [65], Jarić [66], Malvern [67], Mase i Mase [68], Maugin [69], Mićunović [70], Ogden [71], Šilhavý [72] i Truesdell [73], [74]. Područje mehanike kontinuuma intenzivno se služi tenzorskim računom. Autor je između brojnih naslova ovdje najviše konzultirao Borisenko i Tarapov [75], Kay [76], Synge i Schild [77] te Bishop i Goldberg [78].

## 4.1. Kinematika tijela

Pod pojmom kinematike u mehanici se kontinuumu prvenstveno podrazumijeva matematičko opisivanje deformacije te kretanje čestica nekog tijela. U tekstu koji slijedi ukratko će biti prikazani osnovni elementi mehanike kontinuumu koji su potrebni za definiranje kinematike neprekinutih sredina, posebice onih koje su sastavni elementi termoplastičnih konstitutivnih relacija.

### 4.1.1. Tijelo i konfiguracija

Mehanika kontinuumu razmatra matematičke modele realnih tijela, dakle striktno govoreći, realna se tijela proučavaju posredno putem ovih modela. Radi potreba ovoga modeliranja definira se materijalno tijelo  $\mathcal{B}$  kao skup elemenata  $X$ , koji se nazivaju česticama ili materijalnim točkama. Ovdje se još može naglasiti da se u klasičnoj Newtonovskoj mehanici ovim česticama pridružuje masa, dok se u mehanici kontinuumu česticama pridružuje gustoća.

Čestice se mogu jednoznačno povezati s točkama Euklidskog prostora  $\mathbb{R}^3$  pomoću preslikavanja  $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Ovo preslikavanje je glatko, inverzibilno i diferencijabilno onoliko puta koliko je to potrebno. Takvo je preslikavanje u mehanici kontinuumu poznato kao konfiguracija tijela  $\mathcal{B}$ . Time se specificiraju položaji svih točaka nekog tijela  $\mathcal{B}$  spram fiksnog ishodišta u nekome trenutku.

Točke tijela  $\mathcal{B}$  označavaju se s  $X = (X_1, X_2, X_3)$  i nazivaju se materijalnim točkama dok se točke prostora  $\mathbb{R}^3$  označavaju s  $x = (x_1, x_2, x_3)$  i poznate su kao prostorne točke.

Zbog posebnog tretmana pojedinih konfiguracija pridruženi su im i odgovarajući nazivi. Ovdje treba izdvojiti referentnu konfiguraciju u odnosu na koju se određuju pomaci, gibanje i deformacije čestica tijela. Ova referenta konfiguracija tijela ne mora nužno biti konfiguracija koju tijelo stvarno zauzima u prostoru u bilo kojem trenutku. No, često se iz praktičnih razloga za referentnu konfiguraciju odabire početna konfiguracija, tj. ona koju tijelo zauzima u trenutku  $t = 0$ . Trenutnom se konfiguracijom naziva ona koje tijelo zauzima u sadašnjem trenutku  $t$ . Pri definiranju pojma deformacije govori se o dvjema konfiguracijama; prva se konfiguracija naziva

nedeformiranom (obično referenta) konfiguracijom, dok se druga naziva deformiranom (obično trenutna) konfiguracijom.

### 4.1.2. Koordinatni sustavi i opisi

Pri razmatranjima mehanike kontinuumu uvijek se odabire jedan koordinatni sustav, primjerice Descartesov, te u odnosu na njega vrši izražavanje svih veličina. Isti se naziva zajedničkim koordinatnim sustavom. Koordinate neke točke, ovisno o tome govorimo li o materijalnoj ili prostornoj točki, bit će označavane s  $X = (X_1, X_2, X_3)$  odnosno  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Opisivanje se kretanja može efikasnije izvesti uporabom drugih koordinatnih sustava, u općem slučaju krivolinijskih. Odabere li se početna konfiguracija tijela  $\mathcal{B}$  kao referentna, tada je točka  $X$  koja određuje položaj čestice  $X$  određena krivolinijskim koordinatama  $X = (X_1, X_2, X_3)$ . Ove koordinate jednoznačno identificiraju česticu u početnoj konfiguraciji te se stoga nazivaju materijalne ili Lagrangeove koordinate čestice  $X$ .

Nakon procesa deformacije, u trenutku  $t$ , čestica  $X$  tijela  $\mathcal{B}$  zauzme novi položaj  $x$ . Točka je  $x$  određena novim sustavom krivolinijskih koordinata  $x = (x_1, x_2, x_3)$  u trenutku  $t$  koje se nazivaju prostornim ili Eulerovim koordinatama čestice  $X$ .

U skladu s gornjim definicijama, ukoliko se fizikalna značajka tijela poput gustoće, brzine ili slično izražava pomoću materijalnih koordinata u točki  $X$  u trenutku  $t$ , tada se kaže da je značajka tijela dana pomoću referentnog ili materijalnog opisa. Kada je kao referenta konfiguracija usvojena upravo početna konfiguracija ovaj se opis obično naziva Lagrangeov opis. Nadalje, ukoliko se pak fizikalna značajka izražava uporabom prostornih koordinata  $x$  u trenutku  $t$ , govori se o prostornom ili Eulerovom opisu.

### 4.1.3. Krivolinijski koordinatni sustavi

Bilo koja tri broja  $q^1, q^2, q^3$  koji jednoznačno određuju položaj u prostoru točke  $M$  nazivaju se generaliziranim koordinatama točke  $M$ .

Ukoliko se jedna od koordinata  $q^i$  drži fiksiranom, a druge se dvije kontinuirano mijenjaju, dobivaju se tri porodice koordinatnih površina, sl. 4.1. Jednadžbe ovih površina su:

$$\left. \begin{aligned} q^1 = \text{const} & \quad (q^2, q^3 \text{ promj.}) \\ q^2 = \text{const} & \quad (q^3, q^1 \text{ promj.}) \\ q^3 = \text{const} & \quad (q^1, q^2 \text{ promj.}) \end{aligned} \right\}. \quad (4.1)$$

Ako se pak dvije koordinatne  $q^i$  i  $q^j$  drže fiksiranima, a preostala (treća) se mijenja, dobivaju se tri porodice koordinatnih krivulja:

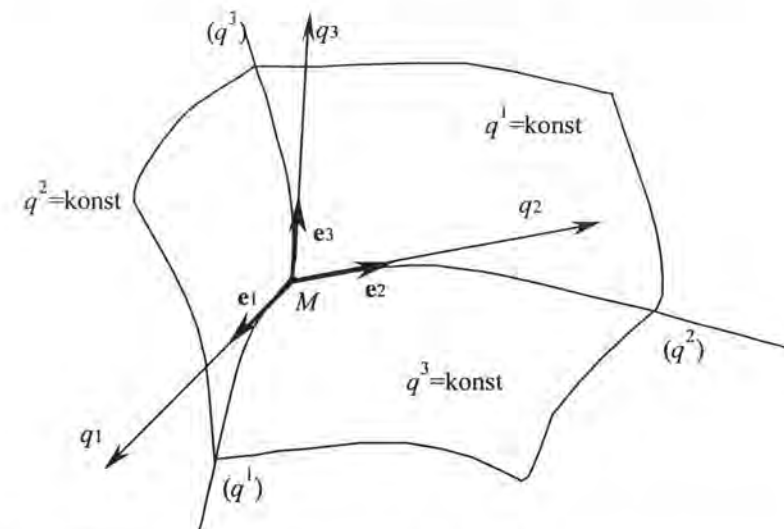
$$\left. \begin{aligned} q^2 = \text{const}, \quad q^3 = \text{const} & \quad (q^1 \text{ promj.}) \\ q^3 = \text{const}, \quad q^1 = \text{const} & \quad (q^2 \text{ promj.}) \\ q^1 = \text{const}, \quad q^2 = \text{const} & \quad (q^3 \text{ promj.}) \end{aligned} \right\}. \quad (4.2)$$

Ove su krivulje na sl. 4.1 označene s  $(q^1), (q^2), (q^3)$ . Očigledno je svaka od triju krivulja presjek dvije koordinatne površine. Za pozitivnu orijentaciju krivulje uzima se smjer u kojem se točka kreće s porastom  $q^i$ .

Bazu sustava generaliziranih koordinata  $q^1, q^2, q^3$  predstavlja skup triju vektora  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  nepromijenjivih duljina i usmjerenih u pozitivnom smjeru koordinatne krivulje. Vektori  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  nazivaju se baznim vektorima. Baza  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  lokalnog je karaktera jer se u općem slučaju bazni vektori mijenjaju od točke do točke. U općem slučaju ovi vektori ne trebaju biti međusobno okomiti niti jedničnih duljina.

Tangente na koordinatne krivulje  $(q^i)$  nazivaju se osi  $q^i$  ( $i=1,2,3$ ). Pozitivan smjer ove osi jest smjer baznog vektora  $\mathbf{e}_i$ .

U pravokutnim koordinatnim sustavima bazni se vektori ne mijenjaju od točke do točke. U svim ostalim slučajevima govori se o krivolinijskim koordinatnim sustavima. Kod istih koordinatne krivulje nisu pravci. Koordinatni sustavi kod kojih su bazni vektori međusobno okomiti nazivaju se ortogonalnim koordinatnim sustavima (primjerice pravokutni, cilindrični i sferni).



Sl. 4.1. Koordinatne površine, krivulje i osi u krivolinijskom sustavu

Osnovna geometrijska karakteristika prostora opisanog uvođenjem generaliziranih koordinata  $q^1, q^2, q^3$  dana je s njegovim metrikom (tj. udaljenošću), čiji se kvadrat definira kao duljina luka:

$$(ds)^2 = g_{ik} dq^i dq^k. \quad (4.3)$$

Pritom je  $g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$  metrički tenzor.

U generaliziranom koordinatnom sustavu svaki je tenzor  $\mathbf{A}$  jednoznačno definiran preko njegovih kovarijantnih  $A_{ij\dots xyz}$  ili kontravarijantnih komponenta  $A^{ij\dots xyz}$ . Ove komponente nisu međusobno neovisne. Za jedan tenzor prvoga reda one su primjerice povezane:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= g_{ik} A^k \\ A^i &= g^{ik} A_i \end{aligned} \right\}. \quad (4.4)$$

U slučaju kada je tenzor definiran i kovarijantnim i kontravarijantnim komponentama,  $A_i^k$ , govori se o mješovitom tenzoru.

Uobičajeno je da se značajke izražene u materijalnom opisu označavaju velikim tiskanim slovima, dok se one u prostornom opisu označavaju malim slovima. Oznake  $G_{IJ}$  i  $g_{ij}$  bit će rabljene za komponente metričkog tenzora u materijalnom opisu

odnosno prostornom opisu. Za pravokutne koordinatne sustave ove se komponente podudaraju s Kroneckerovim tenzorom.

#### 4.1.4. Gibanje

Gibanje tijela  $\mathcal{B}$  je familija konfiguracija ovisnih o parametru  $t \in [0, T]$  koji se naziva vrijeme i označava se

$$x = \varphi(X, t). \quad (4.5)$$

Područje prostora koje tijelo zauzima u nekom trenutku  $t$  bit će označavano s  $\mathcal{S}$ .

Ukoliko je materijalna točka nepromjenjiva, tj. promatra se samo jedna točka, tada se preslikavanje

$$t \in [0, T] \mapsto \varphi_t(X) \Big|_{X=\text{fiks.}} \quad (4.6)$$

naziva trajektorijom materijalne točke  $X$  u spomenutom vremenskom intervalu.

#### 4.1.5. Pomak, brzina i ubrzanje

Pomak materijalne točke definira se kao razlika između njezinog trenutnog položaja i početnog položaja,

$$\mathbf{u}(X, t) = \varphi(X, t) - \varphi(X, 0). \quad (4.7)$$

Brzina materijalne točke  $X$  definira se kao:

$$\mathbf{V}(X, t) = \frac{\partial \varphi(X, t)}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Ova je brzina iskazana pomoću materijalnih koordinata i stoga se naziva materijalnom brzinom. Ukoliko se brzina iskaže kao funkcija varijabli  $(x, t)$ , onda se ona označava kao  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$  i naziva se prostornom brzinom.

Ubrzanje materijalne točke  $X$  definira se kao:

$$\mathbf{A}(X, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(X, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(X, t)}{\partial t^2}. \quad (4.9)$$

U skladu s gore navedenim, ovo se ubrzanje naziva materijalnim ubrzanjem

Prostorna se brzina odnosno ubrzanje dobivaju zamjenom neovisnih koordinata iz materijalnih u prostorne koordinate. Tako se dobiva:

$$\left. \begin{aligned} x_a &= \varphi_a(X_A, t) \\ V_a(X_A, t) &= v_a(\varphi_b(X_A, t), t) \\ A_a(X_A, t) &= a_a(\varphi_b(X_A, t), t) \end{aligned} \right\}. \quad (4.10)$$

U prijašnjim se relacijama ubrzanje računalo isključivo uporabom materijalnog opisa. Ukoliko je neophodno izraziti prostorno ubrzanje putem prostorne brzine, tada valja koristiti izraz:

$$\mathbf{A}(X, t) = \mathbf{a}(x, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} + \mathbf{v}_t \cdot \nabla \mathbf{v}_t. \quad (4.11)$$

Prvi se član naziva lokalnim ubrzanjem, dok drugi predstavlja transportno ili konvektivno ubrzanje. Derivacija

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} + \mathbf{v}_t \cdot \nabla \mathbf{v}_t \quad (4.12)$$

naziva se materijalnom derivacijom po vremenu prostornog objekta (brzine u ovom slučaju). Osnovna je pretpostavka ove derivacije da se čestica  $X$  drži fiksiranom, a ne njezin trenutni položaj.

#### 4.1.6. Gradijent deformacije

U analizi deformacije posebna se pozornost posvećuje dvjema stacionarnim konfiguracijama. Način na koji je konačna (deformirana) konfiguracija postignuta iz početne (nedeformirane) konfiguracije se ne razmatra. Stoga ovakvo preslikavanje ne sadrži vrijeme kao varijablu. Osnovna kinematička veličina kojom se definira lokalna deformacija čestice  $X$  jest tenzor gradijenta deformacije definiran kao:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad \text{ili} \quad \mathbf{F} = \text{GRAD } \mathbf{x}. \quad (4.13)$$

Uvjeti neprekidnosti i inverzibilnosti opisani u odlomku 4.1.1. osiguravaju i postojanje inverzije gradijenta deformacije:

$$F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}. \quad (4.14)$$

Isti uvjeti imaju daljnju posljedicu da determinanta gradijenta deformacije  $J$  ne može poprimiti vrijednost nula:

$$J = \det \mathbf{F} \neq 0. \quad (4.15)$$

Ovaj se uvjet može prekršiti u nekim slučajevima; primjerice u mehanici loma pri pojavi pukotina kada iz jedne točke nastaju dvije točke.

Iz definicije pomaka (4.7) slijedi i često rabljeni izraz:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} = \mathbf{I} + \mathbf{f}. \quad (4.16)$$

Pritom je sa  $\mathbf{f}$  označen relativni gradijent deformacije, dok je  $\nabla = \partial/\partial \mathbf{x}$ .

Obzirom da je gradijent deformacije definiran i pomoću materijalnih i prostornih koordinata, izraz (4.13), ne može se svrstati samo u jedan opis, bilo materijalni bilo prostorni. Takve se veličine u mehanici kontinuuma nazivaju dvostrukim tenzorskim poljem.

#### 4.1.7. Tenzori deformacije

Nasuprot linearnoj elastičnosti, pri opisivanju gibanja i procesa deformiranja uobičajena je uporaba nekoliko mjera deformacije. Na ovome mjestu bit će spomenuti samo najčešće rabljeni tenzori deformacije.

Greenov (često nazivan i desni Cauchy-Greenov) tenzor deformacije definiran je kao:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}'\mathbf{F}. \quad (4.17)$$

Fingerov (poznat i pod nazivom lijevi Cauchy-Greenov) tenzor deformacije definiran je kao:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}'. \quad (4.18)$$

Valja primijetiti da u slučaju kada nema deformacija, tj. kada se tijelo giba kao kruto tijelo ove se mjere deformacije podudaraju sa jediničnim tenzorom.

U uporabi su i materijalni (Lagrangeov) tenzor deformacije:

$$2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I} \quad (4.19)$$

i prostorni (Eulerov) tenzor deformacije:

$$2\mathbf{e} = \mathbf{b}^{-1} - \mathbf{i}. \quad (4.20)$$

Materijalni i prostorni tenzor deformacije imaju vrijednost nula u slučaju kada nema deformacija.

Pri analizi u koordinatnim sustavima koji nisu pravokutni treba jedinične tenzore u gornjim izrazima zamijeniti s metričkim tenzorima  $G_{IJ}$  i  $g_{ij}$ :

$$\left. \begin{aligned} 2\mathbf{E} &= \mathbf{C} - \mathbf{G} \\ 2\mathbf{e} &= \mathbf{b}^{-1} - \mathbf{g} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

#### 4.1.8. Tenzori rotacije i izduženja

Ukoliko su tenzori deformacije  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{b}$  definirani kao u tekstu, tada postoje jedinstveni simetrični, pozitivno definitni kvadratni korijeni od  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{b}$  i označavaju se sa  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$ .  $\mathbf{U}$  se naziva desnim, dok je  $\mathbf{V}$  lijevi tenzor izduženja:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \mathbf{V}^2. \quad (4.22)$$

Vlastite vrijednosti desnog tenzora izduženja  $\mathbf{U}$  nazivaju se glavnim izduženjima. Čitatelju se skreće pažnja na uobičajenu dvojnost oznaka u mehanici kontinuuma, točnije oznakom  $\mathbf{V}$  također se označava materijalna brzina pa se smisao treba razaznati iz konteksta.

Uvođenjem tenzora izduženja postavljene su osnove za definiranje teorema o polarnoj dekompoziciji. Ukoliko postoji ortogonalna transformacija  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{R}\mathbf{R}' = \mathbf{I} \quad (4.23)$$

tada vrijedi sljedeća dekompozicija:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{R}\mathbf{U} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{V}\mathbf{R} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Pritom se (4.24)<sub>1</sub> naziva desnom a (4.24)<sub>2</sub> lijevom polarnom dekompozicijom. Matrica  $\mathbf{R}$  naziva se tenzorom rotacije. Fizikalno tumačenje ove dekompozicije jest u tome da pri procesu deformacije  $\mathbf{R}$  predstavlja čistu rotaciju tijela kao krutog tijela, dok je proces deformacije (izduživanja) opisan tenzorima  $\mathbf{U}$  odnosno  $\mathbf{V}$ .

#### 4.1.9. Gradijent brzine, brzina deformacije i vrtložnost

Razmatranja mehanike kontinuuma često obuhvaćaju brzine promjene različitih tenzora deformacije. Prostorni gradijent deformacije definiran je s

$$\ell = \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (4.25)$$

Aditivna dekompozicija ovog tenzora u simetrični i antisimetrični dio daje:

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{d} + \mathbf{w}. \quad (4.26)$$

Pritom se simetrični dio

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t) \quad (4.27)$$

naziva tenzor brzine deformacije, dok se antisimetrični dio

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^t) \quad (4.28)$$

naziva vrtložnost.

Tenzor materijalne brzine deformacije računa se

$$2\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \mathbf{F}^t \mathbf{d} \mathbf{F} = \mathbf{F}^t (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t) \mathbf{F}. \quad (4.29)$$

Posljednja se relacija često koristi u numeričkim algoritmima u teoriji plastičnosti.

#### 4.1.10. Transformacija materijalnih značajki u prostorne i obratno

Transformacija veličina definiranih u materijalnom sustavu u prostorni opis i obratno vrši se pomoću tzv. natražnih (*pull-back*) i naprednih (*push forward*) operatora. Ove tenzorske operacije uključuju gradijent deformacije.

Push-forward operacija transformiranja označava se  $\phi_*$  i predstavlja transformaciju iz materijalnog opisa u prostorni. Primjerice, za vektore to izgleda:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \phi_*(d\mathbf{X}). \quad (4.30)$$

Pull-back je inverzna operacija; označava se s  $\phi^*$  a transformira veličinu datu u prostornom opisu u materijalni:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = \phi^*(d\mathbf{x}). \quad (4.31)$$

Isto se može primijeniti na bazne vektore:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \mathbf{F} \mathbf{E}_i, & \mathbf{e}^i &= \mathbf{F}^{-t} \mathbf{E}^i \\ \mathbf{E}_i &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{e}_i, & \mathbf{E}^i &= \mathbf{F}^t \mathbf{e}_i \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Tenzori se drugog i viših redova, npr.  $\sigma_1 = \sigma_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$ ,  $\sigma_2 = \sigma^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  ili  $\sigma_3 = \sigma^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$ , transformiraju tako da se provede odgovarajuća transformacija iz (4.32) na svaki od baznih vektora. Za kinematičke tenzore drugog reda operacije se provode putem izraza:

$$\left. \begin{aligned} \phi_*(\bullet) &= \mathbf{F}^{-t} \cdot (\bullet) \cdot \mathbf{F}^{-1} \\ \phi^*(\bullet) &= \mathbf{F}^t \cdot (\bullet) \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

dok se tenzori drugog reda kinetičke prirode transformiraju:

$$\left. \begin{aligned} \phi_*(\bullet) &= \mathbf{F} \cdot (\bullet) \cdot \mathbf{F}^t \\ \phi^*(\bullet) &= \mathbf{F}^{-1} \cdot (\bullet) \cdot \mathbf{F}^{-t} \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Tenzori višeg reda neće biti razmatrani na ovome mjestu, a adekvatna pojašnjenja ove problematike moguće je pronaći u Marsden i Hughes [9, pogl. 1].

#### 4.1.11. Lie-ova derivacija

Koncept pull-back i push-forward operacija osigurava matematički konzistentnu metodu za definiranje derivacija tenzorskih veličina po vremenu poznatu pod nazivom Lie-ova derivacija  $\mathcal{L}_v$ . Koncept se temelji na vremenskoj derivaciji u referentnoj konfiguraciji, koja je nepromjenjiva, i zatim push-forward operaciji u trenutnu konfiguraciju:

$$\mathcal{L}_v(\bullet) = \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial t} [\phi^*(\bullet)] \right). \quad (4.35)$$

Ova je derivacija važna primjerice pri razmatranju evolucije deformacije ili naprezanja kroz određeni vremenski interval. Za detaljniju analizu čitatelj se ponovno upućuje na Marsden i Hughes [9, pogl. 1].

#### 4.1.12. Piola transformacija

Piola transformacija matematička je operacija analogna pull-back operaciji, no sadržava i determinantu gradijenta deformacije. Tako je Piola transformacija neke tenzorske veličine  $\mathbf{y}$  dana kao:

$$\mathbf{Y} = J \phi^*(\mathbf{y}). \quad (4.36)$$



Često se koristi i Piola identitet. Ukoliko je  $\mathbf{Y}$  Piola transformacija od  $\mathbf{y}$ , tada vrijedi:

$$\text{DIV } \mathbf{Y} = J \text{ div } \mathbf{y}. \quad (4.37)$$

## 4.2. Zakoni održanja

Ovo poglavlje opisuje osnovne jednakosti i nejednakosti koje se koriste u mehanici kontinuuma. Poznavanje ovih parcijalnih jednažbi i njihovih osobina, Zachmanoglou i Thoe [79], nužno je za analizu problema plastičnosti. Od najveće važnosti za probleme termomehanike jesu zakon održanja količine gibanja<sup>1</sup>, zakon održanja energije (prvi zakon termodinamike) i Clausius-Duhemova nejednakost (nejednakost proizvodnje entropije; drugi zakon termodinamike). Radi potpunosti ukratko će biti predstavljeni i još neki kraći sadržaji.

### 4.2.1. Zakon održanja mase

Neka je  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  i neka je  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$  gibanje tijela  $\mathcal{B}$ . Za funkciju  $\rho(\mathbf{x}, t)$  se kaže da poštuje zakon održanja mase ako vrijedi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0. \quad (4.38)$$

Funkcija  $\rho(\mathbf{x}, t)$  naziva se gustoćom mase, dok se integral  $\int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{x}, t) dV$  naziva masom tijela. Još se koriste i ekvivalente relacije:

$$\rho(\mathbf{x}, t) J(\mathbf{X}, t) = \rho_0(\mathbf{X}), \quad (4.39)$$

gdje je  $\rho_0(\mathbf{X})$  gustoća u referentnoj konfiguraciji i jednažba kontinuiteta:

$$\dot{\rho} + \rho \text{ div } \mathbf{v} = 0. \quad (4.40)$$

U isokoričnom slučaju, tj. kada nema promjene volumena, što je često ograničenje u konstitutivnim relacijama materijala (primjerice u teoriji plastičnosti), vrijedi  $\dot{\rho} = 0$ , te se dobivaju sljedeći rezultati:

<sup>1</sup> Ovaj se zakon u inženjerskoj literaturi češće navodi pod nazivom Navierove ili Cauchyve jednažbe ravnoteže, ili kraće, jednažbe ravnoteže, Brnić [60, str. 26] ili Alfirević [80, str. 27].

$$\left. \begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho(\mathbf{X}, 0) = \rho_0(\mathbf{X}) \\ J(\mathbf{X}, t) &= 1 \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

### 4.2.2. Zakon održanja količine gibanja

Zakon održanja količine gibanja, u prostornom opisu, glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\phi_t(\mathcal{B})} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\phi_t(\mathcal{B})} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial \phi_t(\mathcal{B})} \mathbf{t} dS. \quad (4.42)$$

Pritom su  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  volumenske sile po jedinici mase i  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$  Cauchyev vektor naprežanja koji predstavlja silu po jedinici površine normale  $\mathbf{n}$ . Cauchyev se vektor naprežanja može izraziti kao:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.43)$$

Veličina  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  poznata je kao Cauchyev tenzor naprežanja. U slučaju da vrijedi zakon održanja mase, izraz (4.42) može se napisati u lokalnom obliku:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{b} + \text{div } \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.44)$$

Za razmatranja u materijalnom opisu izrazi (4.42) i (4.44) poprimaju oblik:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{V} dV = \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{B} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} dS, \quad (4.45)$$

odnosno u lokalnom obliku:

$$\rho_0 \dot{\mathbf{V}} = \text{DIV } \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{B}. \quad (4.46)$$

Pritom su  $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$  prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprežanja povezan s Cauchyevim tenzorom naprežanja putem:

$$\mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.47)$$

dok su  $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)$  volumenske sile po jedinici mase za koje vrijedi  $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ .

Često se susreću još i Kirchhoffov tenzor naprežanja:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{P} \mathbf{F}^t = J \boldsymbol{\sigma} \quad (4.48)$$

i simetrični (drugi) Piola-Kirchhoffov tenzor naprežanja:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-t} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-t}. \quad (4.49)$$

### 4.2.3. Zakon održanja momenta količine gibanja

Zakon održanja momenta količine gibanja glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\phi_t(\mathcal{B})} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int_{\phi_t(\mathcal{B})} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{b}) dV + \int_{\partial \phi_t(\mathcal{B})} (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) dS, \quad (4.50)$$

gdje je  $\mathbf{x}$  vektor položaja točke  $x$  u odnosu na ishodište. Ovaj zakon ima za posljedicu simetričnost Cauchyeva tenzora naprezanja:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (4.51)$$

Ovaj se zakon često nalazi u literaturi pod nazivom teorem o konjugiranosti posmičnih naprezanja, Brnić [60, str. 28].

### 4.2.4. Zakon održanja energije

Zakon održanja energije definiran je kao:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\phi_t(\mathcal{B})} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV = \int_{\phi_t(\mathcal{B})} \rho (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) dV + \int_{\partial \phi_t(\mathcal{B})} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{h}) dS. \quad (4.52)$$

Pritom su  $r(x,t)$  priljev topline po jedinici mase,  $e(x,t)$  unutarnja energija po jedinici mase,  $h(x,t,\mathbf{n})$  toplinski fluks na površini normale  $\mathbf{n}$ . Ovaj zakon kaže da je brzina prirasta unutarnje i kinetičke energije nekog tijela jednaka sumi brzine rada koji čine volumenske i površinske sile (mehanička snaga) i brzine prirasta toplinske energije (nemehanička snaga). Ovaj se zakon po potrebi može dopuniti ostalim vrstama energije, primjerice električnom ili slično.

Vektor toplinskog fluksa definira se:

$$\mathbf{h}(x,t,\mathbf{n}) = -\mathbf{q}(x,t) \cdot \mathbf{n} \quad (4.53)$$

Često se podrazumijeva da se vektor toplinskog fluksa ponaša u skladu s Fourierovim zakonom provođenja topline:

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta, \quad (4.54)$$

gdje je  $k$  toplinska provodljivost i  $\theta(x,t)$  polje apsolutne temperature. No, kako postoje materijali za koje ovaj zakon ne vrijedi, isti nije univerzalno važeći.

Može se pokazati da se oblik (4.52) transformira u sljedeći lokalni oblik zakona održanja energije:

$$\rho \dot{e} + \text{div } \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} + \rho r, \quad (4.55)$$

Isti se zakon može napisati u materijalnom zapisu. Uporabom zakona održanja mase (4.39), Piola transformacije (4.37) na vektor toplinskog fluksa:

$$\text{DIV } \mathbf{Q} = J \text{ div } \mathbf{q}, \quad (4.56)$$

definicije za prvi i drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja (4.47) i (4.49), uz

$$E(X,t) = e(x,t), \quad R(X,t) = r(x,t), \quad (4.57)$$

dobiva se lokalni oblik zakona održanja energije u materijalnom opisu:

$$\rho_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \text{DIV } \mathbf{Q} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} + \rho_0 R, \quad (4.58)$$

gdje su  $\mathbf{Q}(X,t)$  toplinski fluks,  $R(X,t)$  priljev topline po jedinici mase,  $E(X,t)$  unutarnja energija po jedinici mase i  $\mathbf{D}(X,t)$  materijalna (Lagrangeova) derivacija desnog Cauchy-Greenovog tenzora deformacije  $\mathbf{C}(X,t)$ .

Ova dodatna jednadžba sadrži dodatnu nepoznatu veličinu – unutarnju energiju. Stoga se zakon o održanju energije koristi samo onda ako je moguće povezati unutarnju energiju s drugim varijablama stanja. Takva se veza u tradicionalnoj termodinamici naziva jednadžbom stanja.

Još treba naglasiti da je lokalni oblik zakona očuvanja energije izveden bez ograničenja na brzinu odvijanja termodinamičkih procesa i da vrijedi neovisno o tome da li je riječ o povratnom, nepovratnom ili kvazistatičkom procesu. Ovo je od ključnog značaja pri razmatranju drugog zakona termodinamike.

### 4.2.5. Entropija i drugi zakon termodinamike

Razvoj termodinamike odvija se u više smjerova, a to se posebice može tvrditi s aspekta drugog zakona termodinamike. Oko ovoga koncepta i danas postoji veći broj nerazjašnjenih postavki. Detaljni prikaz razvoja termodinamike i usporedba grana termodinamike dobro je obrađena u Maugin [69].

Prvi zakon termodinamike ukazuje na međusobno pretvaranje mehaničke u toplinsku energije i obratno, održavajući pritom energetska ravnotežu. Pritom se ne postavljaju nikakva ograničenja spram smjera procesa. U klasičnoj mehanici to ne predstavlja problem; potencijalna se energija može u potpunosti transformirati u kinetičku i obratno, naravno uz nepostojanje trenja ili drugih disipativnih

mehanizama. No, ta se situacija potpuno mijenja kada se uključe toplinske pojave. Primjerice, kinetička se energija može potpuno disipirati putem trenja i time izazvati porast unutarnje energije a time i temperature razmatranog tijela. Ovakav je proces očito nepovratnog karaktera; obrat ne vrijedi. Drugim se zakonom termodinamike postavlja ograničenja na spomenute procese.

Radi omogućavanja povezivanja mehaničkih i toplinskih pojava na ovakav način uvodi se termodinamička funkcija stanja nazvana entropija. Ovaj pojam se ne pojavljuje u klasičnoj mehanici i obično se njezin smisao promatra na razini molekularne strukture i statističke mehanike. U tom smislu entropija predstavlja mjeru neuređenosti sustava kroz činjenicu da je veća vjerojatnost odvijanja nekog procesa na način da se poveća neuređenost sustava a time i entropija sustava. Na taj se način entropija često povezuje s energijom sustava koja nije raspoloživa za uporabu.

U mehanici kontinuuma pretpostavlja se da između ostalih unutarnjih varijabli specifična entropija također utječe na unutarnju energiju. Tako se specifična entropija i temperatura tretiraju kao konjugirane vrijednosti pa se entropija definira kao parcijalna derivacija unutarnje energije po temperaturi:

$$\eta = \frac{\partial e}{\partial \theta}. \quad (4.59)$$

Nakon uvođenja koncepta entropije moguće je napisati drugi zakon termodinamike ili Clausius-Duhemova nejednakost napisane u prostornom zapisu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\phi(\mathcal{B})} \rho \eta dv \geq \int_{\phi(\mathcal{B})} \frac{\rho r}{\theta} dv + \int_{\partial \phi(\mathcal{B})} \frac{\mathbf{h}}{\theta} da. \quad (4.60)$$

Uz (4.53) slijedi lokalni oblik Clausius-Duhemove nejednakosti:

$$\rho \dot{\eta} \geq \frac{\rho r}{\theta} - \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta}. \quad (4.61)$$

Lako se mogu provesti transformacije koje dovode do sljedećeg oblika:

$$\gamma \equiv \dot{\eta} - \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\rho \theta} \operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}}{\rho \theta^2} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0, \quad (4.62)$$

gdje je  $\gamma$  unutarnja proizvodnja entropije po jedinici mase. Truesdell i Noll [6, str. 295] uvode i stroži zahtjev:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\text{loc}} &= \dot{\eta} - \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\rho \theta} \operatorname{div} \mathbf{q} \geq 0 \\ \gamma_{\text{con}} &= -\frac{\mathbf{q}}{\rho \theta^2} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.63)$$

gdje su  $\gamma_{\text{loc}}$  lokalna proizvodnja entropije i  $\gamma_{\text{con}}$  proizvodnja entropije provođenjem topline. Prva od ovih nejednakosti odgovara fizikalnom opažanju da tijelo jednolike temperature bez toplinskih izvora može apsorbirati mehaničku energiju, ali je ne može vraćati. Druga nejednakost odgovara činjenici da toplina spontano ne može prelaziti s hladnijeg na toplije tijelo.

Isti zakon uporabom materijalne formulacije poprima oblik:

$$\rho_0 \frac{\partial N}{\partial t} \geq \rho_0 \frac{R}{\Theta} - \operatorname{DIV} \left( \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \right). \quad (4.64)$$

Pritom su  $\Theta(X,t)$  polje apsolutne temperature i  $N(X,t)$  entropija po jedinici mase. Ovaj je izraz dobiven uporabom sljedećih odnosa:

$$N(X,t) = \eta(x,t), \quad \Theta(X,t) = \theta(x,t), \quad (4.65)$$

i izraza (4.37), (4.39), (4.47), (4.49) i (4.56).

Često se termodinamička razmatranja bave specijalnim slučajevima, pa se u nastavku uz značajku takvoga daje i odgovarajući naziv:

- |                                   |                      |
|-----------------------------------|----------------------|
| (a) $\mathbf{q} = 0$ ;            | adijabatski proces;  |
| (b) $\dot{\eta} = 0$ ;            | izentropski proces;  |
| (c) $\operatorname{GRAD} N = 0$ ; | homentropski proces; |
| (d) $\theta = \text{konst.}$ ;    | izotermni proces;    |

Iz praktičnih se razloga Clausius-Duhemova nejednakost izražava i u nešto drugačijem obliku. Postupak se temelji na uvođenju Helmholtzove slobodne energije  $\psi$  čija definicija u prostornoj formulaciji jest:

$$\psi = e - \theta \eta, \quad (4.66)$$

odnosno u materijalnoj:

$$\Psi = E - \theta N. \quad (4.67)$$

Ova je transformacija poznata kao Legendreova transformacija, Šilhavý [72, str.168].

Unutarnja energija  $e$  predstavlja energiju pohranjenu u tijelu, koja na markoskopskoj razini odražava mikroskopske energije poput kemijske energije povezivanja, međumolekularne energije i energije vibracija molekula. Konstitutivne relacije, kao značajke materijala, povezuju unutarnju energiju sa tenzorom naprezanja. Ona predstavlja potencijal za termodinamička naprezanja pri izentropskim procesima. Nasuprot ovome, Helmholtzova slobodna energija je potencijal za vršenje rada pri neizentropskim procesima.

U skladu s ovim, unutarnja energija ili Helmholtzova slobodna energija moraju biti izražene kao jedinstvene funkcije varijabli stanja prikladnih za pojedini problem. To primjerice mogu biti naprezanje i temperatura, ili kao što je čest slučaj, njima konjugirane veličine deformacija i entropija. Gradijent deformacije i gradijent temperature često se odabiru za varijable stanja. Skup varijabli stanja uključuje i određeni broj unutarnjih ili skrivenih varijabli. U teoriji plastičnosti to su primjerice varijable koje definiraju stanje plastične deformacije – stanje izotropnog i kinematičkog očvršćivanja materijala. Uvođenje varijabli stanja povlači sobom i nužnost specifikiranja evolucije ovih unutarnjih varijabli kroz uvođenje dodatnih funkcijskih ovisnosti, Coleman i Gurtin [7].

Uvođenjem Helmholtzove slobodne energije sada se može pokazati da iz zakona održanja energije i Clausius-Duhemove nejednakosti slijedi:

$$\eta\dot{\theta} + \dot{\psi} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} + \frac{1}{\rho\theta} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0, \quad (4.68)$$

odnosno u materijalnoj deskripciji:

$$N \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 \Theta} \mathbf{Q} \cdot \text{GRAD } \Theta \geq 0. \quad (4.69)$$

Uzme li se u obzir izraze (4.62) i (4.63), te (4.66) i (4.67) slijedi:

$$\theta\gamma = -\dot{e} + \dot{\eta}\theta + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} - \frac{1}{\rho\theta} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0 \quad (4.70)$$

odnosno

$$\theta\gamma = -\frac{\partial E}{\partial t} + \Theta \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 \Theta} \mathbf{Q} \cdot \text{GRAD } \Theta \geq 0, \quad (4.71)$$

gdje se umnožak  $D = \theta\gamma$  naziva unutarnjom disipacijom. Izrazi (4.70) i (4.71) nazivaju se reduciranim disipacijskim nejednakostima.

U skladu s gornjim razmatranjima razvidno je da unutarnja disipacija ne može biti negativna, odnosno da je:

$$D \geq 0. \quad (4.72)$$

Može se pokazati da disipacija poprima minimalnu vrijednost, tj.  $D = 0$ , pri elastičnom procesu deformiranja, Simo i Hughes [26, str. 27]. Za plastičnu deformaciju i nepovratne termomehaničke procese općenito uvijek mora biti  $D > 0$ .

# 5

## Konstitutivni zakoni izotermne i neizotermne plastičnosti

---

Kratki pregled mehanike kontinuuma predstavljen u prethodnom poglavlju ne sadrži međusobnu povezanost nekih veličina, primjerice naprezanja i deformacije. Te se jednadžbe nazivaju konstitutivnim jednadžbama i u uskoj su vezi s vrstom materijala koji treba modelirati i uvjetima opterećenja kojem je isti podvrgnut. U tom smislu, ovo poglavlje predstavlja dopunu prethodnog poglavlja i upotpunjavanja sustava parcijalnih jednadžbi. Od velikog broja konstitutivnih relacija predstaviti će se samo one koje definiraju razvoj konačnih plastičnih deformacija pri izotermnim i neizotermnim uvjetima.

### 5.1. Hiperelastičnost i multiplikativna dekompozicija

Teorija hiperelastičnosti podrazumijeva takve materijale kod kojih je izvršeni rad unutarnjih sila neovisan o prijašnjem putu tijekom deformiranja. Osnovna značajka sastoji se u postojanju pohranjene energije deformacije koja predstavlja potencijal za naprezanja:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}. \quad (5.1)$$

Ovo je u snažnoj suprotnosti s ranijim hipoelastičnim teorijama (Lubliner [52], str. 465) kod kojih se naprezanja i deformacije povezuju preko jednadžbe koja ne može biti izvedena iz energije. Ovakav pristup teško može naći uporište u fizici, jer se pri zatvorenom elastičnom ciklusu deformiranja mogu pojaviti zaostala naprezanja (dobra ilustracija ovoga je primjer 4.1. u Ibrahimbegović i Chorfi [30]). Pri analizi konačnih deformacija uz ove probleme postoje i problemi s oscilacijama rješenja, pogreškama zbog dodatne numeričke integracije brzine naprezanja i deformacije, te poteškoća s kinematičkim očvršćivanjem i ostalo.

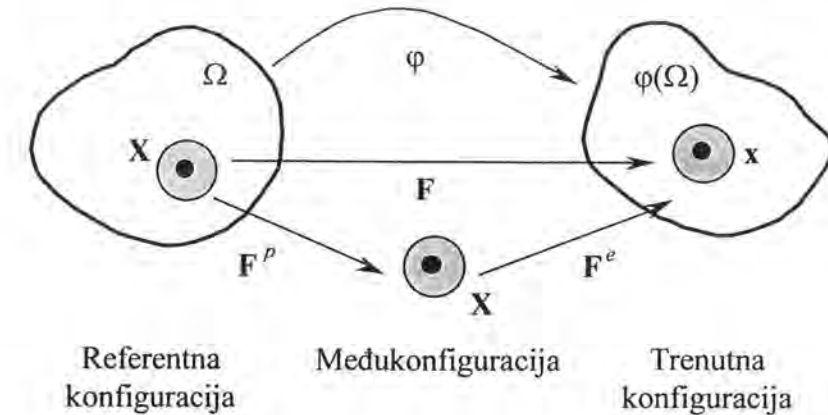
Hiperelastični konstitutivni zakoni plastičnosti konačnih deformacija temelje se na multiplikativnoj dekompoziciji gradijenta deformacije, što ima uporište u mikromehanici pojedinačnih kristala u plastičnosti metala, Simo i Hughes [26, str. 301-302]. Od daljnje je prednosti što se funkcija pohranjene energije može jednostavno podijeliti, primjerice na volumetrijski i devijatorski dio. Moguće je i egzaktno određivanje algoritamski konzistentnog tangencijalnog elastoplastičnog modula, što je manjkavost hipoelastičnih algoritama. Uz nabrojano, primjenjuje se i klasična prediktor-korektor metoda radijalnog povratka, koja se koristi i u infinitezimalnoj plastičnosti.

## 5.2. Multiplikativna dekompozicija gradijenta deformacije

Kako je spomenuto u odjeljku 5.1, u temeljima analize konačnih plastičnih deformacija hiperelastičnom formulacijom nalazi se multiplikativna dekompozicija gradijenta deformacije na elastični i plastični dio:

$$\mathbf{F}(X, t) = \mathbf{F}^e(X, t) \mathbf{F}^p(X, t). \quad (5.2)$$

Plastični se dio gradijenta deformacije može interpretirati kao lokalna deformacija u međukonfiguraciju. Ova je međukonfiguracija bez naprezanja. Elastični dio gradijenta zatim predstavlja lokalnu deformaciju iz međukonfiguracije u konačnu konfiguraciju, sl. 5.1.



Sl. 5.1. Uz multiplikativnu dekompoziciju gradijenta deformacije

U skladu s ovom dekompozicijom potrebno je uvesti i dekompoziciju tenzora deformacije opisanih u poglavlju 4.1.7.

Tako se uvodi plastični dio desnog Cauchy-Greenovog tenzora deformacije:

$$\mathbf{C}^p = (\mathbf{F}^p)^T \mathbf{F}^p, \quad (5.3)$$

pa plastični dio Lagrangeov tenzora deformacije postaje:

$$\mathbf{E}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^p - \mathbf{I}). \quad (5.4)$$

Uvode se i prostorni tenzori deformacije povezani s trenutnom konfiguracijom na način:

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^T \quad (5.5)$$

pod nazivom elastični lijevi Cauchy-Greenov tenzor deformacije te elastični Eulerov tenzor deformacije:

$$\mathbf{e}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - (\mathbf{b}^e)^{-1}). \quad (5.6)$$

Izrazi (5.3) i (5.5) mogu se povezati na sljedeći način:

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}(\mathbf{F}^p)^{-1} (\mathbf{F}^p)^{-T} \mathbf{F}^T = \mathbf{F}((\mathbf{F}^p)^T \mathbf{F}^p)^{-1} \mathbf{F}^T = \mathbf{F}(\mathbf{C}^p)^{-1} \mathbf{F}^T. \quad (5.7)$$

Od važnosti je i sljedeća relacija dobivena elementarnim transformacijama izraza (4.17):

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{C} \mathbf{F}^{-1}. \quad (5.8)$$

U skladu s multiplikativnim karakterom dekompozicije (5.2) uvode se oznake za determinante gradijenta deformacije:

$$\left. \begin{aligned} J^p &= \det \mathbf{F}^p = \det \mathbf{C}^p \\ J^e &= \det \mathbf{F}^e = (\det \mathbf{b}^e)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Ove su determinante povezane na način:

$$J = J^e J^p. \quad (5.10)$$

Nepromjenjivost volumena pri plastičnoj deformaciji uvjetovana je s:

$$J^p = 1. \quad (5.11)$$

Uvođenjem determinante  $J^e$  sada se može definirati tenzor:

$$\bar{\mathbf{b}}^e = (J^e)^{-2/3} \mathbf{b}^e \quad (5.12)$$

kao dio tenzora deformacije  $\mathbf{b}^e$  koji ne opisuje promjenu volumena. To slijedi iz (5.9)<sub>2</sub> i pravila za determinantu umnoška skalara i matrice, Kurepa [81]:

$$\det(\bar{\mathbf{b}}^e) = \det((J^e)^{-2/3} \mathbf{b}^e) = (J^e)^{-2} \det \mathbf{b}^e = (J^e)^{-2} (J^e)^2 = 1, \quad (5.13)$$

što upućuje na nepromjenjivost volumena.

Poznavanje evolucije tenzora deformacije od osobite je važnosti u nelinearnoj analizi. Vremenska derivacija elastičnog dijela lijevog Cauchy-Greenovog tenzora deformacije (5.7) glasi:

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \ell \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \ell^t + \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e, \quad (5.14)$$

gdje su rabljeni izrazi (4.25) za prostorni gradijent deformacije  $\ell$  i definicija Lie-ve derivacije (4.35):

$$\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{C}}^p)^{-1} \mathbf{F}^t. \quad (5.15)$$

### 5.3. Unutarnja energija i unutarnje varijable

U skladu s gornjim razmatranjima, početni korak pri definiranju konstitutivnih relacija za izotermnu i neizotermnu plastičnost pri velikim deformacijama mora biti definiranje funkcije unutarnje energije i unutarnjih varijabli ove funkcije.

U kontekstu konačne elastičnosti Marsden i Hughes [9, str.189-192] pokazuju da se kao varijable slobodne energije u materijalnoj formulaciji  $\mathcal{W}$  trebaju odabrati točke referentne konfiguracije  $\Omega$ , gradijent deformacije i temperatura promatrane točke. Ovo proizlazi temeljem nešto dulje analize reducirane disipacijske nejednakosti (4.69).

Ovisnost slobodne energije o točkama referentne konfiguracije upućuje na nehomogena tijela. U ovome radu bit će razmatrana samo homogena, izotropna tijela pa će stoga ova varijabla biti ispuštena iz daljnje analize.

Kako su predmet ovih razmatranja plastične deformacije, funkcija slobodne energije bit će nadopunjena slijedom teorije iznesene u Simo [17]. Obzirom da je u samim temeljima hiperelastične formulacije multiplikativna dekompozicija gradijenta deformacije na elastični i plastični dio, potrebno je ovo uvesti i u funkciju unutarnje energije. Na taj se način odabire elastični dio gradijenta deformacije  $\mathbf{F}^e$  kao varijabla. Daljnja transformacija ove varijable temelji se na ograničenju da uslijed kretanja tijela kao krutog tijela deformacija tijela mora biti invarijantna. Kako je opisano u poglavlju 4.1.8., gradijent se deformacije može rastaviti putem teorema o lijevoj polarnoj dekompoziciji (4.24) na tenzor izduženja  $\mathbf{V}^e$  i tenzor čiste rotacije  $\mathbf{R}^e$ . U skladu s gornjim razmatranjima rotacija tijela ne igra ulogu u deformaciji, te se elastični dio gradijenta deformacije  $\mathbf{F}^e$  kao varijabla može zamijeniti s lijevom tenzorom izduženja  $\mathbf{V}^e$ . Konačno, obzirom na definiciju lijevog tenzora izduženja (4.22) ovaj se može zamijeniti s elastičnim dijelom lijevog Cauchy-Greenovim tenzora deformacije  $\mathbf{b}^e$ .

Razmatranja u 3. poglavlju ukazala su na postojanje izotropnog i kinematičkog očvršćivanja metala. Stoga je neophodno uvesti varijable srodne deformaciji koje će karakterizirati takvo ponašanje. Izotropsko očvršćivanje predstavlja ekvivalentna plastična deformacija  $\xi$ , dok je kinematičko očvršćivanje definirano tenzorom kinematičke deformacije  $\mathbf{z}$  u prostornoj, odnosno  $\Xi$  u materijalnoj deskripciji, Ibrahimbegović i Chorfi [30, str. 514]. Odgovarajući tenzori povratnog naprezanja označavaju se s  $\alpha$  i  $\mathbf{A}$ . Pritom se može napisati relacija analogna (5.7), Ibrahimbegović i Chorfi [30]:

$$\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{F}} \Xi \bar{\mathbf{F}}^t. \quad (5.16)$$

Funkcija slobodne energije  $\mathcal{W}$  ovisi o temperaturi, pa funkcija unutarnje energije mora ovisiti o konjugiranoj varijabli, entropiji, Maugin [82, str.269]. Ovdje su,

slijedom Simo i Miehe [25] potrebna dodatna pojašnjenja. Entropija se rastavlja na elastični i plastični dio:

$$\eta = \eta^e + \eta^p. \quad (5.17)$$

Plastični dio entropije ogleda svoje fizikalno značenje u sljedećoj situaciji. U skladu s tumačenjem u pogl. 3.1, samo manji dio unutarnje energije može se pohraniti u plastično deformiranom metalu. Čak i u idealiziranom slučaju kada su plastične strukturne promjene u potpunosti disipativne postoji doprinos plastičnoj entropiji zbog kretanja dislokacija. Ovaj se dio entropije označava se s  $\eta^p$  i ne utječe na unutarnju energiju. Plastični dio entropije kao unutarnja varijabla odražava promjenu kriterija tečenja u odnosu spram temperature i s tim povezane disipativne promjene strukture materijala u vidu kretanja dislokacija.

Konačno se može pisati izraz (4.66) s uključenim unutarnjim varijablama:

$$\psi(\mathbf{b}^e, \xi, \mathbf{z}, \theta) = e(\mathbf{b}^e, \xi, \mathbf{z}, \eta^e) - \eta^e \theta. \quad (5.18)$$

#### 5.4. Disipacija

Proizvodnja disipacije može se podijeliti na lokalnu i disipaciju zbog provođenja topline:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{loc} + \mathcal{D}_{con}. \quad (5.19)$$

Ako se sada energije definiraju po jedinici volumena i uzme li se u obzir definicija unutarnje proizvodnje entropije (4.62) i (4.63), te reducirana disipacijska nejednakost u prostornoj deskripciji (4.70) i doprinos kinematičkog očvršćivanja, slijedi da mora biti:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_{loc} = \theta \gamma_{loc} = -\dot{e} + \dot{\eta} \theta + \boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} \geq 0 \\ \mathcal{D}_{con} = \theta \gamma_{con} = -\frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.20)$$

Uz definiciju Helmholtzove slobodne energije (4.66) i aditivne dekompozicije entropije (5.17), lokalna proizvodnja disipacije postaje:

$$\mathcal{D}_{loc} = \dot{\eta}^p \theta - (\eta - \eta^p) \dot{\theta} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{z}} - \dot{\psi} \geq 0. \quad (5.21)$$

Sada je potrebno odrediti derivaciju slobodne energije po vremenu  $\dot{\psi}$ . Uzevši u obzir odabir unutarnjih varijabli (5.18) mora biti:

$$\dot{\psi} = \partial_{\mathbf{b}^e} \psi \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\theta} \psi \cdot \dot{\theta} + \partial_{\xi} \psi \cdot \dot{\xi} + \partial_{\mathbf{z}} \psi \cdot \dot{\mathbf{z}}. \quad (5.22)$$

Iz (5.14) uz (4.25) i (4.27) slijedi:

$$\dot{\mathbf{b}}^e = 2\mathbf{d} \mathbf{b}^e + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{b}^e. \quad (5.23)$$

Analogno se dobiva za varijablu kinematičkog očvršćivanja, Ibrahimbegović i Chorfi [30]:

$$\dot{\mathbf{z}}^e = 2\mathbf{d} \mathbf{z} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{z}, \quad (5.24)$$

Sada se (5.22) može pisati:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \partial_{\mathbf{b}^e} \psi \cdot (2\mathbf{d} \mathbf{b}^e + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{b}^e) + \partial_{\theta} \psi \cdot \dot{\theta} + \partial_{\xi} \psi \cdot \dot{\xi} + \partial_{\mathbf{z}} \psi \cdot (2\mathbf{d} \mathbf{z} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{z}) = \\ &= \left( \partial_{\mathbf{b}^e} \psi \mathbf{b}^e \right) \cdot \left( 2\mathbf{d} + (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{b}^e) (\mathbf{b}^e)^{-1} \right) + \partial_{\theta} \psi \cdot \dot{\theta} + \partial_{\xi} \psi \cdot \dot{\xi} + (\partial_{\mathbf{z}} \psi \mathbf{z}) \cdot \left( 2\mathbf{d} + (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{z}) \mathbf{z}^{-1} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (5.25)$$

Uvrštavanjem posljednjeg izraza u (5.21) dobiva se lokalna proizvodnja disipacije:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{loc} &= \left[ -\partial_{\theta} \psi - (\eta - \eta^p) \right] \dot{\theta} + \left[ \boldsymbol{\tau} - 2 \partial_{\mathbf{b}^e} \psi \mathbf{b}^e \right] \cdot \mathbf{d} + \left( 2 \partial_{\mathbf{b}^e} \psi \mathbf{b}^e \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{b}^e) (\mathbf{b}^e)^{-1} \right) + \\ &+ \dot{\eta}^p \theta - \partial_{\xi} \psi \cdot \dot{\xi} + \left[ \boldsymbol{\alpha} - 2 \partial_{\mathbf{z}} \psi \mathbf{z} \right] \cdot \mathbf{d} + \left( 2 \partial_{\mathbf{z}} \psi \mathbf{z} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{z}) \mathbf{z}^{-1} \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

U skladu s postavkama iznesenim u radu Coleman i Gurtin [7, str. 600-601], iz (5.26) slijedi da moraju vrijediti sljedeće konstitutivne relacije:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= 2 \partial_{\mathbf{b}^e} \psi \mathbf{b}^e \\ \boldsymbol{\alpha} &= 2 \partial_{\mathbf{z}} \psi \mathbf{z} \\ \eta &= \eta^p - \partial_{\theta} \psi \end{aligned} \right\}. \quad (5.27)$$

Uvođenjem oznaka za varijable srodne naprezanjima za izotropsko očvršćivanje  $\beta = -\partial_{\xi} \psi$  dobiva se reducirani oblik disipacijske nejednakosti:

$$\mathcal{D}_{loc} = \boldsymbol{\tau} \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{b}^e) (\mathbf{b}^e)^{-1} \right) + \beta \dot{\xi} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{z}) \mathbf{z}^{-1} \right) + \dot{\eta}^p \theta \geq 0. \quad (5.28)$$

Lokalna disipacija razdvaja se u dva dijela, mehanički i termički:



$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_{mech} &= \tau \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) (\mathbf{b}^e)^{-1} \right) + \beta \dot{\xi} + \alpha \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{z}) \mathbf{z}^{-1} \right) \\ \mathcal{D}_{ther} &= \dot{\eta}^p \theta \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Vidljivo je da se uvođenjem unutarnje varijable  $\eta^p$  dobiva dodatna produkcija disipacije koja je termičke prirode. Mehanički dio disipacije isti je kao u izotermičkim mehaničkim problemima.

### 5.5. Princip maksimalne plastične disipacije i zakoni tečenja

Termoelastična domena definira se u trenutnoj konfiguraciji tijela:

$$E := \{(\tau, \beta, \alpha, \theta) : \phi(\tau, \beta, \alpha, \theta) \leq 0\}. \quad (5.30)$$

Točke na rubu domene  $\partial E$  nalaze se u plastičnom stanju naprezanja. Odabir funkcije  $\phi$ , tj. kriterija tečenja, ovisi o vrsti materijala. U slučaju metalnih materijala najčešći odabir je von Misesov kriterij tečenja:

$$\phi(\tau, \beta, \alpha, \theta) = \|\text{dev } \tau - \text{dev } \alpha\| + \sqrt{\frac{2}{3}} [\beta - \sigma_y(\theta)] \leq 0. \quad (5.31)$$

Pritom se funkcija  $\sigma_y(\theta)$  naziva naprežanjem tečenja, dok  $\beta$  predstavlja doprinos izotropnog očvršćivanja.

Princip maksimalne plastične disipacije glasi: ako je elastična domena definirana kao u (5.30) tada od svih dopustivih vrijednosti  $(\tau, \beta, \alpha, \theta)$  stvarno stanje u nekoj točki predstavlja rješenje koje daje maksimum izraza (5.29):

$$\mathcal{D}_{loc} \geq \dot{\mathcal{D}}_{loc}, \quad (5.32)$$

odnosno:

$$\left. \begin{aligned} \tau \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) (\mathbf{b}^e)^{-1} \right) + \beta \dot{\xi} + \alpha \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{z}) \mathbf{z}^{-1} \right) + \theta \dot{\eta}^p &\geq \\ \dot{\tau} \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) (\mathbf{b}^e)^{-1} \right) + \dot{\beta} \dot{\xi} + \dot{\alpha} \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{z}) \mathbf{z}^{-1} \right) + \dot{\theta} \dot{\eta}^p & \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Ovo daje krajnji oblik nejednakosti:

$$\left( \tau - \dot{\tau} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) (\mathbf{b}^e)^{-1} \right) + \left( \beta - \dot{\beta} \right) \dot{\xi} + \left( \alpha - \dot{\alpha} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{z}) \mathbf{z}^{-1} \right) + \left( \theta - \dot{\theta} \right) \dot{\eta}^p \geq 0. \quad (5.34)$$

U isključivo mehaničkom procesu, ovaj se princip svodi na von Misesov princip maksimalnog plastičnog rada, Hill [83, str.66].

Daljnja analiza izraza (5.34) izvodi se primjenom standardnih tehnika optimizacije, Luenberger [84] i Smith [85]. Prvo se princip maksimizacije pretvara u princip minimizacije jednostavnim promjenom predznaka ispred funkcije cilja  $-\mathcal{D}_{loc}$  (5.28). Definicija termoelastične domene predstavlja ograničenje. Stoga se

uvodi Lagrangeov multiplikator  $\lambda$  i Lagrangeov funkcional  $\mathcal{L}^p$ :

$$\mathcal{L}^p = \tau \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) (\mathbf{b}^e)^{-1} \right) + \beta \dot{\xi} + \alpha \cdot \left( -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{z}) \mathbf{z}^{-1} \right) + \theta \dot{\eta}^p + \lambda \cdot \phi(\tau, \beta, \alpha, \theta). \quad (5.35)$$

Klasični Kuhn-Tucker uvjeti definiraju rješenje  $(\tau, \beta, \alpha, \theta, \lambda)$  koje maksimizira funkciju disipacije:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^p}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) (\mathbf{b}^e)^{-1} + \lambda \partial_\tau \phi = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}^p}{\partial \beta} &= -\dot{\xi} + \lambda \partial_\beta \phi = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}^p}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{z}) \mathbf{z}^{-1} + \lambda \partial_\alpha \phi = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}^p}{\partial \theta} &= -\dot{\eta}^p + \lambda \partial_\theta \phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Parametar konzistencije  $\lambda$  je Lagrangeov multiplikator. Elementarnim transformacijama gornjih jednadžbi dobivaju se evolucijske jednadžbe unutarnjih varijabli modela:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e &= \lambda \partial_\tau \phi \cdot \mathbf{b}^e & \dot{\xi} &= \lambda \partial_\beta \phi \\ -\frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{z} &= \lambda \partial_\alpha \phi \cdot \mathbf{z} & \dot{\eta}^p &= \lambda \partial_\theta \phi \end{aligned} \right\}, \quad (5.37)$$

uz

$$\lambda \geq 0 \quad \phi(\boldsymbol{\tau}, \beta, \boldsymbol{\alpha}, \theta) \leq 0 \quad \lambda \cdot \phi(\boldsymbol{\tau}, \beta, \boldsymbol{\alpha}, \theta) = 0. \quad (5.38)$$

Ove uvjete nadopunjava zahtjev konzistencije:

$$\lambda \cdot \dot{\phi}(\boldsymbol{\tau}, \beta, \boldsymbol{\alpha}, \theta) = 0. \quad (5.39)$$

Ovakvo definiran kriterij tečenja osigurava nepromjenjivost volumena. Istinitost takve tvrdnje slijedi na osnovu sljedeće analize. Uporabom tenzorskog računa može se pokazati da vrijedi:

$$\dot{J}^e = \frac{1}{2} J^e (\mathbf{b}^e)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{b}}^e \quad (5.40)$$

Uz (5.23) dobiva se:

$$\begin{aligned} \dot{J}^e &= J^e \left[ \mathbf{d} \mathbf{b}^e \cdot (\mathbf{b}^e)^{-1} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e \cdot (\mathbf{b}^e)^{-1} \right] = \\ &= J^e \left[ \text{tr}[\mathbf{d}] + \frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e \cdot (\mathbf{b}^e)^{-1} \right] = J^e [\text{tr}[\mathbf{d} - \lambda \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi]] \end{aligned} \quad (5.41)$$

Može se pokazati da se uz, Simo i Hughes [26, str.306]:

$$\dot{J} = J \text{tr}[\mathbf{d}] \quad (5.42)$$

i uz

$$J = J^e J^p \quad (5.43)$$

dobiva:

$$\begin{aligned} J \text{tr} \mathbf{d} &= \dot{J}^e J^p + J^e \dot{J}^p \\ \frac{1}{J^p} \frac{dJ^p}{dt} &= \lambda \text{tr}[\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi] \\ \frac{d(\ln J^p)}{dt} &= \lambda \text{tr}[\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Obzirom da za kriterij tečenja koji ne ovisi o hidrostatičkom dijelu tenzora naprezanja (poput von Misesovog, izraz (5.34)) mora vrijediti  $\text{tr}[\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi] = 0$ , slijedi da je  $\dot{J}^p = 0$ , tj. da  $J^p$  ne mijenja vrijednost tijekom vremena, što znači da je jednak svojoj početnoj vrijednosti,  $J^p = 1$ . Kako ova determinanta odražava promjenu volumena slijedi zaključak o nepromjenjivosti volumena.

## 5.6. Evolucija temperature

Lokalni oblik zakona održanja energije (4.55) nakon uporabe Piola transformacije (4.36) i (4.37), te uz (4.48) glasi :

$$-J \text{DIV} \frac{\mathbf{Q}}{J} + r = \dot{e} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d}. \quad (5.45)$$

U gornjoj su jednadžbi ekstenzivne<sup>1</sup> veličine izražene po jedinici volumena. Uz (5.20)<sub>1</sub> dobiva se:

$$-J \text{DIV} \frac{\mathbf{Q}}{J} + r = \theta \dot{\eta} - \mathcal{D}_{loc} = \theta (\dot{\eta} - \dot{\eta}^p) - \mathcal{D}_{mech}. \quad (5.46)$$

Iz (5.20)<sub>1</sub>, (5.29) uz derivaciju (5.17) po vremenu dobiva se sljedeći izraz:

$$\dot{\psi} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{z}} - \mathcal{D}_{mech} - \eta^e \dot{\theta}. \quad (5.47)$$

Derivacijom (5.27)<sub>2</sub> po vremenu i množenjem s temperaturom  $\theta$  dobiva se:

$$\theta \dot{\eta} = \theta \dot{\eta}^p - \theta \partial_{\theta} \dot{\psi}. \quad (5.48)$$

Iz (5.27)<sub>2</sub> također slijedi:

$$\eta - \eta^p = -\partial_{\theta} \psi \Rightarrow \eta^e = -\partial_{\theta} \psi, \quad (5.49)$$

što uz (5.47) daje:

$$\begin{aligned} \theta \dot{\eta} &= \theta \dot{\eta}^p - \partial_{\theta} [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{z}} - \mathcal{D}_{mech} - \eta^e \dot{\theta}] = \\ &= \theta \dot{\eta}^p - \partial_{\theta} [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{z}} - \mathcal{D}_{mech}] - \theta \partial_{\theta}^2 \psi \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Definiranjem specifičnog toplinskog kapaciteta pri konstantnoj deformaciji, Malvern[67], kao:

$$c = -\theta \partial_{\theta}^2 \psi, \quad (5.51)$$

te elasto-plastičnog strukturnog zagrijavanja:

$$\mathcal{H} = -\partial_{\theta} [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{z}} - \mathcal{D}_{mech}], \quad (5.52)$$

izraz (5.50) poprima oblik:

$$\theta (\dot{\eta} - \dot{\eta}^p) = c \dot{\theta} + \mathcal{H}. \quad (5.53)$$

<sup>1</sup> Ekstenzivnim se veličinama nazivaju veličine ovisne o masi ili broju čestica.

Uvrštavanjem tako dobivene relacije u (5.46) dobiva se jednadžba evolucije temperature:

$$c\dot{\theta} = \mathcal{D}_{mech} - \mathcal{H} - J \operatorname{DIV} \frac{\mathbf{Q}}{J} + r. \quad (5.54)$$

Može se uočiti da se plastični dio entropije  $\eta^p$  ne pojavljuje u ovom obliku evolucijske jednadžbe temperature.

Elasto-plastično strukturno zagrijavanje može se prikazati i u drugom obliku. Uvrštavanjem konstitutivnih jednakosti (5.27) u (5.52), te uz (5.23) i  $\beta = -\partial_{\xi} \psi$  dobiva se:

$$\mathcal{H} = -\theta \left( \partial_{\mathbf{b}^e}^2 \psi \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\mathbf{z}}^2 \psi \cdot \dot{\mathbf{z}} + \partial_{\xi}^2 \psi \dot{\xi} \right), \quad (5.55)$$

ili uz (5.49):

$$\mathcal{H} = \theta \left( \partial_{\mathbf{b}^e} \eta^e \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\mathbf{z}} \eta^e \cdot \dot{\mathbf{z}} + \partial_{\xi} \eta^e \dot{\xi} \right). \quad (5.56)$$

Radi potpunoga definiranja evolucije temperature potrebno je definirati konstitutivnu jednadžbu za toplinski fluks. Za izotropne metale prikladno je odabrati klasični Fourierov zakon provođenja topline definiran kao:

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta, \quad (5.57)$$

gdje je  $k$  koeficijent toplinske vodljivosti. Odabir ovakve konstitutivne relacije također zadovoljava uvjet (5.20)<sub>2</sub>,  $\mathcal{D}_{con} \geq 0$ , obzirom da je  $k \geq 0$ .

## 5.7. Termomehanički model $J_2$ za metale s materijalnim značajkama kao funkcijama temperature

Nakon razmatranja u prethodnim poglavljima sada je moguće postaviti konkretni oblik funkcije slobodne energije. Ukoliko su materijalne značajke ovisne o temperaturi funkcija ima oblik:

$$\psi = T(\theta) + M(J, \theta) + U(J, \theta) + W(\bar{\mathbf{b}}^e, \theta) + K(\xi, \mathbf{z}, \theta), \quad (5.58)$$

gdje  $T$  predstavlja termički potencijal,  $M$  termoelastičnu spregu,  $U$  volumetrijski potencijal,  $W$  devijatorski potencijal i  $K$  potencijal očvršćivanja. Za slučaj neovisnosti materijalnih značajki o temperaturi vrijedi:

$$\psi = T(\theta) + M(J, \theta) + U(J) + W(\bar{\mathbf{b}}^e) + K(\xi, \mathbf{z}). \quad (5.59)$$

U ovom je slučaju jedini član koji povezuje termički i mehanički problem potencijal termoelastičnog sprežanja  $M$ . Članovi izraza (5.59) definirani su u Simo i Miehe [25], dok se isti za izraz (5.58) definiraju kako slijedi.

### 5.7.1. Definiranje članova funkcije slobodne energije

Definiranje termičkog dijela  $T(\theta)$  mora uzeti u obzir definiciju specifičnog toplinskog kapaciteta pri konstantoj deformaciji  $c_0$ , izraz (5.51). Tako se dobiva:

$$T(\theta) = - \int_{\theta_0}^{\theta} d\bar{\theta} \int_{\theta_0}^{\bar{\theta}} \rho_0 c_0(\hat{\theta}) \frac{d\hat{\theta}}{\hat{\theta}}. \quad (5.60)$$

Uzevši ovo u obzir, specifični toplinski kapacitet sada treba biti definiran na sljedeći način:

$$c = -\theta \partial_{\theta\theta}^2 \psi = c_0(\theta) - \theta \partial_{\theta\theta}^2 (M + U + W + K). \quad (5.61)$$

Valja napomenuti da je prisustvo potencijala očvršćivanja  $K$  u gornjem izrazu još uvijek sporni predmet. Neki ga autori uzimaju u razmatranje, Cervera i dr. [34], a neki ne, Celentano i dr. [33]. Također se može uočiti da su u slučaju linearne ovisnosti potencijala očvršćivanja  $K$  o temperaturi obje formulacije identične. U ovome će radu biti usvojena pretpostavka da promjena temperature ne može utjecati na promjenu toplinskog kapaciteta zbog potencijala očvršćivanja. Tako se konačno piše:

$$c = -\theta \partial_{\theta\theta}^2 \psi = c_0(\theta) - \theta \partial_{\theta\theta}^2 (M + U + W). \quad (5.62)$$

Čest je slučaj da su materijalne značajke neovisne o temperaturi i da je potencijal  $M$  linearno ovisan o temperaturi, pa tada očito vrijedi:

$$c = c_0 = -\theta \partial_{\theta\theta}^2 T(\theta), \quad (5.63)$$

te izraz (5.60) dobiva jednostavniji oblik, Simo i Miehe [25]:

$$T(\theta) = \rho_0 c_0 \left[ (\theta - \theta_0) - \theta \ln \frac{\theta}{\theta_0} \right]. \quad (5.64)$$

Potencijal  $M(J, \theta)$  predstavlja termoelastičnu spregu i opisuje povezanost uslijed toplinske ekspanzije materijala, a odabire se u skladu s linearnom teorijom, Carlson [86, str. 311]:

$$M(J, \theta) = (\theta - \theta_0) [-3\alpha(\theta)\partial_J U(J, \theta)], \quad (5.65)$$

gdje su  $\alpha$  linearni koeficijent toplinske ekspanzije i  $\theta_0$  početna temperatura.

Volumetrijski se potencijal  $U(J, \theta)$  definira funkcijskom ovisnošću:

$$U(J, \theta) = \frac{1}{2}\kappa(\theta) \left[ \frac{1}{2}(J^2 - 1) - \ln J \right], \quad (5.66)$$

gdje je  $\kappa(\theta)$  funkcija koja definira modul kompresije ovisno o temperaturi. U skladu s (5.10) i (5.11) u gornjoj se jednadžbi  $J$  može zamijeniti s  $J^e$ :

$$U(J^e, \theta) = \frac{1}{2}\kappa(\theta) \left[ \frac{1}{2}((J^e)^2 - 1) - \ln J^e \right]. \quad (5.67)$$

Ovaj potencijal predstavlja osnovu za proračun hidrostatičkog dijela tenzora naprežanja.

Devijatorski dio potencijala  $W(\bar{\mathbf{b}}^e, \theta)$  predstavlja sljedeća funkcija:

$$W(\bar{\mathbf{b}}^e, \theta) = \frac{1}{2}\mu(\theta) [\text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) - 3], \quad (5.68)$$

gdje je  $\mu(\theta)$  funkcijska ovisnost Lameove konstante o temperaturi. Devijatorski potencijal predstavlja osnovu za proračun devijatorskog dijela tenzora naprežanja.

Ovako razdvajanje potencijala za proračun naprežanja na volumetrijski i devijatorski dio od posebne je važnosti za numeričku analizu plastičnosti. Naime, poznato je da zbog nestlačivosti materijala pri plastičnoj deformaciji dolazi do komplikacija pri proračunu hidrostatičkog dijela tenzora naprežanja. Razdvajanjem se potencijala omogućava tretiranje hidrostatičkog dijela posebnom tehnikom, dok se pri proračunu devijatorskog koriste uobičajeni postupci.

Potencijal  $K(\xi, \mathbf{z}, \theta)$  za izotropno i kinematičko očvršćivanje odabire se kao poopćenje istoga za slučaj infinitezimalne deformacije (Ibrahimbegović i dr. [29]) na konačne defromacije, Armero i Simo [24], Mähler i dr. [87], Simo i Hughes [26], Wriggers [1]:

$$\left. \begin{aligned} K(\xi, \mathbf{z}, \theta) &= \frac{1}{2}h(\theta)\xi^2 + [y_0(\theta) - y_\infty(\theta)]H(\xi) + \frac{1}{2}h_{kin}(\theta)\text{tr}[\mathbf{z}] \\ H(\xi) &= \begin{cases} \xi - \frac{(1 - e^{-\delta\xi})}{\delta}, & \text{za } \delta \neq 0 \\ 0 & \text{za } \delta = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

gdje je  $\delta$  eksponent zasićenja materijala,  $h_{kin}(\theta)$  koeficijent kinematičkog očvršćivanja dok se funkcije  $y_0(\theta)$ ,  $y_\infty(\theta)$ ,  $h(\theta)$  odabiru tako da opisuju linearno omekšivanje materijala:

$$\left. \begin{aligned} y_0(\theta) &= y_0(\theta_0)[1 - \omega_0(\theta - \theta_0)] \\ h(\theta) &= h(\theta_0)[1 - \omega_h(\theta - \theta_0)] \\ y_\infty(\theta) &= y_\infty(\theta_0)[1 - \omega_h(\theta - \theta_0)] \end{aligned} \right\} \quad (5.70)$$

Pritom su  $\omega_0$  i  $\omega_h$  parametri materijala, nazvani omekšivanje naprežanja tečenja, odnosno omekšivanje modula očvršćivanja.

Parametar  $\beta$  u kriteriju tečenja (5.31) definira se kao:

$$\beta = -\partial_\xi K \quad (5.71)$$

### 5.7.2. Izotropno i kinematičko očvršćivanje

Razmatranje razvoja naprežanja putem očvršćivanja zahtjeva razdvajanje Kirchhoffovog tenzora naprežanja na volumetrijski i devijatorski dio, Simo i Miehe [25]:

$$\boldsymbol{\tau} = p\mathbf{I} + \text{dev } \boldsymbol{\tau} \quad (5.72)$$

Pritom je srednje normalno naprežanje (hidrostatički tlak) definirano u skladu s odabranim potencijalima u funkciji slobodne energije i konjugiranošću s promjenom volumena ( $J$ ):

$$p = \partial_J U(J, \theta) + \partial_J M(J, \theta) \quad (5.73)$$

Zakoni evolucije elastičnog lijevog Cauchy-Greenovog tenzora deformacije  $\mathbf{b}^e$  i deformaciji srodnog tenzora koji opisuje kinematičko očvršćivanje materijala  $\mathbf{z}$  dani su izrazom (5.37). Ovi se izrazi sada mogu izvesti do oblika prikladnog za algoritamsku obradu.

Ukoliko je kriterij tečenja dan izrazom (5.31), tražene parcijalne derivacije u izrazu (5.37) glase:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi &= \partial_{\text{dev } \boldsymbol{\tau}} \phi = \frac{\text{dev } \boldsymbol{\tau} - \text{dev } \boldsymbol{\alpha}}{\|\text{dev } \boldsymbol{\tau} - \text{dev } \boldsymbol{\alpha}\|} = \mathbf{n} \\ \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \phi &= \partial_{\text{dev } \boldsymbol{\alpha}} \phi = -\frac{\text{dev } \boldsymbol{\tau} - \text{dev } \boldsymbol{\alpha}}{\|\text{dev } \boldsymbol{\tau} - \text{dev } \boldsymbol{\alpha}\|} = -\mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

Ovdje je sa  $\mathbf{n}$  označena normala na plohu tečenja  $\phi$ . Sada izrazi (5.37) uz (5.12) poprimaju oblik:

$$\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = -2\lambda J^{2/3} \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{b}}^e = -2\lambda J^{2/3} \mathbf{n} \cdot \left( \text{dev } \bar{\mathbf{b}}^e + \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) \mathbf{I} \right). \quad (5.75)$$

Daljnja analiza gornjeg izraza zahtijeva eksplicitno poznavanje veze između naprezanja i deformacije. Kako je već rečeno, osnovu za proračun devijatorskog dijela tenzora naprezanja predstavlja devijatorski dio potencijala slobodne energije. Tako se devijatorski dio Kirchhoffovog tenzora naprezanja može računati, Simo i Hughes [26]:

$$\text{dev } \boldsymbol{\tau} = 2 \text{dev} \left[ \bar{\mathbf{F}}^e \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}^e} (\bar{\mathbf{F}}^e)^t \right], \quad (5.76)$$

gdje je

$$\bar{\mathbf{C}}^e = \bar{\mathbf{F}}^e (\bar{\mathbf{F}}^e)^t = J^{-2/3} \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^t \quad (5.77)$$

iz čega se vidi da vrijedi

$$\text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) = \text{tr}(\bar{\mathbf{C}}^e). \quad (5.78)$$

Sada uz definiciju funkcije  $W$ , izraz (5.68) dobiva oblik:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}^e} = \frac{1}{2} \mu \delta_{ij} \quad (5.79)$$

što uvrštavanjem u (5.76), uz definiciju (5.12) konačno daje traženu vezu:

$$\text{dev } \boldsymbol{\tau} = \mu \text{dev } \bar{\mathbf{b}}^e. \quad (5.80)$$

Uvrštavanjem ovoga izraza u (5.75) dobiva se:

$$\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = -2\lambda J^{2/3} \mathbf{n} \cdot \left( \frac{\text{dev } \boldsymbol{\tau}}{\mu} + \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) \mathbf{I} \right) = -2\lambda J^{2/3} \left( \frac{\|\text{dev } \boldsymbol{\tau}\|}{\mu} \cdot \|\mathbf{n}\|^2 + \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) \mathbf{n} \right) \quad (5.81)$$

Kako je  $\|\mathbf{n}\| = 1$  i za metalne materijale  $\|\text{dev } \boldsymbol{\tau}\|/\mu \cong 10^{-3}$  slijedi da se ovaj član može zanemariti. Konačno se dobiva:

$$\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = -2\lambda \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) \mathbf{n}. \quad (5.82)$$

Naprezanje se računa uporabom konstitutivne relacije (5.27)<sub>1</sub>:

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \partial_{\bar{\mathbf{b}}^e} \psi \mathbf{b}^e = 2 \partial_{\bar{\mathbf{b}}^e} W(\bar{\mathbf{b}}^e, \theta) \mathbf{b}^e, \quad (5.83)$$

čime se također može dobiti gore izvedena funkcijska veza (5.80)

Analognim razmatranjima dobiva se zakonitost kinematičkog očvršćivanja uz

$$\mathcal{L}_v \mathbf{z} = 2\lambda \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{z}) \mathbf{n}. \quad (5.84)$$

Povratno se naprezanje  $\alpha$  računa iz (5.27)<sub>2</sub> kao:

$$\alpha = 2 \partial_{\mathbf{z}} \psi \mathbf{z} = 2 \partial_{\mathbf{z}} K(\xi, \mathbf{z}, \theta) \mathbf{z} = h_{kin} \mathbf{z}. \quad (5.85)$$

U ovome će se radu rabiti Prager-Zieglerovo pravilo kinematičkog očvršćivanja. Osnovna je značajka da je varijabla kinematičkog očvršćivanja proporcionalna deformaciji, Simo i Hughes [26, str. 311] i Ibrahimbegović i Chorfi [30, str. 514]. Sukladno ovome, tenzor povratnog naprezanja može se računati:

$$\alpha = h_{kin} \bar{\mathbf{b}}^e. \quad (5.86)$$

Ekvivalentna plastična deformacija  $\xi$  dobiva se iz (5.37) uz definiciju kriterija tečenja (5.31). Tako se deriviranjem izraza za kriterij tečenja dobiva:

$$\partial_{\beta} \phi = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (5.87)$$

pa sada iz (5.37) slijedi:

$$\dot{\xi} = \lambda \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (5.88)$$

### 5.7.3. Termomehanička disipacija

Radi definiranja evolucije temperature, izraz (5.54), nužno je poznavanje mehaničke disipacije  $\mathcal{D}_{mech}$ . Mehanička je disipacija definirana izrazom (5.29)<sub>1</sub>. Uporabom evolucijskih jednadžbi (5.37) mehanička se disipacija računa:

$$\mathcal{D}_{mech} = \tau \cdot \left( \lambda \partial_{\tau} \phi \cdot \mathbf{b}^e (\mathbf{b}^e)^{-1} \right) + \beta \lambda \partial_{\beta} \phi + \alpha \cdot \left( \lambda \partial_{\alpha} \phi \cdot \mathbf{z} \mathbf{z}^{-1} \right) = \lambda \left( \tau \cdot \partial_{\tau} \phi + \beta \partial_{\beta} \phi + \alpha \cdot \partial_{\alpha} \phi \right) \quad (5.89)$$

Uz (5.87) i (5.74) slijedi:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mech} &= \lambda \left( \tau \cdot \mathbf{n} + \beta \sqrt{\frac{2}{3}} - \alpha \cdot \mathbf{n} \right) = \lambda \left[ (\tau - \alpha) \cdot \frac{\text{dev } \tau - \text{dev } \alpha}{\|\text{dev } \tau - \text{dev } \alpha\|} + \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \right] = \\ &= \lambda \left[ \|\text{dev } \tau - \text{dev } \alpha\| + \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \right]. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Imajući u vidu definiciju kriterija tečenja (5.31) konačno slijedi:

$$\mathcal{D}_{mech} = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda \sigma_y(\theta). \quad (5.91)$$

Kako je to i objašnjeno u poglavlju 3.1, dio rada ostaje “zarobljen” u kristalnoj rešetki. Radi usklađivanja disipacije s ovom činjenicom, moguće je redefinirati mehaničku disipaciju kao funkciju ukupne plastične snage  $\mathcal{P}_{mech}^p$ . Tako se dobiva alternativni izraz za određivanje mehaničke disipacije, Simo-Miehe [25, str. 73]:

$$\mathcal{D}_{mech} = \chi \mathcal{P}_{mech}^p = \chi \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda (\beta - \sigma_y(\theta)), \quad (5.92)$$

gdje konstanta  $\chi \in [0,1]$  predstavlja disipacijski faktor. Kako je to opisano u Zdebel i Lehmann [16], Kamlah i Haupt [43] i Rosakis i dr. [42], u kontekstu plastičnosti metala ovaj je faktor najčešće tretiran kao konstanta koja poprima vrijednosti u rasponu 0,85-0,95. No, posljednja dva rada napominju da ovaj faktor u većoj mjeri ovisi o deformaciji i njenoj brzini. Rosakis i dr. ovo ilustriraju na primjeru aluminijskih slitina i titana.

Slijedom navedenog, u ovom će se radu rabiti izraz (5.92) dok će disipacijski faktor  $\chi$  biti tretiran kao konstanta.

#### 5.7.4. Elasto-plastično strukturno zagrijavanje

Elasto-plastično strukturno zagrijavanje  $\mathcal{H}$  definirano je izrazom (5.55). Doprinos ovoga člana evoluciji temperature pri velikim neelastičnim deformacijama u jednadžbi (5.54) relativno je mali spram drugih članova. Ovo je razlog da ga neki

autori zanemaruju, Wriggers i dr. [88]. Radi općenitosti pristupa u ovome radu on neće biti zanemaren.

Izraz (5.55) može se razviti u skladu s definicijom funkcije slobodne energije (5.58):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\theta \left( \partial_{\mathbf{b}^e}^2 \psi \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\dot{\mathbf{z}}}^2 \psi \cdot \dot{\mathbf{z}} + \partial_{\dot{\xi}}^2 \psi \dot{\xi} \right) = \\ &= -\theta \left( \partial_{\mathbf{b}^e}^2 W \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\mathbf{b}^e}^2 U \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\mathbf{b}^e}^2 M \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\dot{\mathbf{z}}}^2 K \cdot \dot{\mathbf{z}} + \partial_{\dot{\xi}}^2 K \cdot \dot{\xi} \right) = \\ &= -\theta \left( \partial_{\mathbf{b}^e}^2 W \partial_{\mathbf{b}^e} \bar{\mathbf{b}}^e \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\dot{\omega}}^2 U \partial_{\mathbf{b}^e} J \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\theta J}^2 M \partial_{\mathbf{b}^e} J \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\dot{\mathbf{z}}}^2 K \cdot \dot{\mathbf{z}} + \partial_{\dot{\xi}}^2 K \cdot \dot{\xi} \right) \end{aligned} \quad (5.93)$$

Za potencijale definirane u odjeljku 5.7.1., parcijalne derivacije u gornjem izrazu glase:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\mathbf{b}^e}^2 W &= \frac{1}{2} \partial_{\theta} \mu \mathbf{I} \\ \partial_{\dot{\omega}}^2 U &= \frac{1}{2} \partial_{\theta} \kappa \left( J - \frac{1}{J} \right) \\ \partial_{\theta J}^2 M &= -3 \left( \partial_{\theta} \alpha (\theta - \theta_0) \partial_{JJ}^2 U + \alpha (\theta - \theta_0) \partial_{JJ\theta}^3 U + \alpha \partial_{JJ}^2 U \right) \\ \partial_{\dot{\mathbf{z}}}^2 K &= \frac{1}{2} \partial_{\theta} h_{kin} \mathbf{I} \\ \partial_{\dot{\xi}}^2 K &= \xi \partial_{\theta} h + (\partial_{\theta} y_0 - \partial_{\theta} y_{\infty}) (1 - e^{-\delta \xi}) \end{aligned} \right\}, \quad (5.94)$$

gdje je:

$$\partial_{JJ\theta}^3 U = \frac{1}{2} \partial_{\theta} \kappa \left( 1 + \frac{1}{J^2} \right). \quad (5.95)$$

U slučaju kada se mehanička disipacija računa putem izraza (5.73), dio strukturnog zagrijavanja proizašao iz potencijala očvršćivanja  $K$  treba biti izbačen iz (5.93) i (5.94), Rosakis i dr. [42]. Tako se dobiva novi izraz koji se koristi u nastavku ovoga rada:

$$\mathcal{H} = -\theta \left( \partial_{\mathbf{b}^e}^2 W \partial_{\mathbf{b}^e} \bar{\mathbf{b}}^e \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\dot{\omega}}^2 U \partial_{\mathbf{b}^e} J \cdot \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_{\theta J}^2 M \partial_{\mathbf{b}^e} J \cdot \dot{\mathbf{b}}^e \right). \quad (5.96)$$

Parcijalne derivacije su definirane kao i ranije, izrazima (5.94)<sub>1,2,3</sub>.

# 6

## Numerički algoritmi za termoplastičnost

---

Ovo poglavlje ukratko prikazuje numeričke algoritme koji se koriste za rješavanje problema termoplastičnosti u kontekstu integracije parcijalnih diferencijalnih jednačbi po vremenu. Osnovni problem koji se pritom javlja jest dilema da li rješavati problem kao spregnuti ili ga pak razdvojiti u dvije sekvencijalne sheme. Pokazuje se da razdvajanje algoritma ima prilično prednosti. Nadalje, evolucijske jednačbe prikazane u 5. poglavlju potrebno je integrirati i na osnovu tako dobivenih unutarnjih varijabli izračunati sve preostale veličine. Na ovome će mjestu biti prikazani detalji takvih algoritama.

### 6.1. Spregnuti sustavi i njihova analiza

U problemima računalne mehanike kontinuuma čest je slučaj da su dva ili više mehaničkih sustava međusobno povezani tako da djelovanje jednoga djeluje na drugi i obratno. Tada se govori o spregnutim sustavima. No, sustavi ne moraju biti samo iz područja mehanike kontinuuma. Izlazak van okvira ove grane znanosti danas je predmet brojnih istraživanja. Tu se prvenstveno misli na uključivanje utjecaja kemijskih fenomena ili elektromagnetizma na mehaničke pojave i obratno. Ovakav pristup problemima obično se naziva računalna multifizika.

Definiciju spregnutih sustava koja uključuje i širi pristup brojnim problemima te njihovu numeričku diskretizaciju postavljaju Zienkiewicz i Taylor [89]: spregnuti sustavi i formulacije su one koje se primjenjuju na višestruke domene i zavisne varijable. Obično opisuju različite fizikalne pojave u kojima se niti jedna domena ne može rješavati nezavisno od drugih i niti jedan skup zavisnih varijabli ne može biti eliminiran na razini diferencijalnih jednadžbi.

Problemi se s numeričkog aspekta općenito rješavaju na dva načina: istovremenim proračunom ili razdijeljenim proračunom. Kod istovremenog se pristupa problem tretira kao jedan i sve varijable istovremeno napreduju kroz vremenski period. Pri razdijeljenom pristupu problem se dijeli u dva ili više koraka. Nastoji se da razdijeljena formulacija zadrži efikasnost istovremenog pristupa što se posebno odnosi na pravilno modeliranje interakcija i stabilnost proračuna.

Daljnju kategorizaciju spregnutih sustava moguće je provesti u dva smjera:

- (a) klasa koja uključuje probleme kod kojih se sprega očituje samo na granicama koje spajaju domene. Ova se sprega provodi kroz rubne uvjete na spomenutim granicama. Domene opisuje različite fizikalne situacije i mogu biti diskretizirane različitim postupcima.
- (b) klasa koja sadržava probleme kod kojih nije moguće razdvojiti domene koje opisuju različite fizikalne probleme. Stoga se različite domene preklapaju te se sprega očituje na razini diferencijalnih jednadžbi.

Primjer prve klase problema svakako je interakcija fluida i strukture, ali to može biti i interakcija dviju struktura za čije se diskretizacije rabe različite metode. U drugu klasu pripadaju problemi kao interakcija tla i fluida, te termoplastičnost.

Linearna termoelastičnost također je spregnute prirode, no ona se ne može klasificirati niti u jednu od gore navedenih skupina. Polje naprezanja ovisi o polju temperature, no obrat ne vrijedi. Stoga se ovaj problem razdvaja u dva neovisna: termički koji prethodi mehaničkom i rješava se zasebno; zatim se dobiveno polje temperatura uključuje u mehanički dio pri proračunu pomaka.

Za probleme prve klase razlozi podjelama u više domena leže u više razloga. Primjerice, dijelu strukture može biti prikladnija Lagrangeova a drugom Eulerova formulacija, pa se domena prirodno razdvaja u više poddomena. Razlozi također leže i u primjeni različitih numeričkih metoda; u dijelu domene koristi se metoda konačnih elemenata, dok u drugom primjerice metoda rubnih elemenata. U

numeričkim proračunima od prednosti može biti i podjela s intencijom korištenja implicitnih i eksplicitnih shema za vremensku integraciju.

U drugoj klasi, gdje nije moguće razdvojiti domene, razlozi razdvajanja problema leže također u mogućnosti primjene potpuno različitih numeričkih metodologija, primjeni već postojećih računalnih programa razvijenih za zasebne probleme, ili primjeni paralelnog računanja. U sustavima iste fizikalne pozadine mogu se također koristiti vrlo efikasni iteracijski rješavači sustava linearnih jednadžbi.

Razdvajanje problema u više sekvencijalnih koraka nije trivijalno. Potrebna je posebna pozornost zbog izbjegavanja problema sa stabilnošću i točnošću rješenja. U nekim problemima (sprega topline i elektromagnetizma) razdvajanje problema često ne donosi nikakve računalne prednosti nad istovremenim proračunom. Razdvajanje se ne može provesti ni u bifurkacijskim problemima kod kojih je poznavanje matrice krutosti od primarne važnosti.

Neki su spregnuti problemi i dalje van dosega računalnih problema. Primjerice, simulacija visokotemperaturnih turbina uključuje četiri vrste polja: strukturu, tok fluida, snagu (sagorijevanje, turbulencija i transport) i provođenje topline. Postojeći modeli i računalni kapaciteti nisu dostatni za provođenje ovakvih analiza, Felippa i dr. [90].

Promatrano s aspekta vremenske integracije, stabilnost razdvojenog algoritma u idealnom slučaju treba biti istovjetna nerazdvojenom pristupu. Pritom treba imati na umu dvije činjenice: ako je svaki razdvojeni algoritam bezuvjetno stabilan, tada je i cjelokupni algoritam bezuvjetno stabilan; maksimalno dopušteni korak za zadržavanje stabilnosti jedne od razdvojenih shema ujedno je i maksimalno dopušteni korak za cjelokupni sustav. Ovakvi zahtjevi često se teško ili uopće ne mogu ostvariti bez specijalnih tehnika. Stoga je teško postavljati opće zaključke i pravila pa se svaki spregnuti problem razmatra zasebno.

U problemima termomehanike koji spadaju u područje ovoga rada razmatranje stabilnosti započeto je u radu Simo [22]. Nastavljeno je kroz rad Armero i Simo [23] gdje se pokazuje da je već u nelinearnim termoelastičnim problemima klasična podjela na mehanički i termički dio (tzv. izotermalna podjela) samo uvjetno stabilna. Dokazuje se da je moguće ostvariti bezuvjetnu stabilnost uporabom tzv. izentropske podjele. Osnovu takve podjele je zadržavanje entropije konstantnom u jednom koraku, dok se u drugom koraku dopušta promjena entropije. U Armero i Simo [24]



ova se razmatranja proširuju na termoplastične probleme. Alternativno stabiliziranje u okviru nelinearne termoelastičnosti daju Farhat i dr. [46] putem tzv. metode proširivanja.

Problem stabilnosti rješenja pri izotermalnoj podjeli nije značajan u termoplastičnosti metala, Simo i Miehe [25]. Stoga će se u ovom radu koristiti upravo ovaj pristup.

U termoplastičnosti je osnovna prednost razdvojenog sustava jednadžbi u odnosu na cjelokupni u dobivanju dvaju simetričnih problema spram cjelokupnog nesimetričnog sistema. Od daljnje je prednosti mogućnost uporabe različitih shema vremenske integracije za mehaničku odnosno termičku fazu.

## 6.2. Izotermička podjela termoplastičnog sustava

Kako je to objašnjeno u poglavlju 6.1. spregnuti se sustav raspada u dva koraka: mehanički i termički. Proračun je temeljen na inkrementalno-iteracijskom pristupu. Vremenski interval koji je uzet u razmatranje  $[0, T]$  dijeli se u konačan broj jednakih koraka, tzv. inkremenata. Unutar svakog koraka prvo se iteracijskim pristupom rješava nelinearna mehanička faza, a nakon konvergencije rezultata i termička.

### 6.2.1. Mehanički algoritam

Mehanički dio sustava definira se sljedećim diferencijalnim jednadžbama:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \mathbf{v} \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} &= \frac{1}{\rho_0} \text{DIV} [\boldsymbol{\tau}(\varphi, \theta, \lambda) \mathbf{F}^{-t}] + \frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{f}} \\ c \dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (6.1)$$

gdje su sa  $\bar{\mathbf{f}}$  označene volumenske sile. Vidljivo je da je izraz u zagradi ustvari prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja (4.48). Obzirom da predmet ovoga rada nisu dinamički problemi, ubrzanje se izjednačavanjem s nulom može izbaciti iz izraza (6.1) i tako dobiti sljedeće jednadžbe:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \mathbf{v} \\ 0 &= \text{DIV} [\boldsymbol{\tau}(\varphi, \theta, \lambda) \mathbf{F}^{-t}] + \bar{\mathbf{f}} \\ c \dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.2)$$

Uvedu li se sada indeksi "n" i "n+1" za vrijednosti veličina u nekoj točki tijela na početku i kraju vremenskog intervala  $\Omega \times [t_n, t_{n+1}]$  može se pristupiti uporabi Eulerove natražne diferencijske sheme, Strang [91] i Shampine [92]. Tako se dobiva:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{\varphi}_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t} &= \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} \\ 0 &= \text{DIV} [(\text{dev } \boldsymbol{\tau}_{n+1} + p_{n+1} J_{n+1} \mathbf{I}) \mathbf{F}_{n+1}^{-t}] + \bar{\mathbf{f}}_{n+1} \\ \frac{\tilde{\theta}_{n+1} - \theta_n}{\Delta t} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.3)$$

Početne vrijednosti za integraciju po vremenu konvergirane su vrijednosti iz prethodnog koraka  $\{\mathbf{b}_n^e, \xi_n, \mathbf{z}_n, \theta_n\}$ .

Uz ove se diferencijalne jednadžbe propisuju i rubni uvjeti na granici  $\Gamma = \partial\Omega$  za konfiguraciju:

$$\bar{\varphi} : \Gamma_\varphi \times [t_n, t_{n+1}] \quad (6.4)$$

i za površinske sile:

$$\bar{\mathbf{t}} : \Gamma_t \times [t_n, t_{n+1}]. \quad (6.5)$$

Pritom vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_\varphi \cap \Gamma_t &= \{0\} \\ \Gamma_\varphi \cup \Gamma_t &= \partial\Omega \end{aligned} \right\}. \quad (6.6)$$

Može se primijetiti da je u izrazu (6.3) Kirchhoffov tenzor naprezanja rastavljen na devijatorski i sferni dio, Simo i Hughes [26, str. 308]. Ovo je učinjeno zbog specifičnog numeričkog tretmana hidrostatičkog dijela tenzora naprezanja. Iz izraza (6.3)<sub>3</sub> također je vidljivo da se u ovome koraku temperatura ne mijenja, tj.  $\tilde{\theta}_{n+1} = \theta_n$ .

Ovim se korakom dobiva međurješenje za unutarnje varijable:

$$\{\mathbf{b}_n^e, \xi_n, \mathbf{z}_n, \theta_n\} \rightarrow \{\tilde{\mathbf{b}}_{n+1}^e, \tilde{\xi}_{n+1}, \tilde{\mathbf{z}}_{n+1}, \tilde{\theta}_{n+1}\} \quad \text{u } \Omega, \quad (6.7)$$

uz inkrementalnu međuvrijednost plastičnog parametra konzistencije  $\Delta\tilde{\lambda}_{n+1}$ . Ove vrijednosti predstavljaju početne vrijednosti varijabli za drugu, termičku fazu.

Naprezanja se u ovome koraku računaju primjenom metode radijalnog povratka koja će detaljnije biti opisana kasnije u ovom poglavlju.

### 6.2.2. Termički algoritam

Temeljem prethodnih razmatranja, termička se faza definira sljedećim diferencijalnim jednadžbama:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= 0 \\ \dot{\mathbf{v}} &= 0 \\ c\dot{\theta} &= -\text{DIV}[\mathbf{F}^{-t}\mathbf{q}(\varphi, \theta)] + \mathcal{D}_{mech}(\theta, \lambda) - \mathcal{H}(\varphi, \mathbf{v}, \theta) + \bar{\mathcal{R}} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Ako se istovjetnim postupkom kao u mehaničkoj fazi primjeni Eulerova natražna shema na izraz (6.8) dobiva se:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n+1} - \tilde{\varphi}_{n+1} &= 0 \\ \mathbf{v}_{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} &= 0 \\ c_{n+1} \frac{\theta_{n+1} - \tilde{\theta}_{n+1}}{\Delta t} &= -\text{DIV}[\mathbf{F}_{n+1}^{-t}\mathbf{q}_{n+1}] + (\mathcal{D}_{mech})_{n+1} - \mathcal{H}_{n+1} + \bar{\mathcal{R}}_{n+1} + (q_c)_{n+1} + (q_r)_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Početne vrijednosti za ovaj algoritam konvergirana su međurješenja nakon mehaničke faze  $\{\tilde{\mathbf{b}}_{n+1}^e, \tilde{\xi}_{n+1}, \tilde{\mathbf{z}}_{n+1}, \tilde{\theta}_{n+1}\}$ . Vrijednosti  $(q_c)_{n+1}$  i  $(q_r)_{n+1}$  predstavljaju konvekcijski i radijacijski dotok topline. Potrebno ih je uključiti samo za analizu granice tijela, dok su za točke koje se nalaze unutar tijela ove veličine jednake nuli. U ovome se radu iste vrijednosti računaju po sljedećim izrazima, Bathe [93, str. 644]:

$$\left. \begin{aligned} (q_c)_{n+1} &= h_{n+1}(\theta_e - \theta_{n+1}) \\ (q_r)_{n+1} &= (\kappa_r)_{n+1}(\theta_r - \theta_{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

gdje su  $h_{n+1}$  koeficijent konvekcije,  $\theta_e$  okolišna temperatura,  $\theta_r$  poznata temperatura vanjskog radijacijskog izvora topline dok se koeficijent  $(\kappa_r)_{n+1}$  računa prema izrazu:

$$(\kappa_r)_{n+1} = (h_r)_{n+1} [(\theta_r)^2 + (\theta_{n+1})^2] (\theta_r + \theta_{n+1}). \quad (6.11)$$

Vrijednost  $(h_r)_{n+1}$  određuje se iz Stefan-Boltzmannove konstante, značajki zračenja tijela uključenih u razmjenu topline zračenjem, te geometrijskih faktora.

Daljnji rubni uvjeti koji moraju biti poštivani jesu propisane temperature na dijelu granice:

$$\bar{\theta} : \Gamma_\theta \times [t_n, t_{n+1}] \quad (6.12)$$

i vanjski normalni toplinski fluks:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\bar{q} : \Gamma_q \times [t_n, t_{n+1}]. \quad (6.13)$$

Ova vrijednost uključuje sav površinski unos topline koji nije konvekcijskog ili radijacijskog podrijetla. Pritom vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_\theta \cap \Gamma_q &= \{0\} \\ \Gamma_\theta \cup \Gamma_q &= \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Nakon provedenog iteracijskog postupka do potrebne točnosti dobivaju se konačna rješenja u trenutku  $t_{n+1}$ :

$$\{\tilde{\mathbf{b}}_{n+1}^e, \tilde{\xi}_{n+1}, \tilde{\mathbf{z}}_{n+1}, \tilde{\theta}_{n+1}\} \rightarrow \{\mathbf{b}_{n+1}^e, \xi_{n+1}, \mathbf{z}_{n+1}, \theta_{n+1}\} \quad \text{u } \Omega. \quad (6.15)$$

Mehanički dio disipacije u izrazu (6.9) računa se iz izraza (5.92):

$$(\mathcal{D}_{mech})_{n+1} = \chi \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta t} (\beta_{n+1} - \sigma_y(\theta_{n+1})). \quad (6.16)$$

Elasto-plastično strukturno zagrijavanje računa se iz (5.93), (5.94) i (5.95). Tako se dobiva:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{\theta_{n+1}}{\Delta t} [\Delta(\partial_\theta W) + \Delta(\partial_\theta U) + \Delta(\partial_\theta M)] = \\ &= -\frac{\theta_{n+1}}{\Delta t} [\partial_\theta W(\tilde{\mathbf{b}}_{n+1}^e, \theta_{n+1}) - \partial_\theta W(\tilde{\mathbf{b}}_n^e, \theta_n) + \partial_\theta U(J_{n+1}, \theta_{n+1}) - \partial_\theta U(J_n, \theta_n) + \\ &\quad + \partial_\theta M(J_{n+1}, \theta_{n+1}) - \partial_\theta M(J_n, \theta_n)] \end{aligned} \quad (6.17)$$

Pritom su derivacije u gornjem izrazu:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\theta} W &= \frac{1}{2} \partial_{\theta} \mu [\text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) - 3] \\ \partial_{\theta} U &= \frac{1}{2} \partial_{\theta} \kappa \left( \frac{1}{2} (J^e)^2 - 1 \right) - \ln J^e \\ \partial_{\theta} M &= -3(\partial_{\theta} \alpha (\theta - \theta_0) \partial_J U + \alpha (\theta - \theta_0) \partial_{J^2}^2 U + \alpha \partial_J U) \end{aligned} \right\}, \quad (6.18)$$

gdje je:

$$\partial_{\omega}^2 U = \frac{1}{2} \partial_{\theta} \kappa \left( J - \frac{1}{J} \right). \quad (6.19)$$

Derivacije materijalnih parametara  $\partial_{\theta} \mu$ ,  $\partial_{\theta} \kappa$ ,  $\partial_{\theta} \alpha$  računaju se ovisno o odabranoj funkcijskoj ovisnosti parametra o temperaturi.

Zbog promjene temperature u termičkoj fazi dolazi do promjene naprezanja tečenja a time i stanja deformacije i naprezanja u nekoj točki tijela. Ova promjena uvjetuje i promjene mehaničkog dijela disipacije i strukturnog zagrijavanja. Stoga i u ovome koraku treba provesti proračun naprezanja putem metode radijalnog povratka. Pritom se dobiva i konačna vrijednost plastičnog parametra konzistencije  $\Delta \lambda_{n+1}$ .

Može se primijetiti da je u općem slučaju  $\Delta \lambda_{n+1} \neq \Delta \tilde{\lambda}_{n+1}$ .

### 6.3. Metoda radijalnog povratka

Metoda radijalnog povratka klasična je metoda za izračun naprezanja u teoriji plastičnosti. Njezine postavke postavljene u infinitezimalnom okviru mogu se proširiti i na problem konačnih deformacija (Simo i Hughes [26]) i problem termoplastičnosti (Simo i Miehe [25]). Na ovome mjestu ona će biti prilagođena specifičnostima ovoga problema.

Aplikacija Eulerove natražne sheme na evolucijske jednadžbe (5.82), (5.84), (5.88) i (5.37)<sub>4</sub>, uz (5.15) daje:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} \left[ (\mathbf{C}^p)^{-1} - (\mathbf{C}_n^p)^{-1} \right] \bar{\mathbf{F}}^t &= -\frac{2}{3} \Delta \lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^e] \mathbf{1} \\ \bar{\mathbf{F}} [\boldsymbol{\Xi} - \boldsymbol{\Xi}_n] \bar{\mathbf{F}} &= \frac{2}{3} \Delta \lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^e] \mathbf{1} \\ \xi - \xi_n &= \Delta \lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \eta^p - \eta_n^p &= -\Delta \lambda \partial_{\theta} \phi \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Pokušajne vrijednosti definiraju se, uz (5.80) i (5.16), na sljedeći način:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{b}}^{e,trial} &= \bar{\mathbf{F}} (\mathbf{C}_n^p)^{-1} \bar{\mathbf{F}}^t \\ \bar{\mathbf{z}}^{trial} &= \bar{\mathbf{F}} \boldsymbol{\Xi}_n \bar{\mathbf{F}}^t \\ \text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] &= \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \\ \text{dev}[\boldsymbol{\alpha}^{trial}] &= h_{kin} \text{dev}[\bar{\mathbf{z}}^{trial}] \\ \phi^{trial} &= \left\| \text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] - \text{dev}[\boldsymbol{\alpha}^{trial}] \right\| + \sqrt{\frac{2}{3}} [\beta(\xi_n) - \sigma_y(\theta)] \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

Ukoliko je  $\phi^{trial} < 0$  tada je stanje naprezanja u promatranoj točki elastično i treba usvojiti pokušajne vrijednosti kao rješenje ovoga koraka. U suprotnom, tj.  $\phi^{trial} > 0$ , stanje naprezanja je plastično i treba pokušajne vrijednosti dovesti na plohu tečenja, tj. mora biti  $\phi^{trial} = 0$ . U tom je slučaju  $\Delta \lambda > 0$ . Postupak se provodi kako slijedi.

Primjenom operatora traga matrice na (6.20)<sub>1</sub> i (6.21)<sub>1</sub> i usporedbom dobivenih izraza slijedi

$$\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^e] = \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}]. \quad (6.22)$$

Nakon primjene devijatorskog operatora na (6.20)<sub>1</sub> i uz (6.21)<sub>1</sub>, (6.21)<sub>3</sub>, (6.22) dobiva se:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{C}^p)^{-1} \bar{\mathbf{F}}' - \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{C}_n^p)^{-1} \bar{\mathbf{F}}' &= -\frac{2}{3} \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \\ \bar{\mathbf{b}}^e - \bar{\mathbf{b}}^{e,trial} &= -\frac{2}{3} \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \\ \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^{trial}] &= -\frac{2}{3} \mu \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \\ \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}] &= \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] - \frac{2}{3} \mu \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

Nova vrijednost tenzora povratnog naprezanja dobiva se analogno gornjem razmatranju:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} \Xi \bar{\mathbf{F}}' - \bar{\mathbf{F}} \Xi_n \bar{\mathbf{F}}' &= \frac{2}{3} \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \\ \bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{z}}^{trial} &= \frac{2}{3} \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \\ \operatorname{dev}[\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^{trial}] &= \frac{2}{3} h_{kin} \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \\ \operatorname{dev}[\boldsymbol{\alpha}] &= \operatorname{dev}[\boldsymbol{\alpha}^{trial}] + \frac{2}{3} h_{kin} \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

Uz (6.23) i (6.24) lako se može pokazati da vrijedi:

$$\mathbf{n} = \frac{\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau} - \operatorname{dev} \boldsymbol{\alpha}}{\|\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau} - \operatorname{dev} \boldsymbol{\alpha}\|} = \frac{\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \operatorname{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}}{\|\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \operatorname{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\|} \quad (6.25)$$

Uvrštavanjem (6.25) u razliku (6.23)<sub>4</sub> i (6.24)<sub>4</sub> daje jednadžbu:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}] - \operatorname{dev}[\boldsymbol{\alpha}] &= \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] - \operatorname{dev}[\boldsymbol{\alpha}^{trial}] - \frac{2}{3} (\mu + h_{kin}) \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}] - \operatorname{dev}[\boldsymbol{\alpha}]\| &= \mathbf{n} \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] - \operatorname{dev}[\boldsymbol{\alpha}^{trial}]\| - \frac{2}{3} (\mu + h_{kin}) \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \\ \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}] - \operatorname{dev}[\boldsymbol{\alpha}]\| &= \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] - \operatorname{dev}[\boldsymbol{\alpha}^{trial}]\| - \frac{2}{3} (\mu + h_{kin}) \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

Sada se kriterij tečenja (5.31) uz (6.20)<sub>2</sub> transformira:

$$\|\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau} - \operatorname{dev} \boldsymbol{\alpha}\| = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \beta \left( \xi_n + \Delta\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - \sigma_y(\theta) \right] \quad (6.27)$$

Kombinacija (6.27) i (6.26)<sub>3</sub> daje:

$$\begin{aligned} f(\Delta\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \beta \left( \xi_n + \Delta\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - \sigma_y(\theta) \right] + \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] - \operatorname{dev}[\boldsymbol{\alpha}^{trial}]\| - \\ & - \frac{2}{3} (\mu + h_{kin}) \Delta\lambda \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] = 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

Ova jednadžba ima jedinu nepoznanicu  $\Delta\lambda$ . Za slučaj linearnog izotropnog očvršćivanja jednadžba je linearna i rješenje se može dobiti direktno. Za nelinearno izotropsko očvršćivanje  $\beta = -\partial_\xi K$  uz postojanje i kinematičkog očvršćivanja rješenje je moguće dobiti primjenom Newtonove metode, Simo i Taylor [21]. Iteracijski se proces odvija kako slijedi:

$$\Delta\lambda^{(i+1)} = \Delta\lambda^{(i)} - \delta^{(i)} \frac{f[\Delta\lambda^{(i)}]}{f'[\Delta\lambda^{(i)}]}, \quad (6.29)$$

gdje je

$$f'[\Delta\lambda^{(i)}] = -\frac{2}{3} (\mu + h_{kin}) \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] + \frac{2}{3} \partial_\xi \beta \left( \xi_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda^{(i)} \right). \quad (6.30)$$

Za konveksnu funkciju  $\beta$  i odabir  $\delta^{(k)} = 1$  metoda ima kvadratnu konvergenciju.

Nakon određivanja  $\Delta\lambda$  mogu se izračunati nove vrijednosti naprezanja. Zatim se pomoću (6.22) i (6.23) računa i popravljena vrijednost elastičnog lijevog Cauchyeva tenzora deformacije:

$$\bar{\mathbf{b}}^e = \frac{\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}]}{\mu} + \frac{1}{3} \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{I}. \quad (6.31)$$

# 7

## Varijacijska formulacija i metoda konačnih elemenata

---

U sklopu ovoga poglavlja bit će izvedena varijacijska formulacija temeljena na razmatranjima u prethodnim poglavljima. Na dobivenu formulaciju primijenit će se metoda konačnih elemenata. Pritom će se koristiti mješovita metoda konačnih elemenata što proizlazi iz poteškoća koje ima metoda konačnih elemenata temeljena samo na pomacima. Naime, kao što je poznato, takva metoda dovodi do pojave zaključavanja uslijed nestlačivosti plastične deformacije.

Od daljnjeg je značaja točna linearizacija tangencijalnih operatora krutosti čime se ostvaruje kvadratična konvergencija klasične Newton-Raphsonove metode.

### 7.1. Mješovita varijacijska formulacija

Kao što je već spomenuto, odabir pomaka kao isključive varijable u metodi konačnih elemenata vodi slaboj efikasnosti u problemima plastičnosti. Isti problem javlja se i u analizama drugih nestlačivih problema, primjerice u elastičnosti pri velikim deformacijama, Brezzi i Fortin [94]. Sussman i Bathe u radu [28] daju detaljni pregled nedostataka takvog pristupa za nestlačive probleme u teorijama elastičnosti i plastičnosti. Radi izbjegavanja ovakvih problema u ovome se radu slijedi pristup predložen u Simo i dr. [20] u kontekstu multiplikativne plastičnosti i

nadograđen za termomehaničke probleme u Simo i Miehe [25]. Ovi radovi uvode dodatne varijable s ciljem savladavanja problema nestlačivosti.

### 7.1.1. Nejaka formulacija izotermalnog koraka

U skladu s gore navedenim uvodi se dodatno polje pritiska  $\bar{p}$ . Ovo je polje konjugirano volumenskoj deformaciji pa je u prvome redu ovisno o promjeni volumena. No, u skladu s definicijom slobodne energije u 5. poglavlju i pritiska (5.73) dodatno ovisi i o temperaturi. Radi potpunosti formulacije tako je nužno uvesti još dvije dodatne varijable - mješovitu aproksimaciju determinante gradijenta deformacije  $\bar{J}$  i mješovitu aproksimaciju temperature  $\bar{\theta}$ .

Kako se sada hidrostatički dio tenzora naprezanja računa iz polja pritiska  $\bar{p}$  potrebno je razdvojiti naprezanje na devijatorski i hidrostatički dio. Tako lokalni oblik jednadžbe ravnoteže (4.46) izgleda:

$$\text{DIV}(\text{dev}\mathbf{P} + \bar{p}\mathbf{I}\mathbf{F}^{-t}) + \mathbf{B} = 0. \quad (7.1)$$

Za volumen  $\Omega$  u trenutku  $t_{n+1}$  uz  $\mathbf{B}(X, t) = \bar{\mathbf{f}}_{n+1}(x, t)$  i (6.3), dobiva se linearizirani oblik funkcionala:

$$G_M(\varphi_{n+1}, \bar{p}_{n+1}) = \int_{\Omega} \text{DIV}(\text{dev}\mathbf{P}_{n+1} + \bar{p}_{n+1}\mathbf{I}\mathbf{F}_{n+1}^{-t}) d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}_{n+1} d\Omega = 0. \quad (7.2)$$

Varijacijom gornjeg funkcionala u dopustivom smjeru  $\mathbf{u}^*$  i uporabom teorema o lokalnom ekstremu funkcionala, te (4.48) dobiva se:

$$\delta G_M(\mathbf{u}^*; \varphi_{n+1}, \bar{p}_{n+1}) = \int_{\Omega} \text{DIV}(\text{dev}\mathbf{P}_{n+1} + \bar{p}_{n+1}\mathbf{I}\mathbf{F}_{n+1}^{-t}) \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}_{n+1} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = 0. \quad (7.3)$$

Primjena veze između prvog Piola-Kirchhoffog i Kirchhoffovog tenzora naprezanja (4.48) i teorema o divergenciji, Marsden i Hughes [9, str. 119]:

$$\int_{\Omega} \text{DIV} \mathbf{W} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{N} dA \quad (7.4)$$

daje sljedeću relaciju:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1} \cdot \text{DIV}(\text{dev}\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \bar{p}_{n+1}\mathbf{I})\mathbf{F}_{n+1}^{-t} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \text{dev}\boldsymbol{\tau}_{n+1} d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \bar{p}_{n+1}\mathbf{I}\mathbf{F}_{n+1}^{-t} \cdot \text{GRAD} \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}_{n+1} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Uz definiciju površinskih sila, Marsden i Hughes [9, str. 249]:

$$\mathbf{P}_{n+1} \cdot \mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{t}_{n+1} \quad (7.6)$$

što znači:

$$\mathbf{N}_{n+1} \cdot \text{DIV}(\text{dev}\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \bar{p}_{n+1}\mathbf{I})\mathbf{F}_{n+1}^{-t} = \bar{\mathbf{t}}_{n+1}, \quad (7.7)$$

pa izraz (7.5) sada izgleda:

$$\int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \text{dev}\boldsymbol{\tau}_{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{p}_{n+1}\mathbf{I}\mathbf{F}_{n+1}^{-t} \cdot \text{GRAD} \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}_{n+1} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = 0. \quad (7.8)$$

Uz Piola-in identitet (4.37) konačno se dobiva:

$$\int_{\Omega} [\nabla \mathbf{u}^* \cdot \text{dev}\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \text{div} \mathbf{u}^* \bar{p}_{n+1} J_{n+1}] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}_{n+1} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = 0, \quad (7.9)$$

što je uobičajena nejaka formulacija jednadžbi ravnoteže. Pritom je sa  $\Gamma$  označen rub volumena  $\Omega$ , dok je:

$$\nabla \mathbf{u}^* = \text{GRAD} \mathbf{u}^* \mathbf{F}_{n+1}^{-t} = \text{grad} \mathbf{u}^*. \quad (7.10)$$

Kako je spomenuto na početku ovoga poglavlja uvode se dodatne mješovite varijable kao aproksimacije istima izračunatim iz osnovnih pomaka odnosno temperatura. Tako se temeljem (4.15) i (5.73) moraju uvesti i ove dodatne varijacijske jednadžbe:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{p}^* \cdot (\det \mathbf{F}_{n+1} - \bar{J}_{n+1}) d\Omega = 0 \\ & \int_{\Omega} \bar{J}^* \cdot [-\bar{p}_{n+1} + \partial_{\bar{J}} U(\bar{J}_{n+1}, \bar{\theta}_{n+1}) + \partial_{\bar{J}} M(\bar{J}_{n+1}, \bar{\theta}_{n+1})] d\Omega = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (7.11)$$

### 7.1.2. Nejaka formulacija toplinskog koraka

Konfiguracija je izračunata u prethodnome koraku i u ovome se koraku ne mijenja. Temperatura je osnovna varijabla toplinskog koraka i njezin je razvoj definiran lineariziranim zakonom održanja unutarnje energije (6.9)<sub>3</sub>. Tako za cijeli volumen  $\Omega$  slijedi linearizirani funkcional:

$$G_T(\theta_{n+1}) = \int_{\Omega} \left\{ c \frac{\theta_{n+1} - \tilde{\theta}_{n+1}}{\Delta t} + \text{DIV} [\mathbf{F}_{n+1}^{-t} \mathbf{q}_{n+1}] - (\mathcal{D}_{mech})_{n+1} + \bar{\mathcal{H}}_{n+1} \right\} d\Omega - \left. \begin{array}{l} - \int_{\Omega} \bar{\mathcal{R}}_{n+1} d\Omega - \int_{\partial\Omega} [(q_c)_{n+1} + (q_r)_{n+1}] d\Gamma = 0 \end{array} \right\} \quad (7.12)$$

Varijacijom gornjeg funkcionala u dopustivom smjeru  $\mathcal{G}^*$  i primjenom uvjeta ekstrema funkcionala dobiva se:

$$\delta G_T(\mathcal{G}^*; \theta_{n+1}) = \int_{\Omega} \left\{ c \frac{\theta_{n+1} - \tilde{\theta}_{n+1}}{\Delta t} + \text{DIV} [\mathbf{F}_{n+1}^{-t} \mathbf{q}_{n+1}] - (\mathcal{D}_{mech})_{n+1} + \bar{\mathcal{H}}_{n+1} \right\} d\Omega - \left. \begin{array}{l} - \int_{\Omega} \mathcal{G}^* \bar{\mathcal{R}}_{n+1} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}^* [(q_c)_{n+1} + (q_r)_{n+1}] d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}^* [-\bar{q}_{n+1}] d\Gamma = 0 \end{array} \right\} \quad (7.13)$$

Uz teorem o divergenciji (7.4) slijedi:

$$\int_{\Omega} \mathcal{G}^* (\text{DIV} [\mathbf{F}_{n+1}^{-t} \mathbf{q}_{n+1}]) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathcal{G}^* (\mathbf{F}_{n+1}^{-t} \mathbf{q}_{n+1}) \cdot \mathbf{N}_{n+1} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{q}_{n+1} \cdot \nabla \mathcal{G}^* d\Omega. \quad (7.14)$$

Uvođenje Fourierovog zakona (4.54) daje:

$$\int_{\Omega} \mathcal{G}^* (\text{DIV} [\mathbf{F}_{n+1}^{-t} \mathbf{q}_{n+1}]) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathcal{G}^* (\mathbf{F}_{n+1}^{-t} \mathbf{q}_{n+1}) \cdot \mathbf{N}_{n+1} d\Gamma - \int_{\Omega} k_{n+1} \nabla \theta_{n+1} \cdot \nabla \mathcal{G}^* d\Omega. \quad (7.15)$$

Konačno, uporabom pull-back operatora (4.33), uz definiciju vanjskog toplinskog fluksa (6.13) i (7.15) slijedi konačni oblik nejake formulacije (7.13):

$$\delta G_T(\mathcal{G}^*; \theta_{n+1}) = \int_{\Omega} \left\{ \mathcal{G}^* \left[ c \frac{\theta_{n+1} - \tilde{\theta}_{n+1}}{\Delta t} - (\mathcal{D}_{mech})_{n+1} + \bar{\mathcal{H}}_{n+1} \right] + [k_{n+1} \nabla \theta_{n+1} \cdot \nabla \mathcal{G}^*] \right\} d\Omega - \left. \begin{array}{l} - \int_{\Omega} \mathcal{G}^* \bar{\mathcal{R}}_{n+1} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}^* [(q_c)_{n+1} + (q_r)_{n+1}] d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}^* [-\bar{q}_{n+1}] d\Gamma = 0 \end{array} \right\} \quad (7.16)$$

Postojanje mješovitih varijabli uvjetuje sljedeće jednadžbe:

$$\left. \begin{array}{l} \int_{\Omega} \bar{\eta}^* \cdot (-\theta_{n+1} + \tilde{\theta}_{n+1}) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \bar{\theta}^* \cdot [-(\bar{\eta}_c)_{n+1} - \partial_{\bar{\theta}} M(\bar{J}^h, \bar{\theta}^h) - \partial_{\bar{\theta}} W(\bar{\mathbf{b}}^{\epsilon^h}, \bar{\theta}^h) - \partial_{\bar{\theta}} U(\bar{J}^h, \bar{\theta}^h)] d\Omega = 0 \end{array} \right\} \quad (7.17)$$

gdje  $(\bar{\eta}_c)_{n+1}$  predstavlja mješovitu aproksimaciju elastične entropije.

Pritom se strukturno zagrijavanje  $\bar{\mathcal{H}}_{n+1}$  računa uporabom mješovitih varijabli pomoću (6.17)-(6.19) i (5.57).

$$\bar{\mathcal{H}}_{n+1} = \frac{\theta_{n+1}}{\Delta t} [(\bar{\eta}_c)_{n+1} - (\bar{\eta}_c)_n]. \quad (7.18)$$

## 7.2. Diskretizacija konačnim elementima

Jednadžbe (7.9) i (7.11), te (7.16) i (7.17) osnova su za diskretizaciju konačnim elementima. Diskretizacija se u ovome radu provodi uporabom standardnih izoparametrijskih konačnih elemenata, Zienkiewicz i Taylor [89, 95], Hughes [96] ili Bathe [93]. Na taj se način konfiguracija  $\varphi^h$  i polje temperatura  $\theta^h$  u nekoj točki interpoliraju putem interpolacijskih funkcija:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi^h = \sum_{a=1}^{n_{\text{čvorova}}} \mathbf{d}^a(t) N_a(\mathbf{X}) \\ \theta^h = \sum_{a=1}^{n_{\text{čvorova}}} \theta^a(t) N_a(\mathbf{X}) \end{array} \right\} \quad (7.19)$$

gdje su  $\mathbf{d}^a$  i  $\theta^a$  čvrne vrijednosti pomaka odnosno temperature i  $n_{\text{čvorova}}$  broj čvorova po konačnom elementu.

Mješovite se varijable aproksimiraju pomoću interpolacijskih funkcija

$$\Psi(X) = [\Psi_1(X), \Psi_2(X), \dots, \Psi_m(X)]. \quad (7.20)$$

Dva su najčešća odabira za ove interpolacijske funkcije. Prvi podrazumijeva Q1/P0 interpolaciju, dakle primarne se varijable interpoliraju linearno, dok su mješovite varijable konstante u polju elementa,

$$\Psi(X) = \{1\}. \quad (7.21)$$

Drugi odabir jest Q2/P1 konačni element, dakle s paraboličkom interpolacijom primarnih i linearnom mješovitih varijabli:

$$\Psi(X) = \{1 \quad \xi \quad \eta\}^t. \quad (7.22)$$

Iako posljednji konačni element daje najtočnije rezultate, često se koristi Q1/P0 element zbog svoje jednostavnosti.

Mješovite su varijable u ovome pristupu diskontinuirane na razini mreže konačnih elemenata. Dakle, mješovite varijable svojstvene su samo jednome konačnom elementu te se može provesti kondenzacija mješovitih varijabli na razini konačnog elementa. Na taj se način veličina globalnih vektora i matrica ne povećava zbog uvođenja dodatnih varijabli. Vrijednosti mješovitih varijabli u nekoj točki (najčešće točki integracije) računaju se iz lokalnih parametara (čvornih vrijednosti)  $\bar{\mathbf{J}}_e, \bar{\mathbf{P}}_e, \bar{\boldsymbol{\Theta}}_e, \bar{\mathbf{H}}_e$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_e^h &= \boldsymbol{\Psi}'(X) \bar{\mathbf{J}}_e \\ \bar{p}_e^h &= \boldsymbol{\Psi}'(X) \bar{\mathbf{P}}_e \\ \bar{\theta}_e^h &= \boldsymbol{\Psi}'(X) \bar{\boldsymbol{\Theta}}_e \\ \bar{\eta}_e^h &= \boldsymbol{\Psi}'(X) \bar{\mathbf{H}}_e \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Kondenzacija se provodi iz (7.11)<sub>1</sub>, Simo i dr. [20] Zbog proizvoljnosti  $\bar{p}^*$  slijedi:

$$\int_{\Omega} \bar{J}_{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \det \mathbf{F}_{n+1} d\Omega. \quad (7.24)$$

Uz (7.23)<sub>1</sub> dobiva se

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) \cdot (\bar{\mathbf{J}}_e)_{n+1} d\Omega &= \int_{\Omega} \det \mathbf{F}_{n+1} d\Omega \\ (\bar{\mathbf{J}}_e)_{n+1} \cdot \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) d\Omega &= \int_{\Omega} \det \mathbf{F}_{n+1} d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Množenjem  $\boldsymbol{\Psi}(X)$  s lijeve strane slijedi

$$(\bar{\mathbf{J}}_e)_{n+1} \cdot \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) \otimes \boldsymbol{\Psi}(X) d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) \det \mathbf{F}_{n+1} d\Omega. \quad (7.26)$$

Uvođenjem oznake

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) \otimes \boldsymbol{\Psi}(X) d\Omega \quad (7.27)$$

dobiva se

$$(\bar{\mathbf{J}}_e)_{n+1} \cdot \mathbf{M} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) \det \mathbf{F}_{n+1} d\Omega. \quad (7.28)$$

Čvorne se vrijednosti sada eksplicitno računaju:

$$(\bar{\mathbf{J}}_e)_{n+1} = \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) \det \mathbf{F}_{n+1} d\Omega, \quad (7.29)$$

dok se vrijednosti u integracijskoj točki računaju iz (7.23)<sub>1</sub>:

$$(\bar{J}_e^h)_{n+1} = \boldsymbol{\Psi}(X) \cdot \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) \det \mathbf{F}_{n+1} d\Omega. \quad (7.30)$$

Analognim se postupkom iz (7.11)<sub>2</sub> i (7.17) kondenziraju preostale mješovite varijable:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\theta}_e^h)_{n+1} &= \boldsymbol{\Psi}(X) \cdot \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) \theta^h d\Omega \\ (\bar{p}_e^h)_{n+1} &= \boldsymbol{\Psi}(X) \cdot \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) [\partial_j U(\bar{J}^h, \bar{\theta}^h) + \partial_j M(\bar{J}^h, \bar{\theta}^h)] d\Omega \\ (\bar{\eta}_e^h)_{n+1} &= \boldsymbol{\Psi}(X) \cdot \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) [-\partial_{\bar{\theta}} M(\bar{J}^h, \bar{\theta}^h) - \partial_{\bar{\theta}} W(\bar{\mathbf{b}}^e, \bar{\theta}^h) - \partial_{\bar{\theta}} U(\bar{J}^h, \bar{\theta}^h)] d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Sada se klasičnom tehnikom metode konačnih elemenata iz (7.9) i (7.16) dobiva sustav nelinearnih jednadžbi:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_{M_{n+1}} &= [\mathbf{F}_{M_{ext}}(\mathbf{d}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_n) - \mathbf{F}_{M_{int}}(\mathbf{d}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_n)]_{\boldsymbol{\theta}_n = \text{const}} = 0 \\ \mathbf{R}_{T_{n+1}} &= [\mathbf{F}_{T_{ext}}(\mathbf{d}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_{n+1}) - \mathbf{F}_{T_{int}}(\mathbf{d}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_{n+1})]_{\mathbf{d}_{n+1} = \text{const}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

U gornjim je jednadžbama mehanički vektor unutarnjih sila:

$$\mathbf{F}_{M_{int}} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}'_{M_{n+1}} [\text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1} + \bar{p}_{n+1} J_{n+1} \mathbf{I}] d\Omega, \quad (7.33)$$

mehanički vektor vanjskih sila:

$$\mathbf{F}_{M_{ext}} = \mathbf{A} \left\{ \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}'_M \bar{\mathbf{t}}_{n+1} d\Gamma + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}'_M \bar{\mathbf{f}}_{n+1} d\Omega \right\} = 0, \quad (7.34)$$

termički vektor unutarnjih sila:

$$\mathbf{F}_{T_{int}} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \left\{ \mathbf{N}'_T \left[ c \frac{\theta_{n+1} - \theta_n^h}{\Delta t} - (\mathcal{D}_{mech})_{n+1} + \bar{\mathcal{H}}_{n+1} \right] + \mathbf{B}'_{T_{n+1}} [k_{n+1} \nabla \theta_{n+1}^h] \right\} d\Omega, \quad (7.35)$$

i termički vektor vanjskih sila:

$$\mathbf{F}_{T_{ext}} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \left\{ \mathbf{N}'_T \bar{\mathcal{R}}_{n+1} d\Omega \right\} + \int_{\partial\Omega_e} \left\{ \mathbf{N}'_T [(q_c)_{n+1} + (q_r)_{n+1}] d\Gamma + \int_{\partial\Omega_e} \left\{ \mathbf{N}'_T [-\bar{q}_{n+1}] d\Gamma \right\} \right\} d\Omega. \quad (7.36)$$



U izrazima (7.33) - (7.36)  $\mathbf{A}^{n_e/m}$  predstavlja uobičajeni operator slaganja globalnih vektora i matrica.  $\mathbf{N}_M$  i  $\mathbf{N}_T$  predstavljaju standardne vektore izoparametrijskih interpolacijskih funkcija za pomake odnosno temperature. Obično se uzima da je interpolacija pomaka i temperature identična, tj.

$$\mathbf{N}_M = \mathbf{N}_T. \quad (7.37)$$

Operatori  $\mathbf{B}_{M_{n+1}}$  i  $\mathbf{B}_{T_{n+1}}$  predstavljaju mehanički odnosno termički prostorni gradijent interpolacijskih funkcija. Kao što je vidljivo iz (7.9) i (7.16) derivacije interpolacijskih funkcija izvode se po trenutnoj konfiguraciji što znači da se  $\mathbf{B}_{M_{n+1}}$  operator mijenja u svakoj iteraciji mehaničke faze. Kako se u termičkoj fazi konfiguracija ne mijenja, operator  $\mathbf{B}_{T_{n+1}}$  dovoljno je računati samo u prvoj iteraciji aktualnog koraka.

Analizom nelinearnih jednadžbi (7.32) vidljivo je da i mehanički i termički vektor vanjskih sila mogu biti funkcije trenutne konfiguracije i temperature. Time se uvodi mogućnost uvođenja tzv. pratećeg opterećenja (*follower forces*) u obje faze. Klasičan primjer ovoga opterećenja u mehanici jest tlak čije se djelovanje mijenja s promjenom geometrije površine. Pritom se mijenja i pravac opterećenja (normala na površinu) i veličina površine (promjenjiva ukupna sila na površinu). U termičkim problemima to mogu biti primjerice konvekcijski i radijacijski rubni uvjeti. Promjena temperature površine povlači za sobom i promjenu toplinskog fluksa prema okolini.

### 7.3. Rješavanje nelinearnih algebarskih jednadžbi dobivenih diskretizacijom metodom konačnih elemenata

Sustav nelinearnih jednadžbi (7.32) rješava se inkrementalno – iteracijskim pristupom. Inkrementalnim se pristupom problem prvo podijeli u konačan broj vremenskih intervala - koraka. Pritom intervali mogu biti jednaki ili promjenjivi. Unutar svakog koraka potrebno je riješiti nelinearni sustav jednadžbi prikladnom iteracijskom procedurom.

Odabir iteracijske sheme umnogome ovisi o prirodi problema. Za velik broj nelinearnosti kakvu sadrži ovaj problem, obično se odabire Newton-Raphsonova metoda, Zienkiewicz i Taylor [95, 2. poglavlje]. Po potrebi se ova metoda može

dopuniti dodatnim algoritimima, primjerice linijskim traženjem, čija je intencija ubrzavanje konvergencije ili povećanje stabilnosti postupka.

Kvalitetna alternativa Newton-Raphsonovoj tehnici u ovim problemima jest jedna od sekantnih ili kvazi-Newtonovovih metoda, tzv. BFGS shema (Broyden, Fletcher, Goldfarb i Shanno). Od ključnog je značaja dopuna ove metode algoritmom linijskog traženja, Luenberger [84].

U ovome se radu koristila Newton-Raphsonova metoda te će njezine osnovne postavke ukratko biti objašnjene.

Općenito se nelinearni problemi u trenutku  $t_{n+1}$  mogu pisati:

$$\Psi_{n+1} = \Psi(\mathbf{a}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1}(\mathbf{a}_{n+1}) - \mathbf{P}(\mathbf{a}_{n+1}) = 0, \quad (7.38)$$

s početnim uvjetima:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n, \quad \Psi_n = 0, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_n. \quad (7.39)$$

Obično se zadaje povećanje vektora  $\mathbf{f}$  (ponekad se zadaje i/ili porast varijabli  $\mathbf{a}$ ):

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_n + \Delta \mathbf{f}_n, \quad (7.40)$$

a potrebno je odrediti porast varijabli

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta \mathbf{a}_n. \quad (7.41)$$

Vektor  $\mathbf{f}$  također može biti funkcija varijable  $\mathbf{a}$  kako je to slučaj u ranije opisanima pratećim opterećenjima.

Problem (7.38)-(7.41) rješava se uvođenjem aproksimacije prvoga reda:

$$\Psi(\mathbf{a}_{n+1}^i) \approx \Psi(\mathbf{a}_{n+1}^i) + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right)_{n+1}^i d\mathbf{a}_n^i = 0, \quad (7.42)$$

gdje eksponent "i" označava iteraciju. Pritom se izraz

$$\mathbf{K}_T = - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} = - \frac{\partial (\mathbf{P} - \mathbf{f})}{\partial \mathbf{a}} \quad (7.43)$$

naziva tangencijalnom matricom krutosti. Zbog definicije (7.38) ista uključuje doprinos pratećeg opterećenja.

Iteracijska korekcija sada slijedi iz (7.42):

$$\mathbf{K}_T^i d\mathbf{a}_n^i = \Psi_{n+1}^i. \quad (7.44)$$

Niz sukcesivnih iteracija daje trenutnu vrijednost varijabli:

$$\mathbf{a}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{a}_{n+1}^i + d\mathbf{a}_n^i = \mathbf{a}_n + \sum_{k=1}^i d\mathbf{a}_n^k = \mathbf{a}_n + \Delta\mathbf{a}_n^i. \quad (7.45)$$

Postupak se provodi do tražene točnosti varijabli. Pritom se ostvaruje kvadratična konvergencija k rješenju.

Osnovni je nedostatak ove metode što se tangencijalna matrica krutosti  $\mathbf{K}_T^i$  mora računati u svakoj iteraciji. Svako odstupanje od tangencijalnosti vodi gubitku brzine konvergencije.

Kombinacija Newtonove-Raphsonove metode s metodom linearnog traženja od velike je važnosti u problemima velikih deformacija, Simo i Hughes [26, str. 322]. Ovakvo proširenje značajno povećava robusnost metode. U ovome je radu primijenjen algoritam generalno opisan u Luenberger [84] i Zienkiewicz i Taylor [95], a detaljnije razrađen i primijenjen u Bonet i Wood [97, str. 185].

#### 7.4. Linearizacija kinematičkih veličina

Radi određivanja tangencijalne matrice krutosti (7.43) potrebno je linearizirati određene kinematičke veličine. Ovaj se postupak provodi uporabom usmjerene derivacije. Pritom se može reći da usmjerena derivacija predstavlja poopćenje derivacije na način da daje promjenu neke veličine ukoliko se varijabla o kojoj ta veličina ovisi promjeni. Tako se usmjerena derivacija u smjeru  $\mathbf{u}$  definira, Bonet i Wood [97, str. 15]:

$$D\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = D\Pi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Pi(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{u}). \quad (7.46)$$

Sada se može provesti linearizacija gradijenta deformacije u smjeru  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} D\mathbf{F}(\varphi) \cdot \mathbf{u} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{F}(\varphi + \varepsilon\mathbf{u}) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{\partial(\varphi + \varepsilon\mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} = (\nabla \mathbf{u})\mathbf{F}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Za determinantu gradijenta deformacije linearizacija se provodi kako slijedi:

$$DJ \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} (D\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) = [J(\mathbf{F}^{-t} : (\nabla \mathbf{u})\mathbf{F})] = J[\mathbf{I} : \nabla \mathbf{u}] = J \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (7.48)$$

Lagrangeov se tenzor deformacije u materijalnoj formulaciji (4.19) linearizira uz (4.17):

$$\begin{aligned} D\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} &= D\left(\frac{1}{2}[\mathbf{F}'\mathbf{F} - \mathbf{I}]\right) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} D(\mathbf{F}'\mathbf{F}) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} [(D(\mathbf{F}') \cdot \mathbf{u})\mathbf{F} + \mathbf{F}' D(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{u}] = \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}' \nabla \mathbf{u} \mathbf{F} + \mathbf{F}' (\nabla \mathbf{u})' \mathbf{F}] = \mathbf{F}' (\nabla \mathbf{u})^{sim} \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Obzirom da su Lagrangeovi tenzori deformacije u materijalnoj i prostornoj deskripciji povezani putem pull-back operatora:

$$\mathbf{E} = \phi^*(\mathbf{e}) = \mathbf{F}' \mathbf{e} \mathbf{F}, \quad (7.50)$$

te uz pravilo, Marsden i Hughes [9, str. 47]:

$$\phi^* \mathbf{d}f = \mathbf{d}(\phi^* f), \quad (7.51)$$

slijedi da je:

$$D\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} = \nabla^{sim} \mathbf{u}. \quad (7.52)$$

#### 7.5. Tangencijalna matrica krutosti za neizotermički problem

Kako je već spomenuto, ukoliko matrica krutosti nije tangencijalna obzirom na upotrijebljeni algoritam, kvadratična se konvergencija ne može ostvariti. Stoga je poznavanje točne tangencijalne matrice krutosti od presudnog značaja za efikasnost proračuna.

Primjeni li se postupak linearizacije na izraz (7.41) dobiva se:

$$D\Psi(\mathbf{a}) \cdot d\mathbf{a} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Psi(\mathbf{a} + \varepsilon d\mathbf{a}) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \frac{\partial(\mathbf{a} + \varepsilon d\mathbf{a})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} d\mathbf{a} = \mathbf{K}_T d\mathbf{a}, \quad (7.53)$$

što je identično izrazu (7.44). Dakle, tangencijalnu se matricu krutosti određuje linearizacijom u smjeru porasta vektora pomaka odnosno temperature.

### 7.5.1. Linearizacija mehaničke nejake formulacije

Linearizacijom izraza (7.9) slijedi da se tangencijalna matrica krutosti može prikazati:

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_{Mgeo} + \mathbf{K}_{Mmat} + \mathbf{K}_{ML}, \quad (7.54)$$

gdje su  $\mathbf{K}_{Mgeo}$ ,  $\mathbf{K}_{Mmat}$  i  $\mathbf{K}_{ML}$  geometrijska, materijalna i matrica krutosti povezana s pratećim opterećenjem.

#### (a) Geometrijska matrica krutosti

Geometrijska matrica krutosti proizlazi iz nelinearne ovisnosti deformacije i pomaka uz (7.10). Njezin je uobičajeni oblik, Wriggers [1], str. 95:

$$\mathbf{K}_{Mgeo} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* \cdot [\nabla \mathbf{u}(\text{dev} \boldsymbol{\tau} + \bar{p} \mathbf{I})] d\Omega. \quad (7.55)$$

#### (b) Materijalna matrica krutosti

Materijalna matrica krutosti računa se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{Mmat} &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* \cdot [(D(\text{dev} \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u} + D(\bar{p} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u})] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* \cdot [(D(\text{dev} \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u} + \bar{p} \mathbf{I} D(J) \cdot \mathbf{u} + J \mathbf{I} D(\bar{p}) \cdot \mathbf{u})] d\Omega. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Pritom se linearizacija pojedinih članova provodi kako slijedi.

Član

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* \cdot [\bar{p} \mathbf{I} D(J) \cdot \mathbf{u}] d\Omega = \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}^* [\bar{p} D(J) \cdot \mathbf{u}] d\Omega \quad (7.57)$$

se transformira uz (7.48):

$$\int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}^* [\bar{p} D(J) \cdot \mathbf{u}] d\Omega = \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}^* \bar{p} J \text{div} \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* : [\bar{p} J (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})] : \nabla \mathbf{u} d\Omega. \quad (7.58)$$

Linearizacija mješovite varijable  $\bar{p}$  daje sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* \cdot [J \mathbf{I} D(\bar{p}) \cdot \mathbf{u}] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}^* [J D(\bar{p}) \cdot \mathbf{u}] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}^* \left[ J \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{J}} \frac{\partial \bar{J}}{\partial J} D(J) \cdot \mathbf{u} \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}^* \left[ J \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{J}} \frac{\partial \bar{J}}{\partial J} J \text{div} \mathbf{u} \right] d\Omega, \end{aligned} \quad (7.59)$$

gdje je opet korišten izraz (7.48). Potrebne se derivacije dobivaju iz izraza (7.31)<sub>2</sub>:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{J}} = \boldsymbol{\Psi}(X) \cdot \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) \left[ \partial_{JJ}^2 U + \partial_{JJ}^2 M \right] d\Omega, \quad (7.60)$$

odnosno (7.30):

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial J} = \boldsymbol{\Psi}(X) \cdot \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) d\Omega. \quad (7.61)$$

Uvedu li se sada oznake uvedene u Simo i dr.[20]:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\text{div}} \mathbf{u} &= \boldsymbol{\Psi}(X) \cdot \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) \text{div} \mathbf{u} J d\Omega \\ \overline{\text{div}} \mathbf{u}^* &= \boldsymbol{\Psi}(X) \cdot \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(X) \text{div} \mathbf{u}^* J d\Omega \end{aligned} \right\}, \quad (7.62)$$

konačno se dobiva:

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* \cdot [J \mathbf{I} D(\bar{p}) \cdot \mathbf{u}] d\Omega = \int_{\Omega} \overline{\text{div}} \mathbf{u}^* \left[ \partial_{JJ}^2 U + \partial_{JJ}^2 M \right] \overline{\text{div}} \mathbf{u} d\Omega. \quad (7.63)$$

Član vezan uz naprezanje daje:

$$D(\text{dev} \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \text{dev} \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{e}} D(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{u}. \quad (7.64)$$

No, zbog (4.21)<sub>2</sub> vrijedi:

$$\frac{\partial \text{dev} \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{e}} = 2 \frac{\partial \text{dev} \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{g}}, \quad (7.65)$$

pa tako uz (7.52) slijedi:

$$D(\text{dev} \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u} = 2 \partial_{\mathbf{g}} \text{dev} \boldsymbol{\tau} : \nabla^{\text{sim}} \mathbf{u}. \quad (7.66)$$

Sada preostaje odrediti derivaciju devijatorskog dijela Kirchhoffovog tenzora napreznja po metričkom tenzoru  $\partial_{\mathbf{g}} \text{dev} \boldsymbol{\tau}$ . Kako se naglašava u Simo i Miehe [25] ovo je najjednostavniji pristup. Iako se primjenjuju standardne tehnike tenzorskog računa riječ je o prilično složenom procesu gdje se rabe krivolinijske koordinate. Mogući odabir drugih parova tenzora napreznja i deformacija rezultira u još složenijim relacijama.

Kako je to naglašeno u Simo i Taylor [21] od presudnog je značaja izračun ovoga člana u skladu s algoritamskim tretmanom. Stoga se proračun započinje na osnovu rezultata metode radijalnog povratka (6.23)<sub>4</sub>:

$$\partial_{\mathbf{g}} \text{dev}[\boldsymbol{\tau}] = \partial_{\mathbf{g}} (\text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}]) - \partial_{\mathbf{g}} \left( \frac{2}{3} \mu \Delta \lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{h} \right). \quad (7.67)$$

Prvi član predstavlja pokušajni elastični modul:

$$\bar{\mathbf{c}}_M^{e,trial} = 2\partial_{\mathbf{g}} (\text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}]), \quad (7.68)$$

dok se drugi označava:

$$\bar{\mathbf{c}}_M^p = -2\partial_{\mathbf{g}} \left( \frac{2}{3} \mu \Delta \lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{h} \right), \quad (7.69)$$

te se (7.67) algoritamski tangencijalni tenzor piše:

$$\bar{\mathbf{c}}_M^{ep} = \bar{\mathbf{c}}_M^{e,trial} + \bar{\mathbf{c}}_M^p. \quad (7.70)$$

Proračun se odvija deriviranjem po metričkom tenzoru i kasnijom specijalizacijom za pravokutne koordinate sustave, tj.

$$\mathbf{g} = \boldsymbol{\delta} = \mathbf{I}. \quad (7.71)$$

(b.1) Određivanje  $\partial_{\mathbf{g}} (\text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}])$ .

Iz (6.21)<sub>3</sub> dobiva se:

$$(\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial})^{ij} = \mu (\text{dev} \bar{\mathbf{b}}^{e,trial})^{ij} = \mu (J^e)^{-2/3} \left[ (b^{e,trial})^{ij} - \frac{1}{3} (b^{e,trial})^{kl} g_{kl} g^{ij} \right]. \quad (7.72)$$

Tražena se derivacija dobiva:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{g}} (\text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}]) &= \mu \partial_{\mathbf{g}} (J^e)^{-2/3} \left[ (b^{e,trial})^{ij} - \frac{1}{3} (b^{e,trial})^{kl} g_{kl} g^{ij} \right] + \\ &+ \mu (J^e)^{-2/3} \left[ -\frac{1}{3} (b^{e,trial})^{kl} \partial_{\mathbf{g}} (g_{kl} g^{ij}) \right]. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Uz

$$\frac{\partial (J^e)^{-2/3}}{\partial g_{kl}} = -\frac{2}{3} (J^e)^{-5/3} \frac{\partial J^e}{\partial g_{kl}}, \quad (7.74)$$

te uporabom definicije gradijenta deformacije u krivolinijskim sustavima, Jarić [66, str. 14-16], slijedi:

$$\frac{\partial J^e}{\partial g_{kl}} = \frac{\partial}{\partial g_{kl}} \left( \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{\det G_{IJ}}} \det \mathbf{F} \right) = \frac{1}{2} J g^{kl}. \quad (7.75)$$

Sada iz (7.74) slijedi:

$$\frac{\partial (J^e)^{-2/3}}{\partial g_{kl}} = -\frac{1}{3} (J^e)^{-2/3} g^{kl}. \quad (7.76)$$

Također se može pokazati da vrijedi, Lovelock i Rund, [98]:

$$\frac{\partial (g_{kl} g^{ij})}{\partial g_{mn}} = g^{ij} I_{kl}^{mn} - g_{kl} I_g^{ijmn}. \quad (7.77)$$

gdje je:

$$I_g^{ijmn} = \frac{1}{2} (g^{im} g^{nj} + g^{jm} g^{ni}). \quad (7.78)$$

Uvrštavanje rezultata (7.76) i (7.77) u (7.73) daje:

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{g}}(\text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}]) &= -\frac{1}{3}(J^e)^{-2/3} g^{mn} \mu \left[ (b^{e,trial})^{ij} - \frac{1}{3}(b^{e,trial})^{kl} g_{kl} g^{ij} \right] + \\
&+ \mu (J^e)^{-2/3} \left[ -\frac{1}{3}(b^{e,trial})^{kl} (g^{ij} I_{kl}^{mn} - g_{kl} I_g^{ijmn}) \right] = \\
&= -\frac{1}{3} g^{mn} (\text{dev} \tau^{trial})^{ij} - \mu \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{b}}^{e,trial})^{mn} g^{ij} + \mu \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}) I_g^{ijmn} = \\
&= \mu \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}) I_g^{ijmn} - \frac{1}{3} g^{mn} (\text{dev} \tau^{trial})^{ij} - \\
&- \mu \frac{1}{3} g^{ij} \left( \text{dev}(\bar{\mathbf{b}}^{e,trial})^{mn} + \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}) g^{mn} \right) = \\
&= \mu \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}) \left[ I_g^{ijmn} - \frac{1}{3} g^{ij} g^{mn} \right] - \frac{1}{3} \left[ (\text{dev} \tau^{trial})^{ij} g^{mn} + (\text{dev} \tau^{trial})^{mn} g^{ij} \right]. \quad (7.79)
\end{aligned}$$

Uporabom (7.79) i prelaskom na kartezijev koordinatni sustav (7.68) dobiva se konačni oblik:

$$\bar{\mathbf{c}}_M^{e,trial} = 2\mu \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}) \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] - \frac{2}{3} \left[ (\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial}) \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes (\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial}) \right]. \quad (7.80)$$

(b.2) Određivanje  $\partial_{\mathbf{g}} \left( \frac{2}{3} \mu \Delta \lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \right)$ .

Derivacija se računa:

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{g}} \left( \frac{2}{3} \mu \Delta \lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \right) &= \frac{2}{3} \mu \partial_{\mathbf{g}} (\Delta \lambda) \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} + \frac{2}{3} \mu \Delta \lambda \partial_{\mathbf{g}} (\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}]) \mathbf{n} + \\
&+ \frac{2}{3} \mu \Delta \lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \partial_{\mathbf{g}} (\mathbf{n}). \quad (7.81)
\end{aligned}$$

Radi određivanja derivacija u (7.81) bit će potrebno poznavati derivaciju:

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{g}} \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\| &= \partial_{\mathbf{g}} \sqrt{\left[ (\text{dev} \tau)^{ij} - (\text{dev} \alpha)^{ij} \right] \left[ (\text{dev} \tau)^{kl} - (\text{dev} \alpha)^{kl} \right] g_{ik} g_{jl}} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\text{dev} \boldsymbol{\tau} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}\|} \frac{\partial \left\{ \left[ (\text{dev} \tau)^{ij} - (\text{dev} \alpha)^{ij} \right] \left[ (\text{dev} \tau)^{kl} - (\text{dev} \alpha)^{kl} \right] g_{ik} g_{jl} \right\}}{\partial g_{mn}}. \quad (7.82)
\end{aligned}$$

Radi kratkoće pisanja u ovome se dijelu proračuna ispušta oznaka "trial". Uz (5.80) i (5.85) dobiva se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left\{ \left[ (\text{dev} \tau)^{ij} - (\text{dev} \alpha)^{ij} \right] \left[ (\text{dev} \tau)^{kl} - (\text{dev} \alpha)^{kl} \right] g_{ik} g_{jl} \right\}}{\partial g_{mn}} &= \\
&= \frac{\partial \left\{ (J^e)^{-2/3} \left[ \mu (\text{dev} b^e)^{ij} - h_{kin} (\text{dev} z)^{ij} \right] \left[ \mu (\text{dev} b^e)^{kl} - h_{kin} (\text{dev} z)^{kl} \right] g_{ik} g_{jl} \right\}}{\partial g_{mn}}. \quad (7.83)
\end{aligned}$$

Sada se sređivanjem posljednjeg izraza i uvrštavanjem (7.76), (7.77) te

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\text{dev} b^e)^{ij}}{\partial g_{mn}} &= \frac{\partial}{\partial g_{mn}} \left[ (b^e)^{ij} - \frac{1}{3} (b^e)^{kl} g_{kl} g^{ij} \right] = -\frac{1}{3} (b^e)^{kl} \frac{\partial}{\partial g_{mn}} [g_{kl} g^{ij}] = \\
&= -\frac{1}{3} (b^e)^{kl} [g^{ij} I_{kl}^{mn} - g_{kl} I_g^{ijmn}] = -\frac{1}{3} (b^e)^{mn} g^{ij} + \frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{b}^e] I_g^{ijmn}, \quad (7.84)
\end{aligned}$$

dobiva:

$$\partial_{\mathbf{g}} \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\| = (\mu + h_{kin}) \frac{1}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} + \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\| \text{dev}[\mathbf{n}^2]. \quad (7.85)$$

Pritom je normala na plohu tečenja definirana izrazom (6.25).

Derivacija uz drugi član iznosi:

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{g}} (\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}]) &= \frac{\partial \left[ (J^e)^{-2/3} (b^{e,trial})_{ij} g^{ij} \right]}{\partial g_{kl}} = \\
&= \frac{\partial (J^e)^{-2/3}}{\partial g_{kl}} (b^{e,trial})_{ij} g^{ij} + (J^e)^{-2/3} (b^{e,trial})_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}}. \quad (7.86)
\end{aligned}$$

Uz (7.76) i iz (7.77):

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{g}} (\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}]) &= -\frac{1}{3} (J^e)^{-2/3} g^{kl} (b^{e,trial})_{ij} g^{ij} + (J^e)^{-2/3} (b^{e,trial})_{ij} I_g^{ijkl} = \\
&= \frac{1}{3} \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}]. \quad (7.87)
\end{aligned}$$

Derivacija uz treći član iznosi:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{g}} \mathbf{n} = \partial_{\mathbf{g}} \left( \frac{\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}}{\|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\|} \right) &= \partial_{\mathbf{g}} \left( \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\|^{-1} \right) (\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}) + \\ &+ \frac{(\partial_{\mathbf{g}} \text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} + \partial_{\mathbf{g}} \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial})}{\|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\|}. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Ovdje vrijedi

$$\partial_{\mathbf{g}} \left( \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\|^{-1} \right) = \frac{1}{\|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\|^2} \frac{\partial \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\|}{\partial \mathbf{g}}. \quad (7.89)$$

Pritom se analognim postupkom kao u (7.80) dobiva:

$$\bar{\mathbf{c}}^{k,trial} = 2 \partial_{\mathbf{g}} \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial} = h_{kin} \frac{2}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{z}}^{trial}) \left[ \mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] - \frac{2}{3} \left[ (\text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}) \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes (\text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}) \right]. \quad (7.90)$$

Sada uz (7.80), (7.85) i (7.90) slijedi

$$\partial_{\mathbf{g}} \mathbf{n} = \frac{1}{\|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\|} \left[ \frac{\bar{\mathbf{c}}^{e,trial} - \bar{\mathbf{c}}^{k,trial}}{2} - \mathbf{n} \otimes \partial_{\mathbf{g}} \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\| \right]. \quad (7.91)$$

Derivacija se parametra konzistencije  $\partial_{\mathbf{g}}(\Delta\lambda)$  dobiva iz izraza (6.28):

$$\partial_{\mathbf{g}} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \beta \left( \xi_n + \Delta\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - \sigma_y(\theta) \right] + \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] - \text{dev}[\boldsymbol{\alpha}^{trial}]\| - \frac{2}{3}(\mu + h_{kin}) \Delta\lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \right\} = 0 \quad (7.92)$$

ili

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \beta}{\partial \left( \xi_n + \Delta\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \right)} \sqrt{\frac{2}{3}} \partial_{\mathbf{g}}(\Delta\lambda) + \partial_{\mathbf{g}} \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] - \text{dev}[\boldsymbol{\alpha}^{trial}]\| - \\ - \frac{2}{3}(\mu + h_{kin}) \left( \partial_{\mathbf{g}}(\Delta\lambda) \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] + \Delta\lambda \partial_{\mathbf{g}} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Imajući u vidu (5.71) gornji se izraz transformira:

$$\partial_{\mathbf{g}}(\Delta\lambda) = \frac{-3}{2\{(\mu + h_{kin}) \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] + \partial_{\xi\xi}^2 K\}} \left\{ \partial_{\mathbf{g}} \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] - \text{dev}[\boldsymbol{\alpha}^{trial}]\| + \Delta\lambda \partial_{\mathbf{g}} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \right\}. \quad (7.94)$$

Derivacije u posljednjoj zagradi već su izvedene, (7.85) i (7.87), te se konačan oblik dobiva:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{g}}(\Delta\lambda) &= \frac{-3}{2\{(\mu + h_{kin}) \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] + \partial_{\xi\xi}^2 K\}} \cdot \\ &\cdot \left\{ (\mu + h_{kin}) \frac{1}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} + \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\| \text{dev}[\mathbf{n}^2] + \Delta\lambda \frac{1}{3} \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \right\}. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Združivanje ovako dobivenih članova daje:

$$\begin{aligned} -\bar{\mathbf{c}}_M^p &= 2 \frac{2}{3} \mu \frac{-3}{2\{(\mu + h_{kin}) \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] + \partial_{\xi\xi}^2 K\}} \cdot \\ &\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \otimes \left\{ (\mu + h_{kin}) \frac{1}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} + \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\| \text{dev}[\mathbf{n}^2] + \Delta\lambda \frac{1}{3} \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \right\} + \\ &+ \frac{2}{3} \mu \Delta\lambda \frac{2}{3} \mathbf{n} \otimes \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] + \\ &+ \frac{2}{3} \mu \Delta\lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \frac{1}{\|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\|} \cdot \\ &\cdot \left\{ \bar{\mathbf{c}}^{e,trial} - \bar{\mathbf{c}}^{k,trial} - 2\mathbf{n} \otimes \left[ (\mu + h_{kin}) \frac{1}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} + \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\| \text{dev}[\mathbf{n}^2] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.96)$$

Uvede li se oznake:

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= 1 + \frac{\partial_{\xi\xi}^2 K}{(\mu + h_{kin}) \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}]} \\ \beta_1 &= \frac{2}{3} \mu \Delta\lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \frac{1}{\|\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev} \boldsymbol{\alpha}^{trial}\|} \end{aligned} \right\}, \quad (7.97)$$

pa slijedi:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{c}}_M^p &= \mu \frac{2}{3\beta_0} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\
&+ 2\mu \frac{1}{(\mu + h_{kin})\beta_0} \|\text{dev}\boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev}\boldsymbol{\alpha}^{trial}\| \mathbf{n} \otimes \text{dev}[\mathbf{n}^2] + \\
&+ 2 \frac{1}{(\mu + h_{kin})\beta_0} \mathbf{n} \otimes \Delta\lambda \frac{1}{3} \text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] - \\
&- \frac{2}{3} \Delta\lambda \frac{2}{3} \mathbf{n} \otimes \text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] - \\
&- \beta_1 (\bar{\mathbf{c}}^{e,trial} - \bar{\mathbf{c}}^{k,trial}) + \beta_1 \left( 2(\mu + h_{kin}) \frac{1}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) + \\
&+ \beta_1 \left\{ 2 \|\text{dev}\boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev}\boldsymbol{\alpha}^{trial}\| \mathbf{n} \otimes \text{dev}[\mathbf{n}^2] \right\}. \quad (7.98)
\end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{c}}_M^p &= -\beta_1 (\bar{\mathbf{c}}^{e,trial} - \bar{\mathbf{c}}^{k,trial}) + \\
&+ \frac{2}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \left\{ \mu \frac{1}{\beta_0} + \beta_1 (\mu + h_{kin}) \right\} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\
&+ 2 \|\text{dev}\boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev}\boldsymbol{\alpha}^{trial}\| \left\{ \mu \frac{1}{(\mu + h_{kin})\beta_0} + \beta_1 \right\} \mathbf{n} \otimes \text{dev}[\mathbf{n}^2] + \\
&+ \frac{2}{3} \Delta\lambda \left\{ \frac{1}{(\mu + h_{kin})\beta_0} - \frac{2}{3} \right\} \mathbf{n} \otimes \text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}]. \quad (7.99)
\end{aligned}$$

Uvođenjem dodatnih oznaka:

$$\left. \begin{aligned}
\beta_2 &= \frac{2}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \left\{ \mu \frac{1}{\beta_0} + \beta_1 (\mu + h_{kin}) \right\} \\
\beta_3 &= 2 \|\text{dev}\boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev}\boldsymbol{\alpha}^{trial}\| \left\{ \mu \frac{1}{(\mu + h_{kin})\beta_0} + \beta_1 \right\} \\
\beta_4 &= \frac{2}{3} \Delta\lambda \left\{ \frac{1}{(\mu + h_{kin})\beta_0} - \frac{2}{3} \right\}
\end{aligned} \right\}, \quad (7.100)$$

slijedi završni oblik:

$$\bar{\mathbf{c}}_M^p = -\beta_1 (\bar{\mathbf{c}}^{e,trial} - \bar{\mathbf{c}}^{k,trial}) + \beta_2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \beta_3 \mathbf{n} \otimes \text{dev}[\mathbf{n}^2] + \beta_4 \mathbf{n} \otimes \text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}]. \quad (7.101)$$

Sada se može napisati konačni oblik algoritamskog tangencijalnog tenzora (7.70):

$$\bar{\mathbf{c}}_M^{ep} = \bar{\mathbf{c}}_M^{e,trial} + \bar{\mathbf{c}}_M^p, \quad (7.102)$$

gdje su:

$$\bar{\mathbf{c}}_M^{e,trial} = 2\mu \frac{1}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] - \frac{2}{3} \left[ (\text{dev}\boldsymbol{\tau}^{trial}) \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes (\text{dev}\boldsymbol{\tau}^{trial}) \right] \quad (7.103)$$

i

$$\bar{\mathbf{c}}_M^p = -\alpha_p \left\{ \beta_1 \bar{\mathbf{c}}^{e,trial} - \beta_1 \bar{\mathbf{c}}^{k,trial} - \beta_2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \beta_3 \mathbf{n} \otimes \text{dev}[\mathbf{n}^2] - \beta_4 \mathbf{n} \otimes \text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{trial}] \right\}, \quad (7.104)$$

uz

$$\bar{\mathbf{c}}^{k,trial} = h_{kin} \frac{2}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{z}}^{trial}] \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] - \frac{2}{3} \left[ (\text{dev}\boldsymbol{\alpha}^{trial}) \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes (\text{dev}\boldsymbol{\alpha}^{trial}) \right], \quad (7.105)$$

$$\left. \begin{aligned}
\beta_0 &= 1 + \frac{\partial_{\xi\xi}^2 K}{(\mu + h_{kin}) \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}]} \\
\beta_1 &= \frac{2}{3} \mu \Delta\lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \frac{1}{\|\text{dev}\boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev}\boldsymbol{\alpha}^{trial}\|} \\
\beta_2 &= \frac{2}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}] \left\{ \mu \frac{1}{\beta_0} + \beta_1 (\mu + h_{kin}) \right\} \\
\beta_3 &= 2 \|\text{dev}\boldsymbol{\tau}^{trial} - \text{dev}\boldsymbol{\alpha}^{trial}\| \left\{ \mu \frac{1}{(\mu + h_{kin})\beta_0} + \beta_1 \right\} \\
\beta_4 &= \frac{2}{3} \Delta\lambda \left\{ \frac{1}{(\mu + h_{kin})\beta_0} - \frac{2}{3} \right\}
\end{aligned} \right\}, \quad (7.106)$$

dok  $\alpha_p$  poprima sljedeće vrijednosti

$$\alpha_p = \begin{cases} 1 & \text{za } \phi^{trial} \geq 0 \\ 0 & \text{za } \phi^{trial} < 0 \end{cases} \quad (7.107)$$

Konačno se materijalni dio matrice krutosti uz (7.68), (7.63) i (7.102) može pisati:

$$\mathbf{K}_{MMal} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* : [\bar{p}J(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) - 2I + \bar{\mathbf{c}}_M^{ep}] : \nabla \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}^* \left[ \partial_{JJ}^2 U + \partial_{JJ}^2 M \right] \text{div} \mathbf{u} d\Omega$$

(c) Matrica krutosti uzrokovana pratećim opterećenjem

Dodatak matrici krutosti zbog opterećenja, a uzrokovan promjenom geometrije računa se iz (7.9) kako slijedi [Wriggers, X-46]:

$$\int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \bar{p} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma. \quad (7.108)$$

Gornji je izraz potrebno linearizirati u smjeru dopustivih pomaka. Normala se na površinu pritom računa iz baznih vektora u točki:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\|}. \quad (7.109)$$

Bazni se vektori računaju kao tangente na koordinatne osi prirodnog koordinatnog sustava konačnog elementa  $\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{x}_{,\alpha}$ . Ovdje se derivacija računa na osnovu standardne interpolacije konačnim elementima:

$$x_{i,\alpha} = \sum_{A=1}^{m \text{ čvorova}} N_A(\xi, \eta) x_{i,A}. \quad (7.110)$$

Sada se dobiva

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}}{\|\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}\|}. \quad (7.111)$$

Površina se može računati

$$d\Gamma = \|\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}\| d\xi d\eta, \quad (7.112)$$

te se iz (7.108) dobiva:

$$\int_{\partial\Omega} \bar{p} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \bar{p} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) d\xi d\eta. \quad (7.113)$$

Uporabom diskretizacije (7.110) može se izračunati vektor normale u bilo kojoj točki površine:

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta} = \begin{Bmatrix} x_{2,\xi} x_{3,\eta} - x_{3,\eta} x_{2,\xi} \\ x_{3,\xi} x_{1,\eta} - x_{1,\eta} x_{3,\xi} \\ x_{1,\xi} x_{2,\eta} - x_{2,\eta} x_{1,\xi} \end{Bmatrix}. \quad (7.114)$$

Provede li se sada linearizacija (7.113) dobiva se

$$\begin{aligned} D \left( \int_{\partial\Omega} \bar{p} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) d\xi d\eta \right) \cdot \mathbf{u} &= \int_{\partial\Omega} \bar{p} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta} + \mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{u}_{,\eta}) d\xi d\eta = \\ &= \sum_{A=1}^{m \text{ čvorova}} \sum_{B=1}^{m \text{ čvorova}} (\mathbf{u}^*)_A^T \mathbf{k}_{AB} \mathbf{u}_B. \end{aligned} \quad (7.115)$$

gdje podmatrica  $\mathbf{k}_{AB}$  ima oblik:

$$\mathbf{k}_{AB} = \int_{\partial\Omega} \bar{p} N_A (N_{B,\xi} \bar{\mathbf{N}}_{,\eta} - N_{B,\eta} \bar{\mathbf{N}}_{,\xi}) d\xi d\eta, \quad (7.116)$$

dok je  $\bar{\mathbf{N}}_{,\alpha}$  antisimetrična matrica oblika:

$$\bar{\mathbf{N}}_{,\eta} = \begin{bmatrix} 0 & x_{3,\alpha} & -x_{2,\alpha} \\ -x_{3,\alpha} & 0 & x_{1,\alpha} \\ x_{2,\alpha} & -x_{1,\alpha} & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.117)$$

Dodatak matrice krutosti zbog promjene krutosti konačno se dobiva uvrštavanjem podmatrice (7.116) na odgovarajuća mjesta u matrici krutosti elementa:

$$\mathbf{K}_{ML} = \mathbf{A}_{A,B} \mathbf{k}_{AB}. \quad (7.118)$$

U općem slučaju prateće opterećenje uzrokuje nesimetričnu matricu krutosti. Ipak, ukoliko je tlak konstantan i djeluje na zatvorenoj površini konačna matrica je simetrična. U dvodimenzionalnim problemima gornji se postupak značajno pojednostavljuje, Wriggers [1, str 142].

### 7.5.2. Linearizacija termičke nejake formulacije

Tangencijalna matrica krutosti za termički dio dobiva se linearizacijom (7.16) u dopustivom smjeru promjene temperature.



$$\begin{aligned}
& D \left( \int_{\Omega} \left\{ \mathcal{G}^* \left[ c \frac{\theta_{n+1} - \tilde{\theta}_{n+1}}{\Delta t} - (\mathcal{D}_{mech})_{n+1} + \overline{\mathcal{H}}_{n+1} \right] + [k_{n+1} \nabla \theta_{n+1} \cdot \nabla \mathcal{G}^*] \right\} d\Omega - \right. \\
& \quad \left. - \int_{\Omega} \mathcal{G}^* \overline{\mathcal{R}}_{n+1} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}^* [(q_c)_{n+1} + (q_r)_{n+1}] d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}^* [-\bar{q}_{n+1}] d\Gamma \right) \cdot \mathcal{G} = \\
& = \int_{\Omega} \left\{ \mathcal{G}^* \left[ D \left( c \frac{\theta_{n+1} - \tilde{\theta}_{n+1}}{\Delta t} \right) \cdot \mathcal{G} - D[(\mathcal{D}_{mech})_{n+1}] \cdot \mathcal{G} + D(\overline{\mathcal{H}}_{n+1}) \cdot \mathcal{G} \right] + \right. \\
& \quad \left. + D[k_{n+1} \nabla \theta_{n+1} \cdot \nabla \mathcal{G}^*] \cdot \mathcal{G} \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}^* D[(q_c)_{n+1} + (q_r)_{n+1}] \cdot \mathcal{G} d\Gamma. \quad (7.119)
\end{aligned}$$

Pritom se pojedini članovi lineariziraju kako slijedi:

$$D \left( c \frac{\theta_{n+1} - \tilde{\theta}_{n+1}}{\Delta t} \right) \cdot \mathcal{G} = \frac{d}{d\varepsilon} \left( c \frac{\theta_{n+1} - \tilde{\theta}_{n+1}}{\Delta t} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \partial_{\theta} c \mathcal{G} \frac{\theta_{n+1} - \tilde{\theta}_{n+1}}{\Delta t} + c \frac{1}{\Delta t} \mathcal{G}. \quad (7.120)$$

Linearizacija mehaničke disipacije daje :

$$D[(\mathcal{D}_{mech})_{n+1}] \cdot \mathcal{G} = \partial_{\theta} (\mathcal{D}_{mech})_{n+1} \mathcal{G}. \quad (7.121)$$

Linearizacija strukturnog zagrijavanja provodi se:

$$D(\overline{\mathcal{H}}_{n+1}) \cdot \mathcal{G} = \partial_{\theta} \overline{\mathcal{H}}_{n+1} \cdot \mathcal{G}. \quad (7.122)$$

Član koji definira Fourierov zakon provođenja topline linearizira se:

$$D[k_{n+1} \nabla \theta_{n+1} \cdot \nabla \mathcal{G}^*] \cdot \mathcal{G} = \partial_{\theta} k_{n+1} \nabla \theta_{n+1} \cdot \nabla \mathcal{G}^* + k_{n+1} \nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \mathcal{G}^*. \quad (7.123)$$

Konvekcijski se prijelaz linearizira uz (6.6a)<sub>1</sub>:

$$D[(q_c)_{n+1}] \cdot \mathcal{G} = D[h_{n+1}(\theta_e - \theta_{n+1})] \cdot \mathcal{G} = \partial_{\theta} h_{n+1}(\theta_e - \theta_{n+1}) \cdot \mathcal{G} - h_{n+1} \mathcal{G}, \quad (7.124)$$

dok prijelaz topline zračenjem (6.10)<sub>2</sub>:

$$D[(q_r)_{n+1}] \cdot \mathcal{G} = \partial_{\theta} (\kappa_r)_{n+1} (\theta_r - \theta_{n+1}) \mathcal{G} - (\kappa_r)_{n+1} \mathcal{G}. \quad (7.125)$$

Preostaje stoga pobliže odrediti derivacije mehaničke disipacije  $\partial_{\theta} (\mathcal{D}_{mech})_{n+1}$  i strukturnog zagrijavanja  $\partial_{\theta} \overline{\mathcal{H}}_{n+1}$  po temperaturi. Tako se dobiva uz (5.92):

$$\begin{aligned}
\partial_{\theta} (\mathcal{D}_{mech})_{n+1} &= \chi \sqrt{\frac{2}{3}} \partial_{\theta} \left( \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} (\beta - \sigma_y(\theta)) \right)_{n+1} = \\
&= -\chi \sqrt{\frac{2}{3}} (\partial_{\theta \xi}^2 K - \partial_{\theta} \sigma_y(\theta)) \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} + \chi \sqrt{\frac{2}{3}} (\beta - \sigma_y(\theta)) \frac{1}{\Delta t} \partial_{\theta} (\Delta \lambda). \quad (7.126)
\end{aligned}$$

$\partial_{\theta} (\Delta \lambda)$  računa se iz (6.28):

$$\begin{aligned}
\partial_{\theta} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \beta \left( \xi_n + \Delta \lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - \sigma_y(\theta) \right] + \|\text{dev}[\mathbf{r}^{trial}] - \text{dev}[\mathbf{a}^{trial}]\| - \frac{2}{3} (\mu + h_{kin}) \Delta \lambda \text{tr}[\overline{\mathbf{b}}^{e,trial}] \right\} &= 0 \\
-\frac{2}{3} \partial_{\xi} K \partial_{\theta} (\Delta \lambda) - \sqrt{\frac{2}{3}} \partial_{\theta} \sigma_y(\theta) - \frac{2}{3} (\partial_{\theta} \mu + \partial_{\theta} h_{kin}) \Delta \lambda \text{tr}[\overline{\mathbf{b}}^{e,trial}] - \\
-\frac{2}{3} (\mu + h_{kin}) \partial_{\theta} (\Delta \lambda) \text{tr}[\overline{\mathbf{b}}^{e,trial}] &= 0 \\
\partial_{\theta} (\Delta \lambda) &= \frac{-\sqrt{\frac{3}{2}} \partial_{\theta} \sigma_y(\theta) - (\partial_{\theta} \mu + \partial_{\theta} h_{kin}) \Delta \lambda \text{tr}[\overline{\mathbf{b}}^{e,trial}]}{\partial_{\xi} K + (\mu + h_{kin}) \text{tr}[\overline{\mathbf{b}}^{e,trial}]}, \quad (7.127)
\end{aligned}$$

što uvrštavanjem u (7.126) daje:

$$\begin{aligned}
\partial_{\theta} (\mathcal{D}_{mech})_{n+1} &= -\chi \sqrt{\frac{2}{3}} (\partial_{\theta \xi}^2 K - \partial_{\theta} \sigma_y(\theta)) \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} + \\
&+ \chi \sqrt{\frac{2}{3}} (\beta - \sigma_y(\theta)) \frac{1}{\Delta t} \frac{-\sqrt{\frac{3}{2}} \partial_{\theta} \sigma_y(\theta) - (\partial_{\theta} \mu + \partial_{\theta} h_{kin}) \Delta \lambda \text{tr}[\overline{\mathbf{b}}^{e,trial}]}{\partial_{\xi} K + (\mu + h_{kin}) \text{tr}[\overline{\mathbf{b}}^{e,trial}]}. \quad (7.128)
\end{aligned}$$

Derivacija strukturnog zagrijavanja slijedi iz (6.17):

$$\partial_{\theta} \overline{\mathcal{H}}_{n+1} = \partial_{\theta} \overline{\mathcal{H}}_{n+1} \partial_{\theta} \bar{\theta}. \quad (7.129)$$

Pritom je zbog (7.31)<sub>1</sub>:

$$\partial_{\theta} (\bar{\theta}^h)_{n+1} = \Psi(X) \cdot \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \Psi(X) d\Omega. \quad (7.130)$$

Nadalje je,

$$\begin{aligned}
& \partial_{\bar{\theta}} \bar{\mathcal{H}}_{n+1} = \\
& = -\frac{1}{\Delta t} \left[ \partial_{\bar{\theta}} W(\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e, \bar{\theta}_{n+1}) - \partial_{\bar{\theta}} W(\bar{\mathbf{b}}_n^e, \bar{\theta}_n) + \partial_{\bar{\theta}} U(\bar{J}_{n+1}, \bar{\theta}_{n+1}) - \partial_{\bar{\theta}} U(\bar{J}_n, \bar{\theta}_n) + \right. \\
& + \partial_{\bar{\theta}} M(\bar{J}_{n+1}, \bar{\theta}_{n+1}) - \partial_{\bar{\theta}} M(\bar{J}_n, \bar{\theta}_n) \left. \right] - \\
& - \frac{\bar{\theta}_{n+1}}{\Delta t} \left[ \partial_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^2 W(\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e, \bar{\theta}_{n+1}) + \partial_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^2 U(\bar{J}_{n+1}, \bar{\theta}_{n+1}) + \right. \\
& \left. + \partial_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^2 M(\bar{J}_{n+1}, \bar{\theta}_{n+1}) \right], \quad (7.131)
\end{aligned}$$

a uz

$$\left. \begin{aligned}
& \partial_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^2 W = \frac{1}{2} \partial_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^2 \mu [\text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) - 3] \\
& \partial_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^2 U = \frac{1}{2} \partial_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^2 \kappa \left( \frac{1}{2} (\bar{J}^2 - 1) - \ln \bar{J} \right) \\
& \partial_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^2 M = -3 \left( \partial_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^2 \alpha (\theta - \theta_0) \partial_{\bar{J}} U + \alpha (\theta - \theta_0) \partial_{\bar{J}\bar{\theta}\bar{\theta}}^3 U + \alpha \partial_{\bar{J}\bar{\theta}}^2 U + \right. \\
& \quad \left. + \partial_{\bar{\theta}} \alpha \partial_{\bar{J}} U + \partial_{\bar{\theta}} \alpha (\theta - \theta_0) \partial_{\bar{J}\bar{\theta}}^2 U + \alpha (\theta - \theta_0) \partial_{\bar{J}\bar{\theta}}^2 U + \alpha \partial_{\bar{J}} U + \right. \\
& \quad \left. + \alpha \partial_{\bar{J}\bar{\theta}}^2 U + \partial_{\bar{\theta}} \alpha (\theta - \theta_0) \partial_{\bar{J}\bar{\theta}}^2 U + \partial_{\bar{\theta}} \alpha \partial_{\bar{J}} U \right)
\end{aligned} \right\}, \quad (7.132)$$

gdje je:

$$\partial_{\bar{J}\bar{\theta}\bar{\theta}}^3 U = \frac{1}{2} \partial_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^2 \kappa \left( \bar{J} - \frac{1}{\bar{J}} \right). \quad (7.133)$$

Identičnim argumentima kao u (7.80) konačno se dobiva

$$\int_{\Omega} \{ \mathcal{G}^* D[\bar{\mathcal{H}}_{n+1}] \cdot \mathcal{G} \} d\Omega = \int_{\Omega} \{ \bar{\mathcal{G}}^* \partial_{\bar{\theta}} \bar{\mathcal{H}}_{n+1} \bar{\mathcal{G}} \} d\Omega, \quad (7.134)$$

gdje je

$$\left. \begin{aligned}
& \bar{\mathcal{G}} = \Psi(X) \cdot \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \Psi(X) \mathcal{G} d\Omega \\
& \bar{\mathcal{G}}^* = \Psi(X) \cdot \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \Psi(X) \mathcal{G}^* d\Omega
\end{aligned} \right\}. \quad (7.135)$$

Konačno se termička matrica krutosti može pisati:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_T = & \int_{\Omega} \mathcal{G}^* \left( \partial_{\theta} c \frac{\theta - \theta_n}{\Delta t} + c \frac{1}{\Delta t} \right) \mathcal{G} d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mathcal{G}}^* \partial_{\bar{\theta}} \bar{\mathcal{H}} \bar{\mathcal{G}} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \mathcal{G}^* \{ \partial_{\theta} k \nabla \theta + k \nabla \mathcal{G} \} d\Omega - \\
& - \int_{\Omega} \mathcal{G}^* \left[ \frac{\chi \Delta \lambda}{\Delta t} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} (\partial_{\theta \xi}^2 K - \partial_{\theta} \sigma_y) + (\beta - \sigma_y) \frac{\Delta \lambda \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^{e,trial}]}{\partial_{\xi} K} - (\partial_{\theta} \mu + \partial_{\theta} h_{kin}) \right) \right] \mathcal{G} d\Omega + \\
& + \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}^* [\partial_{\theta} h(\theta_e - \theta) - h] \mathcal{G} d\Gamma + \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}^* [\partial_{\theta} \kappa_r(\theta_r - \theta) - \kappa_r] \mathcal{G} d\Gamma. \quad (7.136)
\end{aligned}$$

## 7.6. Tangencijalna matrica krutosti za izotermički problem

Tangencijalna se matrica krutosti za izotermički problem dobiva na identičan način kao za mehanički korak neizotermičkog slučaja. Ukoliko se ispuste članovi vezani za toplinske pojave dobiva se algoritamski tangencijalni tenzor već definiran izrazima (7.102)–(7.107).

Cilj ovoga poglavlja jest procjena formulacije i numeričkog algoritama predstavljenih u prethodnim poglavljima. Bit će predstavljeni primjeri za probleme izotermičke i neizotermičke plastičnosti pri velikim deformacijama. Numerička je obrada provedena pomoću vlastitog softwera nazvanog FemFem. Stoga će ukratko biti predstavljen software, a zatim i numerički rezultati.

### **8.1. Osnovne značajke programa FemFem**

Autor ove disertacije razvio je potpuno novi software za konačno-elementnu analizu nazvan FemFem. Pritom se nije dograđivao neki od već postojećih programa, već je u cijelosti program rezultat autorovog rada. Izuzetak su jedino potprogrami namijenjeni za rješavanje linearnog sustava algebarskih jednadžbi gdje su se koristila gotova i standardna rješenja.

Program je razvijen u Fortranu 90. Pri razvoju rabio se Microsoftov Fortran Powerstation, inačica 4.0.

Kratak pregled najvažnijih osobina:

- Program je podijeljen u 61 datoteku, te 495 potprograma i 196 funkcija.

- Veličina programa s komentarima iznosi 1,9 Mb (izvorni kod) i sadrži nešto više od 58000 redova koda. Ovakav opseg programa proizlazi iz željene univerzalnosti odnosno primjenjivosti programa.
- Rješava probleme iz linearne statike, velikih plastičnih deformacija i spregnute probleme termoplastičnosti pri velikim deformacijama. Detalji rješavanja opisani su u prethodnim poglavljima
- Ugrađeni su štapni elementi, klasični izoparametrijski elementi s 4 čvora (Q1), mješoviti izoparametrijski konačni elementi s tri polja i 4 čvora (Q1/P0), te mješoviti izoparametrijski konačni elementi s pet polja i 4 čvora (Q1/P0) za termomehaničke probleme.
- Mreže mogu biti heterogene, tj. u jednoj se mreži mogu koristiti različite vrste konačnih elemenata s različitim brojem stupnjeva slobode.
- Trenutno se mogu rješavati problemi ravninskog stanja deformacije, te osnosimetrični problemi. Nadogradnja koja omogućava rješavanje trodimenzionalne probleme ne predstavlja poteškoću i bit će uskoro provedena.
- Materijalne zakonitosti obuhvaćaju linearnu elastičnost, plastičnost pri velikim deformacijama i termoplastičnost pri velikim deformacijama.
- Ugrađeni su sljedeći rješavači linearnog sustava jednadžbi: LAPACKov direktni rješavač LA\_PBSVX koji koristi Choleskyevu dekompoziciju [99] i [100] (trakasto pohranjene matrice); SLAP/DLAP iteracijski rješavač temeljen na metodi predkondicioniranih (nepotpuni Cholesky) konjugiranih gradijenata [101] (shema pohranjivanja za rijetke matrice), SLAP/DLAP iteracijski rješavač temeljen na metodi predkondicioniranih (dijagonalno skaliranje) konjugiranih gradijenata [101] (shema pohranjivanja za rijetke matrice), direktni rješavač za simetrične i nesimetrične matrice iz FEAPpv, opisan u Zienkiewicz i Taylor [89] i dostupan na [102] (profilna shema pohranjivanja matrica), te IMSL direktni rješavač DLSAQS temeljen na Cholesky faktorizaciji i iteracijskim popravljanjem rješenja koji je uklopljen u Microsoftov Fortran Powerstation (trakasto pohranjene matrice).
- Sve realne varijable računaju se u dvostrukoj preciznosti.
- Ugrađena interna ponovna numeracija čvorova s ciljem smanjivanja širine trake matrice odnosno visine profila, Sloan [103].

- Priprema mreže konačnih elemenata izvodi se u komercijalnom softveru za konačno-elementnu analizu Patran odnosno MSC/Nastran za Windowse. Dobiva se tekstualna datoteka prikladna za analizu pomoću MSC/Nastrana. Nakon manje modifikacije koristi se za analizu u FemFemu.
- Izlazni se rezultati mogu dobiti u običnom tekstualnom zapisu, zatim u zapisu prikladnom za postprocessing u Patranu odnosno MSC/Nastran za Windows-e, te zapisu prikladnom za obradu u GID-u.
- Vrste mehaničkog opterećenja koje se trenutno koristi jesu koncentrirana sila, vlastita težina i pritisak, uz zadane pomake čvorova koji mogu biti različiti od nule. Moguće je zadati pomake kao konstantnu veličinu, ali i kao funkciju vremena. Pritisak na površinu može biti definiran kao prateće opterećenje.
- Kao termički rubni uvjeti odnosno opterećenje koristi se koncentrirano opterećenje, konvekcija i radijacija, uz mogućnost zadavanja porasta temperature u čvorovima.
- Funkcija tečenja se definira kao proizvoljna funkcija, bilo linearna ili nelinearna. Isto vrijedi i za ostale funkcijske ovisnosti materijalnih značajki o temperaturi.
- Za nelinearne probleme koristi se Newton-Raphsonova metoda. Moguće je koristiti računanje matrice krutosti u svakoj iteraciji ili u unaprijed zadanoj frekvenciji računanja (primjerice modificirana Newton-Raphsonova metoda s računanjem matrice krutosti samo u prvoj iteraciji). Ugrađen je algoritam linijskog traženja.
- Ugrađena mogućnost ponovnog pokretanja prekinutog proračuna (restart) u proizvoljnom koraku (izuzev termoplastičnih problema).
- Pri većem broju divergencija po iteraciji od zadane koristi se automatska metoda bisekcije, tj. smanjivanja veličine koraka (izuzev termoplastičnih problema).
- Kao kriterij konvergencije može se koristiti pomake, reziduum i rad. Pritom se mogu koristiti sva tri istovremeno, samo jedan ili neka njihova kombinacija. Pritom se promatra veličina norme spomenutih vektora spram vrijednosti norme u prvoj iteraciji trenutnog koraka.
- Moguće je zadati maksimalni broj iteracija po pojedinačnom koraku.

- Moguće je definirati frekvenciju ispisa i sadržaj rezultata.
- Za izoparametrijske konačne elemente odabire se željena točnost integracije, od 2 do 5 točaka po dimenziji.
- Broj konačnih elemenata i čvorova nije ograničen softwareom, već samo kapacitetom računala.
- Vrijednosti naprezanja, deformacije i drugih veličina koje su izračunate u Gaussovima točkama integracije, interpoliraju se u čvorne vrijednosti pomoću algoritma opisanog u Simo [18].

## 8.2. Izotermički procesi deformiranja

### 8.2.1. Ekspanzija debelostijenog cilindra

Ovaj primjer predstavlja uobičajeni numerički test za algoritme plastičnosti pri konačnim deformacijama. Razmatran je u Simo i Ortiz [19], Simo [18], Ibrahimbegović i Gharzeddine [31], Eve i Reddy [104] i drugdje. Ovaj je primjer od posebnog interesa obzirom da za njega postoje analitička rješenja.

Razmatra se dugački osnosimetrični debelostijeni cilindar podvrgnut unutarnjem pritisku. Početni unutarnji polumjer cilindra iznosi  $a = 10$  mm dok je početni vanjski polumjer  $b = 20$  mm. Kao opterećenje uvodi se zadani pomak čvorova na unutarnjoj stijenci cilindra u ukupnom iznosu od  $u = 75$  mm. Očito je riječ o velikim plastičnim deformacijama. Materijalne značajke, Tab. 8.1., odabrane su tako da se modelira idealno plastično ponašanje materijala.

Tab. 8.1. Materijalne značajke debelostijenog cilindra

Modul smicanja	$\mu$	3800 MPa
Modul kompresije	$\kappa$	40000 MPa
Naprezanje tečenja	$\sigma_y$	0,5 MPa
Modul očvršćivanja	$h$	0

Analitičke se vrijednosti radijalnog naprezanja na unutarnjoj stijenci cilindra dobivaju, Prager i Hodge [105, str. 117-118]:

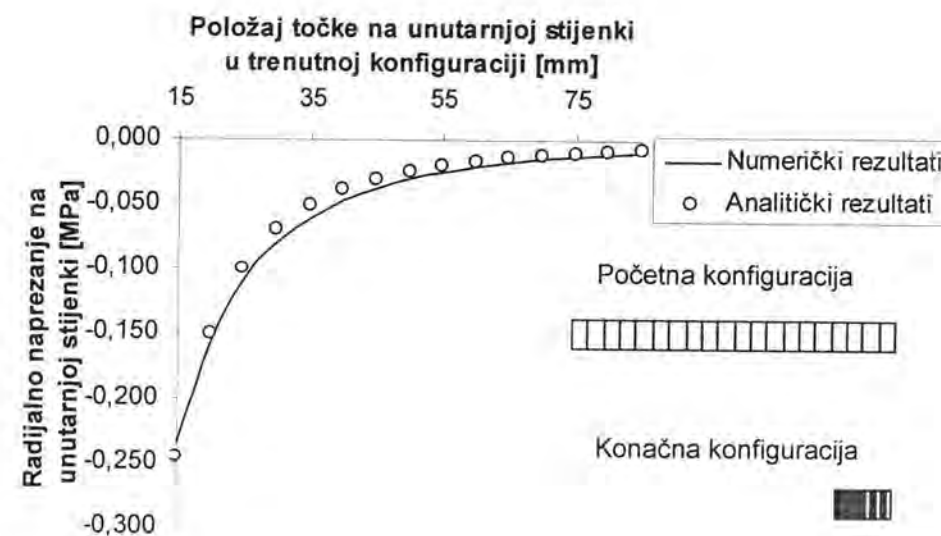
$$\sigma_r = -\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \log_{10} \left( 1 + \frac{b_0^2 - a_0^2}{a^2} \right), \quad (8.1)$$

gdje je  $a$  trenutna vrijednost unutarnjeg polumjera cilindra.

Kako je ovo u osnovi jednodimenzionalni problem, bilo je dovoljno upotrijebiti mrežu koja se sastojala od 20 osnosimetričnih mješovitih izoparametrijskih Q1/P0 konačnih elemenata po debljini postavljenih u jedan red. Njezin početni i konačni izgled prikazan je u sklopu sl. 8.1.

U svim je primjerima u ovom poglavlju parametar linijskog pretraživanja iznosio 0,6. Analiza je provedena u 15 inkremenata. Kao kriterij konvergencije rabljen je kriterij pomaka ( $10^{-7}$ ), reziduuma ( $10^{-7}$ ) i energije ( $10^{-10}$ ). Korištena je Newton-Raphsonova metoda.

Dobivena raspodjela radijalnog naprezanja na unutarnjoj stijenci cilindra, sl. 8.1., dobro se podudara s analitičkim rješenjima.



Sl. 8.1. Radijalna Cauchyeva naprezanja na unutarnjoj stijenci u odnosu spram unutarnjeg polumjera cilindra

Broj iteracija u pojedinom koraku prikazan je tab. 8.2. Uočljiv je maleni broj iteracija po koraku.

Tab. 8.2. Broj iteracija u pojedinom koraku

Korak	1-4	5-15
Broj iteracija	5	4

### 8.2.2. Sužavanje epruvete cilindričnog poprečnog presjeka

Ovo standardno eksperimentalno ispitivanje mehaničkih osobina materijala dobro je poznato u inženjerstvu. No, numeričko modeliranje ovoga eksperimenta predstavlja brojne izazove. U izotermičkom kontekstu ovaj je primjer obrađen u Simo [18], Hallquist [106, str. 37-42] te u radu Norrisa<sup>1</sup>.

Aksijalnim se testom ispituje epruveta duljine 53,334 mm i kružnog poprečnog presjeka polumjera 6,413 mm. Izraz koji opisuje nelinearno izotropno očvršćivanje materijala dobiven je u Simo [18] na osnovu interpolacije podataka publiciranih u Hallquist [106]. Podaci odgovaraju čeliku za A-533 Grade B Class 1, namijenjenom za posude pod pritiskom u nuklearnom inženjerstvu, tab. 8.3. Funkcija koja se koristi za opisivanje izotropnog očvršćivanja ima oblik:

$$-\beta + \sigma_y = y_0 + h\xi + [y_\infty - y_0](1 - e^{-\delta\xi}). \quad (8.2)$$

Tab. 8.3. Materijalne značajke čelika A-533 Grade B Class 1

Modul smicanja	$\mu$	80,1938 GPa
Modul kompresije	$\kappa$	164,206 GPa
Početno naprezanje tečenja	$y_0$	0,450 GPa
Rezidualno naprezanje tečenja	$y_\infty$	0,715 GPa
Koeficijent linearnog očvršćivanja	$K$	0,12924 GPa
EkspONENT zasićenja	$\delta$	16,93

<sup>1</sup> Autor ovoga rada nije imao neposredni uvid u rad Norrisa, već samo putem citata u Simo [18] i Hallquist [106], te prenosi podatke iz tih izvora.

Rastezanje se epruvete postiže zadavanjem pomaka krajeva tako da ukupno produljenje epruveta na kraju procesa deformiranja iznosi  $\Delta u = 14$  mm. Radi simetrije dovoljno je modelirati samo jednu četvrtinu uzdužnog presjeka epruvete. Pritom se trebaju primijeniti odgovarajući rubni uvjeti. Čvorovima na krajevima epruvete zadaju se takvi rubni uvjeti da se onemogući sužavanje na samome kraju epruvete. Analiza je provedena za dvije gustoće mreže, ukupno 50 odnosno 410 konačnih elemenata. Početne i krajnje mreže prikazane su u sklopu Sl. 8.2. Kao i u ranijem primjeru, korišteni su Q1/P0 izoparametrijski konačni elementi s četiri čvora.

Dobro je poznato da analiza sužavanja epruvete u izotermnim uvjetima vodi k bifurkacijskom problemu, Wriggers i dr. [88]. Radi ublažavanja problema, uvodi se početna geometrijska nepravilnost u vidu linearnog sužavanja epruvete od krajeva prema sredini. Na taj je način početni polumjer epruvete na sredini 6,29757 mm. Uz ovo, algoritam linijskog traženja od ključne je važnosti za svladavanje bifurkacijskog problema i povećavanje robustnosti algoritma. Ovo se posebno odnosi na početne iteracije u inkrementu. Pritom je parametar linijskog pretraživanja iznosio 0,6.

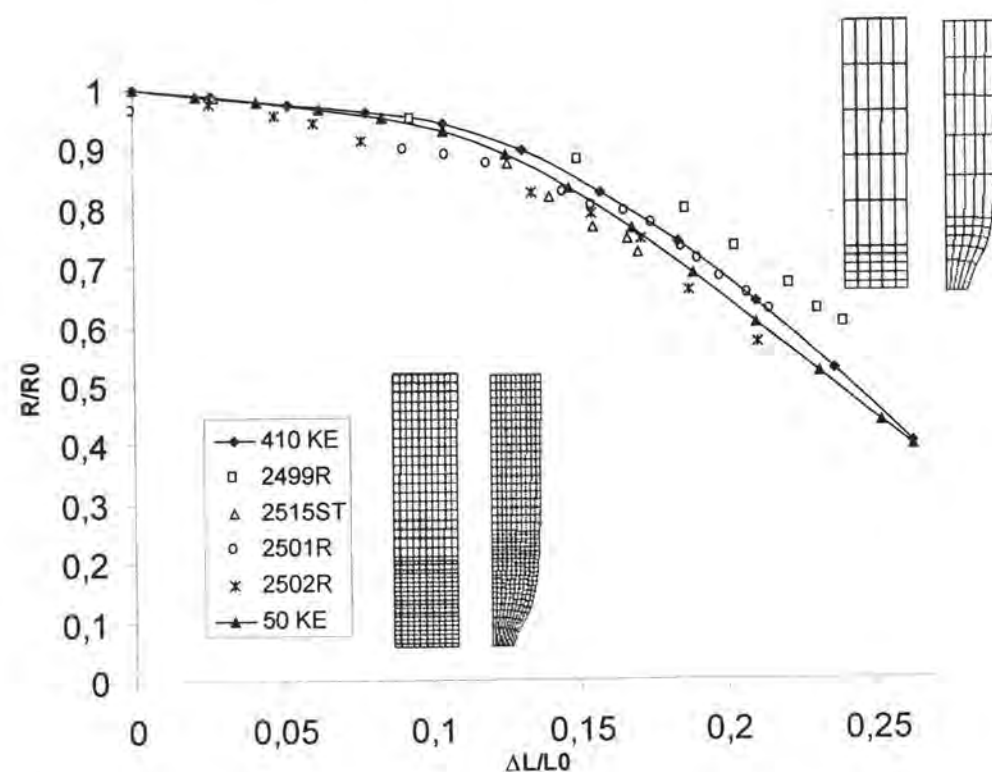
Analiza je provedena u 50 koraka za mrežu od 410 konačnih elemenata, odnosno 25 za mrežu od 50 elemenata. Nasuprot tome, rezultati u Hallquist [106] pomoću NIKE2D programa dobiveni su sa 100 koraka, a oni u spomenutom radu Norrisa pomoću HEMP koda u 29000 koraka. Iako Simo [18] posebno naglašava da je njegova analiza bila provedena i u samo 15 koraka, autor ovoga rada nije mogao ponoviti ove rezultate. Razlog leži u činjenici da je analiza u 15 koraka provedena na računaru sa četverostrukom preciznošću, što autor ovoga rada nije imao na raspolaganju. Kao što je spomenuto, pri trenutku iniciranja sužavanja epruvete problem postaje bifurkacijske prirode i time matrica krutosti teži lošoj kondicioniranosti, Golub i Van Loan [107]. Procijenjena recipročna vrijednost kondicijskog broja matrice u tom trenutku naglo pada, što povećava grešku u izračunu vektora pomaka. Konačno, determinanta gradijenta deformacije uslijed pogrešno izračunatih pomaka u nekim integracijskim točkama poprima nedopustivu negativnu vrijednost a time dovodi i do prekida proračuna. U slučaju četverostruke preciznosti računala ovaj problem je svakako manje izražen, što i omogućuje manji broj koraka. Analiza mrežom od 410 elemenata u ekstremnom je slučaju provedena i sa 22 koraka, no pritom je korišteno automatsko smanjivanje/povećavanje koraka pomoću metode bisekcije.

Na ovome mjestu treba naglasiti da su ovdje bili isprobani svi spomenuti rješavači linearnog sustava jednadžbi (odjeljak 8.1). Apsolutno najbolje osobine (u

ovome, ali i u ostalim primjerima) pokazao je direktni rješavač preuzet iz FEAP koda. Iako znatno efikasniji u linearnim problemima, iteracijski rješavači pokazali su se potpuno neprikladnim za primjenu u izotermičkim problemima, Wriggers [1] i Ničeno [108]. U neizotermičkim problemima (odjeljak 8.3) iteracijski rješavači pokazali su približno jednake značajke kao i FEAP-ov rješavač.

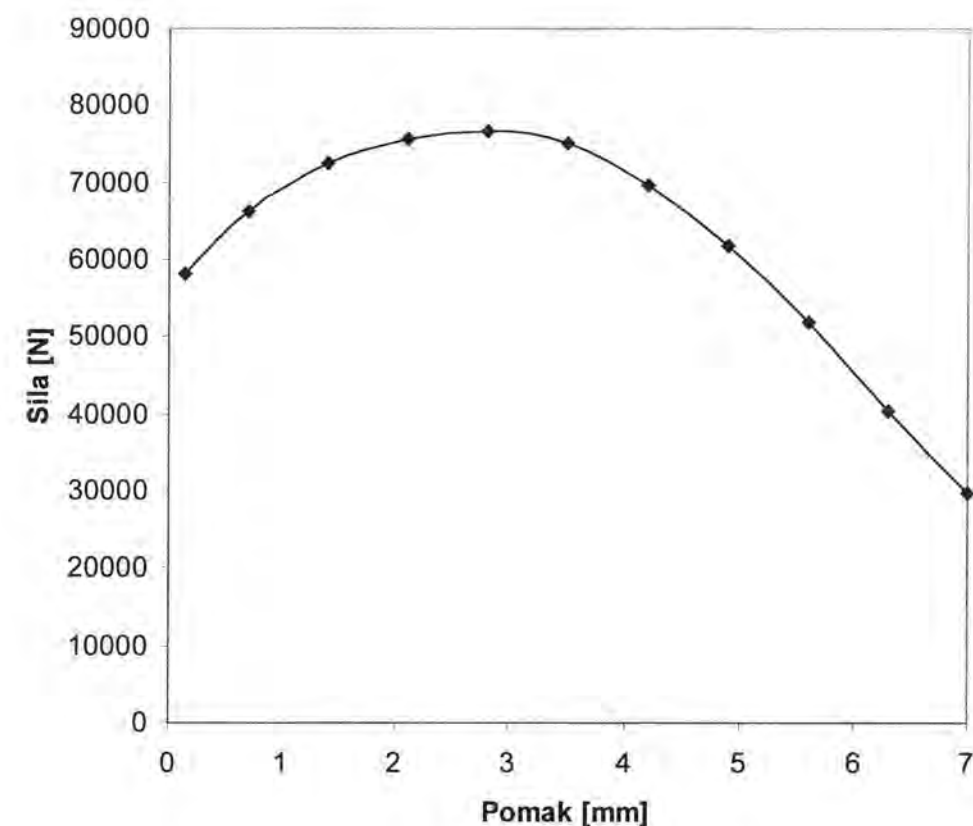
Kao kriterij konvergencije rabljen je kriterij pomaka ( $10^{-7}$ ), reziduuma ( $10^{-7}$ ) i energije ( $10^{-10}$ ). Korištena je Newton-Raphsonova metoda.

Krivulje koje opisuju sužavanje epruvete spram produljenja epruvete prikazane su na sl. 8.2. Ovom slikom također su prikazani eksperimentalni rezultati preuzeti iz Hallquist [106]. Dobra korelacija izmjerenih i numerički dobivenih rezultata jasno je vidljiva. Također se naglašava da su rezultati dobiveni vrlo grubom mrežom od 50 elemenata neznatno različiti od onih dobivenih s 410 elemenata.



Sl. 8.2. Sužavanje prema produljenju epruvete. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata.

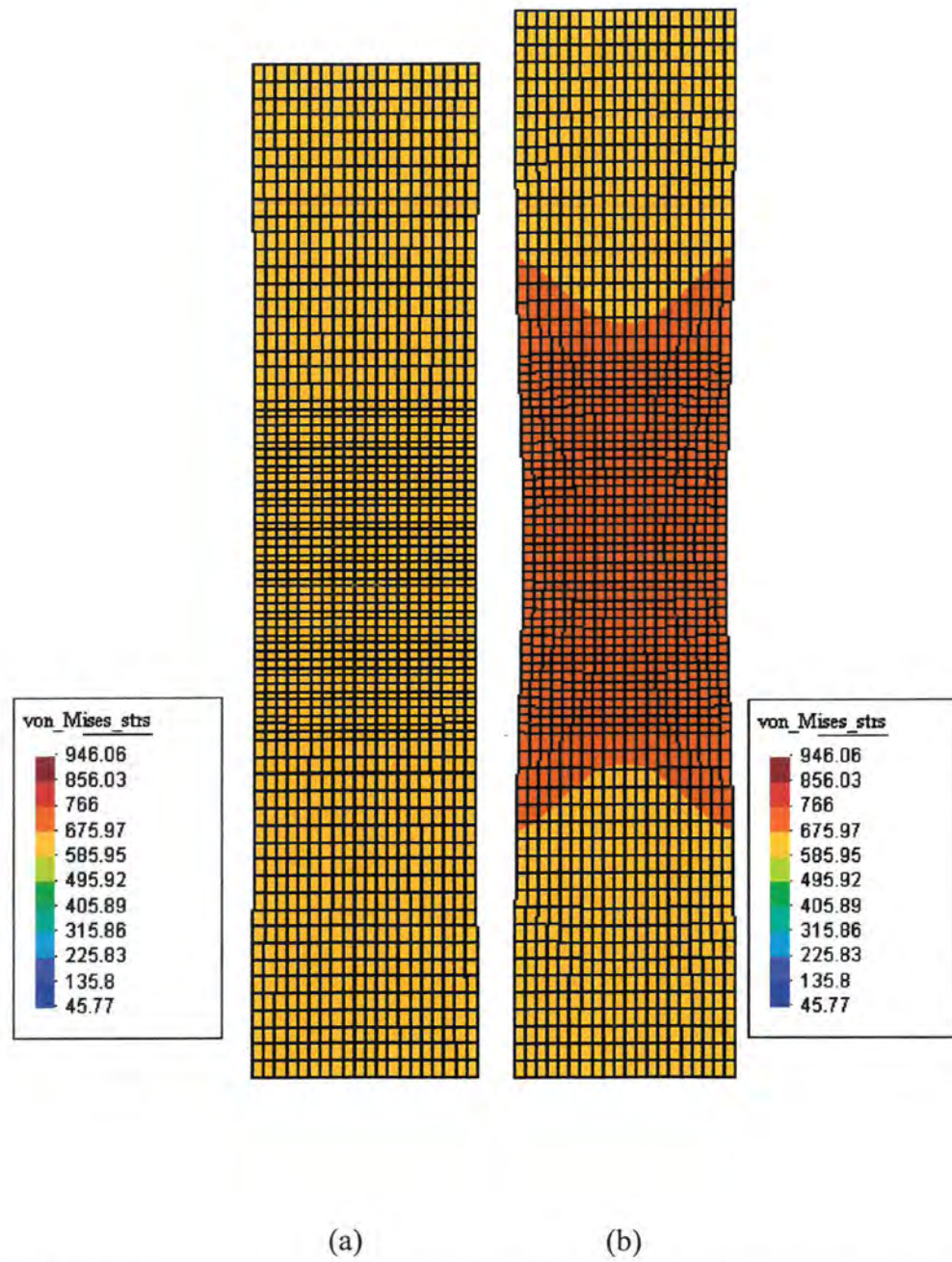
Jedan od osnovnih rezultata koji se dobiva aksijalnim rastezanjem epruvete na kidalici jest  $F - \Delta L$  dijagram. Isti je dijagram dobiven i numeričkim putem, Sl. 8.3. Analiza je provedena mrežom od 410 konačnih elemenata u 50 koraka. Ukupan je broj iteracija bio 255, što iznosi nešto više od 5 iteracija po koraku. Rezultati prikazani u Simo [18] dobiveni su s 124 iteracije u 15 koraka, što iznosi prosječno 8,27 iteracija po koraku.



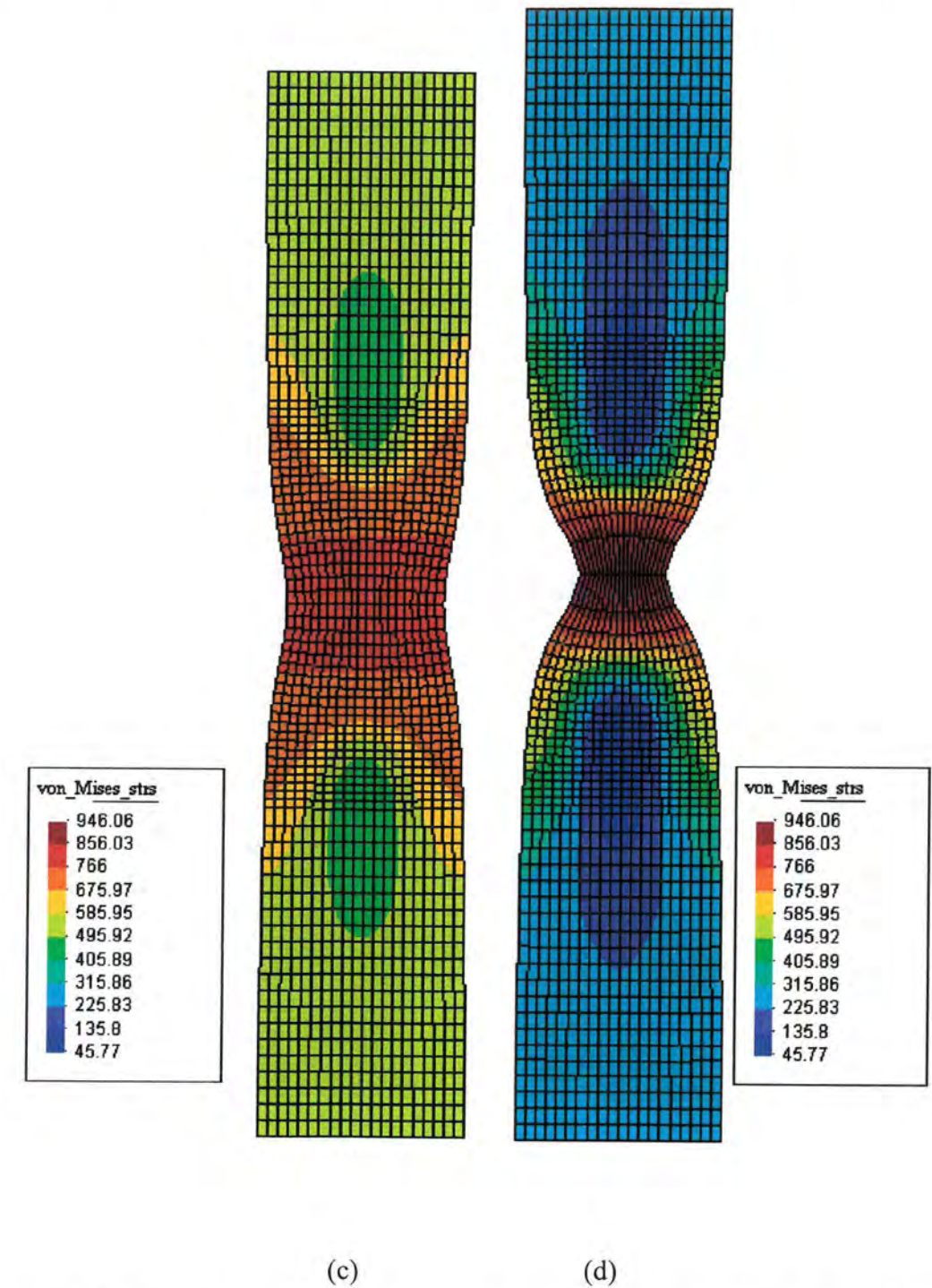
Sl. 8.3.  $F - \Delta L$  dijagram. Mreža od 410 konačnih elemenata. 50 koraka.

Sl. 8.4. prikazuje raspodjelu ekvivalentnog naprežanja po von Misesu za različita produljenja epruvete, Sl. 8.5. prikazuje raspodjelu radijalnih (a) i aksijalnih (b)

naprežanja teže nuli s približavanjem površini epruvete. Ova je zakonitost nešto poremećena jedino u području sužavanja epruvete.

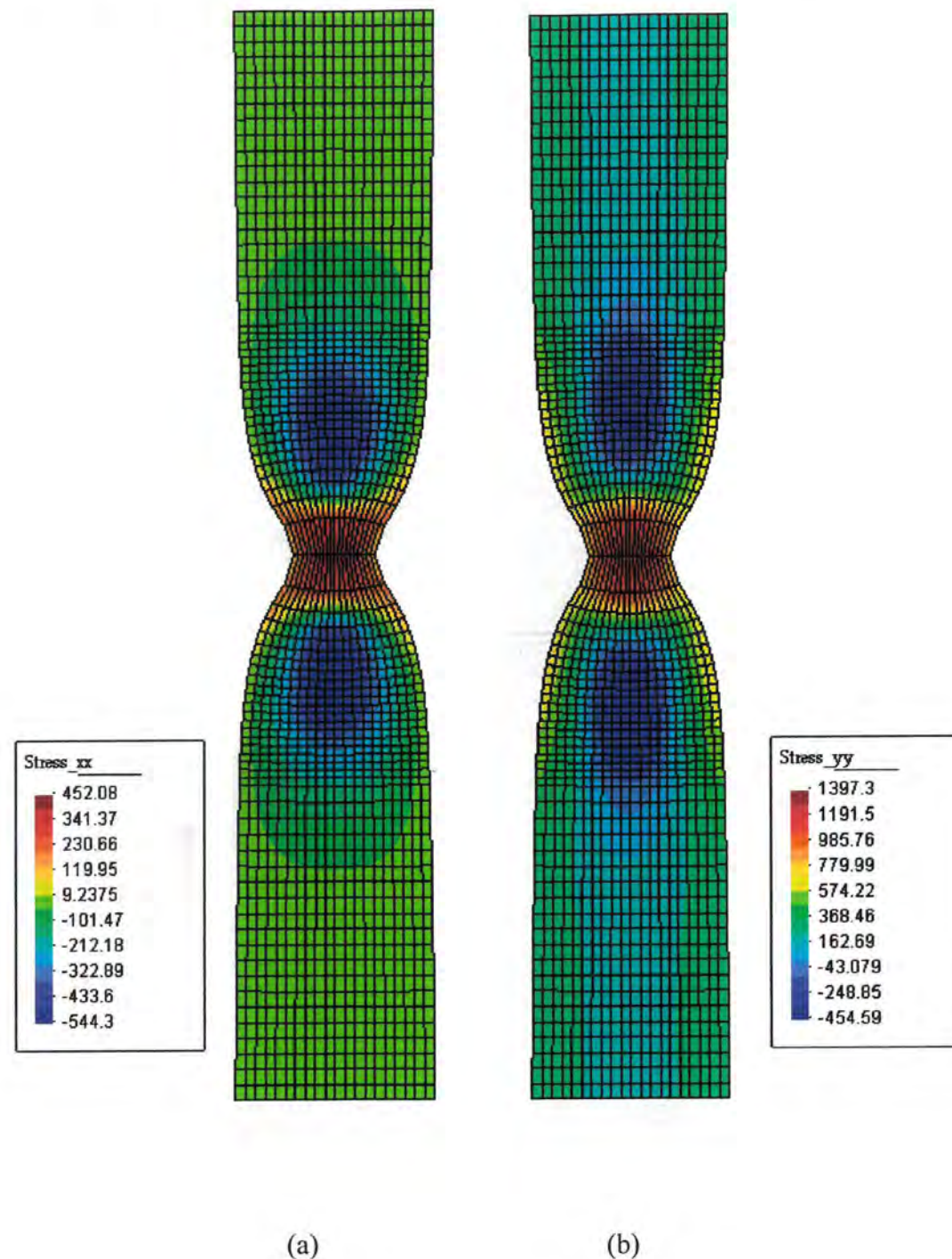


Sl. 8.4. Ekvivalentna naprezanja po Von Misesu za produljenja (a)  $\Delta u = 1,4$  mm i (b)  $\Delta u = 7,0$  mm. Mreža od 410 elemenata. 50 koraka.



Sl. 8.4. (nastavak) Ekvivalentna naprezanja po von Misesu za produljenja (c)  $\Delta u = 9,8$  mm i (d)  $\Delta u = 14$  mm. Mreža od 410 elemenata. 50 koraka.





Sl. 8.5. Raspodjela radialnih (a) i aksijalnih (b) Cauchyevih napreznja na kraju procesa deformiranja. Mreža od 410 elemenata. 50 koraka.

### 8.3. Neizotermički problemi

#### 8.3.1. Ekspanzija debelostijenog cilindra

Analogno sličnom problemu u kontekstu izotermne plastičnosti, ovaj primjer također predstavlja standardni problem za testiranje numeričkih algoritama. Problem je rješavan u radu Simo i Miehe [25], Simo i Armero [24], Argyris i Doltsinis [13] kao problem termoplastičnosti. U radu Ibrahimbegović i Chorfi [32] korišten je termoviskoplastični model.

Debelostijeni cilindar s unutarnjim polumjerom  $a = 100$  mm i vanjskim polumjerom  $b = 200$  mm opterećen je unutarnjim tlakom. Kao i u izotermnom slučaju, umjesto pritiska uvodi se ekvivalentno opterećenje putem propisanih pomaka. Tako se unutarnji polumjer mora povećati za  $u = 130$  mm.

Ovdje će biti razmatrana dva slučaja: sa konstantnim materijalnim značajkama, što odgovara algoritmu i rezultatima iz Simo i Miehe [25] i sa materijalnim značajkama kao funkcijama temperature.

Cilindar se smatra dugačkim, te se tako može usvojiti pretpostavka o ravninskom stanju deformacije. Materijalne se značajke odabiru u skladu s prethodno spomenutim radovima drugih autora. Na taj način materijal ima linearno izotropno očvršćivanje i linearno toplinsko omekšavanje, Tab. 8.4 i Tab 8.5. Zakonitost tečenja definirana je sljedećom relacijom:

$$-\beta + \sigma_y = h(\theta)\xi + [y_0(\theta) - y_\infty(\theta)](1 - e^{-\delta\xi}) + y_0(\theta), \quad (8.3)$$

gdje su

$$\left. \begin{aligned} y_0(\theta) &= y_0(\theta_0)[1 - \omega_0(\theta - \theta_0)] \\ h(\theta) &= h(\theta_0)[1 - \omega_h(\theta - \theta_0)] \\ y_\infty(\theta) &= y_\infty(\theta_0)[1 - \omega_h(\theta - \theta_0)] \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Tab. 8.4. Materijalne značajke debelostijenog cilindra - konstantne

Modul smicanja	$\mu$	58333 MPa
Modul kompresije	$\kappa$	26926 MPa
Naprezanje tečenja	$\sigma_y$	70 MPa
Modul izotropnog očvršćivanja	$h$	210 MPa
Gustoća	$\rho$	$2,7 \cdot 10^{-9} \text{ N s}^2/\text{mm}^4$
Koeficijent toplinskog rastezanja	$\alpha$	$23,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Toplinska provodljivost	$k$	150 N/sK
Toplinski kapacitet pri konst. def.	$c_0$	$2,43 \text{ N/mm}^2\text{K}$
Faktor disipacije	$\chi$	0,9
Omekšavanje naprezanja tečenja	$\omega_0$	$3 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
Omekšavanje modula očvršćivanja	$\omega_h$	0

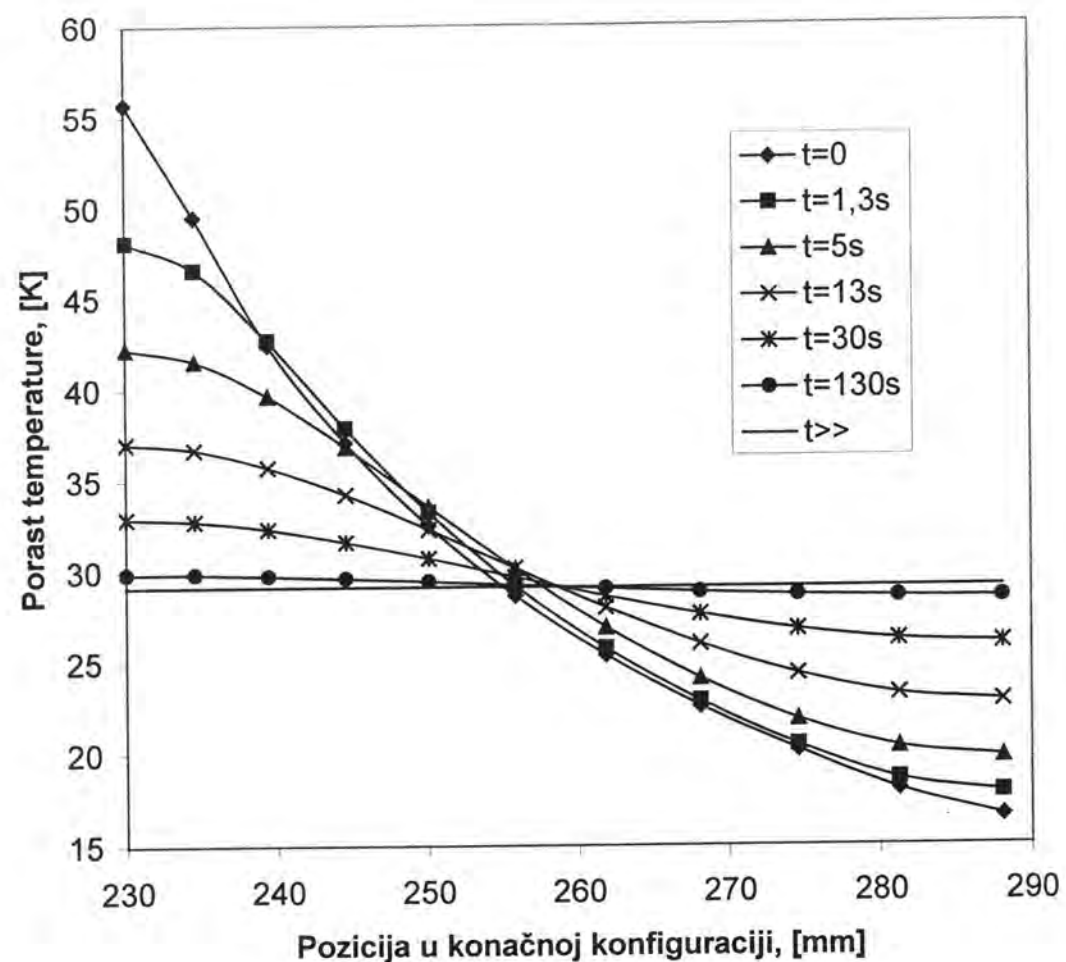
Tab. 8.5. Materijalne značajke debelostijenog cilindra - promjenjive

Modul smicanja	$\mu$	$-1,68 \cdot 10^1 \theta + 3,17 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
Modul kompresije	$\kappa$	$-3,64 \cdot 10^1 \theta + 6,86 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
Naprezanje tečenja	$\sigma_y$	70 MPa
Modul izotropnog očvršćivanja	$h$	210 MPa
Gustoća	$\rho$	$2,7 \cdot 10^{-9} \text{ N s}^2/\text{mm}^4$
Koeficijent toplinskog rastezanja	$\alpha$	$1,70 \cdot 10^{-8} \theta + 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
Toplinska provodljivost	$k$	150 N/sK
Toplinski kapacitet pri konst. def.	$c_0$	$1,375 \cdot 10^{-3} \theta + 2,0171 \text{ N/mm}^2\text{K}$
Faktor disipacije	$\chi$	0,9
Omekšavanje naprezanja tečenja	$\omega_0$	$3 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
Omekšavanje modula očvršćivanja	$\omega_h$	0

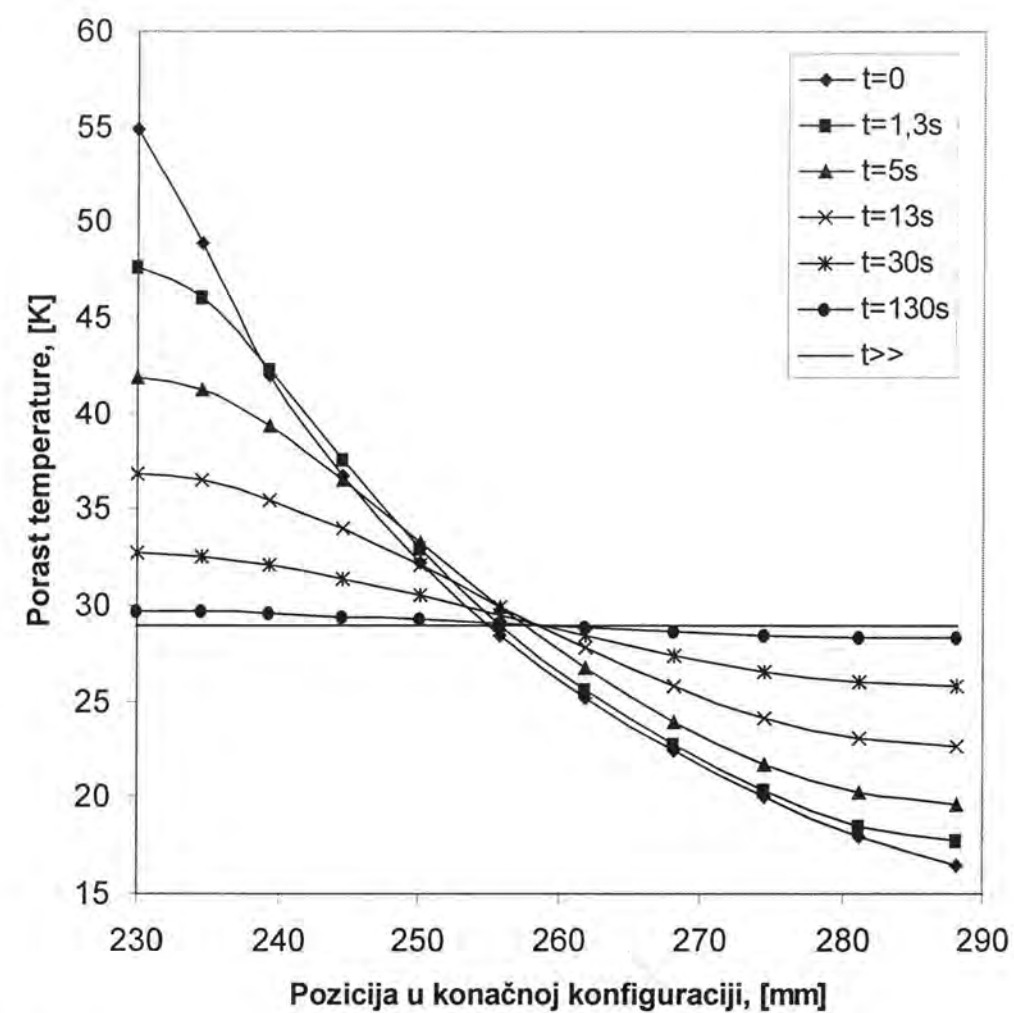
Temperatura prije uvođenja opterećenja jednoliko je raspoređena po cilindru i iznosi  $\theta_0 = 293 \text{ K}$ . Cilindar se smatra toplinski izoliranim, tako da na površinama nema izmjene topline. Na taj se način provođenje topline odvija samo u radijalnom smjeru. Za analizu koristila se mreža od 10 osnosimetričnih konačnih elemenata. Elementi su temeljeni na mješovitoj izoparametarskoj formulaciji s pet polja. Početni izgled mreža konačnih elemenata prikazan je u sklopu sl. 8.6.

Proces deformiranja promatran je kroz nekoliko vremenskih perioda:  $t = 1,3; 5,13; 30; 130 \text{ s}$ . Također su određena i dva granična slučaja:  $t \rightarrow 0$  i  $t \rightarrow \infty$ . Dobivena raspodjela porasta temperature duž stijenke cilindra u ovim slučajevima prikazana je na sl. 8.6 i sl. 8.7. Pritom prva slika prikazuje rezultate dobivene s konstantnim materijalnim značajkama, dok druga s promjenjivim. Kako je razmjena topline s okolicom onemogućena, za beskonačno trajanje procesa deformiranja duž stijenke cilindra temperatura je jednoliko raspoređena. Kao što se to moglo i očekivati, pri kraćim je vremenima deformiranja najveći porast temperature na unutarnjoj stijenci cilindra.

Također se može uočiti da promjenjive materijalne značajke doprinose nešto nižim vrijednostima porasta temperature. To je posebno uočljivo pri procesima s kraćim trajanjem.

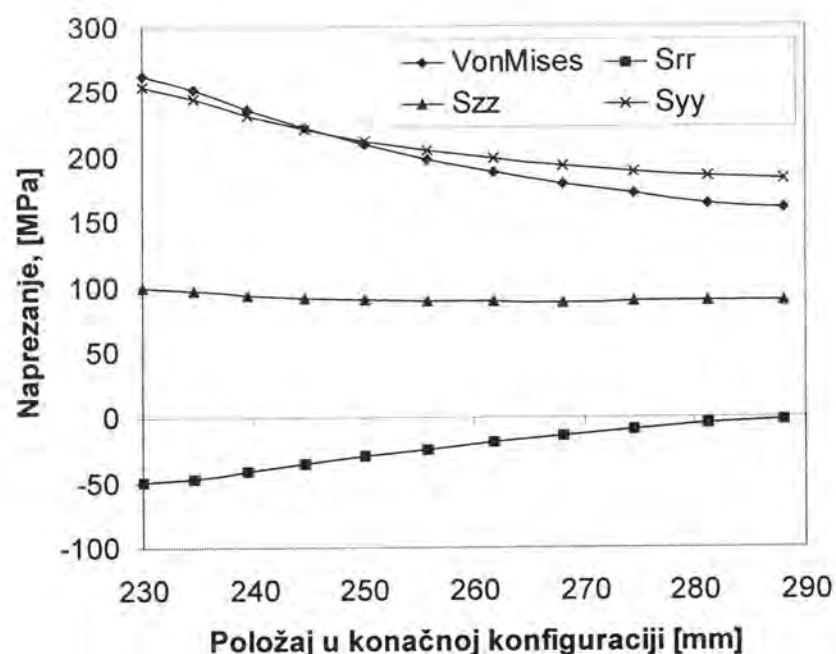


Sl. 8.6. Raspodjela porasta temperature za različito trajanje procesa deformiranja za konstantne materijalne značajke. Algoritam i rezultati istovjetni su onima u Simo i Miehe [25].



Sl. 8.7. Raspodjela porasta temperature za različito trajanje procesa deformiranja za promjenjive materijalne značajke

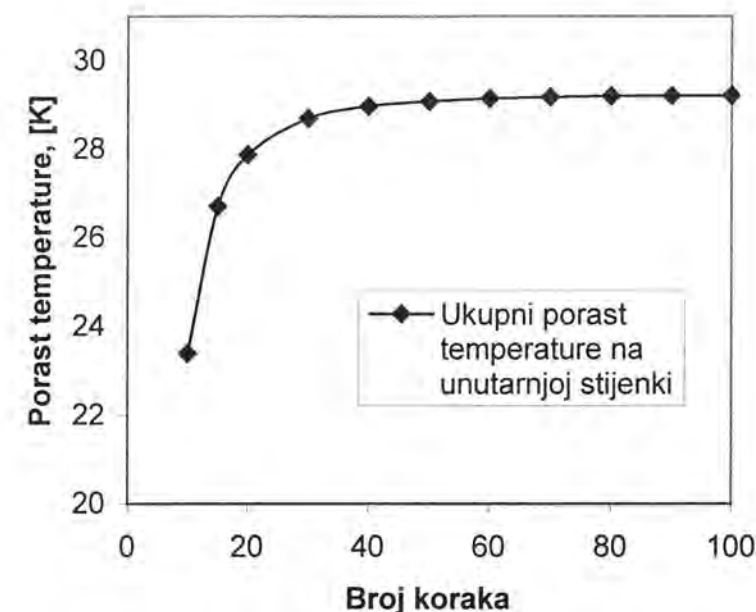
Na sl. 8.8 prikazana je raspodjela Cauchyevih naprezanja za slučaj kada proces deformiranja traje  $t = 130$  s i to na završetku procesa. Kako je na vanjskoj stijenci pritisak jednak nuli, jasno je uočljivo opadanje radijalnih naprezanja prema vanjskoj stijenci do konačne vrijednosti nula.



Sl. 8.8. Raspodjela Cauchyevih napreznja za proces  $t=130$  s. VonMises – von Misesova napreznja,  $S_{rr}$  –  $\sigma_r$ ,  $S_{zz}$  –  $\sigma_z$ ,  $S_{yy}$  –  $\sigma_\varphi$ .

Svi spomenuti proračuni provedeni su sa 100 jednakih vremenskih koraka. Nasuprot tome, u radu Argyris i Doltsinis [13] korišteno je 800 vremenskih koraka. No, analiza je provedena i za manji broj vremenskih koraka. Pritom su dobivene temperature na unutarnjoj stijenci prikazane na sl. 8.9. Vidljivo je da je već nakon 40 koraka ostvarena konvergencija. Rezultati koji se pritom dobivaju podudaraju se s onima u spomenutom radu.

Valja naglasiti da smanjeni broj koraka ne rezultira u povećanom broju iteracija po koraku. Naprotiv, izuzev prvog mehaničkog koraka gdje je bilo potrebno 5 iteracija, u svim preostalim koracima (i mehanički i termički) bile su potrebne 4 iteracije za zadovoljavanje kriterija konvergencije. Kriterij konvergencije bio je praćenje vektora varijabli i reziduuma s tolerancijom od  $10^{-9}$ . Kvadratični karakter Newton-Raphsonovog algoritma jasno je uočljiv u tab. 8.6. gdje su prikazane greške i norme ovih vektora za jedan tipični korak (21).



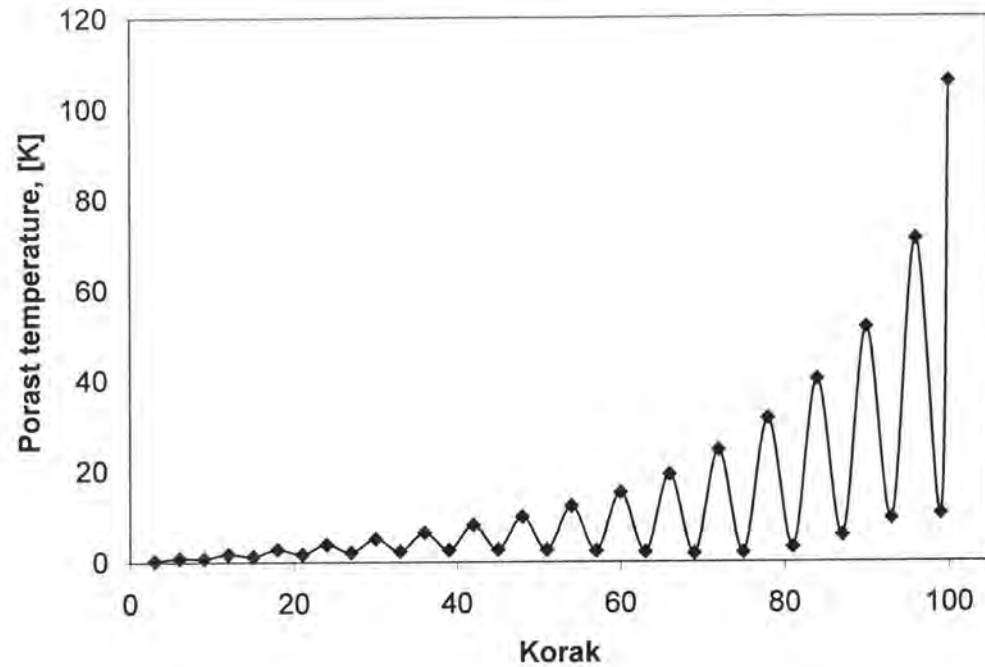
Sl. 8.9. Ukupni porast temperature na unutarnjoj stijenci cilindra u funkciji broja vremenskih koraka,  $t = 130$  s

Tab. 8.6. Greške i norme u vektorima varijabli i reziduuma ( $t=130$  s)

21. korak	Iteracija	Varijable		Reziduum	
		Greška	Norma	Greška	Norma
Mehanička faza	1	1,000E+00	4,757E+00	1,000E+00	9,302E+04
	2	1,216E-03	5,782E-03	2,230E-06	2,075E-01
	3	4,580E-08	2,178E-07	1,211E-10	1,127E-05
	4	9,052E-12	4,306E-11	2,269E-11	2,110E-06
Toplinska faza	1	1,000E+00	1,124E+00	1,000E+00	7,258E+03
	2	2,665E-04	2,995E-04	4,187E-08	3,039E-04
	3	3,483E-08	3,915E-08	4,093E-11	2,970E-07
	4	4,568E-12	5,135E-12	3,034E-11	2,202E-07

Kako je to spomenuto u 6. poglavlju, izotermička podjela nije numerički bezuvjetno stabilna. Ovakva se nestabilnost može uvesti umjetnim povećanjem spregnutosti između mehaničke i toplinske faze, primjerice pomoću povećanja koeficijenta toplinske ekspanzije. Povećanje od 5,7 puta dovodi do pojave nestabilnosti. Oscilacije u porastu temperature na unutarnjoj stijenci prikazane su na

sl. 8.10. Bezuvjetna se stabilnost postiže uvođenjem tzv. izentropske podjele, Armero i Simo [24].



Sl. 8.10. Gubitak stabilnosti algoritma temeljenog na izotermičkoj podjeli ( $t=130$  s)

### 8.3.2. Ekspanzija debelostijene sfere

Ovdje će biti razmatrana ekspanzija debelostijene sfere početnog unutarnjeg polumjera  $A=10$  mm i vanjskog  $B=20$  mm. Na unutrašnju stranu stijenske djeluje konstantni tlak  $p_A=187,5$  MPa. Na vanjskoj stijenci zadaje se porast temperature od  $\vartheta_B=333,333$  K. Ukupno vrijeme trajanja procesa iznosi  $t=7$  s. Na početku je cijela sfera na konstantnoj temperaturi  $\theta_0=293$  K.

Materijalne značajke odabiru se za dva slučaja. Prvi slučaj koristi konstantne materijalne značajke (izuzev naprezanja tečenja) te koristi algoritam i daje rezultate istovjetne onima opisanima u Simo i Miehe [25]. Drugi slučaj koristi materijalne značajke kao funkcije temperature. Pregled materijalnih značajki dat je u tab. 8.7 za prvi slučaj, odnosno u tab. 8.8 za drugi slučaj.

Tab. 8.7. Materijalne značajke debelostijene sfere - konstantne

Modul smicanja	$\mu$	76920 MPa
Modul kompresije	$\kappa$	166670 MPa
Naprezanje tečenja	$y_0$	300 MPa
Modul izotropnog očvršćivanja	$h$	700 MPa
Gustoća	$\rho$	$7,8 \cdot 10^{-9}$ Ns <sup>2</sup> /mm <sup>4</sup>
Koeficijent toplinskog rastezanja	$\alpha$	$1,0 \cdot 10^{-6}$ K <sup>-1</sup>
Toplinska provodljivost	$k$	45 N/sK
Toplinski kapacitet pri konst. def.	$c_0$	3,588 N/mm <sup>2</sup> K
Faktor disipacije	$\chi$	0,9
Omekšavanje naprezanja tečenja	$\omega_0$	0,003 K <sup>-1</sup>
Omekšavanje modula očvršćivanja	$\omega_h$	0

Tab. 8.8. Materijalne značajke debelostijene sfere - promjenjive

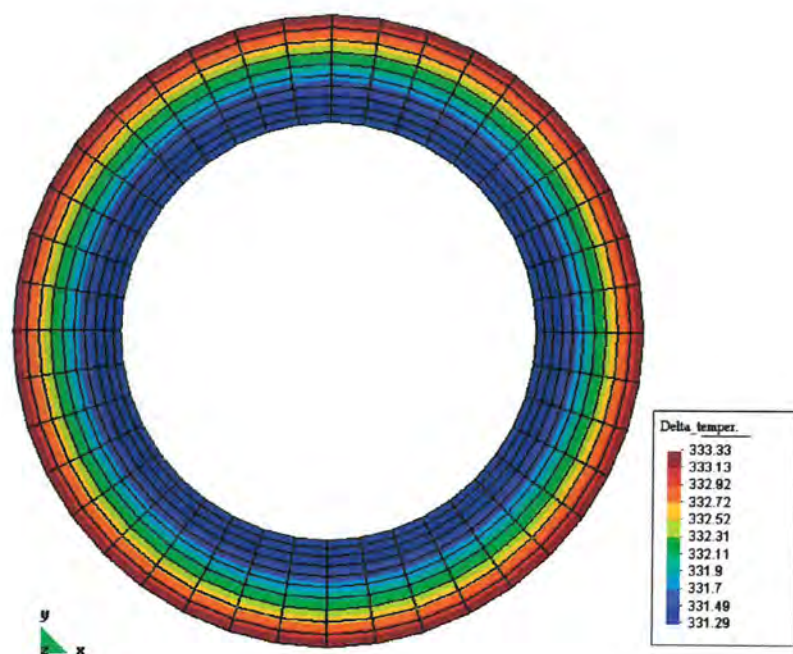
Modul smicanja	$\mu$	$-30,7\theta + 8,99 \cdot 10^4$ MPa
Modul kompresije	$\kappa$	$-66,6\theta + 1,95 \cdot 10^5$ MPa
Naprezanje tečenja	$y_0$	300 MPa
Modul izotropnog očvršćivanja	$h$	700 MPa
Gustoća	$\rho$	$7,8 \cdot 10^{-9}$ Ns <sup>2</sup> /mm <sup>4</sup>
Koeficijent toplinskog rastezanja	$\alpha$	$-2,0 \cdot 10^{-8}\theta + 4,04 \cdot 10^{-6}$ K <sup>-1</sup>
Toplinska provodljivost	$k$	$-1,66 \cdot 10^{-2}\theta + 5,02 \cdot 10^1$ N/sK
Toplinski kapacitet pri konst. def.	$c_0$	$-3,1 \cdot 10^{-3}\theta + 2,8135$ N/mm <sup>2</sup> K
Faktor disipacije	$\chi$	0,9
Omekšavanje naprezanja tečenja	$\omega_0$	0,003 K <sup>-1</sup>
Omekšavanje modula očvršćivanja	$\omega_h$	0

Zakoničnost tečenja definirana je kao i u prethodnom primjeru izrazima (8.3) i (8.4).

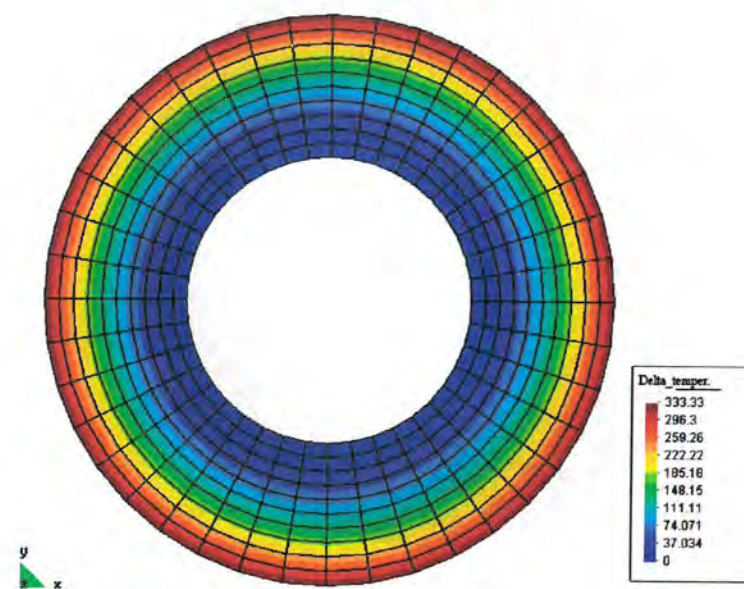
Proračuni su provedeni u 100 koraka. Korišteni kriterij konvergencije bio je praćenje vektora varijabli s tolerancijom od  $10^{-7}$ . Ukupno trajanje procesa deformacije bilo je 7 s.

Zbog simetrije diskretizirana je samo četvrtina poprečnog presjeka sfere sa 100 konačnih elemenata. Rabljeni su osnosimetrični konačni elementi kao i u prethodnom primjeru. Mreža je prikazana u sklopu sl. 8.24 i 8.25.

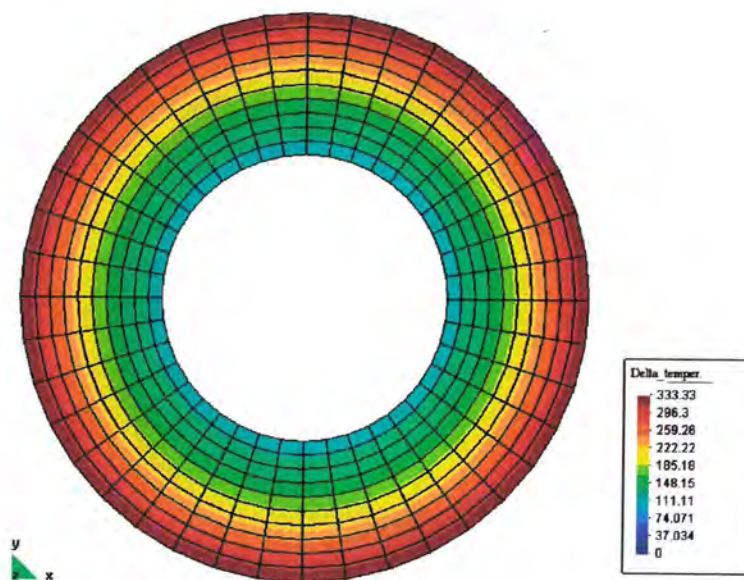
Trenutačni porast temperature na vanjskoj stijenci izaziva termički šok koji je i primarni pokretač procesa deformiranja. Sfera se postupno zagrijava tijekom cijelog procesa da bi na kraju raspodjela temperature bila prilično ravnomjerna, sl. 8.11, 8.12, 8.13, 8.14, 8.15. Može se uočiti razlika uslijed uporabe funkcijske ovisnosti materijalnih značajki o temperaturi. Tako je porast temperature na unutarnjoj stijenci za konstantne parametre 331,29 K, dok je za promjenjive 319,54 K.



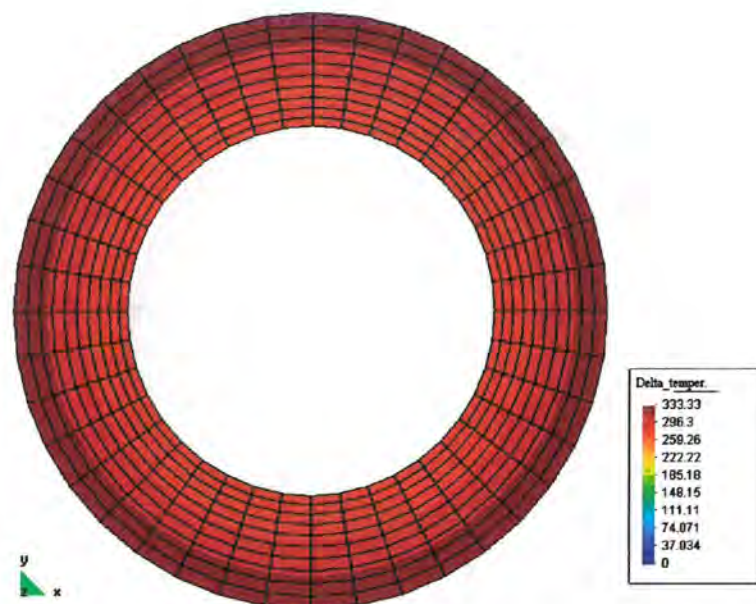
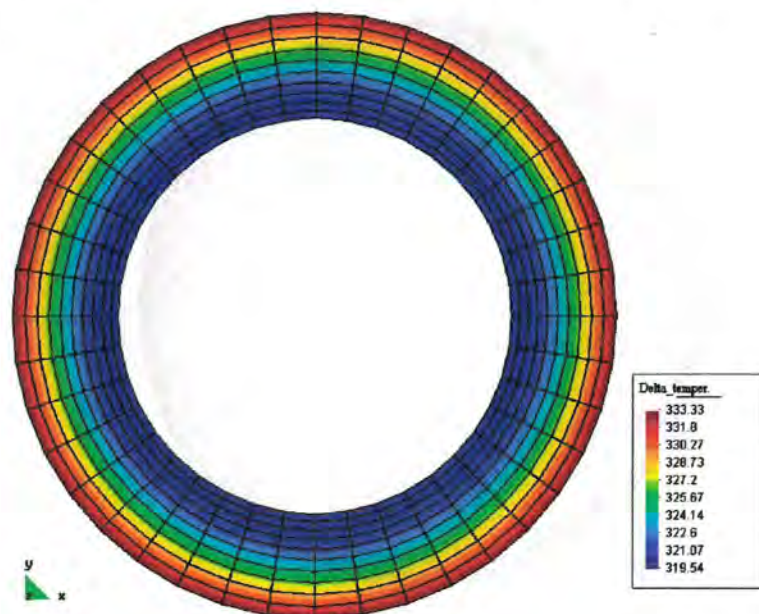
Sl. 8.11. Polje porasta temperature na kraju procesa deformiranja ( $t=7$  s), konstante materijalne značajke.



Sl. 8.12. Porast temperature u trenutku  $t=0,84$  s, promjenjive materijalne značajke. Korak prije potpune plastifikacije ( $t=0,98$  s).



Sl. 8.13. Porast temperature u trenutku  $t=1,89$  s, promjenjive materijalne značajke. Početak ekspanzije.

Sl. 8.14. Porast temperature u trenutku  $t=4,62$  s, promjenjive materijalne značajke.Sl. 8.15. Porast temperature u trenutku  $t=7$  s, promjenjive materijalne značajke.

Tlak na unutarnju stijenku odabran je tako da pri početnoj temperaturi izaziva samo elastične deformacije. S porastom temperature naprezanje tečenja opada a materijal se plastificira u dvjema zonama. Prva zona širi se od vanjske stijenke gdje je i porast temperature najveći. Druga se širi od unutarnje stijenke gdje djeluje opterećenje. Zone se šire sve do njihova spajanja. Nakon ovoga nastupa širenje sfere sve do ponovnog uspostavljanja ravnotežnog stanja i prestanka širenja, sl.8.19 i 8.23.

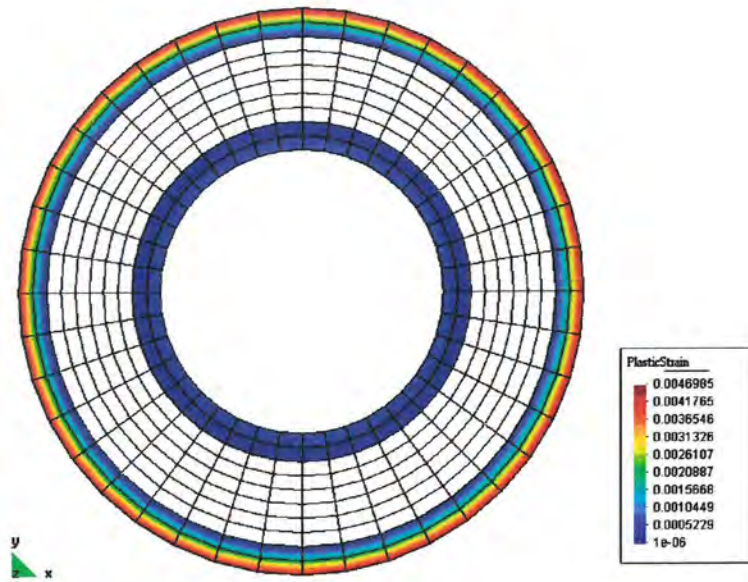
Napominje se da se u radu Simo i Miehe [25] početak ekspanzije objašnjava potpunom plastifikacijom sfere, sl. 8.22. U slučaju idealne plastičnosti takva bi tvrdnja bila opravdana, no za ovakvu plastičnost s očvršćivanjem nije. U drugoj se analizi, s promjenjivim materijalnim značajkama, trenutak potpune plastifikacije, sl. 8.17, ne podudara s početkom ekspanzije sfere, sl. 8.18. Uzrok ekspanzije sfere leži u opadanju naprezanja tečenja s porastom temperature. Kako je to i vidljivo na sl. 8.25, ekspanzija sfere s konstantnim i promjenjivim materijalnim značajkama započinje pri približno istom porastu temperature ( $\sim 120$  °C) na unutarnjoj stijenci. Stoga se trenutak potpune plastifikacije ne treba povezivati s početkom ekspanzije sfere već s omekšavanjem materijala.

Sl. 8.24 prikazuju povećanje pomaka točke na unutarnjoj stijenci sfere za vrijeme procesa deformiranja. Vidljivo je da konstante materijalne značajke daju nešto više vrijednosti. Trenutak početka ekspanzije također se razlikuje. Slični se zaključci mogu postaviti i promatranjem razvoja temperature na unutarnjoj stijenci, sl. 8.25. Konstante materijalne značajke rezultiraju i većim porastom temperature na unutarnjoj stijenci.

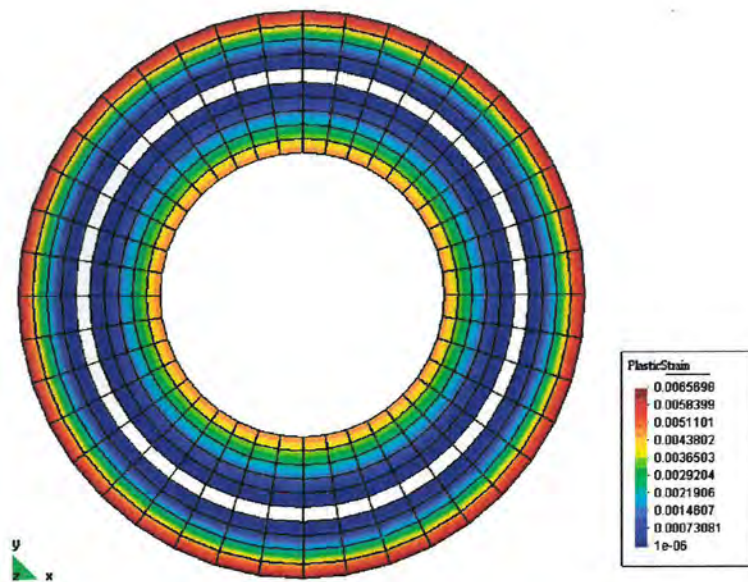
S početne vrijednosti od 10 mm debljina stijenke se smanjila na 7,46 mm.

Kao što je vidljivo iz ovih rezultata, unutarnja površine sfere znatno se povećala tijekom procesa deformiranja. Kako je tlak u sferi konstantan, ovo znači da se sile koje djeluju u čvorovima elemenata trebaju povećavati s vremenom. Radi izračuna novih vrijednosti sila nužno je uvesti koncept pratećeg opterećenja i dodatak matrici krutosti kako je to i opisano u 7. poglavlju.

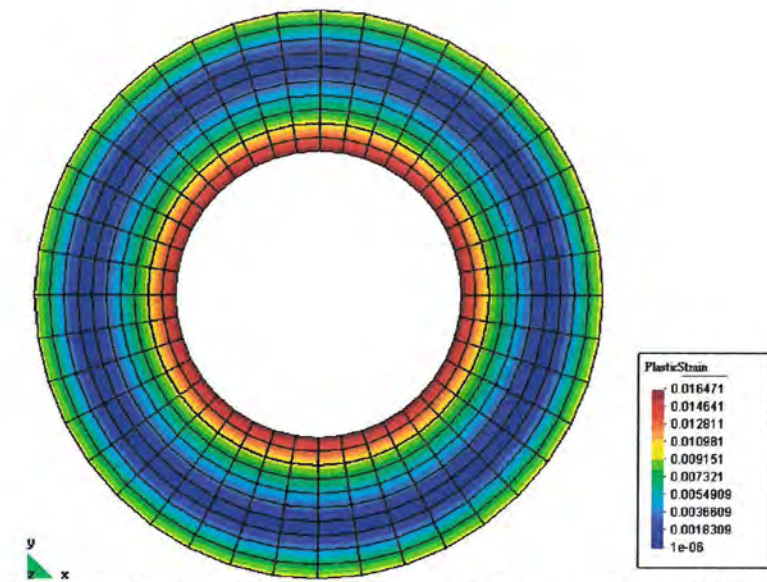
Sl. 8.26 prikazuje raspodjelu ekvivalentnih naprezanja po von Misesu na unutarnjoj stijenci sfere tijekom vremena. Uslijed omekšavanja materijala s porastom temperature naprezanje ubrzo počinje opadati. Ovo se nastavlja sve do trenutka kada počinje širenje sfere. Tada se znatno povećavaju čvorne sile što uzrokuje i porast naprezanja. Brzina povećavanja naprezanja smanjuje se sve do kraja procesa deformiranja.



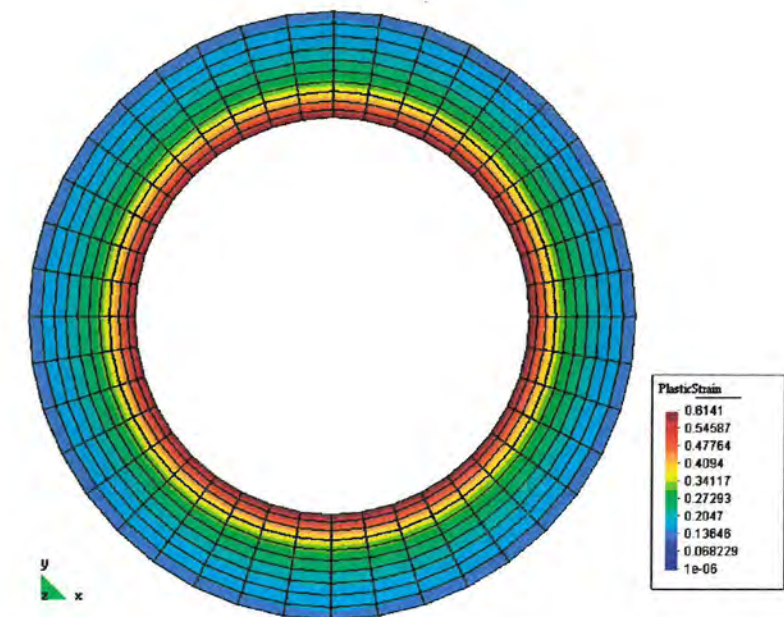
Sl. 8.16. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku  $t=0,14$  s, promjenjive materijalne značajke.



Sl. 8.17. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku  $t=0,84$  s, promjenjive materijalne značajke. Korak prije potpune plastifikacije ( $t=0,98$  s).

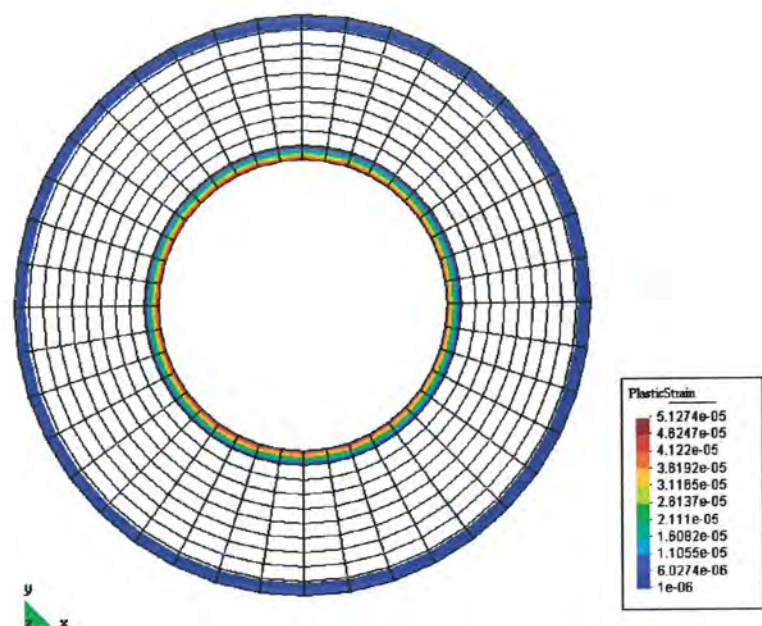


Sl. 8.18. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku  $t=1,89$  s, promjenjive materijalne značajke. Početak ekspanzije.

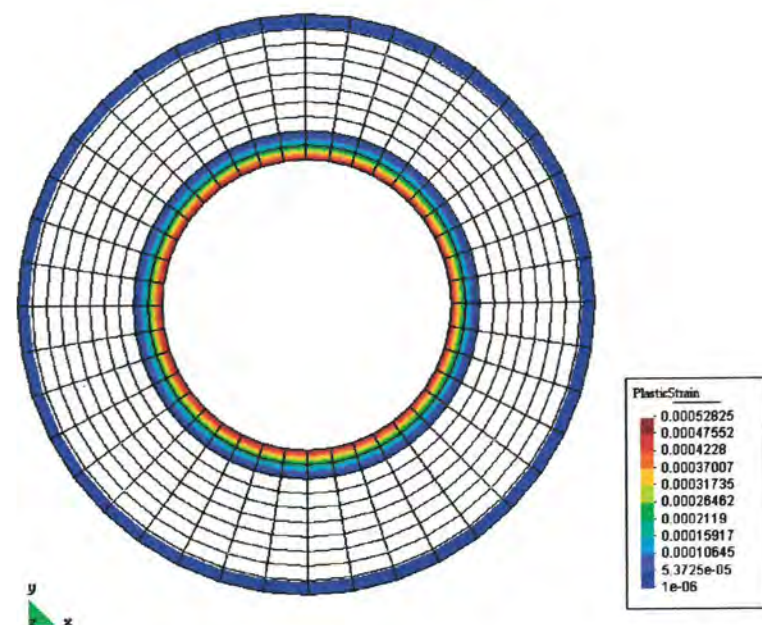


Sl. 8.19. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku  $t=7$  s, promjenjive materijalne značajke. Kraj procesa.

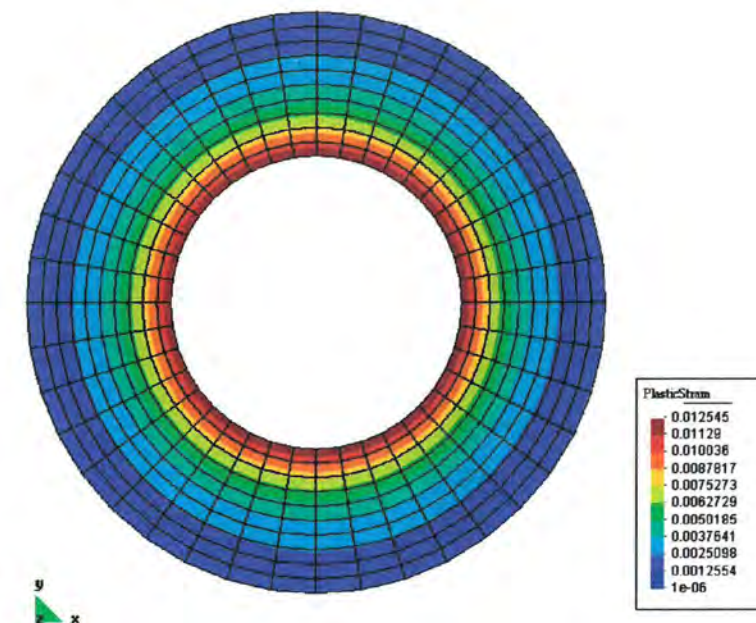




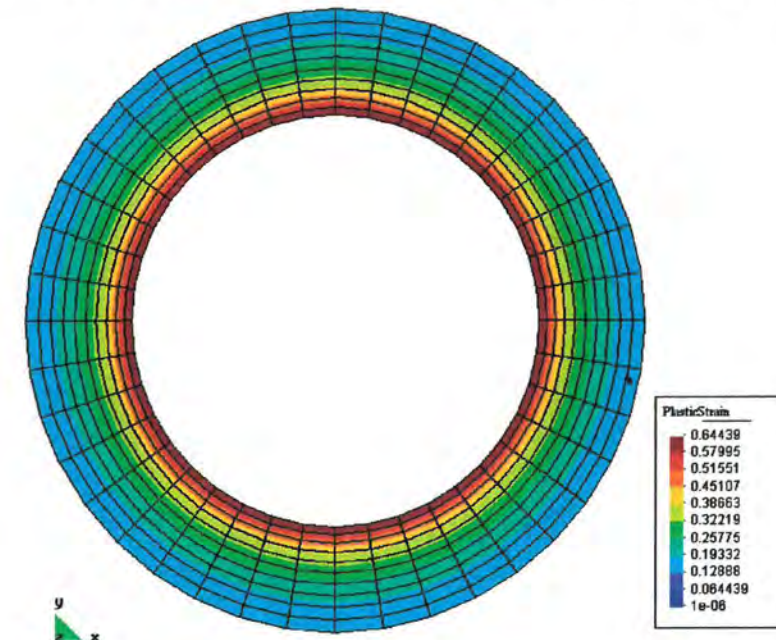
Sl. 8.20. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku  $t=0,21$  s, konstantne materijalne značajke.



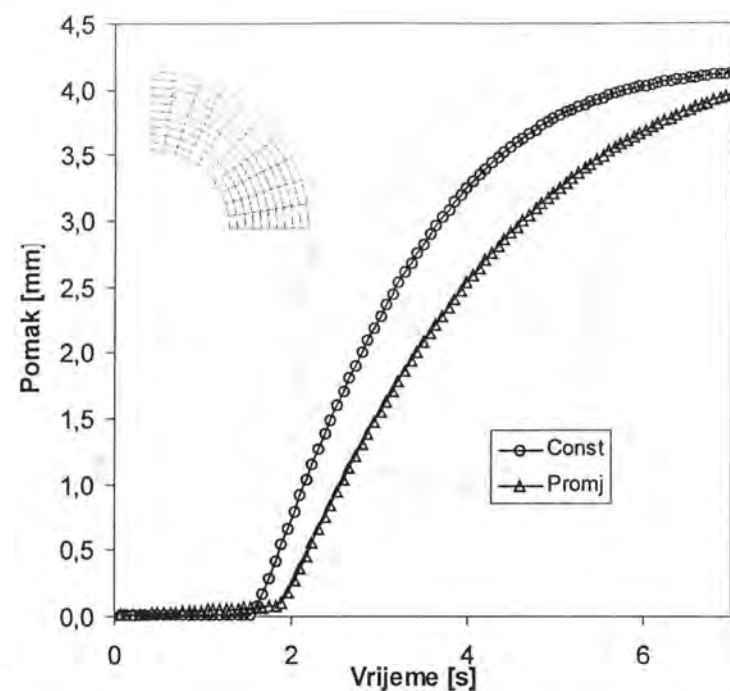
Sl. 8.21. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku  $t=0,91$  s, konstantne materijalne značajke.



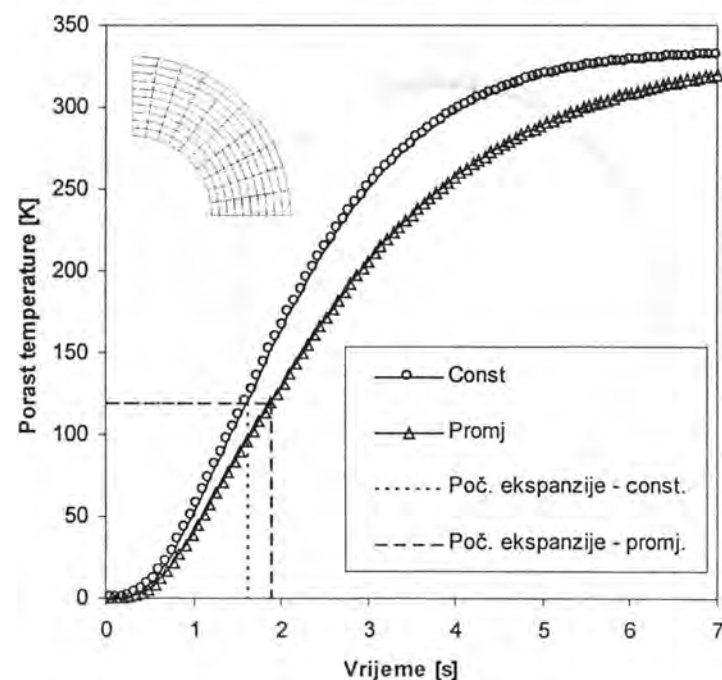
Sl. 8.22. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku  $t=1,61$  s, konstantne materijalne značajke. Istovremena potpuna plastifikacija i početak širenja.



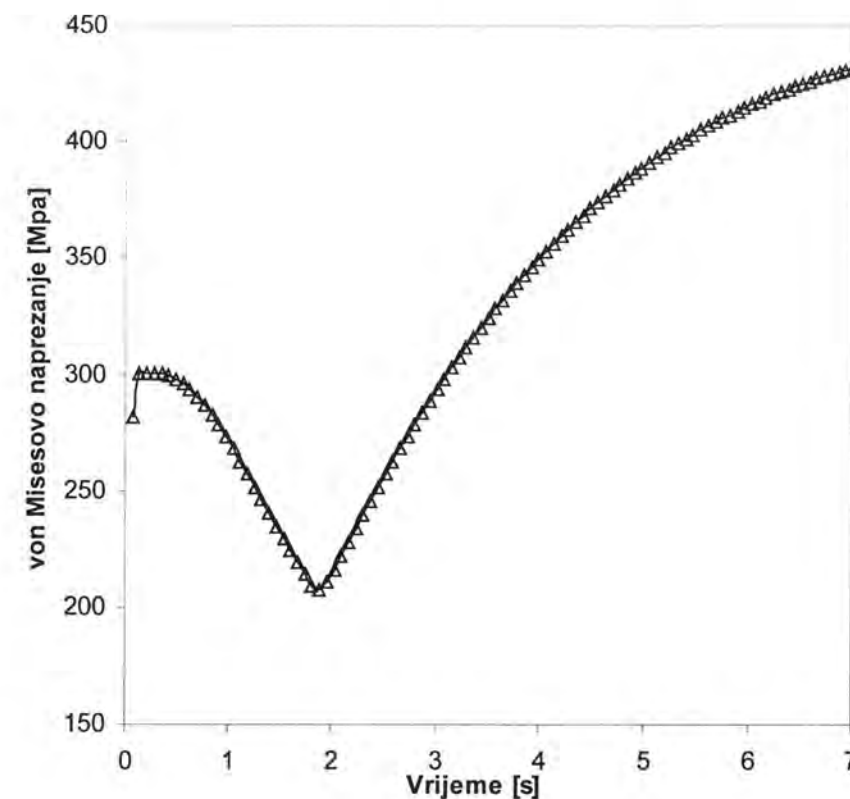
Sl. 8.23. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku  $t=7$  s, konstantne materijalne značajke. Kraj procesa.



Sl. 8.24. Razvoj pomaka unutarnje stijenke sfere tijekom vremena



Sl. 8.25. Razvoj porasta temperature unutarnje stijenke sfere tijekom vremena



Sl. 8.26. Razvoj ekvivalentnog naprezanja po von Misesu na unutarnjoj stijenki sfere tijekom vremena

### 8.3.3. Neizotermičko sužavanje epruvete kružnog poprečnog presjeka pri aksijalnom ispitivanju

Eksperimentalno ispitivanje epruvete na kidalici popraćeno je zagrijavanjem epruvete. Ovaj primjer predstavlja nadogradnju izotermičke analize u odjeljku 8.2.2. u smislu uključivanja ove pojave u model. Geometrija epruvete ista je kao u izotermičkom slučaju - polumjer 6,413 mm i duljina 53,334 mm. Postavljeni rubni uvjeti sprječavaju sužavanje krajeva epruvete.

Kao i ranije, usljed simetrije se diskretizira samo jedna četvrtina uzdužnog presjeka epruvete. Pritom je bilo upotrijebljeno 200 osnosimetričnih izoparametrijskih konačnih elemenata s četiri čvora, odnosno ukupno 242 čvora.

U izotermičkom kontekstu, kako je već i ranije rečeno, u trenutku pojave sužavanja epruvete pojavljuje se bifurkacijski problem. U termomehaničkom slučaju to više nije tako. Iz toga razloga geometrija epruvete nije sužavana kao ranije, već je modelirana s konstantnim polumjerom. Kao što će to biti vidljivo, nehomogenosti u polju temperatura sasvim su dovoljne za inicijaciju sužavanja epruvete.

Radi što stvarnijeg modeliranja, pretpostavlja se izmjena topline konvekcijom na cijeloj površini epruvete (plašt i osnovice valjkaste epruvete). Pritom je koeficijent izmjene topline konvekcijom  $h = 17,5 \cdot 10^{-3}$  N/mmsK. Okolišna temperatura jednaka je početnoj temperaturi epruvete i iznosila je  $\theta_0 = 293$  K.

Materijalne značajke prikazane su u tab. 8.9 za konstante materijalne značajke, odnosno u 8.10 za promjenjive materijalne značajke. Očvršćivanje materijala definira se izrazima (8.3) i (8.4).

Tab. 8.9. Materijalne značajke cilindrične epruvete - konstantne

Modul smicanja	$\mu$	164206 MPa
Modul kompresije	$\kappa$	80193,8 MPa
Naprezanje tečenja	$y_0$	450 MPa
Modul izotropnog očvršćivanja	$h$	129,24 MPa
Modul očvršćivanja zasićenjem	$y_{0,\infty}$	715 MPa
Eksponent očvršćivanja	$\delta$	16,93
Gustoća	$\rho$	$7,8 \cdot 10^{-9}$ Ns <sup>2</sup> /mm <sup>4</sup>
Koeficijent toplinskog rastezanja	$\alpha$	$1,0 \cdot 10^{-5}$ K <sup>-1</sup>
Toplinska provodljivost	$k$	45 N/sK
Toplinski kapacitet pri konst. def.	$c_0$	3,588 N/mm <sup>2</sup> K
Faktor disipacije	$\chi$	0,9
Omekšivanje naprezanja tečenja	$\omega_0$	0,002 K <sup>-1</sup>
Omekšivanje modula očvršćivanja	$\omega_h$	0,002 K <sup>-1</sup>

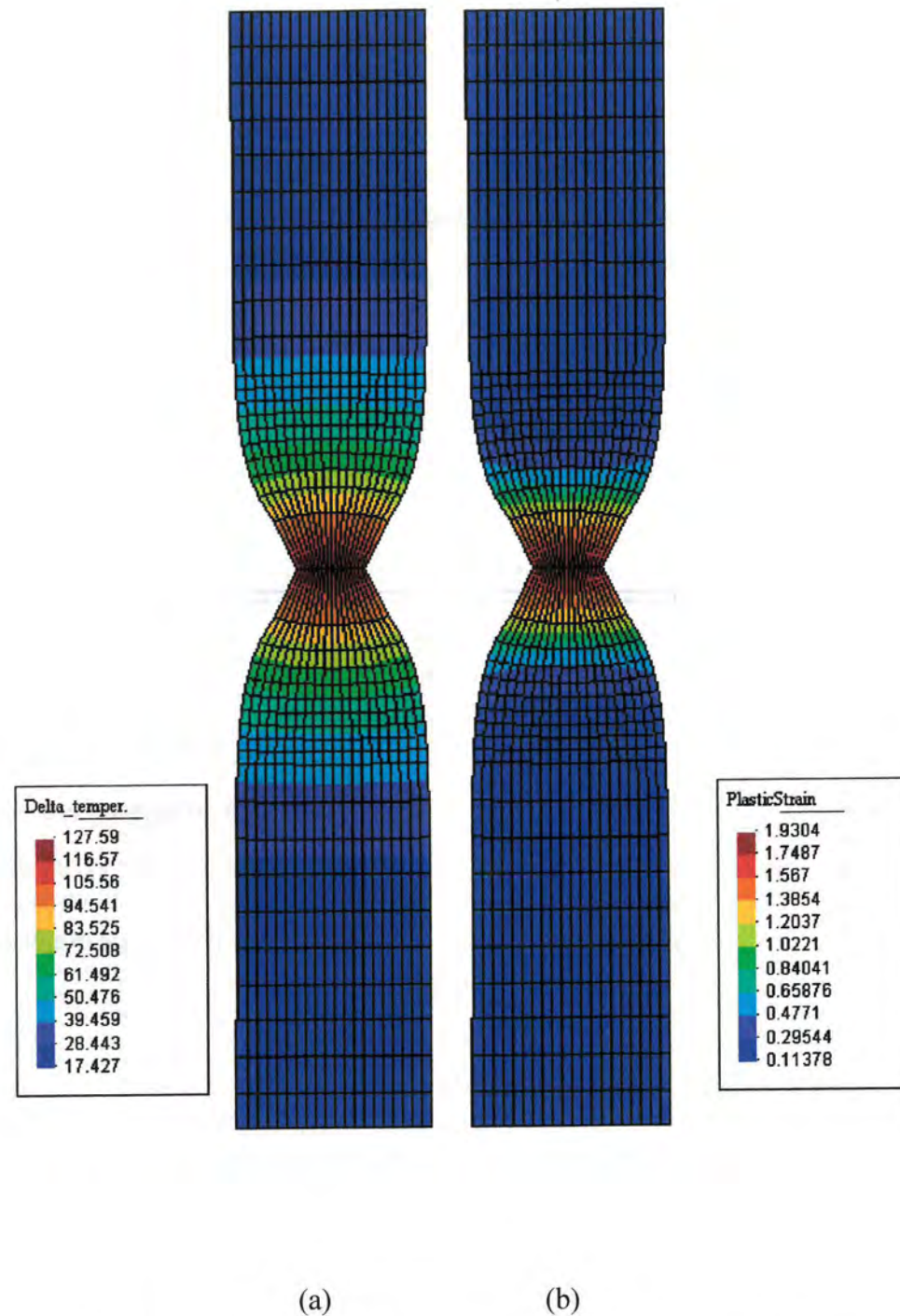
Tab. 8.10. Materijalne značajke cilindrične epruvete - promjenjive

Modul smicanja	$\mu$	$-3,07 \cdot 10^1 \theta + 8,99 \cdot 10^4$ MPa
Modul kompresije	$\kappa$	$-6,66 \cdot 10^1 \theta + 1,95 \cdot 10^5$ MPa
Naprezanje tečenja	$y_0$	450 MPa
Modul izotropnog očvršćivanja	$h$	129,24 MPa
Modul očvršćivanja zasićenjem	$y_{0,\infty}$	715 MPa
Eksponent očvršćivanja	$\delta$	16,93
Gustoća	$\rho$	$7,8 \cdot 10^{-9}$ Ns <sup>2</sup> /mm <sup>4</sup>
Koeficijent toplinskog rastezanja	$\alpha$	$2,0 \cdot 10^{-8} \theta + 4,04 \cdot 10^{-6}$ K <sup>-1</sup>
Toplinska provodljivost	$k$	$-1,66 \cdot 10^{-2} \theta + 5,02 \cdot 10^1$ N/sK
Toplinski kapacitet pri konst. def.	$c_0$	$3,10 \cdot 10^{-3} \theta + 2,8135$ N/mm <sup>2</sup> K
Faktor disipacije	$\chi$	0,9
Omekšivanje naprezanja tečenja	$\omega_0$	0,002 K <sup>-1</sup>
Omekšivanje modula očvršćivanja	$\omega_h$	0,002 K <sup>-1</sup>

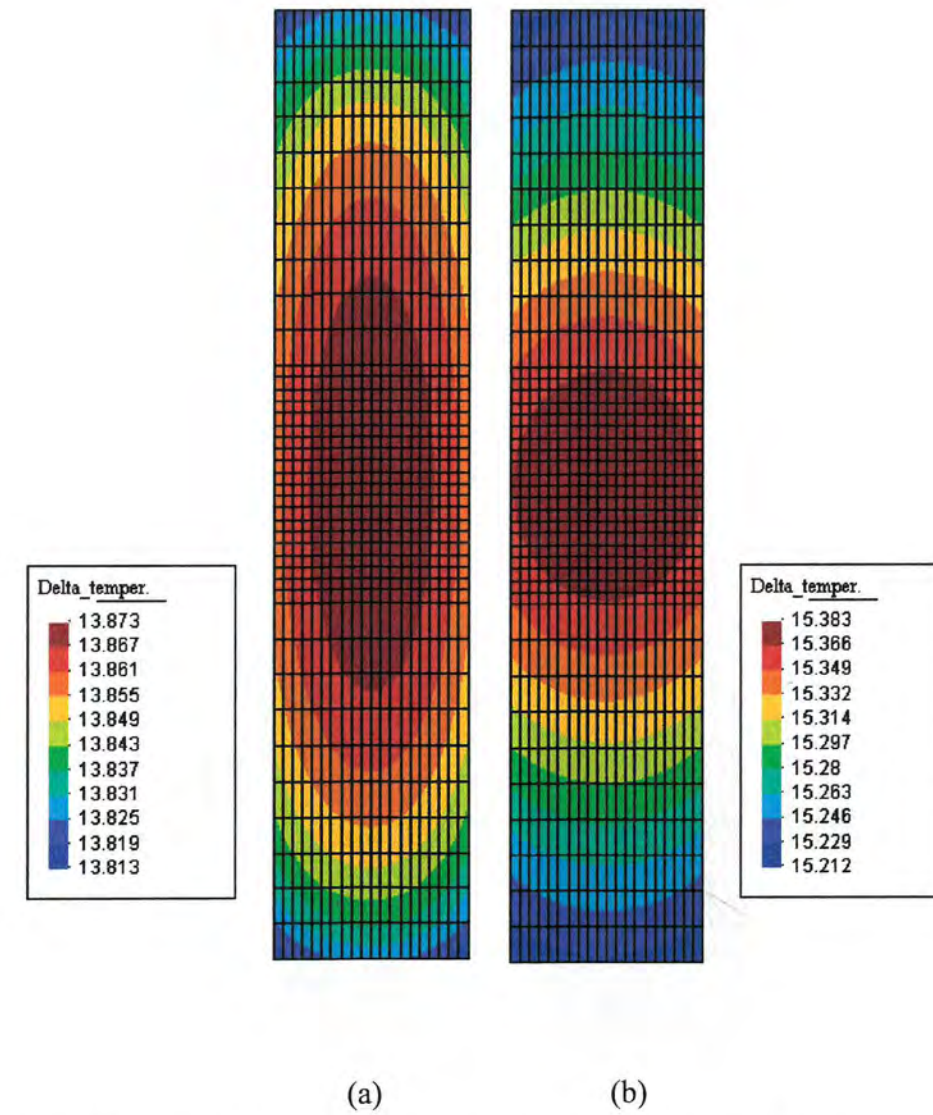
Proračun je proveden u 200 koraka. Kao kriterij konvergencije rabljen je kriterij pomaka ( $10^{-7}$ ), reziduuma ( $10^{-7}$ ) i energije ( $10^{-7}$ ). Korištena je Newton-Raphsonova metoda. Ukupno trajanje procesa deformacije bilo je 8 s.

Proračuni su provedeni za konstantne i promjenjive materijalne značajke. Algoritam i rezultati za konstantne značajke identičan je onome u Simo i Miehe [25]. Sl. 8.27a prikazuje raspodjelu temperature na kraju procesa deformiranja, dok sl. 8.27b prikazuje raspodjelu ekvivalentne plastične deformacije u istom trenutku. Ovi su rezultati dobiveni s konstantnim materijalnim značajkama.

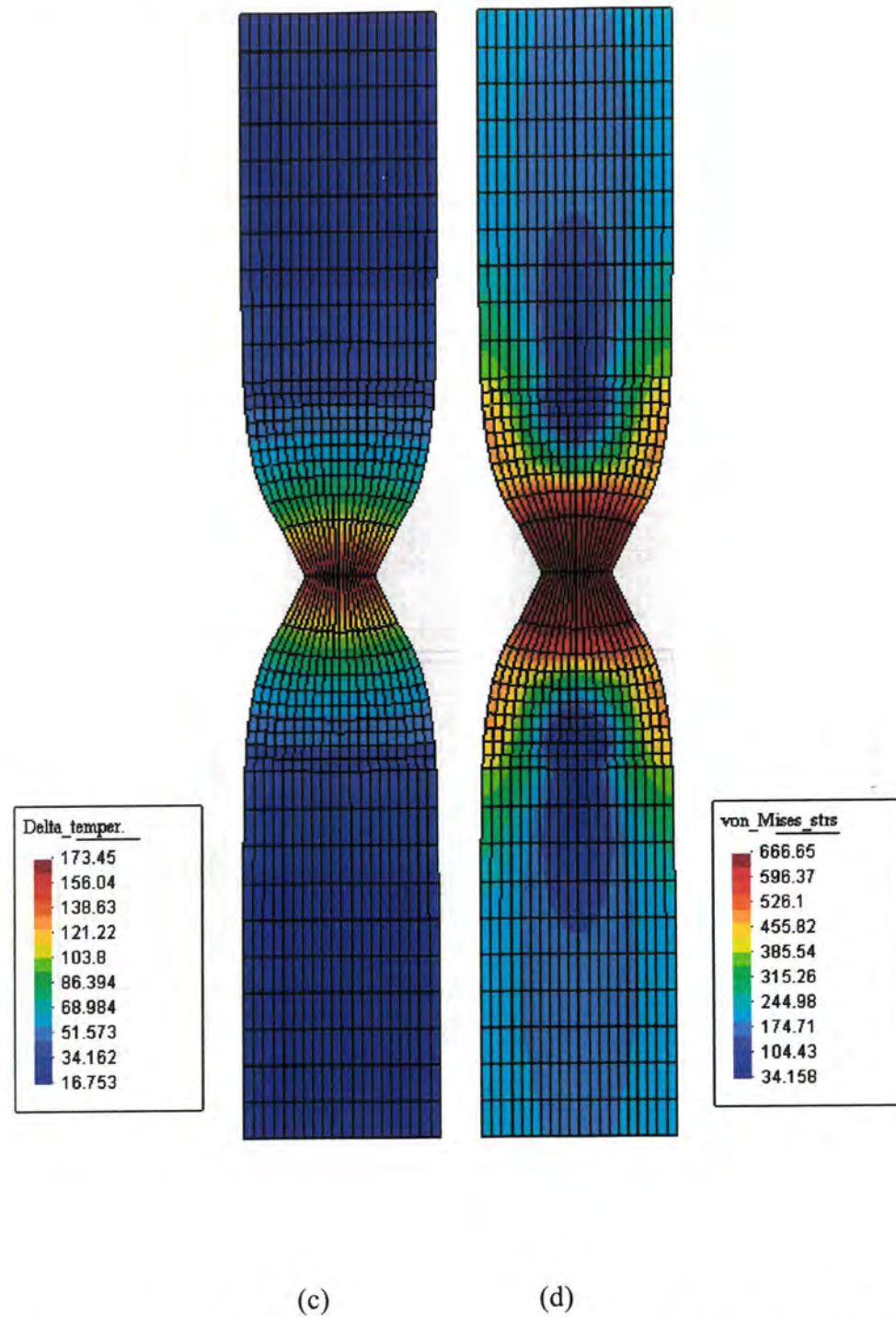
Sl. 8.28. (a)-(c) prikazuje razvoj temperature, dok sl. 8.28d prikazuje ekvivalentna naprezanja po von Misesu na kraju procesa deformiranja. Vidljivo je da je nešto prije početka sužavanja maksimalna temperaturna razlika samo 0,062 K. Ovo je sasvim dovoljna nehomogenost za iniciranje sužavanja epruvete.



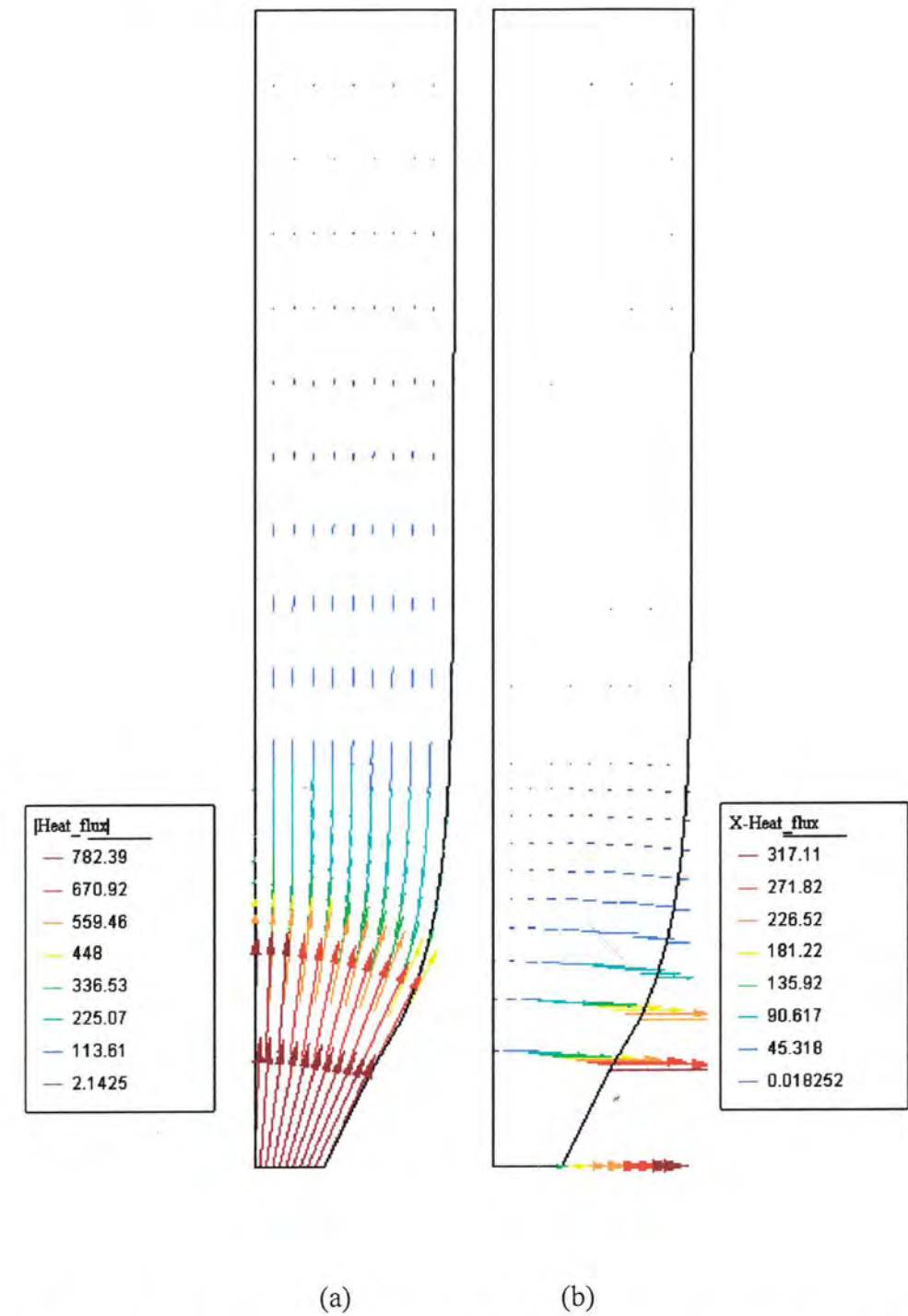
Sl. 8.27. (a) Polje porasta temperature i (b) polje ekvivalentne plastične deformacije na kraju procesa deformiranja



Sl. 8.28. Polje porasta temperature u trenutku (a)  $t=3$  s, nešto prije početka sužavanja i (b)  $t=3,28$  s, početak sužavanja. Promjenjive materijalne značajke.



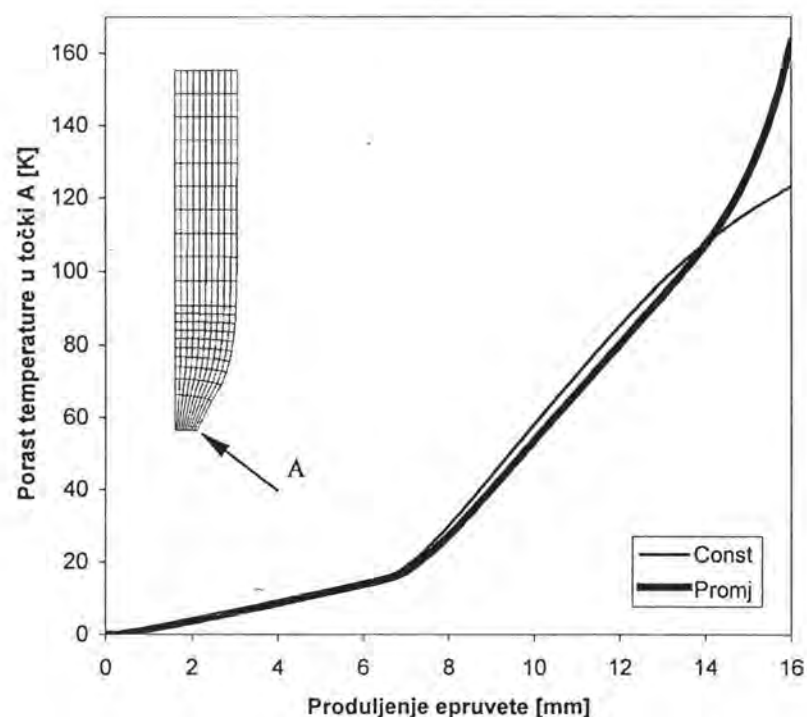
Sl. 8.28. (nastavak) (c) Polje porasta temperature u trenutku  $t=8$  s, kraj deformiranja i (d) ekvivalentna naprezanja po von Misesu na kraju procesa deformiranja. Promjenjive materijalne značajke.



Sl. 8.29. (a) Vektori toplinskog fluksa i (b) radijalna komponenta vektora toplinskog fluksa, kraj deformiranja. Promjenjive materijalne značajke.

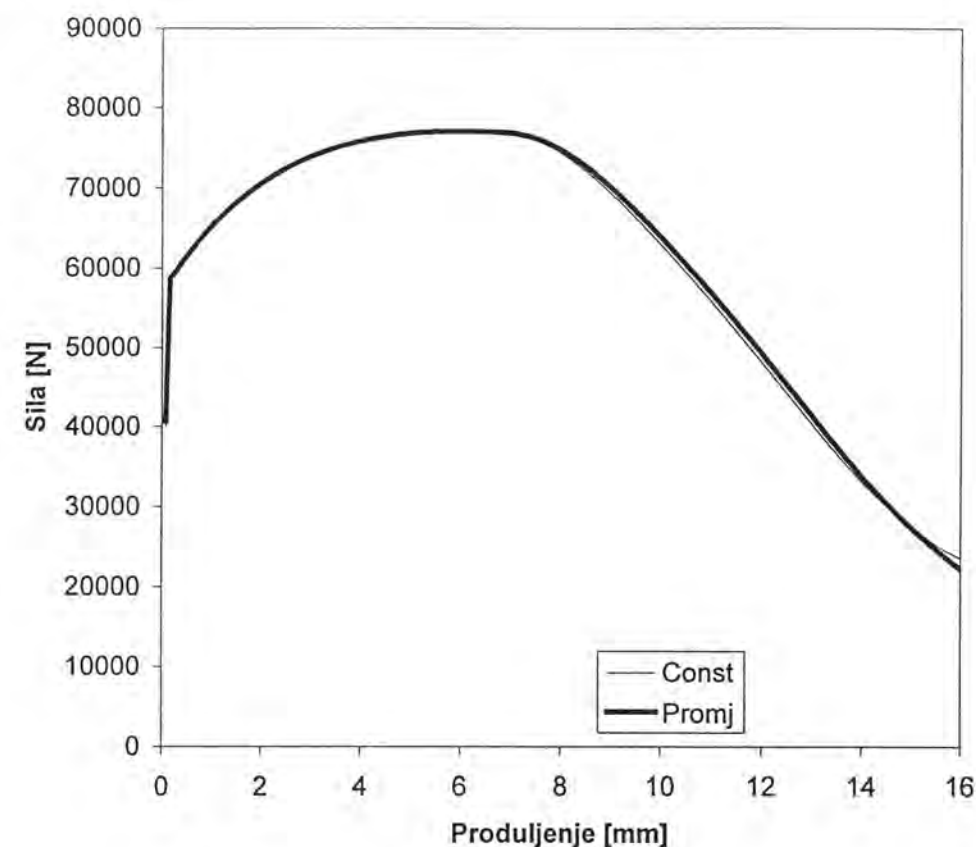
Sl. 8.29 prikazuje vektore toplinskog fluksa, odnosno njihove radijalne komponente. Uočljiva je konvekcija topline prema okolini te odvođenje topline od mjesta s najvećom plastičnom deformacijom (i najvećeg zagrijavanja) ka krajevima koji su hladniji.

Na sl. 8.30 uspoređen je porast temperature u točki na sredini epruvete s produljenjem za oba razmatrana slučaja. Prvi lom krivulje predstavlja početak sužavanja epruvete. Obje se krivulje dobro poklapaju sve do pred sam kraj deformiranja kada se razdvajaju. Može se uočiti da algoritam s konstantnim materijalnim značajkama rezultira u smanjivanju brzine rasta temperature. Nasuprot tome, promjenjive značajke rezultiraju povećavanjem brzine rasta temperature pri naglom smanjivanju polumjera epruvete i sve veće plastične deformacije. Tako je razlika između temperatura na kraju procesa približno 40 K.



Sl. 8.30. Porast temperature u točki A za vrijeme procesa deformiranja. Usporedba rezultata dobivenih konstantnim i promjenjivim materijalnim značajkama.

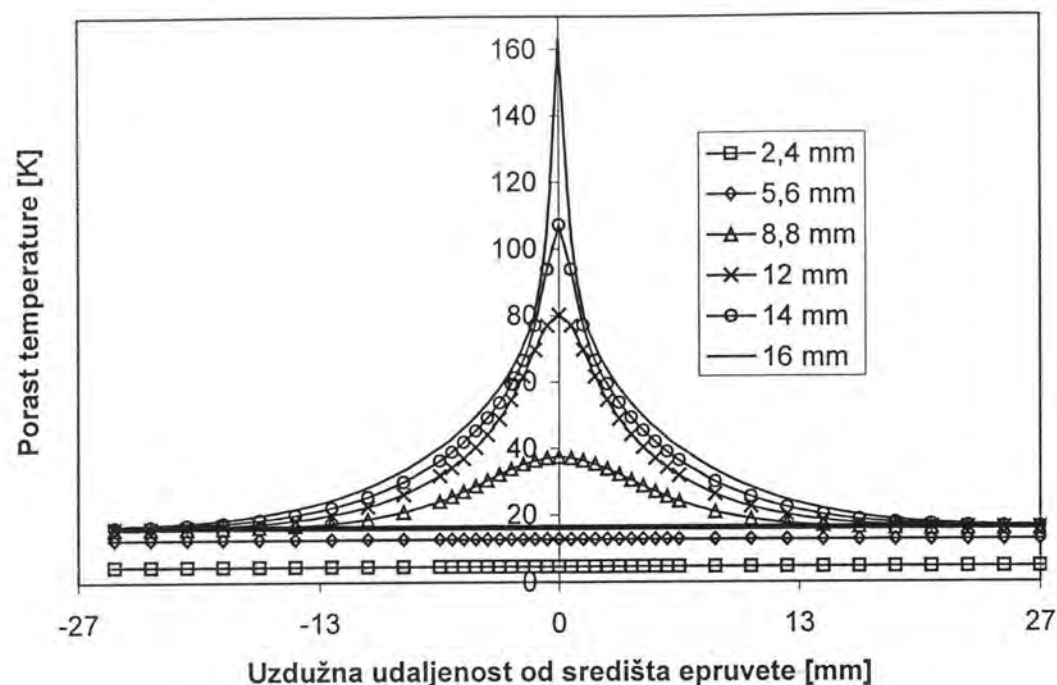
Sl. 8.31. uspoređuje  $F - \Delta L$  krivulje za oba razmatrana slučaja. Očito je da su razlike zanemarive.



Sl. 8.31.  $F - \Delta L$  krivulje. Usporedba rezultata dobivenih konstantnim i promjenjivim materijalnim značajkama.

Sl. 8.32 prikazuje razvoj temperature na površini epruvete za nekoliko karakterističnih produljenja epruvete pri promjenjivim materijalnim značajkama. Može se uočiti da je do početka sužavanja epruvete temperatura i brzina rasta temperature ujednačena po cijeloj površini. Nakon početka sužavanja temperatura na krajevima ostaje praktički konstanta sve do kraja procesa deformiranja.

Naglašava se da se svi rezultati kvalitativno dobro podudaraju s eksperimentalnim istraživanjem Lehmana i Blixa [14].



Sl. 8.32. Porast temperature na površini epruvete tijekom deformiranja

#### 8.3.4. Pojava materijalne nestabilnosti u vidu Lüderovih traka pri aksijalnom ispitivanju epruvete pravokutnog poprečnog presjeka

Ukoliko se aksijalno opterećenje epruvete pločastog poprečnog presjeka uvodi vrlo brzo, konvekcija i provođenje topline je praktički zanemarivo. Osnovni mehanizam deformacije jest lokalno pregrijavanje praćeno plastičnom disipacijom što rezultira većim lokalnim omekšavanjem materijala. Ovo povlači za sobom i lokalizirani oblik deformiranja epruvete u vidu pojave traka pod kutom od  $45^\circ$  spram uzdužne osi epruvete, Stouffer i Dame [109]. Kako je poznato iz nauke o čvrstoći, ovi se pravci podudaraju s pravcima maksimalnih posmičnih naprezanja. Trake su poznate kao Lüderove trake, sl. 8.33. Ovaj se problem često naziva adijabatskim formiranjem posmičnih traka i spada u područje nestabilnosti materijala.



Sl. 8.33. Pojava Lüderovih traka pri aksijalnom opterećenju epruvete, Schey [110, str. 258]

Prema autorovoj spoznaji, ovaj problem prvi je put razmatran pomoću metode konačnih elemenata u Armero i Simo [24]. Uzima se da postoji ravninsko stanje deformacije, dakle izrazito debela epruveta. Ostale su dimenzije kao i ranije, širina 12,826 mm i duljina 53,334 mm. Postavljeni rubni uvjeti sprječavaju sužavanje krajeva epruvete. Identično ranijem primjeru, nikakve geometrijske ili materijalne nepravilnosti nisu uvedene radi inicijacije sužavanja epruvete.

Usljed simetrije diskretizira se samo jedna četvrtina uzdužnog presjeka epruvete. Pritom je bilo upotrijebljeno 200 ravninskih izoparametrijskih konačnih elemenata s četiri čvora s ukupno 484 stupnjeva slobode. Kako je već objašnjeno, rubni uvjeti za toplinsku fazu onemogućavaju razmjenu topline konvekcijom s okolicom. Na početku je polje temperature jednoliko i iznosi 293 K.

Razmatran je materijal s konstantnim i promjenjivim značajkama. Pritom su se koristili isti podaci kao u prethodnom primjeru i predstavljeni u tab. 8.8 i tab. 8.9.

Proračun je proveden u 200 koraka. Kao kriterij konvergencije rabljen je kriterij pomaka ( $10^{-7}$ ), reziduuma ( $10^{-7}$ ) i energije ( $10^{-7}$ ). Razmatrana je deformacija pri dva režima uvođenja deformacije: sporija  $\dot{L}/L_0 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  i brža  $\dot{L}/L_0 = 4 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ . Opterećenje se uvodi putem zadavanja pomaka, tako da je ukupno apsolutno produljenje epruvete 10 mm.

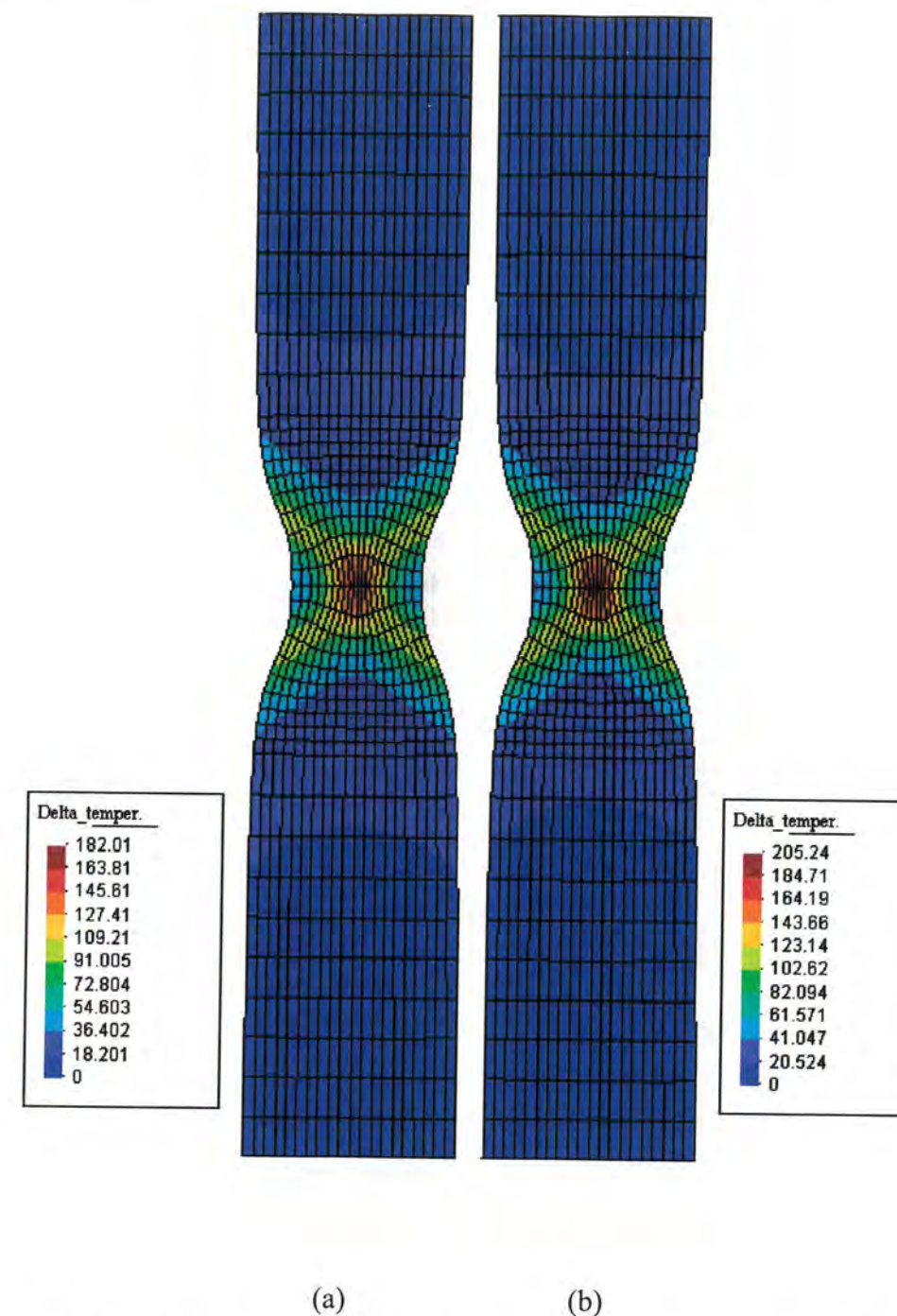
Dobiveni rezultati na sl. 8.34 uspoređuju polje porasta temperature na kraju procesa pri brzem uvođenju opterećenja za dva pristupa modeliranju materijalnih

značajki. Posebno se jasno uočavaju trake pod  $45^\circ$  u odnosu na uzdužnu os epruvete. Rezultati dobiveni za promjenjive materijalne značajke nešto su nižih vrijednosti od onih s konstantnim. Takvi su rezultati dobiveni i kod cilindrične epruvete, sl. 8.30. Napominje se da je kod cilindrične epruvete ukupno produljenje bilo 16 mm, dok je ovdje 10 mm. Analiza rezultata za produljenje cilindrične epruvete od 10 mm rezultira gornjom tvrdnjom.

Sl. 8.35. prikazuje ekvivalentnu plastičnu deformaciju i von Misesova naprezanja na kraju bržeg procesa i promjenjivih materijalnih značajki. Oštre trake jasno odražavaju pojavu Lüderovih traka.

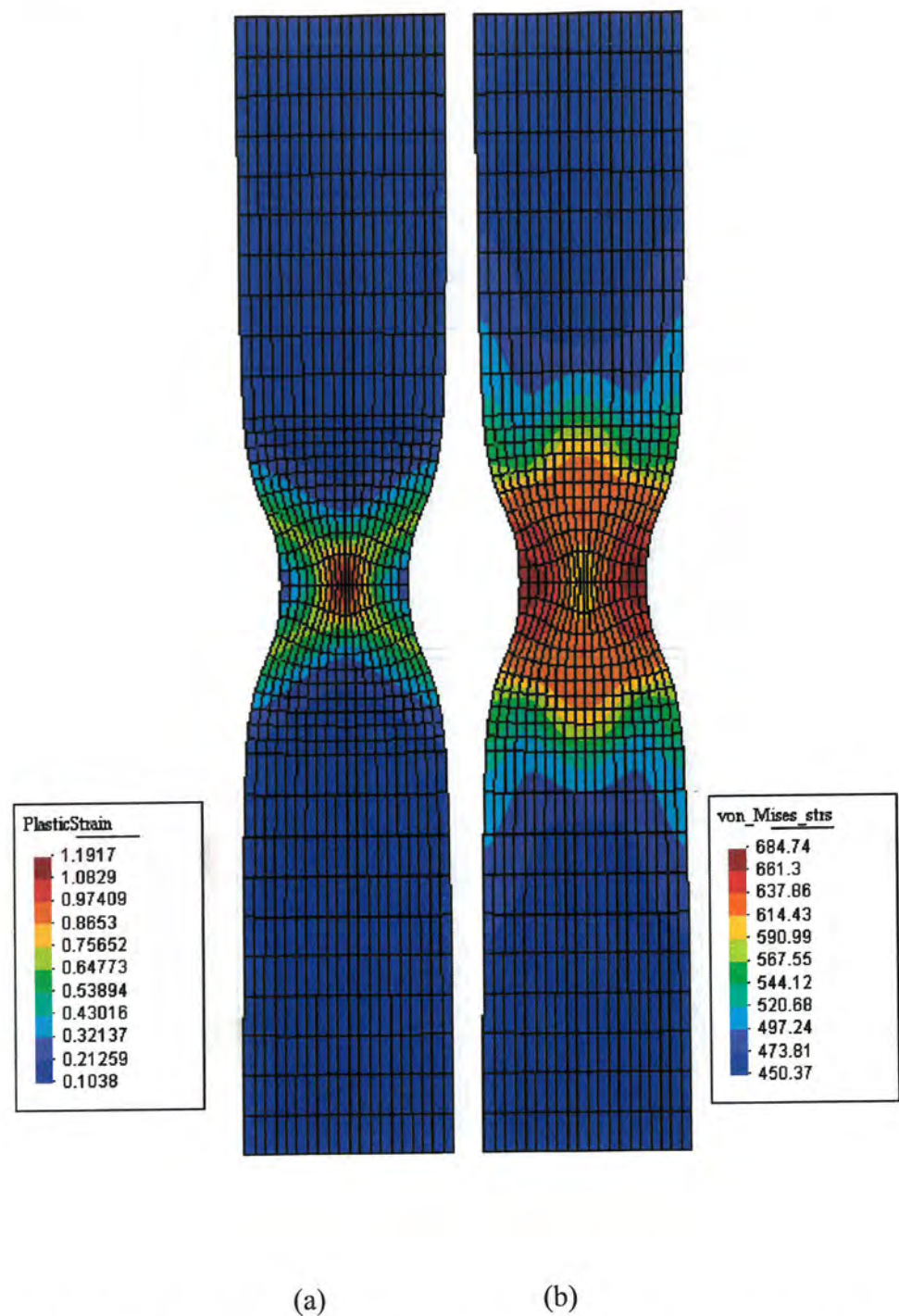
Nasuprot ovim rezultatima, pri sporijem uvođenju opterećenja, sl. 8.36, polje temperatura ne odražava pojavu posmičnih traka. Iznenadujuće, trake se ipak mogu uočiti na sl. 8.37 pri razmatranju ekvivalentne plastične deformacije i von Misesovog naprezanja.

Na kraju ovog primjera treba naglasiti da uporabljeni konačni elementi nisu osobitih performansi u analizama lokalizacijskih problema. Tome su znatno primjereniji elementi s tzv. proširenom deformacijom i nekompatibilnim modovima. Isti su predloženi u Simo i Armero [111], primjenjeni u termomehanici u Armero i Simo [24], Simo i dr. [112], Armero [48] i Ibrahimbegović i Chorfi [32]. Ipak, dobiveni rezultati klasičnim Q1/P0 mješovitim elementima ispravno modeliraju eksperimentalno uočene pojave.

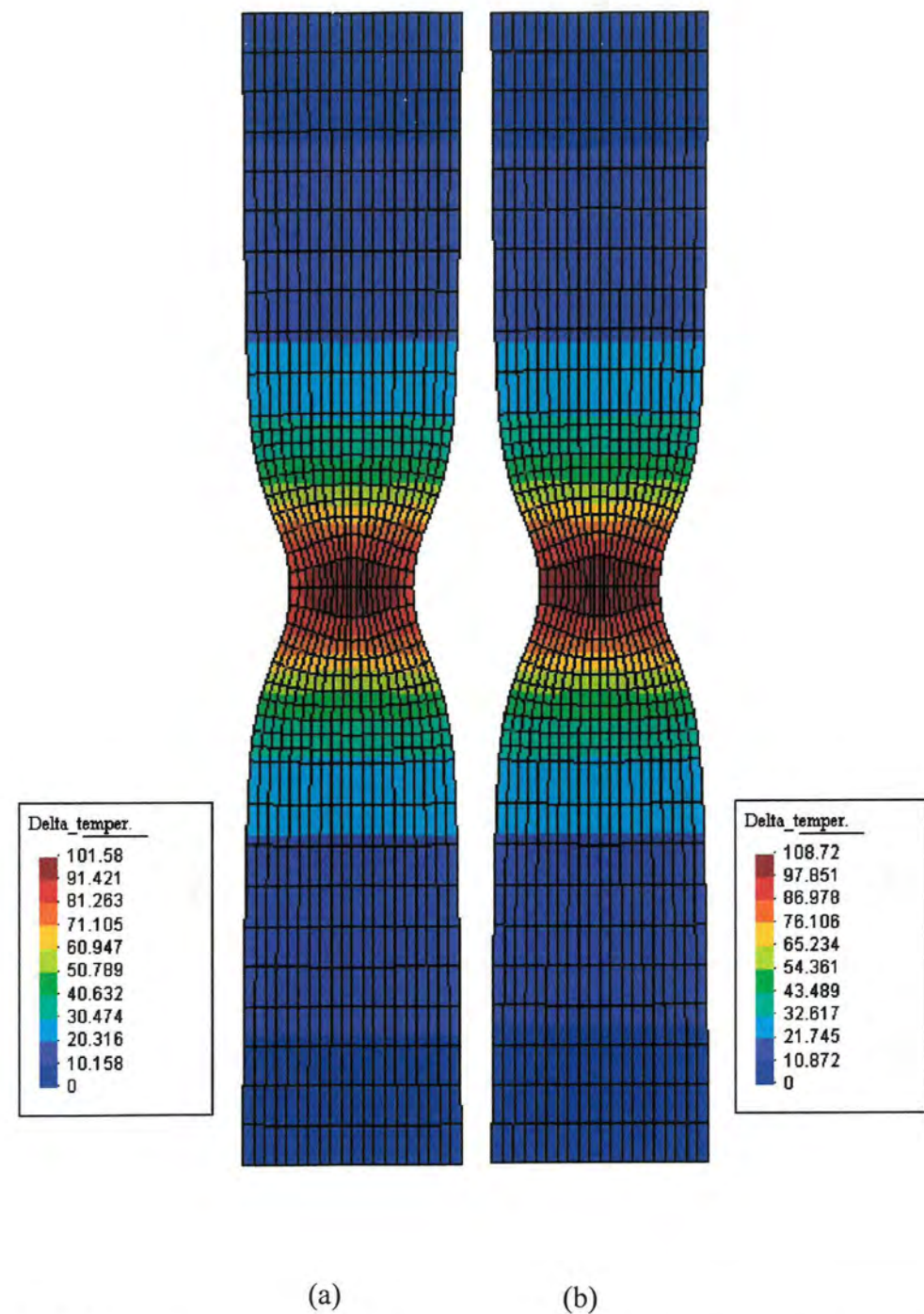


Sl. 8.34. Porast temperature na površini epruvete tijekom deformiranja; brži proces. (a) Promjenjive materijalne značajke i (b) konstantne.

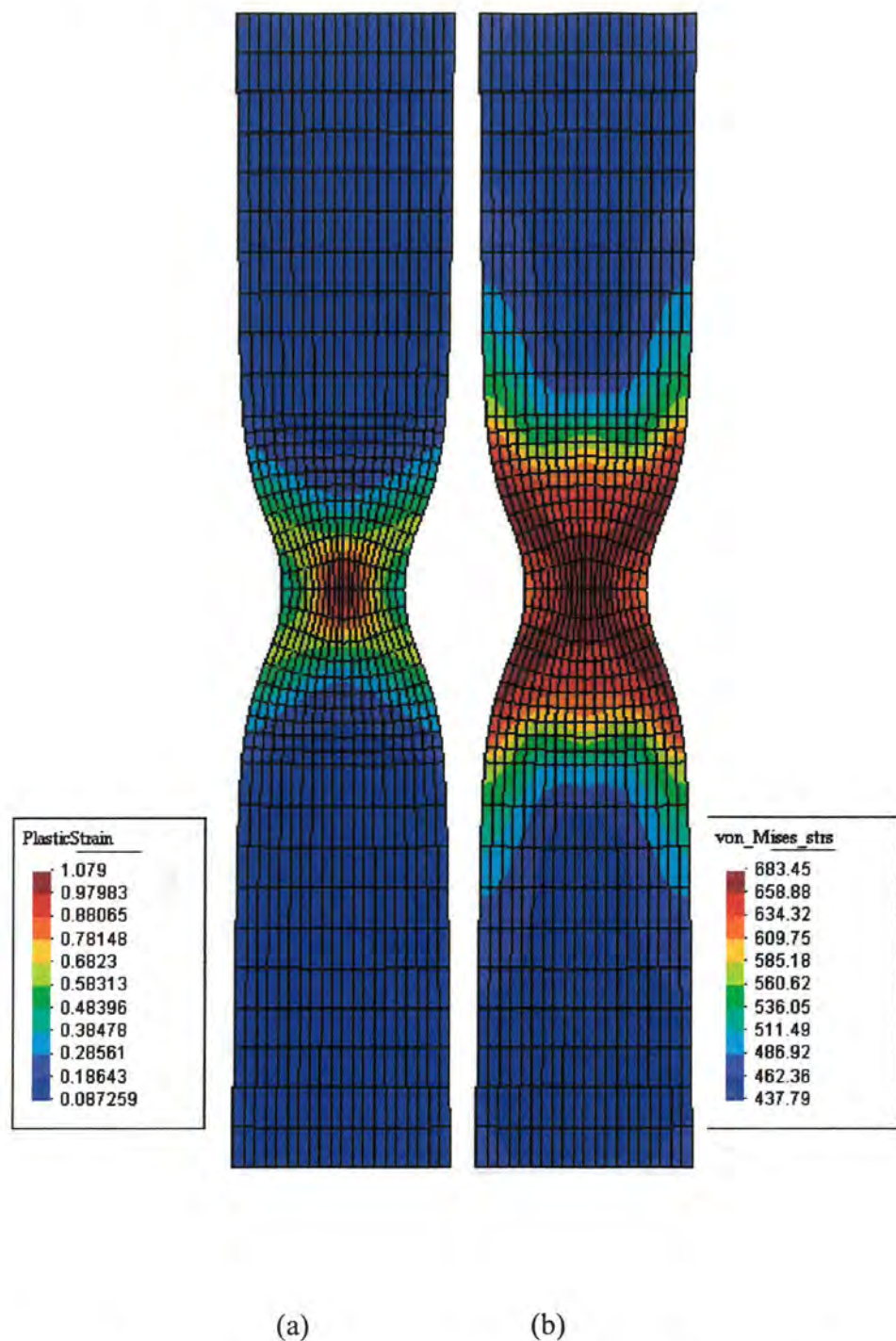




Sl. 8.35. (a) Ekvivalentna plastična deformacija i (b) ekvivalentna naprezanja po von Misesu; kraj bržeg procesa, promjenjive materijalne značajke.



Sl. 8.36. Porast temperature na površini epruvete tijekom deformiranja; sporiji proces. (a) Promjenjive materijalne značajke i (b) konstantne.



Sl. 8.37. (a) Ekvivalentna plastična deformacija i (b) ekvivalentna napreznja po von Misesu; kraj sporijeg procesa, promjenjive materijalne značajke.

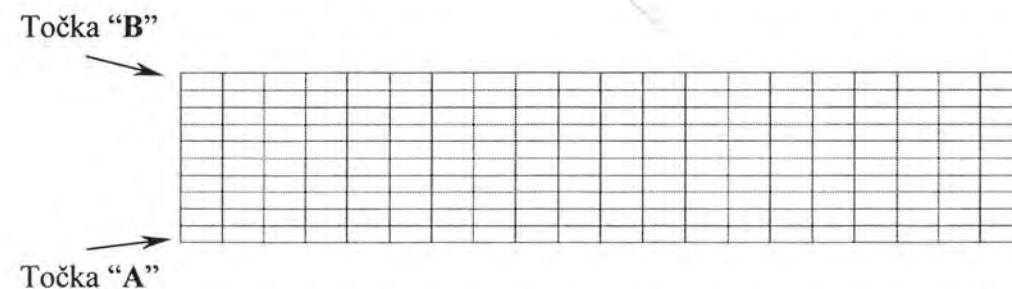
### 8.3.5. Cikličko savijanje debele ploče

Ovdje će biti razmatrano cikličko opterećenje ploče dugačke 50 mm i debljine 5 mm. Propisuju se vertikalni pomaci krajeva ploče kao sinusna funkcija:  $u(t) = 5 \sin(2\pi t)$  mm. Ukupno vrijeme trajanja procesa deformiranja iznosilo je 4 s. Na taj se način provedu puna 4 ciklusa savijanja ploče. Obzirom na geometriju ploče, problem se tretira kao ravninsko stanje deformacije. Na početku je polje temperature jednoliko i iznosi 293 K. Ploča se razmatra kao termički izolirana te rubni uvjeti onemogućavaju izmjenu topline s okolicom. Sličan je primjer razmatran u Simo i Miehe [25] i Ibrahimbegović i Chorfi [32].

Zbog simetrije problema dovoljno je diskretizirati samo polovicu ploče. Pritom je korišteno 200 ravninskih Q1/P0 mješovitih konačnih elemenata s ukupno 462 stupnja slobode, sl. 8.38.

Proračun je proveden u 400 koraka. Kao kriterij konvergencije rabljen je kriterij pomaka ( $10^{-7}$ ) i reziduuma ( $10^{-7}$ ).

Materijal je modeliran s mješovitim očvršćivanjem, dakle uključujući i izotropno i kinematičko očvršćivanje. Rabljene su promjenjive materijalne značajke već prikazane u tab. 8.5. Razlike u odnosu na materijal u tab. 8.5 uključuju novu vrijednost modula izotropnog očvršćivanja  $h_{iso} = 105$  MPa, te uvođenje modula kinematičkog očvršćivanja  $h_{kin} = 105$  MPa i omekšivanja modula izotropnog očvršćivanja  $\omega_h = 3 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .



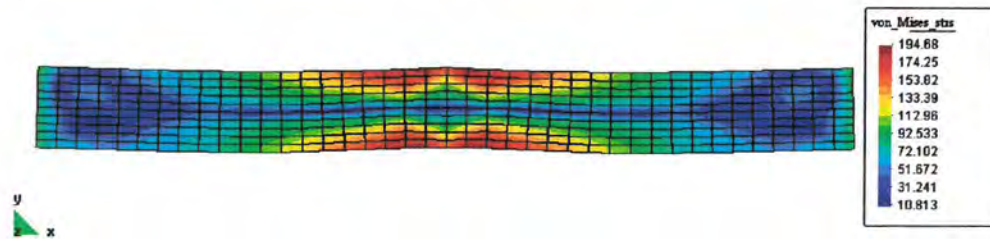
Sl. 8.38. Diskretizirana ploča

Sl. 8.39-8.44 prikazuju neke od rezultata dobivenih proračunom. Skreće se pozornost na očekivanu pojavu nepravilnosti površina ploče zbog plastične deformacije, sl. 8.44.

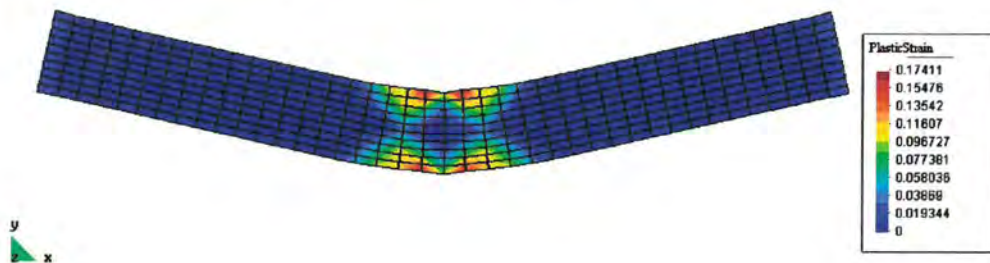
Sl. 8.45 prikazuje porast temperature u točkama A i B tijekom deformiranja.



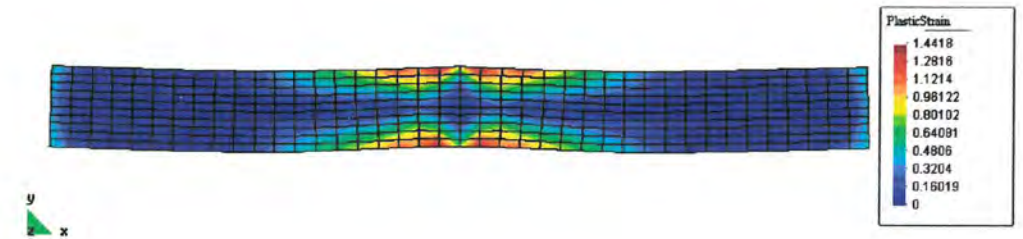
Sl. 8.39. Porast temperature na kraju procesa deformiranja



Sl. 8.40. Ekvivalentna naprezanja po von Misesu na kraju procesa deformiranja



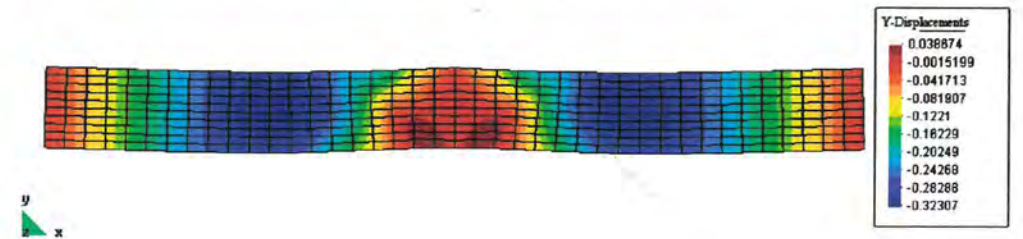
Sl. 8.41. Ekvivalentna plastična deformacija u trenutku  $t = 1/4$  s



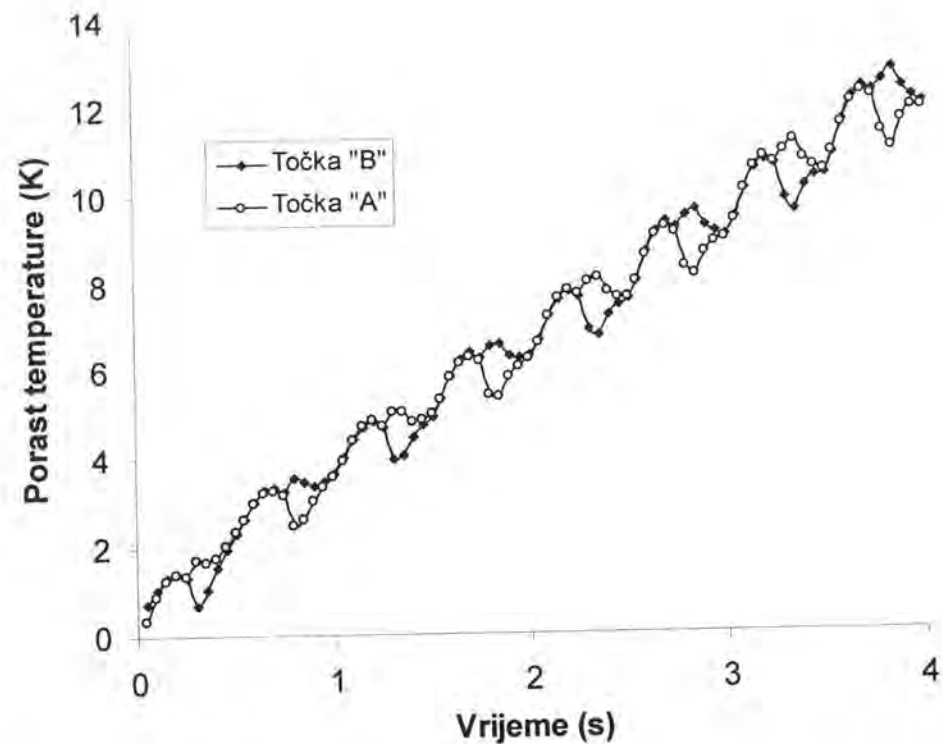
Sl. 8.42. Ekvivalentna plastična deformacija na kraju procesa deformiranja



Sl. 8.43. Uzdužni pomaci točaka na kraju procesa deformiranja



Sl. 8.44. Vertikalni pomaci točaka na kraju procesa deformiranja



Sl. 8.45. Porast temperature u točkama "A" i "B" tijekom procesa deformiranja

## 9

## Zaključak

U ovome radu detaljno je razmotrena problematika velikih plastičnih deformacija u kontekstu izotermičkih i neizotermičkih procesa deformiranja metala. Pritom je predstavljena formulacija u mehanici kontinuuma, zatim numerička obrada spregnutog problema te aplikacija metode konačnih elemenata na ovaj problem. Na završetku je predložena metodologija temeljito testirana kroz sedam primjera.

Rezultati kroz koje se ogleda značenje i znanstveni doprinos ove disertacije jesu sljedeći:

- konstitutivne jednadžbe proširene su uključivanjem promjenjivih materijalnih značajki ovisno o temperaturi. Na taj je način već postojeći algoritam primijenjiv na širi broj problema, posebice na one u kojima se temperatura značajnije mijenja. Ovo predstavlja novi rezultat jer su promjenjive materijalne značajke dosada bile uvedene u ovaj tip modela samo na razini infinitezimalnih deformacija.
- Uključivanje kinematičkog očvršćivanja u konstitutivni model. Time je omogućeno razmatranje problema kod kojih dolazi do periodičke promjene vlačnih u tlačna naprezanja i obratno. Kinematičko je očvršćivanje u kontekstu termoplastičnosti konačnih deformacija uključeno u sličan algoritam, no za termoviskoplastično ponašanje materijala. Prema autorovim

- saznanjima, u ovu vrstu modela kinematičko očvršćivanje nije dosada bilo uključeno.
- Zbog uključivanja gore spomenutih veličina bilo je potrebno izvesti novu konzistentnu tangencijalnu matricu krutosti. Ovo se odnosi na mehaničku i termičku fazu.
- Mješovita konačno elementa formulacija usavršena je u skladu s ovim promjenama. To se prvenstveno odnosi na složeniji proračun strukturnog zagrijavanja.
- Efikasnost predložene formulacije demonstrirana je na sedam reprezentativnih primjera. Iako su neki od ovih primjera akademskog karaktera, ipak ilustriraju potencijal ovoga rada.

Problemi kojima se bavi ova disertacija daleko su od konačnog rješenja. Ionako već kompleksni algoritam potrebno je proširiti iz sljedećih razloga:

- jedna od najvažnijih mogućih aplikacija rezultata ovoga rada jest plastično oblikovanje metala. Ovi procesi redovito uključuju velike plastične deformacije, a time i oslobađanje topline. Kod nekih je zagrijavanje obradaka osnovni preduvjet obrade. Ukoliko se ovaj algoritam želi primijeniti u tim problemima nužno je potrebno uključiti neku od metoda modeliranja kontaktnih rubnih uvjeta. Kao što je poznato ovi su algoritmi također kompleksni, posebice u uvjetima trenja. Odavno je empirijski pokazano da postojanje trenja povlači sa sobom i dodatno oslobađanje topline, te bi isto trebalo uključiti u model.
- Ova se razmatranja mogu također primijeniti u termoelastičnosti konačnih deformacija. Uključivanje promjenjivih materijalnih značajki u model pridonijelo bi kvalitetnijem modeliranju pojava. Takvo proširenje nije moguće ostvariti jednostavnim izbacivanjem plastičnih deformacija iz algoritma. Termoelastičnost pri velikim deformacijama gotovo uvijek podrazumijeva i nestlačivost materijala, što se mora tretirati na poseban način.
- Proširivanje ovog modela s uključivanjem utjecaja brzine deformacije na razvoj plastične deformacije ne predstavlja suštinski problem. Osnovne su smjernice već postavljene, a u literaturi su nedavno objavljeni i prvi rezultati. Kao i prije, i ovdje je problem riješen za značajke materijala koje ne ovise o

- temperaturi. Ovi problemi uključuju klasične pojave poput puzanja i relaksacije, često prisutnih u tehničkoj praksi. Numeričko modeliranje ovakvih pojava sigurno bi imalo prednost spram vrlo aproksimativnih analitičko – empirijskih kombinacija.
- Uključivanje modeliranja mikrostrukturnih pojava, koje je na svojem začetku, također je od velike važnosti. Naime, ukoliko bi se u model uspjele uključiti promjene strukture poput faznih promjena u krutom stanju, oporavka i rekristalizacije, razmatranja bi bilo moguće provoditi praktički za raspon temperatura od sobne do temperature taljenja.
- Predstavljeni algoritam postavljen je za bilo koji broj dimenzija. No, računalni program FemFem razvijen je samo za aksijalno simetrične probleme i za probleme ravninskog stanja deformacije. Proširenje na trodimenzionalni model ne predstavlja veću poteškoću. To se ne može reći za probleme ravninskog stanja naprezanja, koji ipak zahtijevaju nešto kompleksniju proceduru.
- Zbog čestog slučaja u praksi, uključivanje ljuskastih konačnih elemenata također je od potencijalnog interesa.
- Razvoj oštećenja materijala djelomično je riješen za velike plastične deformacije. Uvrštavanje istoga u model za termoplastičnost bio bi od velike koristi.
- Uporabom standardnih numeričkih tehnika moguće je uvesti i inercijalne sile u algoritam i time omogućiti razmatranja dinamičkih problema. Već postoje neki rezultati u okviru termoplastičnosti s konstantnim materijalnim značajkama.
- Autor također namjerava proširiti algoritam razmatranjem problema kao cjeline, dakle bez razdvajanja u mehaničku i termičku fazu. Time bi se dobila zajednička nesimetrična tangencijalna matrica krutosti. Iako je ovaj algoritam inferioran predloženoj, neizbježan je u nekim područjima. Primjerice, poznavanje matrice krutosti od presudnog je značaja u analizi bifurkacijskih problema.
- Ovdje je uključen vrlo jednostavni zakon kinematičkog očvršćivanja, tzv. Prager-Zieglerov. Uključivanje složenijih zakonitosti predstavlja posebni izazov.

- Predstavljene algoritmi temelje se na eksplicitnim integracijskim shemama. Uporabom implicitnih shema može se očekivati daljnja poboljšanja u domeni točnosti proračuna i efikasnosti.
- Naposljetku, danas je priznati način razmatranja proračunski zahtjevnih proračuna metodom konačnih elemenata uporabom paralelnih i vektorskih računalnih arhitektura. U ovome trenutku, nepostojanje odgovarajućeg hardwarea u autorovoj sredini otežava rad na ovome području. Iako postoje javno dostupna i besplatna rješenja temeljena na uporabi računalnih mreža, ista su daleko od praktične uporabe.

---

---

## Popis literature

- [1] Wriggers, P.: “*Nichtlineare Finite-Elemente Methoden*”, Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [2] Alfirević, I., “Teorija plastičnosti”, “*Tehnička Enciklopedija*”, 12. svezak, glavni urednik Hrvoje Požar, Leksikografski zavod “Miroslav Krleža”, Zagreb, 1992, str. 712-725.
- [3] Bridgman, P. W.: “*Studies in Large Plastic Flow and Fracture*”, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [4] Boley, B. A., Weiner, J. H.: “*Theory of Thermal Stresses*”, John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [5] Truesdell, C., Toupin, R. A.: “The Classical Field Theories”, u *Handbuch der Physik*, vol. III/1, ur. Flügge, S., Springer – Verlag, Berlin, 1960.
- [6] Truesdell, C., Noll, W.: “The Nonlinear Field Theories”, u *Handbuch der Physik*, vol. III/3, ur. Flügge, S., Springer – Verlag, Berlin, 1965.
- [7] Coleman, B. D., Gurtin, M. E.: “Thermodynamics with Internal State Variables”, *The Journal of Chemical Physics*, **47** (1967), pp. 597-613.
- [8] Coleman, B. D., Owen, D. R.: “On the Thermodynamics of Elastic-Plastic Materials with Temperature-Dependent Moduli and Yield Stress”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **70** (1979), str. 339-354.

- [9] Marsden, J. E., Hughes, T. J. R.: “*Mathematical Theory of Elasticity*”, Dover Publications, New York, 1994.
- [10] Bathe, K.-J., Ramm, E., Wilson, E. L.: “Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **9** (1975), str. 353-386.
- [11] Hibbit, H. D., Marcal, P. V., Rice, J. R.: “A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement”, *International Journal of Solids and Structures*, **6** (1970), str. 1069-1086.
- [12] McMeeking, R. M., Rice, J. R.: “Finite-Element Formulations for Problems of Large Elastic-Plastic Deformations”, *International Journal of Solids and Structures*, **11** (1975), str. 601-616.
- [13] Argyris, J. H., Doltsinis, J. St.: “On the Natural Formulation and Analysis of Large Deformation Coupled Thermomechanical Problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **25** (1981), str. 195-253.
- [14] Lehmann, Th., Blix, U.: “On the Coupled Thermo-Mechanical Process in the Necking Problem”, *International Journal of Plasticity*, **1** (1985), str. 175-188.
- [15] Lehmann, Th.: “General Law for the Definition of Constitutive Laws for Large Non-isothermic Elastic-plastic and Elastic-visco-plastic Deformations”, u “*The Constitutive Law in Thermoplasticity*”, ur. Lehmann, Th., Springer Verlag, Wien, 1984.
- [16] Zdebel, U., Lehmann, Th.: “Some Theoretical Considerations and Experimental Investigations on a Constitutive Law in Thermoplasticity”, *International Journal of Plasticity*, **3** (1987), str. 369-389.
- [17] Simo, J. C.: “A Framework for Finite Strain Elastoplasticity based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition: Part I. Continuum Formulation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **66** (1988), str. 199-219.
- [18] Simo, J. C.: “A Framework for Finite Strain Elastoplasticity based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition: Part II. Computational Aspects”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **68** (1988), str. 1-31.
- [19] Simo, J. C., Ortiz, M.: “A Unified Approach to Finite Deformations Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive

- Equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **49** (1985), str. 221-245.
- [20] Simo, J. C., Taylor, R. L., Pister, K. S.: “Variational and Projection Methods for the Volume Constraint in Finite Deformation Elasto-Plasticity”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **51** (1985), str. 177-208.
- [21] Simo, J. C., Taylor, R. L.: “Cosistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **48** (1985), str. 101-118.
- [22] Simo, J. C.: “Nonlinear Stability of the Time-Discrete Variational Problem of Evolution in Nonlinear Heat Conduction, Plasticity and Viscoplasticity”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **88** (1991), str. 111-131.
- [23] Armero, F., Simo, J. C.: “A New Unconditionally Stable Fractional Step Method for Non-Linear Coupled Thermomechanical Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35** (1992), str. 737-766.
- [24] Armero, F., Simo, J. C.: “A Priori Stability Estimates and Unconditionally Stable Product Formula Algorithms for Nonlinear Coupled Thermoplasticity”, *International Journal of Plasticity*, **9** (1993), str. 749-782.
- [25] Simo, J. C., Miehe, C.: “Associative Coupled Thermoplasticity at Finite Strains: Formulation, Numerical Analysis and Implementation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **98** (1992), str. 41-104.
- [26] Simo, J. C., Hughes, T. J. R.: “*Computational Inelasticity*”, Springer Verlag, New York, 1998.
- [27] Eterovic, A. E., Bathe, K.-J.: “A Hyperelastic-Based Large Strain Elasto-Plastic Constitutive Formulation with Combined Isotropic-Kinematic Hardening Using the Logarithmic Stress and Strain Measures”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30** (1990), str. 1099-1114.
- [28] Sussman T., Bathe, K. J.: “A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis”, *Computers & Structures*, **26** (1987), str. 357-409.
- [29] Ibrahimbegović, A., Gharzeddine, F., Chorfi, L.: “Classical Plasticity and Viscoplasticity Models Reformulated: Theoretical Basis and Numerical

- Implementation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **42** (1998), str. 1499-1535.
- [30] Ibrahimbegović, A., Chorfi, L.: “Viscoplasticity Model at Finite Deformations with Combined Isotropic and Kinematic Hardening”, *Computers & Structures*, **77** (2000), str. 509-525.
- [31] Ibrahimbegović, A., Gharzeddine, F.: “Finite Deformation Plasticity in Principal Axes: From a Manifold to the Euclidean Setting”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **171** (1999), str. 341-369.
- [32] Ibrahimbegović, A., Chorfi, L.: “Covariant Principal Axis Formulation of Associated Coupled Thermoplasticity at Finite Strains and its Numerical Implementation”, *International Journal of Solids and Structures*, **39** (2002), str. 499-528.
- [33] Celentano, D., Oller, S., Onate, E.: “A Coupled Thermomechanical Model for the Solidification of Cast Metals”, *International Journal of Solids and Structures*, **35** (1996), str. 647-673.
- [34] Cervera, M., de Saracibar, C. A., Chiumenti, M.: “Thermo-Mechanical Analysis of Industrial Solidification Processes”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46** (1999), str. 1575-1591.
- [35] Celentano, D. J.: “A Large Strain Thermoviscoplastic Formulation for the Solidification of S. G. Cast Iron in a Green Sand Mould”, *International Journal of Plasticity*, **17** (2001), str. 1623-1658.
- [36] Celentano, D. J.: “A Finite Element Formulation for Large Strain Coupled Thermoplasticity”, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona 11-14. 09. 2000.
- [37] de Saracibar, C. A., Cervera, M., Chiumenti, M.: “On the Formulation of Coupled Thermoplastic Problems with Phase Change”, *International Journal of Plasticity*, **15** (1999), str. 1-34.
- [38] Celentano, D., Onate, E., Oller, S.: “A Temperature-Based Formulation for finite Element Analysis of Generalized Phase-Change Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37** (1994), str. 3441-3465.
- [39] de Saracibar, C. A.: “Numerical Analysis of Coupled Thermomechanical Frictional Contact Problems. Computational Model and Applications”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, **5** (1998), str. 243-301.

- [40] Laursen, T. A.: “On the Development of Thermodynamically Consistent Algorithms for Thermomechanical Frictional Contact”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **177** (1999), str. 273-287.
- [41] Wriggers, P., Miehe, C.: “Contact Constraints within Coupled Thermomechanical analysis – A Finite Element Model”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **113** (1994), str. 301-319.
- [42] Rosakis, P., Rosakis, A.J., Ravichandran, G., Hodowany, J.: “A Thermodynamic Internal Variable Model for the Partition of Plastic Work into Heat and Stored Energy in Metals”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **48** (2000), str. 581-607.
- [43] Kamlah, M., Haupt, P.: “On the Macroscopic Description of Stored Energy and Self Heating During Plastic Deformation”, *International Journal of Plasticity*, **13** (1998), str. 893-911.
- [44] Celigoj, C. C.: “Finite Deformation Coupled Thermomechanical Problems and ‘Generalized Standard Materials’”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **42** (1998), str. 1025-1043.
- [45] Srikanth, A., Zabarar, N.: “A Computational Model for the Finite Element Analysis of Thermoplasticity Coupled with Ductile Damage at Finite Strains”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45** (1999), str. 1569-1605.
- [46] Farhat, C., Park, K. C., Dubois-Pelerin, Y.: “An Unconditionally Stable Staggered Algorithm for Transient Finite Element Analysis of Coupled Thermoelastic Problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **85** (1991), str. 349-365.
- [47] Lion, A.: “Constitutive Modelling in Finite Thermoviscoplasticity: a Physical Approach Based on Nonlinear Rheological Models”, *International Journal of Plasticity*, **16** (2000), str. 469-494.
- [48] Armero, F.: “Analysis and Numerical Simulation of Strain Localization in Inelastic Solids under Fully Coupled Thermomechanical and Poroplastic Conditions”, The Office of Naval Research, Report OMB No. 0704-0188, Arlington, 2000.
- [49] Kovačićek, F., Novosel, M.: “Metalni materijali”, “Inženjerski priručnik IP4 – Proizvodno strojarstvo”, 1. svezak, urednici Alfirević, I. et al., Školska knjiga, Zagreb, 1998, str. 1-29.



- [50] Gerold, V.: "Physical Theory of Plasticity in Crystalline Solids", u "The Constitutive Law in Thermoplasticity", ur. Lehmann, Th., Springer Verlag, Wien, 1984.
- [51] Hayden, H. W., Moffatt, W. G., Wulff, J.: "The Structure and Properties of Materials, Vol III, Mechanical Behavior", John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [52] Lubliner, J.: "Plasticity Theory", Macmillan, New York, 1990.
- [53] Evans, R. W., Wilshire B.: "Introduction to Creep", The Institute of Materials, London, 1993.
- [54] Smith, G. V.: "Properties of Metals at Elevated Temperatures", McGraw-Hill, New York, 1950.
- [55] Brnić, J.: "Elastoplasticity and Elastoviscoplasticity", PAMM, Budapest, 1998.
- [56] Perzyna, P.: "Fundamental Problems in Viscoplasticity", *Advances in Applied Mechanics*, 9(1966), str. 243-377.
- [57] Garofalo, F.: "Fundamentals of Creep and Creep-Rupture in Metals", Macmillan, New York, 1965.
- [58] Ilschner, B.: "Hochtemperatur-Plastizität", Springer Verlag, Berlin, 1973.
- [59] Brnić, J., Čanadija, M., Turkalj, G.: "Finite Element Modelling of Creep Phenomenon of Different Materials", *Proceedings of the International Conference on "Recent Advances in Metallurgical Processes"*, ur. Sastry, D. H., Dwarakadasa, E. S., Iyengar, G. N. K., Subramanian, S., Bangalore, Indija, 1997, str. 1091-1096.
- [60] Brnić, J.: "Elastomehanika i plastomehanika", Školska knjiga, Zagreb, 1996.
- [61] Chadwick, P.: "Continuum Mechanics", Dover Publications, Mineola, 1999.
- [62] Ciarlet, P. G.: "Mathematical Elasticity, Vol. I: Three-Dimensional Elasticity", North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [63] Fung, Y. C.: "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.

- [64] Haupt, P.: "Continuum Mechanics and Theory of Materials", Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [65] Gurtin, M. E.: "An Introduction to Continuum Mechanics", Academic Press, San Diego, 1981.
- [66] Jarić, J.: "Mehanika kontinuuma", Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
- [67] Malvern, L. E.: "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- [68] Mase, G. T., Mase, G. E.: "Continuum Mechanics for Engineers", CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [69] Maugin, G. A.: "The Thermomechanics of Nonlinear Irreversible Behaviours", World Scientific, Singapore, 1999.
- [70] Mićunović, M.: "Primenjena mehanika kontinuuma", Naučna knjiga, Beograd, 1990.
- [71] Ogden, R. W.: "Non-Linear Elastic Deformations", Dover Publications, Mineola, 1997.
- [72] Šilhavý, M.: "The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media", Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [73] Truesdell, C.: "Rational Thermodynamics", McGraw-Hill, New York, 1969.
- [74] Truesdell, C.: "The Elements of Continuum Mechanics", Springer Verlag, New York, 1966.
- [75] Borisenko, A. I., Tarapov, I. E.: "Vector and Tensor Analysis with Applications", Dover Publications, New York, 1979.
- [76] Kay, D. C.: "Tensor Calculus", McGraw-Hill, New York, 1988.
- [77] Synge, J. L., Schild, A.: "Tensor Calculus", University of Toronto Press, Toronto, 1969.
- [78] Bishop, R. L., Goldberg, S. I.: "Tensor Analysis on Manifolds", Dover Publications, New York, 1980.

- [79] Zachmanoglou, E. C., Thoe, D. W.: "Introduction to Partial Differential Equations with Applications", Dover Publications, New York, 1986.
- [80] Alfirević, I.: "Linearna analiza konstrukcija", Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1999.
- [81] Kurepa, S.: "Uvod u linearnu algebru", Školska knjiga, Zagreb, 1987.
- [82] Maugin, G.: "Thermomechanics of Plasticity and Fracture", Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [83] Hill, R.: "The Mathematical Theory of Plasticity", Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [84] Luenberger, D. G.: "Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1984.
- [85] Smith, L. D. (ur.): "Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity", Springer-Verlag, Wien, 1990.
- [86] Carlson, D. E.: "Linear Thermoelasticity", u *Handbuch der Physik*, vol. VIa/2, ur. Flügge, S., Springer – Verlag, Berlin, 1972.
- [87] Mähler, L., Ekh, M., Runesson, K.: "A Class of Thermo-Hyperelastic-Viscoplastic Models for Porous Materials: Theory and Numerics", *International Journal of Plasticity*, **17** (2001), str. 943-969.
- [88] Wriggers, P., Miehe, C., Kleiber, M., Simo, J.C.: "On the Coupled Thermomechanical Treatment of Necking Problems via Finite Element Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33** (1992), str. 869-883.
- [89] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: "The Finite Element Method, Volume 1: The Basis", Butterworth - Heinemann, Oxford, 2000.
- [90] Felippa, C. A., Park, K. C., Farhat, C.: "Partitioned Analysis of Coupled Mechanical Systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190** (2001), str. 3247-3270.
- [91] Strang, G.: "Introduction to Applied Mathematics", Weilesley-Cambridge Press, Weilesley, 1986.

- [92] Shampine, L.: "Numerical Solution of Ordinary Differential Equations",
- [93] Bathe, K. J.: "Finite Element Procedures", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [94] Brezzi, F., Fortin, M.: "Mixed and Hybrid Finite Element Methods", Springer Verlag, New York, 1991.
- [95] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: "The Finite Element Method, Volume 2: Solid Mechanics", Butterworth - Heinemann, Oxford, 2000.
- [96] Hughes, T. J. R.: "The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Dover Publications, Mineola, 2000.
- [97] Bonet, J., Wood, R. D.: "Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis", Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [98] Lovelock, D., Rund, H.: "Tensors, Differential Forms, and Variational Principles", Dover Publications, Mineola, 1989.
- [99] LAPACK95 -- Fortran95 interface to LAPACK, version 3.0., <http://www.netlib.org/lapack95/index.html>, 2002.
- [100] LAPACK -- Linear Algebra PACKage, version 3.0., <http://www.netlib.org/lapack/index.html>, 2002.
- [101] SLAP, <http://www.netlib.org/slap/index.html>, 2002.
- [102] FEAPPV A Finite Element Analysis Program: Personal Version, <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feappv/>, 2002.
- [103] Sloan, S. W.: "A Fortran Program for Profile and Wavefront Reduction", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28** (1989), str. 2651-2679.
- [104] Eve, R. A., Reddy, B. D.: "The Variational Formulation and Solution of Problems of Finite-Strain Elastoplasticity Based on the Use of Dissipation Function", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37** (1994), str. 1673-1695.
- [105] Prager, W., Hodge, P. G.: "Theory of Perfectly Plastic Solids", John Wiley & Sons, New York, 1951.

- [106] Hallquist, J. O.: "NIKE2D – A Vectorized Implicit, Finite Deformation Finite Element Code for Analyzing the Static and Dynamic Response of 2-D Solids with Interactive Rezoning and Graphics", Lawrence Livermore National Laboratory, Report UCID-19677, Livermore, 1986.
- [107] Golub, G. H., Van Loan, C. F.: "Matrix Computations", The John Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [108] Ničeno, B., TU Delft, Osobna komunikacija, 2002.
- [109] Stouffer, D.C., Dame, L. T.: "Inelastic Deformation of Metals: Models, Mechanical Properties and Metallurgy", John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [110] Schey, J. A.: "Introduction to Manufacturing Processes", McGraw-Hill, Boston, 2000.
- [111] Simo, J. C., Armero, F.: "Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33** (1992), str. 1413-1449.
- [112] Simo, J. C., Armero, F., Taylor, R. L.: "Improved Versions of Assumed Enhanced Strain Trilinear Elements for 3d Finite Deformation Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **110** (1993), str. 359-386.

## Popis oznaka i simbola

Napomena: sve korištene oznake, simboli, kratice i indeksi usklađeni su s svjetskom literaturom iz ovog područja.

<b>a</b>	ubrzanje u prostornom opisu, $m/s^2$
<b>A</b>	ubrzanje u materijalnom opisu, $m/s^2$
<b>A</b>	tenzor povratnog naprezanja u materijalnom opisu, Pa
<b>b</b>	lijevi Cauchy-Greenov tenzor deformacije
<b>b</b>	volumenske sile u prostornom opisu, $N/m^3$
<b>B</b>	volumenske sile u materijalnom opisu, $N/m^3$
<b>B</b>	referentna konfiguracija tijela
<i>c</i>	specifični toplinski kapacitet pri konstantnoj deformaciji, $J/(kgK)$
<b>C</b>	desni Cauchy-Greenov tenzor deformacije
<b>D</b>	unutarnja disipacija, $W/m^3$
<b>d</b>	tenzor brzine deformacije, $1/s$
<i>D</i>	usmjerena derivacija
<b>DIV</b>	divergencija u materijalnoj formulaciji

$\text{div}$	divergencija u prostornoj formulaciji
$\mathbf{e}$	Eulerov tenzor deformacije
$e$	unutarnja energija u prostornoj konfiguraciji, $\text{J/m}^3$
$E$	unutarnja energija u materijalnoj konfiguraciji, $\text{J/m}^3$
$E$	energija aktivacije, $\text{J}$
$\mathbf{E}$	Lagrangeov tenzor deformacije
$\mathbf{F}$	gradijent deformacije
$\mathbf{F}$	vektor opterećenja
$g_{ij}$	metrički tenzor u prostornom opisu
$G_{ij}$	metrički tenzor u materijalnom opisu
GRAD	gradijent u materijalnoj formulaciji
grad	gradijent u prostornoj formulaciji
$h$	koeficijent konvekcije, $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$
$h$	koeficijent izotropnog očvršćivanja, $\text{Pa}$
$h_{\text{kin}}$	koeficijent kinematičkog očvršćivanja, $\text{Pa}$
$\mathbf{h}$	vektor toplinskog fluksa na površini normale $\mathbf{n}$
$\mathcal{H}$	elasto-plastično strukturno zagrijavanje, $\text{W}/\text{m}^3$
$\mathbf{I}$	jedinični tenzor drugog reda
$J$	determinanta gradijenta deformacije
$k$	toplinska provodljivost, $\text{W}/(\text{mK})$
$k$	Boltzmanova konstanta, $\text{J/K}$
$\mathbf{k}$	podmatrica matrice krutosti
$K$	potencijal očvršćivanja, $\text{Pa}$
$\mathbf{K}_T$	tangencijalna matrica krutosti
$\ell$	prostorni gradijent deformacije
$\mathcal{L}_v$	Lieova derivacija

$M$	potencijal termoelastičnog sprežanja, $\text{Pa}$
$\mathbf{n}$	normala na plohu tečenja
$N$	entropija u materijalnoj formulaciji, $\text{J/K}$
$N$	interpolacijske funkcije
$p$	tlak, $\text{Pa}$
$\bar{p}$	srednje normalno naprezanje, $\text{Pa}$
$\mathbf{P}$	prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja, $\text{Pa}$
$r$	priljev topline, $\text{W/kg}$
$q^i$	krivolinijske koordinate, $\text{m}$
$\mathbf{q}$	vektor toplinskog fluksa u prostornoj konfiguraciji, $\text{W}/\text{m}^2$
$\mathbf{Q}$	vektor toplinskog fluksa u materijalnoj konfiguraciji, $\text{W}/\text{m}^2$
$\mathbf{R}$	tenzor rotacije
$\mathbf{R}$	vektor reziduuma
$\mathbf{S}$	drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja, $\text{Pa}$
$t$	vrijeme, $\text{s}$
$\mathbf{t}$	površinske sile u prostornom opisu, $\text{N}/\text{m}^2$
$T$	termički potencijal, $\text{Pa}$
$\mathbf{u}$	vektor pomaka, $\text{m}$
$\mathbf{U}$	desni tenzor izduženja
$U$	volumetrijski potencijal, $\text{Pa}$
$\mathbf{v}$	brzina u prostornom opisu, $\text{m/s}$
$\mathbf{V}$	brzina u materijalnom opisu, $\text{m/s}$
$\mathbf{V}$	lijevi tenzor izduženja
$W$	devijatorski potencijal, $\text{Pa}$
$\mathbf{w}$	vtložnost
$\mathbf{X}$	vektor položaja u materijalnoj konfiguraciji, $\text{m}$
$\mathbf{x}$	vektor položaja u prostornoj konfiguraciji, $\text{m}$

$y$	funkcija omekšivanja materijala
$\mathbf{z}$	tenzor kinematičke deformacije u prostornom opisu
$\alpha$	koeficijent toplinske ekspanzije, $K^{-1}$
$\alpha$	tenzor povratnog naprezanja u u prostornom opisu, Pa
$\beta_{0..4}$	koeficijenti
$\delta$	eksponent očvršćivanja
$\delta$	Kroneckerov tenzor
$\gamma$	unutarnja proizvodnja entropije, $J/(kgK)$
$\phi$	ploha tečenja
$\Gamma$	granica tijela, $m^2$
$\eta$	izoparametrijska koordinata
$\eta$	entropija u prostornoj formulaciji, $J/K$
$\lambda$	Lagrangeov multiplikator
$\vartheta$	porast temperature, K
$\varphi$	konfiguracija ili deformacija
$\phi_*$	push-forward operator
$\phi^*$	pull-back operator
$\kappa$	modul kompresije, Pa
$\kappa_r$	koeficijent zračenja, $W/(m^2K)$
$\mu$	Laméova konstanta, Pa
$\rho$	gustoća, $kg/m^3$
$\sigma$	Cauchyev tenzor naprezanja, Pa
$\tau$	Kirchhoffov tenzor naprezanja, Pa
$\theta$	temperatura, K
$\omega_0$	omekšivanje naprezanja tečenja, $K^{-1}$

$\omega_h$	omekšivanje modula očvršćivanja, $K^{-1}$
$\Omega$	volumen tijela, $m^3$
$\psi$	Helmholtzova slobodna energija, J
$\xi$	ekvivalentna plastična deformacija
$\xi$	izoparametrijska koordinata
$\Xi$	tenzor kinematičke deformacije u materijalnom opisu
$\chi$	faktor disipacije
$\Psi$	interpolacijske funkcije

## Indeksi i eksponenti:

*	virtualna veličina
0	vrijednost u početnoj konfiguraciji
<i>c</i>	konvekcija
<i>con</i>	dio zbog provođenja topline
<i>e</i>	elastični dio
<i>geo</i>	oznaka za geometrijski dio matrice krutosti
<i>h</i>	vrijednost interpolirana iz mješovitih varijabli
<i>i</i>	broj iteracije
<i>L</i>	oznaka za dio matrice krutosti koji se pojavljuje zbog pratećeg opterećenja
<i>loc</i>	lokalni dio
<i>M</i>	oznaka za mehaničku fazu
<i>mat</i>	oznaka za materijalni dio matrice krutosti
<i>mech</i>	mehanički dio
<i>n</i>	broj koraka
<i>p</i>	plastični dio
<i>r</i>	radijacija

<i>trial</i>	pokušajna vrijednost
<i>T</i>	oznaka za termičku fazu
<i>y</i>	tečenje

## Popis slika

---

---

Sl. 3.1. (a) bridne i (b) vijčane dislokacije.....	10
Sl. 3.2. Krivulje puzanja metala u raznim mehaničkim i temperaturnim uvjetima .....	16
Sl. 4.1. Koordinatne površine, krivulje i osi u krivolinijskom sustavu .....	21
Sl. 5.1. Uz multiplikativnu dekompoziciju gradijenta deformacije.....	39
Sl. 8.1. Radijalna Cauchyeva naprezanja na unutarnjoj stijenci u odnosu spram unutarnjeg polumjera cilindra .....	101
Sl. 8.2. Sužavanje prema produljenju epruvete. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata. ....	104
Sl. 8.3. $F - \Delta L$ dijagram. Mreža od 410 konačnih elemenata. 50 koraka. ....	105
Sl. 8.4. Ekvivalentna naprezanja po Von Misesu za produljenja (a) $\Delta u = 1,4$ mm i (b) $\Delta u = 7,0$ mm. Mreža od 410 elemenata. 50 koraka (c) $\Delta u = 9,8$ mm i (d) $\Delta u = 14$ mm. Mreža od 410 .....	106
Sl. 8.5. Raspodjela radijalnih (a) i aksijalnih (b) Cauchyevih naprezanja na kraju procesa deformiranja. Mreža od 410 elemenata. 50 koraka.....	108

Sl.8.6. Raspodjela porasta temperature za različito trajanje procesa deformiranja za konstantne materijalne značajke. Algoritam i rezultati istovjetni su onima u Simo i Miehe [25].	112
Sl.8.7. Raspodjela porasta temperature za različito trajanje procesa deformiranja za promjenjive materijalne značajke	113
Sl. 8.8. Raspodjela Cauchyevih naprezanja za proces $t=130$ s. VonMises – von Misesova naprezanja, $S_{rr} - \sigma_r$ , $S_{zz} - \sigma_z$ , $S_{yy} - \sigma_\varphi$	114
Sl.8.9. Ukupni porast temperature na unutarnjoj stijenci cilindra u funkciji broja vremenskih koraka, $t = 130$ s	115
Sl. 8.10. Gubitak stabilnosti algoritma temeljenog na izotermičkoj podjeli ( $t=130$ s)	116
Sl. 8.11. Polje porasta temperature na kraju procesa deformiranja ( $t=7$ s), konstante materijalne značajke	118
Sl. 8.12. Porast temperature u trenutku $t=0,84$ s, promjenjive materijalne značajke. Korak prije potpune plastifikacije ( $t=0,98$ s)	119
Sl. 8.13. Porast temperature u trenutku $t=1,89$ s, promjenjive materijalne značajke. Početak ekspanzije	119
Sl. 8.14. Porast temperature u trenutku $t=4,62$ s, promjenjive materijalne značajke	120
Sl. 8.15. Porast temperature u trenutku $t=7$ s, promjenjive materijalne značajke	120
Sl. 8.16. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku $t=0,14$ s, promjenjive materijalne značajke	122
Sl. 8.17. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku $t=0,84$ s, promjenjive materijalne značajke. Korak prije potpune plastifikacije ( $t=0,98$ s)	122
Sl. 8.18. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku $t=1,89$ s, promjenjive materijalne značajke. Početak ekspanzije	123
Sl. 8.19. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku $t=7$ s, promjenjive materijalne značajke. Kraj procesa	123

Sl. 8.20. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku $t=0,21$ s, konstantne materijalne značajke	124
Sl. 8.21. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku $t=0,91$ s, konstantne materijalne značajke	124
Sl. 8.22. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku $t=1,61$ s, konstantne materijalne značajke. Istovremena potpuna plastifikacija i početak širenja	125
Sl. 8.23. Polje ekvivalentne plastične deformacije u trenutku $t=7$ s, konstantne materijalne značajke. Kraj procesa	125
Sl. 8.24. Razvoj pomaka unutarnje stijenske sfere tijekom vremena	126
Sl. 8.25. Razvoj porasta temperature unutarnje stijenske sfere tijekom vremena	126
Sl. 8.26. Razvoj ekvivalentnog naprezanja po von Misesu na unutarnjoj stijenci sfere tijekom vremena	
Sl. 8.27. (a) Polje porasta temperature i (b) polje ekvivalentne plastične deformacije na kraju procesa deformiranja	130
Sl. 8.28. Polje porasta temperature u trenutku (a) $t=3$ s, nešto prije početka sužavanja i (b) $t=3,28$ s, početak sužavanja. Promjenjive materijalne značajke. (c) Polje porasta temperature u trenutku $t=8$ s, kraj deformiranja i (d) ekvivalentna naprezanja po von Misesu na kraju procesa deformiranja. Promjenjive materijalne značajke	131
Sl. 8.29. (a) Vektori toplinskog fluksa i (b) radijalna komponenta vektora toplinskog fluksa, kraj deformiranja. Promjenjive materijalne značajke	133
Sl. 8.30. Porast temperature u točki A za vrijeme procesa deformiranja. Usporedba rezultata dobivenih konstantnim i promjenjivim materijalnim značajkama	134
Sl. 8.31. $F - \Delta L$ krivulje. Usporedba rezultata dobivenih konstantnim i promjenjivim materijalnim značajkama	135
Sl. 8.32. Porast temperature na površini epruvete tijekom deformiranja	136

Sl. 8.33. Pojava Lüderovih traka pri aksijalnom opterećenju epruvete, Schey [109, str. 258] .....	137
Sl. 8.34. Porast temperature na površini epruvete tijekom deformiranja; brži proces. (a) Promjenjive materijalne značajke i (b) konstantne. ....	139
Sl. 8.35. (a) Ekvivalentna plastična deformacija i (b) ekvivalentna naprezanja po von Misesu; kraj bržeg procesa, promjenjive materijalne značajke. ....	140
Sl. 8.36. Porast temperature na površini epruvete tijekom deformiranja; sporiji proces. (a) Promjenjive materijalne značajke i (b) konstantne. ....	141
Sl. 8.37. (a) Ekvivalentna plastična deformacija i (b) ekvivalentna naprezanja po von Misesu; kraj sporijeg procesa, promjenjive materijalne značajke. ....	142
Sl. 8.38. Diskretizirana ploča.....	143
Sl. 8.39. Porast temperature na kraju procesa deformiranja .....	144
Sl. 8.40. Ekvivalentna naprezanja po von Misesu na kraju procesa deformiranja.....	144
Sl. 8.41. Ekvivalentna plastična deformacija u trenutku $t = 1/4$ s.....	144
Sl. 8.42. Ekvivalentna plastična deformacija na kraju procesa deformiranja.....	145
Sl. 8.43. Uzdužni pomaci točaka na kraju procesa deformiranja.....	145
Sl. 8.44. Vertikalni pomaci točaka na kraju procesa deformiranja.....	145
Sl. 8.45. Porast temperature u točkama "A" i "B" tijekom procesa deformiranja.....	146

## Popis tablica

Tab. 8.1. Materijalne značajke debelostijenog cilindra.....	100
Tab. 8.2. Broj iteracija u pojedinom koraku .....	102
Tab. 8.3. Materijalne značajke čelika A-533 Grade B Class 1 .....	103
Tab. 8.4. Materijalne značajke debelostijenog cilindra – konstantne. ....	110
Tab. 8.5. Materijalne značajke debelostijenog cilindra – promjenjive.....	110
Tab. 8.6. Greške i norme u vektorima varijabli i reziduuma ( $t=130$ s) .....	115
Tab. 8.7. Materijalne značajke debelostijene sfere – konstantne.....	117
Tab. 8.8. Materijalne značajke debelostijene sfere – promjenjive.....	117
Tab. 8.9. Materijalne značajke cilindrične epruvete – konstantne.....	128
Tab. 8.10. Materijalne značajke cilindrične epruvete – promjenjive..	129



Marko Čanađija rođen je 27. srpnja 1970. u Rijeci. Osmogodišnju je školu završio 1985. godine u Matuljima, dok je srednješkolsko obrazovanje stekao u Centru za kadrove u obrazovanju i kulturi u Rijeci stekavši tako zvanje matematičar-informatičar.

Sveučilišni je studij strojarstva na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci upisao 1989. U dva je navrata bio nagrađivan za uspjeh u studiranju. Diplomski je rad "Adaptacija vodoopskrbne crpne stanice za nove potrošače" izradio pod vodstvom red.prof.dr.sc. Zorana Mrše. Rad je obranjen 2. lipnja 1994.

Nakon završenog studija, kraće je vrijeme bio zaposlen u tvrtci "ASN" na poslovima izrade programa za elektronička računala.

Od 8. studenog 1994. djelatnik je Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci u svojstvu mlađeg asistenta na Zavodu za tehničku mehaniku a za predmete: Statika, Mehanika konstrukcija i Laboratorijske vježbe iz Nauke o čvrstoći na sveučilišnom studiju strojarstva i brodogradnje te Mehanika I i Čvrstoća na stručnom studiju strojarstva i brodogradnje. Godine 1994. upisao je poslijediplomski studij smjera Računarska mehanika, usmjerenje Strukturna analiza i optimizacija konstrukcija pod vodstvom red. prof. dr. sc. Josipa Brnića, dipl.ing. 1997. magistrira obranivši rad pod nazivom "Numerička analiza procesa hladnog valjanja tankih pločastih izradaka".

U periodu studeni 1997. – rujan 1998. nalazio se na redovitom odsluženju vojnog roka u HV.

Suradivao je na znanstvenim projektima "Strukturalne analize objekata za optimalnu iskoristivost", br. 2-08-011 i "Numerička optimizacija u projektiranju i proizvodnji", br. 069-001. Oba projekta vodio je red. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing., a financirani su od strane Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske. Od 2002. godine sudjeluje kao član istraživačkog tima na znanstvenom projektu 0069-006 pod nazivom "Numerička analiza nelinearnih problema u projektiranju i proizvodnji", pod vodstvom istog glavnog istraživača.

Kao dobitnik stipendije Županije Primorsko-goranske bio je na usavršavanju na Technische Universität - Beč. Sudjelovao je na tečajevima "Design for Quality", University of Bologna i "Adaptive Finite Elements in Linear and Nonlinear Solid and Structural Mechanics", CISM, Udine.

Autor je ili koautor više znanstvenih članaka objavljenih u domaćim ili stranim časopisima odnosno prezentiranih na domaćim ili inozemnim znanstvenim skupovima.

Govori i piše engleski i njemački.

Oženjen je i otac jednog djeteta.

## PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

### 1. AUTOR

Ime i prezime:	MARKO ČANAĐIJA
Datum i mjesto rođenja:	27.07.1970.
Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija:	TEHNIČKI FAKULTET SVEUČILIŠTA U RIJECI, STROJARSTVO, 1994.
Naziv fakulteta, smjera i godina završetka poslijediplomskog studija:	TEHNIČKI FAKULTET SVEUČILIŠTA U RIJECI, STROJARSTVO, 1997.
Sadašnje zaposlenje:	ASISTENT NA TEHNIČKOM FAKULTETU SVEUČILIŠTA U RIJECI

### 2. DOKTORSKA DISERTACIJA

Naslov:	NUMERIČKA ANALIZA NELINEARNIH IZOTERMIČKIH I NEIZOTERMIČKIH PROCESA PLASTIČNOG DEFORMIRANJA METALA
Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka:	174, 49, 10, 112
Znanstveno polje i grana:	STROJARSTVO, DRUGE TEMELJNE TEHNIČKE ZNANOSTI
Voditelj rada:	RED.PROF.DR.SC. JOSIP BRNIĆ, DIPL.ING.
Fakultet na kojem je rad obranjen:	TEHNIČKI FAKULTET SVEUČILIŠTA U RIJECI

### 3. OBRANA I OCJENA

Datum prijave teme:	07.04.1999.
Datum predaje rada:	28.06.2002.
Datum prihvatanja ocjene rada:	20.09.2002.
Sastav Povjerenstva za ocjenu:	Red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, predsjednik Red. prof. dr. sc. Josip Brnić, mentor, član Red. prof. dr. sc. Mirko Butković, član Red. prof. dr. sc. Milan Jurković, član Red. prof. dr. sc. Vladimir Medica, član
Datum obrane:	
Sastav Povjerenstva za obranu:	Red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, predsjednik Red. prof. dr. sc. Josip Brnić, mentor, član Red. prof. dr. sc. Mirko Butković, član Red. prof. dr. sc. Milan Jurković, član Red. prof. dr. sc. Vladimir Medica, član

Datum promocije:

Oznaka: DD

Tek. broj:

UDK 519.6:539.373:539.377:539.389(043)

NUMERIČKA ANALIZA NELINEARNIH IZOTERMIČKIH I  
NEIZOTERMIČKIH PROCESA PLASTIČNOG DEFORMIRANJA METALA

Marko Čanađija

Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
Hrvatska

Ključne riječi: Termoplastičnost  
Velike deformacije  
Metoda konačnih elemenata  
Spregnuti sustavi  
Mehanika kontinuuma

Sažetak:

Ovaj rad razmatra ponašanje metala pri velikim plastičnim deformacijama u izotermnim i neizotermnim uvjetima. Ukratko je predstavljena fenomenološka osnova plastične deformacije. Slijedi pregled jednadžbi mehanike kontinuuma koje su temelj numeričkog algoritma. Daje se njihov oblik u materijalnoj i prostornoj formulaciji. Nadalje, predstavlja se konstitutivne jednadžbe prikladne za plastično ponašanje metala i predlaže se funkcija slobodne energije. Plastičnost se opisuje pomoću izotropnog i kinematičkog očvršćivanja. Numerički tretman spregnutog sustava temelji na razdvajanju algoritma u mehaničku i termičku fazu. Za ove algoritme izvodi se prikladna metoda radijalnog povratka. Izvedena je i varijacijska formulacija problema, te provedena diskretizacija metodom konačnih elemenata. Posebno se ističe izvod konzistentnih tangencijalnih matrica krutosti. Sve je ovo izvedeno uzimajući u obzir promjenjivost materijalnih značajki ovisno o temperaturi. Primjenjivost i efikasnost predložene metodologije ilustrirana je putem sedam reprezentativnih primjera.

Rad nije objavljen.

Mentor: Red. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing.  
Povjerenstvo za ocjenu: Red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, dipl. ing., predsjednik  
Red. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing., mentor, član  
Red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing., član  
Red. prof. dr. sc. Milan Jurković, dipl. ing., član  
Red. prof. dr. sc. Vladimir Medica, dipl. ing., član  
Povjerenstvo za obranu: Red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, predsjednik  
Red. prof. dr. sc. Josip Brnić, mentor, dipl. ing., član  
Red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing., član  
Red. prof. dr. sc. Milan Jurković, dipl. ing., član  
Red. prof. dr. sc. Vladimir Medica, dipl. ing., član

Datum obrane: \_\_\_\_\_

Datum promocije: \_\_\_\_\_

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.  
(174, 49, 10, 112, hrvatski jezik)

UDK 519.6:539.373:539.377:539.389(043)

Ključne riječi:

Termoplastičnost

Velike deformacije

Metoda konačnih elemenata

Spregnuti sustavi

Mehanika kontinuuma

DD

1. Numerička analiza nelinearnih

izotermičkih i neizotermičkih procesa

plastičnog deformiranja metala

I Čanadija M.

II Sveučilište u Rijeci

Tehnički fakultet

HRVATSKA

Code DD No. \_\_\_\_\_

UDC 519.6:539.373:539.377:539.389(043)

NUMERICAL ANALYSIS OF NONLINEAR ISOTHERMAL AND  
NONISOTHERMAL PROCESSES OF PLASTIC DEFORMATION OF METALS

Marko Čanadija

University of Rijeka  
Faculty of Engineering  
Croatia

Keywords: Thermoplasticity  
Finite strains  
Finite element method  
Coupled systems  
Continuum mechanics

Summary:

This dissertation deals with metal behaviour under large plastic strains in the both isothermal and nonisothermal conditions. Phenomenological basics of plastic deformation are briefly considered. Fundamental equations of continuum mechanics are presented in spatial and material formulation. They present a starting point for numerical algorithms that follow. Constitutive equations and free energy function suitable for description of plastic deformation of metals are given. Hardening is described by isotropic and kinematic laws. Numerical treatment of coupled system is based on staggered scheme and includes mechanical and thermal phase. For these phases radial return method is derived. Variational formulation is introduced and discretization by finite element method is carried out. Consistent tangential stiffness matrices are given. All calculations are performed by introducing temperature dependence of material properties. Applicability and efficiency of proposed method is provided by seven representative examples.

This thesis has not been published.

Mentor: Prof. D. Sc. Josip Brnić, dipl. ing.  
Advisors: Prof. D. Sc. Ivo Alfirević, dipl. ing., chairman  
Prof. D. Sc. Josip Brnić, dipl. ing., mentor, member  
Prof. D. Sc. Mirko Butković, dipl. ing., member  
Prof. D. Sc. Milan Jurković, dipl. ing., member  
Prof. D. Sc. Vladimir Medica, dipl. ing., member  
Reviewers: Prof. D. Sc. Ivo Alfirević, dipl. ing., chairman  
Prof. D. Sc. Josip Brnić, dipl. ing., mentor, member  
Prof. D. Sc. Mirko Butković, dipl. ing., member  
Prof. D. Sc. Milan Jurković, dipl. ing., member  
Prof. D. Sc. Vladimir Medica, dipl. ing., member

Presentation: \_\_\_\_\_

Degree conferred: \_\_\_\_\_

This thesis is deposited in the library of the University of Rijeka, Faculty of Engineering.  
(174, 49, 10, 112, croatian language)

DD

UDC 519.6:539.373:539.377:539.389(043)

1. Numerical analysis of nonlinear  
isothermal and nonisothermal processes  
of plastic deformation of metals

Key words

Thermoplasticity  
Finite strains  
Finite element method  
Coupled systems  
Continuum mechanics

I Čanadija M.

II Universtiy of Rijeka  
Faculty of Engineering  
Croatia