

# Nelinearna analiza stabilnosti tankostijenih grednih struktura

---

Turkalj, Goran

Doctoral thesis / Disertacija

2000

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:188:844458>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-17**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka Library - SVKRI Repository](#)



**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET**

**NELINEARNA ANALIZA STABILNOSTI  
TANKOSTIJENIH GREDNIH STRUKTURA**

Doktorska disertacija

Goran Turkalj

Rijeka, 2000.  
**SVEUČILIŠTE U RIJECI**

**TEHNIČKI FAKULTET**

**NELINEARNA ANALIZA STABILNOSTI  
TANKOSTIJENIH GREDNIH STRUKTURA**

Doktorska disertacija

Goran Turkalj

Mentor: Red. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing.

Rijeka, 2000.

*Voljenim roditeljima u znak vječne zahvalnosti.*

## SAŽETAK

U radu su prikazani analitički i numerički pristup u rješavanju problema stabilnosti tankostijenih grednih struktura proizvoljnih poprečnih presjeka. U analitičkom su pristupu primjenom nelinearnog polja pomaka tankostijenog poprečnog presjeka, a koje uključuje efekt velikih rotacija, te lineariziranog principa virtualnih radova, izvedene ravnotežne jednačbe izvijenog prostornog tankostijenog grednog nosača. Materijal je, pritom, pretpostavljen kao izotropan i linearno-elastičan. U numeričkom je dijelu rada prikazana metoda konačnih elemenata. Primjenom su *updated Lagrangian* formulacije i nelinearnog polja pomaka poprečnog presjeka izvedene linearizirane inkrementalne ravnotežne jednačbe tankostijenog grednog konačnog elementa. Na osnovi su njih, potom, izvedene elastična, geometrijska i eksterna matrica krutosti konačnog elementa. Pritom su unutarnji momenti dobiveni kao polutangencijalni. Za vanjske momente aksijalnog, tangencijalnog i kvazitangencijalnog tipa, izvedene su odgovarajuće korektivne matrice krutosti, kao i za slučaj *off-axis* djelovanja vanjske sile. Korekcija geometrije konstrukcije izvedena je u skladu s *Rodriguezovom* formulom velikih rotacija. Elasto-plastična se analiza stabilnosti temelji na teoriji plastičnih zglobova, a primjenom je *Prandtlova* kriterija tečenja i pretpostavke da postoji kontinuirana funkcija tečenja, izvedena plastična redukcijska matrica konačnog elementa. Na osnovi je spomenutog numeričkog algoritma izrađen kompjutorski program THINWALL, a s kojim je moguće rješavati probleme linearne i nelinearne stabilnosti tankostijenih grednih struktura. U slučaju je nelinearne stabilnosti kao inkrementalno-iterativna shema uporabljena *generalized displacement control* procedura. Točnost je prezentiranog numeričkog algoritma provjerena kroz test primjere.

## SUMMARY

In the work analytical and numerical approaches in dealing with the stability problem of thin-walled beam-type structures with arbitrary cross-sectional shapes are presented. In the analytical approach equilibrium equations of buckled space thin-walled beam member are derived using the non-linear displacement field of asymmetric thin-walled cross-section, due to large rotation effect, as well as linearized principle of virtual works. Material is assumed to be isotropic and linear-elastic. In the numerical part of this work the finite element method is presented. Using an *updated Lagrangian* formulation and above mentioned non-linear displacement field the linearized incremental equilibrium equations of a thin-walled beam finite element are carried out. Afterwards elastic, geometric and external stiffness matrices of the element are derived. In this, internal moments are obtained as semitangential ones. In cases of axial, tangential and qusitangential external moments as well as in the case of an *off-axis* external force, corresponding correction stiffness matrices are derived. The updating of structural geometry is performed according to *Rodriguez'* large rotation formula. The elasto-plastic stability analysis is based on the plastic hinge theory and using *Prandtl's* flow rule as well as assuming the existing of a continuous yield function, the plastic reduction matrix of the thin-walled beam finite element is derived. On the basis of aforementioned numerical algorithm the computer programme THINWALL is developed, the purpose of which is the performing of linear and non-linear stability analyses of thin-walled beam-type structures. In the non-linear case the *generalized displacement control* procedure is used as an incremental-iterative scheme. The accuracy of presented numerical algorithm is verified through the test problems.

## PREDGOVOR

Doktorska disertacija *Nelinearna analiza stabilnosti tankostijenih grednih struktura* izrađena je u okviru znanstveno-istraživačkog projekta *Numerička optimizacija u projektiranju i proizvodnji*, br. 069-001, Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske, glavnog istraživača red. prof. dr. sc. Josipa Brnića, dipl. ing. te poticajnog projekta *Numerička analiza stabilnosti i optimizacija tankostijenih grednih struktura*, br. 069-101, kojeg vodi autor. Ovaj je rad izrađen s ciljem stvaranja numeričkog algoritma, temeljenog na metodi konačnih elemenata, za geometrijski i materijalno nelinearnu analizu stabilnosti tankostijenih grednih struktura.

Disertacija je podijeljena u pet poglavlja, pri čemu je prvo uvodno poglavlje, a peto predstavlja zaključna razmatranja.

U drugom je poglavlju pod naslovom *Analiza deformacija i naprezanja tankostijenih grednih nosača*, prvo izvedeno linearno polje pomaka tankostijenog poprečnog presjeka, zatim Cauchyjev tenzor deformacije te su ukratko definirane geometrijske karakteristike poprečnoga presjeka. Zatim su prikazane komponente rezultante unutarnjih sila, a za slučaj su linearno-elastičnog ponašanja materijala izvedene ravnotežne jednadžbe primjenom tzv. inženjerskih teorija i to: *Euler-Bernoulli-Navierove* teorije za savijanje i *Timoshenko-Vlasove* teorije za torziju. Potom je u analizu uključena geometrijska nelinearnost kroz nelinearno polje pomaka poprečnoga presjeka, koje se javlja kao posljedica efekta velikih rotacija, a na osnovi je takova polja izveden Green-Lagrangeov tenzor deformacije. Primjenom su lineariziranog principa virtualnih radova izvedene ravnotežne jednadžbe izvijenja prostornog tankostijenog grednog nosača te su za nekoliko osnovnih primjera torzijsko-fleksijskog, čistog torzijskog i lateralnog izvijanja izvedene kritične sile.

Treće poglavlje naziva *Tankostijeni gredni konačni element* predstavlja glavni dio disertacije. Prvo su primjenom UL (*updated Lagrangian*) formulacije, nelinearno polje pomaka poprečnog presjeka i pretpostavke o linearno-elastičnom ponašanju materijala, izvedene linearizirane inkrementalne ravnotežne jednadžbe tankostijenog grednog konačnog elementa, a na osnovi njih elastična i geometrijska matrica krutosti konačnog elementa. Pri tome je za pomake u polju konačnog elementa kod aksijalnog opterećenja primijenjena linearna aproksimacija, dok je kod savijanja i torzije primijenjena kubična aproksimacija. Kako je primjenom *rigid body* testa dokazana nemogućnost primjene NDA (*natural deformation approach*) pristupa u *force recovery* fazi, to je bilo nužno primijeniti ESA (*eksternal stiffness approach*) pristup pa je, stoga, izvedena i tzv. eksterna matrica krutosti konačnog elementa. Prikazan je način na koji se izvodi korekcija položaja čvorova konstrukcije i geometrije konačnog elementa, pri čemu je korekcija položaja referentnih osi čvorova izvedena u skladu s *Rodriguezovom* formulom za velike rotacije. Dan je kratak pregled numeričkih procedura za rješavanje nelinearnih problema te prikazana *generalized displacement control* procedura inkrementalno-iterativnog načina rješavanja. Prikazana su rotacijska svojstva momenata, a dokazano je da se unutarnji momenti konačnog elementa pri prostornim rotacijama ponašaju kao polutangencijalni. Kako se vanjski momenti pri prostornim rotacijama mogu ponašati i kao aksijalni, tangencijalni i kvazitangencijalni, to su za te slučajeve, kao i za slučaj *off-axis* djelovanja vanjske sile, izvedene odgovarajuće korektivne matrice krutosti. Na kraju je ovoga poglavlja u analizu uveden i problem materijalne nelinearnosti temeljen na pretpostavci da je materijal linearno-elastičan idealno-plastičan te da nema zaostalih naprezanja. Za rješavanje je toga problema primijenjena tzv. metoda plastičnih zglobova, tj. pretpostavljeno je da su svi plastični efekti koncentrirani u plastičnim zglobovima nulte duljine. Pri tome se ti plastični zglobovi pojavljuju samo u čvorovima konačnog elementa, dok se u polju konačnog elementa materijal uvijek ponaša kao linearno-elastičan. Potom je, na

osnovi *Prandtlova* kriterija tečenja i pretpostavke da postoji kontinuirana funkcija tečenja, izvedena plastična redukcijska matrica konačnog elementa, a funkcija koje je sprečavanje odvijanja inkrementalne promjene vektora čvornih sila u plastičnom zglobu, izvan tangencijalne ravnine plohe tečenja.

Na osnovi je spomenutog numeričkog algoritma, a temeljenog na metodi konačnih elemenata, izrađen kompjutorski program THINWALL, prikaz kojeg je dan u četvrtom poglavlju istoimenog naziva. Program je, najprije, ukratko opisan, a zatim i strukturno prikazan u obliku dijagrama tijeka. Pri tome je svaki od potprograma opisan i pojašnjen. Za slučaj je elasto-plastičnog ponašanja materijala kao ogledni primjer usvojena funkcija tečenja lakog I-profila W12×31 (AISC standard). Nakon toga program je testiran, a dobiveni su rezultati uspoređeni s poznatim teorijskim, numeričkim ili eksperimentalnim vrijednostima.

Autor ovom prilikom izražava neizmjernu zahvalnost svome mentoru red. prof. dr. sc. Josipu Brniću, dipl. ing. na svesrdnoj pomoći pruženoj tijekom izrade ove disertacije. Izuzetnu zahvalu autor upućuje i red. prof. dr. sc. Ivi Alfireviću, dipl. ing. s Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, koji je za vrijeme bolesti mentora našao vremena da ovu disertaciju pročita i uputi korisne savjete. Autor se također zahvaljuje i red. prof. dr. sc. Mirku Butkoviću, dipl. ing., red. prof. dr. Ivanu Kamenaroviću, dipl. ing. te izv. prof. dr. sc. Iztoku Potrču, dipl. ing. s Fakultete za strojništvo Univerze v Mariboru, na uloženom trudu pri pregledu disertacije. Doc. dr. sc. Jasni Prpić-Oršić, dipl. ing. autor iskreno zahvaljuje na svesrdnoj pomoći pruženoj pri izradi programa THINWALL.

Na kraju autor izražava posebnu zahvalnost svojoj obitelji na podršci i strpljenju.

*Autor*

## SADRŽAJ

<b>1. UVOD</b> .....	1
1.1. Definiranje problema .....	1
1.2. Ocjena dosadašnjih istraživanja.....	1
1.3. Cilj i svrha istraživanja .....	2
<b>2. ANALIZA DEFORMACIJE I NAPREZANJA TANKOSTIJENOG GREDNOG NOSAČA</b> .....	3
2.1. Osnovne pretpostavke.....	3
2.2. Linearno polje pomaka .....	4
2.3. Cauchyjev tenzor deformacije .....	8
2.4. Geometrijske karakteristike ravnih presjeka nosača.....	8
2.5. Unutarnje sile.....	9
2.6. Nelinearno polje pomaka .....	15
2.7. Green-Lagrangeov tenzor deformacije .....	16
2.8. Ravnotežne jednačbe izvijenog tankostijenog grednog nosača .....	17
2.9. Torzijsko-fleksijsko izvijanje.....	25
2.10. Lateralno ili bočno izvijanje .....	31
<b>3. TANKOSTIJENI GREDNI KONAČNI ELEMENT</b> .....	35
3.1. Vektor čvornih sila i vektor čvornih pomaka konačnog elementa.....	36
3.2. Updated Lagrangian (UL) formulacija .....	37
3.3. Elastična matrica krutosti konačnog elementa.....	39
3.4. Geometrijska matrica krutosti konačnog elementa.....	46
3.5. Jednačba konačnog elementa.....	50
3.6. Transformacijske matrice .....	57
3.7. Jednačba konstrukcije .....	59
3.8. Korekcija geometrije konačnog elementa.....	61
3.8.1. Referentne osi .....	62
3.8.2. Osi čvorova konačnog elementa i osi konačnog elementa.....	63
3.9. Numeričke procedure za rješavanje nelinearnih problema .....	66
3.9.1. Čista inkrementalna procedura.....	66
3.9.2. Inkrementalno-iterativne procedure .....	67
3.10. Off-axis opterećenje.....	70
3.11. Rotacijska svojstva momenata.....	71
3.11.1. Unutarnji momenti .....	73
3.11.2. Vanjski momenti .....	76
3.12. Materijalna nelinearnost.....	81



<b>4. PROGRAM THINWALL</b> .....	85
4.1. Kratki opis programa .....	85
4.2. Opis potprograma .....	90
4.3. Primjeri .....	92
<b>5. Zaključak</b> .....	115
REFERENCE .....	117
POPIS UPORABLJENIH OZNAKA .....	121
POPIS SLIKA .....	125
POPIS TABLICA.....	127

## 1. UVOD

### 1.1. Definiranje problema

Tankostijene gredne strukture (grede, ravninski i prostorni okviri itd.) čine vrlo važnu klasu konstrukcijskih elemenata u inženjerskoj praksi [1, 2]. Pritom se one javljaju ili kao samostalni konstrukcijski elementi (upore, nosači općenito) [3 – 7], kao dijelovi neke složenije strukture (ukrepe brodske palube, elementi rešetki i sl.) [8, 9] ili kao samostalne nosive strukture (roštilji, rebra objekata i sl.) [10, 11]. Njihovo je značenje osobito izraženo u području optimizacije, jer u usporedbi s grednim nosačima puna poprečnog presjeka, za istu čvrstoću zahtijevaju minimalan utrošak materijala [12, 13].

No, zbog složenijeg oblika i njihovo je ponašanje istovremeno mnogo složenije, pri čemu je posebno izražena njihova mnogo veća sklonost ka gubitku stabilne deformacijske forme [14 – 16]. Za ilustraciju je dovoljno navesti činjenicu da se u slučaju puna poprečnog presjeka izvijanje nosača manifestira uglavnom u vidu fleksijske forme gubitka stabilnosti, dok je kod tankostijenog grednog nosača moguća uz fleksijsku i torzijsku, torzijsko-fleksijska i lateralna (bočna) forma gubitka stabilnosti [17 – 19]. U ovih se nosača kao dopunski problem javlja još i efekt tzv. lokalnog gubitka stabilnosti, tj. pri određenom nivou vanjskog opterećenja može doći do značajnijeg lokalnog izobličavanja poprečnog presjeka, odnosno početni oblik poprečnog presjeka postaje nestabilan, što ponekad rezultira u značajnijem padu globalne stabilnosti [20 – 23]. Problem se, također, znatno usložnjava u slučaju materijalno-nelinearnog ponašanja materijala [24 – 28].

Zbog toga je u dizajnu tankostijenih grednih struktura od osobite važnosti mogućnost što točnijeg određivanja graničnog stanja stabilnosti deformacijskih formi. Kako su analitička rješenja za probleme stabilnosti tankostijenih grednih nosača moguća samo u relativno jednostavnijim slučajevima, to je pri analizi ovakvih problema nužno rabiti neku od numeričkih metoda kao što je npr. metoda konačnih elemenata [29 – 32]. Tu su istraživačima posebno interesantni gredni konačni elementi, koji u usporedbi s 2-D konačnim elementima [33, 34], omogućavaju mnogo bržu i jednostavniju analizu, pogotovo kada su u pitanju složenije okvirne konstrukcije sastavljene od većeg broja grednih nosača.

### 1.2. Ocjena dosadašnjih istraživanja

Najraniji pokušaji usmjereni ka opisivanju općenito nelinearnog ponašanja tankostijenih grednih struktura odnosili su se na istraživanje tzv. lateralno-torzijske stabilnosti. Uz pretpostavku o malim pomacima i linearno-elastičnog ponašanja materijala, najprije je Bleich (1952.) [35] analitički odredio vrijednosti kritičnog opterećenja izvijanja tankostijenog grednog nosača otvorena poprečnog presjeka, a za njegove različite oblike i različite tipove rubnih uvjeta. Barsoum i Gallagher (1970.) [36] te Bažant i El Nimeiri (1973.) [37] prvi uvode numerički pristup u analizi elastične stabilnosti tankostijenih nosača, temeljen na metodi konačnih elemenata. Trahair i Kitipornchai (1972.) [38] razmatraju probleme lateralnog elasto-plastičnog izvijanja nosača poprečnog presjeka oblika I-profila, opterećenog na ravno čisto savijanje i to na način da su u analitičkim izrazima za kritično opterećenje izvijanja kombinirali vrijednosti modula elastičnosti i modula smicanja s tangentnim vrijednostima (*tangent modulus approach*), u ovisnosti o širenju plastičnih deformacija po poprečnome presjeku. Nethercot (1975.) [39] je, potom, primijenio njihov pristup, kombinirajući ga s metodom konačnih elemenata u analizi istog problema, a za slučaj opterećenja tankostijenog grednog nosača na ravno savijanje silama.

Do značajnije primjene teorije velikih pomaka u opisivanju geometrijski nelinearnog ponašanja dolazi pojavom snažnijih kompjutera. U analizi prostornih grednih struktura prvi su naponi usmjereni ka razvoju jednodimenzionalnih konačnih elemenata za modeliranje problema velikih pomaka, ali uz zanemarenje vitoperenja poprečnih presjeka, Bathe i Bolourchi (1979.) [40]. Yang i McGuire (1986.) [41], Gattass i Abel (1987.) [42], Chan i Kitipornchai (1987.) [43], Conci i Gattass (1990.) [44], Conci (1991.) [45], Chen i Blandford (1991.) [46, 47] te Gendy i Saleeb (1994.) [48] uspješno primjenjuju UL (*updated Lagrangian*) shemu u analizi elastične stabilnosti tankostijenih grednih nosača otvorena poprečnog presjeka, uzimajući u obzir i utjecaj vitoperenja poprečnih presjeka. Istu analizu Izzuddin (1995.) [49] sprovodi primjenom *Eulerove* sheme, međutim kako je njegov numerički model u lokalnom koordinatnom sustavu bio linearan, to primjenom toga modela nije bilo moguće modelirati čisto torzijsko izvijanje. Saleeb *et al.* (1992.) [50], Kim *et al.* (1996.) [51] i Chang *et al.* (1996.) [52] provode analizu elastičnog izvijanja tankostijenih okvirnih konstrukcija s pomoću grednih konačnih elemenata čije su

matrice krutosti izvedene na osnovi tzv. nelinearnog polja pomaka, a koje se javlja kao posljedica velikih rotacija.

Međutim, jedna realna analiza tankostijenih grednih struktura prema teoriji velikih pomaka zahtijeva inkorporiranje, kako utjecaja ograničenog vitoperenja, tako i materijalne nelinearnosti. Također, kao dodatni se problem kod prostornih okvornih konstrukcija javlja i efekt nekomutativnosti velikih prostornih rotacija [53 – 56], kao i nekompatibilnost unutarnjih momenata savijanja i velikih prostornih rotacija [48, 51, 57]. Karamanlidis i Gesh-Karamanlidis (1986.) [58] modeliraju probleme geometrijski i materijalno nelinearnog odziva tankostijenih okvira, stim da se njihova analiza ograničava samo na ravninske slučajeve, a iste godine Wunderlich *et al.* [59] proširuju problem i na prostorne konstrukcije primjenjujući UL formulaciju. Conci i Gattas (1990.) [60] primjenjuju teoriju plastičnih zglobova u elasto-plastičnoj analizi tankostijenih nosača otvorena poprečnog presjeka, ali za slučaj geometrijske linearnosti. Meek i Loganathan (1990.) [61] modeliraju probleme elasto-plastične stabilnosti tankostijenih nosača, definirajući plastifikaciju poprečnog presjeka samo u funkciji jednoosnog stanja naprezanja. Iste godine Meek i Lin [62] uključuju interakciju normalnih i posmičnih naprezanja u plastičnom području. No, kako su u oba slučaja analizirani zatvoreni tankostijeni poprečni presjeci, to je efekt vitoperenja poprečnih presjeka bio zanemaren. Utjecaj ograničenog vitoperenja u elasto-plastičnu analizu tankostijenih grednih struktura uključuju Kouhia i Tuomala (1993.) [63], definirajući inkrementalne ravnotežne jednadžbe na osnovi UL formulacije. Za isti problem Pi i Trahair (1994.) [64, 65] primjenjuju TL (*total Lagrangian*) formulaciju, dok Izzudin i Lloyd Smith (1995.) [66, 67] uvode *Eulerovu* formulaciju. U sva su ta tri slučaja numerički algoritmi omogućavali modeliranje postepene plastifikacije poprečnog presjeka, a za opisivanje interakcije posmičnih naprezanja uzrokovanih torzijom i normalnih naprezanja primijenjen je von Misesov kriterij tečenja. No, kako je mogućnost modeliranja postepene plastifikacije poprečnog presjeka zahtijevala subdiskretizaciju poprečnog presjeka u svim čvorovima konstrukcije na određen broj segmenata te je, tako, znatno povećalo broj podataka koje je tijekom proračuna trebalo pratiti, to ovi numerički modeli nisu bili naročito pogodni za složenije prostorne tankostijene okvirne konstrukcije. Da bi riješio taj problem Gebbeken (1998.) [68] prezentira geometrijski i materijalno nelinearnu analizu prostornih okvornih konstrukcija temeljenu na generaliziranoj teoriji plastičnih zglobova i Rubinovim funkcijama tečenja za dvoosno simetrične poprečne presjeke. Njegov je numerički model, za razliku od modela koji se temelje na standardnoj teoriji koncentriranih plastičnih zglobova [31], uključivao kriterij tečenja (*flow rule*), a omogućavao je i interakciju čvornih sila u plastičnom zglobo, kao i pojavu elastičnog rasterećenja plastičnog zgloba.

### 1.3. Cilj i svrha istraživanja

Cilj je istraživanja bila izrada efikasnog i pouzdanog, na metodi konačnih elemenata baziranog numeričkog algoritma, koji u formi programa za računalo postaje samostalna cjelina dostatna za nelinearnu analizu stabilnosti tankostijenih grednih struktura, a u optimalnom dizajnu može biti dio optimizacijskog postupka. Analiza nelinearne stabilnosti obuhvatila je geometrijsku i materijalnu nelinearnost te moguća opterećenja koja bivaju uzrokom nestabilnosti.

Za ostvarenje je ovakovoga cilja uporabljena UL formulacija nelinearnih problema i metoda plastičnih zglobova. Pri tome je efekt velikih prostornih rotacija u geometrijsku nelinearnost uveden kroz nelinearno polje pomaka nesimetričnog tankostijenog poprečnog presjeka. S obzirom na mogući nelinearni odziv struktura nije uzet u obzir utjecaj temperature i njezin utjecaj na ostale faktore, tj. viskoelastičan, termoviskoplastičan i sl. odziv nisu bili predmet ovog istraživanja.

Rezultati istraživanja ponuđenim numeričkim modelom za nelinearnu analizu stabilnosti ravnih tankostijenih grednih struktura omogućuju dobro opisivanje i to, kako geometrijski, tako i materijalno nelinearnog ponašanja ovih struktura. U tom je smislu tehničkoj praksi pružen pouzdan alat u svrhu kompletne analize ovih struktura u njihovu dizajnu.

## 2. ANALIZA DEFORMACIJE I NAPREZANJA TANKOSTIJIENIH GREDNIH NOSAČA

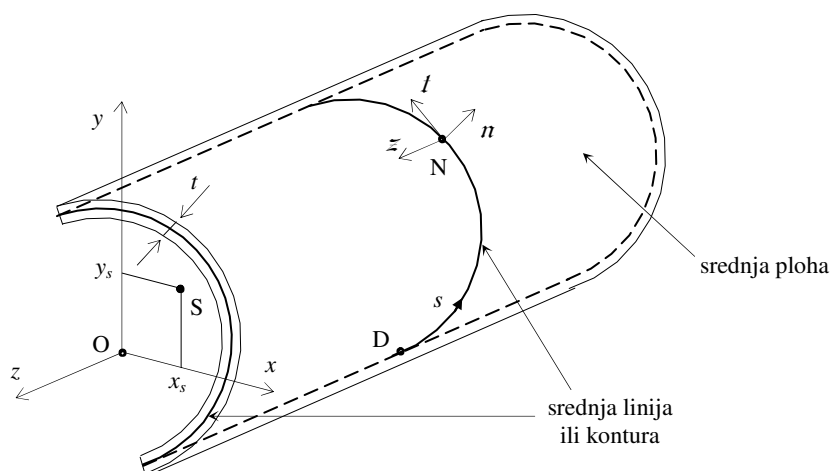
### 2.1. Osnovne pretpostavke

Pod grednim se nosačem, općenito, podrazumijeva deformabilno tijelo kod kojeg je duljina nosača dominantna u odnosu na dimenzije poprečnog presjeka. Pritom, poprečni presjek može biti puni ili tankostijeni.

Pod tankostijenim se grednim nosačem podrazumijeva gredni nosač kod kojeg je jedna dimenzija poprečnog presjeka (debljina stijenke) puno manja od ostalih. S obzirom na oblik poprečnog presjeka oni se dijele na: otvorene, zatvorene i kombinirane, dok s obzirom na simetričnost poprečnog presjeka razlikujemo: nesimetrične, jednoosno simetrične i dvoosno simetrične tankostijene gredne nosače. Kod nesimetričnih se poprečnih presjeka težište i centar smicanja ne poklapaju, kod jednoosno simetričnih centar smicanja leži na osi simetrije, dok se kod dvoosno simetričnih centar smicanja nalazi u težištu.

Pod centrom se smicanja podrazumijeva točka poprečnog presjeka za koju suma momenata svih unutrašnjih smičnih sila pri savijanju, mora biti jednaka nuli. Može se dokazati da se centar smicanja poklapa s centrom torzije [1, 2, 8]. Pod centrom se torzije podrazumijeva ona točka poprečnog presjeka oko koje se odvija rotacija poprečnog presjeka pri uvijanju ili torziji. Torzija, pritom, može biti popraćena i savijanjem ili fleksijom. Naime, neokrugli poprečni presjeci pri torziji ne ostaju ravni, nego se vitopere, tj. točke poprečnog presjeka doživljavaju i aksijalne pomake [69]. Ti se aksijalni pomaci javljaju kao posljedica zakretanja uzdužnih faza i njihova klizanja uzrokovana smičnim ili tangencijalnim naprezanjima. Ukoliko aksijalni pomaci nisu spriječeni, tada se svi poprečni presjeci mogu jednako (slobodno) deformirati, pa se u njima javljaju samo primarna tangencijalna naprezanja. U tom slučaju govorimo o tzv. čistoj, slobodnoj, jednolikoj ili St. Venantovoj torziji, odnosno o torziji bez savijanja [6]. Kada su ti pomaci na neki način ograničeni, bilo da su u nekom poprečnom presjeku spriječeni ili se mijenja torzijski moment uzduž nosača, tada se poprečni presjeci ne mogu jednako deformirati, pa se udaljenosti između pojedinih točaka istoga vlakna mijenjaju, što ima za posljedicu pojavu normalnih naprezanja. Kako su ta normalna naprezanja promjenljiva uzduž nosača i po visini poprečnoga presjeka, ona uzrokuju pojavu sekundarnih tangencijalnih naprezanja. Takvu vrstu torzije nazivamo: neslobodnom, nejednolikom ili Vlasovom torzijom ili torzijom s ograničenim vitoperenjem, odnosno torzijom popraćenom savijanjem [70 – 74].

Kod nosača punih poprečnih presjeka ova se sekundarna tangencijalna naprezanja mogu zanemariti, jer je njihovo vitoperenje vrlo malo. Isti je slučaj i s tankostijenim grednim nosačima zatvorena poprečnog presjeka, jer se zbog njihove velike torzijske krutosti, normalna naprezanja uzrokovana ograničenim vitoperenjem brzo prigušuju te sekundarna tangencijalna naprezanja mogu samo lokalno postići veće vrijednosti [75].



Sl. 2.1. Tankostijeni gredni nosač otvorena poprečnog presjeka

Na sl. 2.1 prikazan je prizmatični tankostijeni gredni nosač otvorenog nesimetričnog poprečnog presjeka. Cartesiev koordinatni sustav  $(z, x, y)$  odabran je tako da uzdužna os  $z$  prolazi kroz težište  $O$  svih poprečnih presjeka, dok su  $x$  i  $y$  glavne centralne (težišne) osi poprečnoga presjeka<sup>1</sup>. Položaj je centra smicanja  $S$  poprečnoga presjeka u odnosu na glavne centralne osi definiran koordinatama  $x_s$  i  $y_s$ . Stijenka debljine  $t$  srednjom je plohom podijeljena na dva jednaka dijela. Presiječemo li srednju plohu ravninom poprečnoga presjeka, dobivamo tzv. srednju liniju ili konturu. Položaj je proizvoljne točke  $N$  na konturi definiran dvjema koordinatama  $\bar{z}$  i  $s$ , pri čemu je prva koordinata istovjetna koordinati  $z$  u Cartesiovom koordinatnom sustavu, dok je  $s$  krivocrtna koordinata uzduž konture s ishodištem u točki  $D$ , koja se naziva sektorskom nul-točkom. Os  $\pi$  okomita je na tangentu  $t$  konture u točki  $N$ .

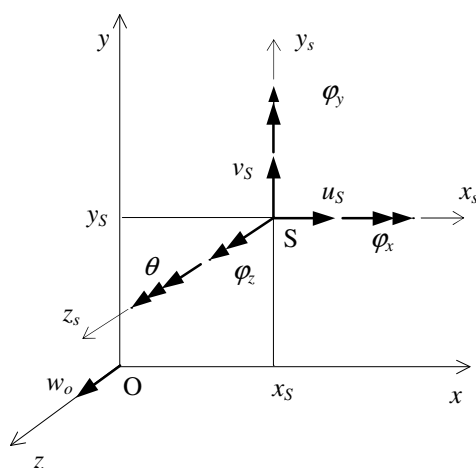
Teorija se uvijanja i savijanja tankostijenih grednih nosača prikazana u ovom poglavlju, temelji na sljedećim pretpostavkama:

- 2.1.1 Projekcija se konture u ravnini  $(x, y)$  ne mijenja tijekom procesa deformiranja, tj. ponaša se kao kruto tijelo.
- 2.1.2 Posmična je deformacija  $\gamma_{zs}$  u srednjoj plohi jednaka nuli.
- 2.1.3 Svaki se dio grede ponaša kao tanka ljuska, što znači da pravac okomit na konturu ostaje okomit tijekom cijelog procesa deformiranja.
- 2.1.4 Veza je između naprezanja i deformacije linearna i deformacije su u potpunosti povratne.

Pretpostavka 2.1.2 poznata je i pod nazivom Vlasova pretpostavka [1, 8], dok pretpostavka 2.1.3 predstavlja Kirchhoffovu pretpostavku [9, 33, 34].

## 2.2. Linearno polje pomaka

Da bismo odredili deformacije koje se javljaju pri opterećenju tankostijenog grednog nosača, definirat ćemo, najprije, pomake proizvoljne točke poprečnoga presjeka, a koji se javljaju pri torziji i savijanju. Kako će ti pomaci biti definirani prema tzv. inženjerskoj ili linearnoj teoriji [69], tada se i tako dobiveno polje pomaka često naziva linearnim poljem pomaka, jer su sve komponente u njemu linearne.



Sl. 2.2. Pomaci poprečnog presjeka kao krutog tijela

Na sl. 2.2 prikazane su komponente pomaka poprečnog presjeka kao krutog tijela, gdje je:

- $(z_s, x_s, y_s)$  – koordinatni sustav s ishodištem u  $S$ , a paralelan s koordinatnim sustavom  $(z, x, y)$
- $w_o$  – translatorni pomak težišta  $O$  po pravcu osi  $z$
- $u_s, v_s$  – translatorni pomaci centra smicanja  $S$  po pravcima osi  $x_s$  i  $y_s$
- $\varphi_z, \varphi_x, \varphi_y$  – rotacijski pomaci poprečnoga presjeka oko osi  $z_s, x_s$  i  $y_s$

<sup>1</sup> Redoslijed je koordinatnih osi  $(z, x, y)$  odabran umjesto standardnog redoslijeda  $(x, y, z)$ , iz razloga što se ravnina poprečnog presjeka obično definira s ravninom  $(x, y)$ , dok se kod numeričkih pristupa aksijalni pomak, u ovom slučaju pomak po pravcu osi  $z$ , skoro uvijek definira kao prva komponenta ukupnog pomaka.

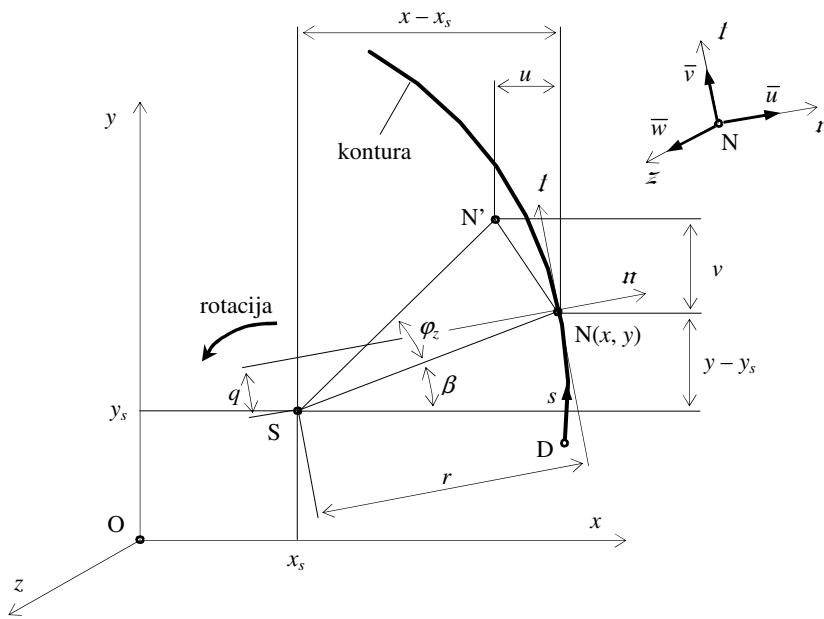
$\theta$  – parametar vitoperenja poprečnoga presjeka definiran u odnosu na centar smicanja.

Pri tome je:

$$\left. \begin{aligned} w_o &= w_o(z), & u_s &= u_s(z), & v_s &= v_s(z), & \varphi_z &= \varphi_z(z) \\ \varphi_x &= -\frac{dv_s}{dz} = \varphi_x(z), & \varphi_y &= \frac{du_s}{dz} = \varphi_y(z), & \theta &= -\frac{d\varphi_z}{dz} = \theta(z) \end{aligned} \right\}. \quad (2.1)$$

Kao što vidimo iz izraza (2.1), sve su komponente pomaka funkcija samo varijable  $z$ , a da je parametar vitoperenja  $\theta$  istovjetan jediničnom kutu torzije, samo suprotnoga predznaka.

Da bismo odredili linearno polje pomaka promatramo, najprije, proizvoljni nesimetrični poprečni presjek, prikazan svojom konturom i opterećen samo na torziju, sl. 2.3. Rotacija se poprečnoga presjeka, pritom, odvija oko centra smicanja  $S$ . Neka je  $N$  položaj točke konture prije deformiranja, a  $N'$  položaj te točke nakon rotacije poprečnoga presjeka za kut  $\varphi_z$ .



Sl. 2.3. Promjena položaja točke  $N$  konture uslijed torzije

Pomak je točke  $N$  po pravcu osi  $x$ :

$$\begin{aligned} u &= \overline{SN} \cos \beta - \overline{SN'} \cos(\beta + \varphi_z) = \\ &= \overline{SN} \cos \beta - \overline{SN} \cos \beta \cos \varphi_z + \overline{SN} \sin \beta \sin \varphi_z, \end{aligned} \quad (2.2)$$

odnosno po osi  $y$ :

$$\begin{aligned} v &= \overline{SN} \sin(\beta + \varphi_z) - \overline{SN} \sin \beta = \\ &= \overline{SN} \sin \beta \cos \varphi_z + \overline{SN} \cos \beta \sin \varphi_z - \overline{SN} \cos \beta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pošto je prema sl. 2.3:

$$\left. \begin{aligned} \overline{SN} \sin \beta &= y - y_s \\ \overline{SN} \cos \beta &= x - x_s \end{aligned} \right\}, \quad (2.4)$$

to se povratom izraza (2.4) u izraze (2.2) i (2.3), dobiva:

$$\left. \begin{aligned} u &= (x - x_s) - (x - x_s) \cos \varphi_z + (y - y_s) \sin \varphi_z \\ v &= (y - y_s) \cos \varphi_z + (x - x_s) \sin \varphi_z - (y - y_s) \end{aligned} \right\}. \quad (2.5)$$

Kako za male kutove vrijedi:

$$\sin \varphi_z \cong \varphi_z, \quad \cos \varphi_z \cong 1, \quad (2.6)$$

iz izraza (2.5) proizlazi:

$$\left. \begin{aligned} u &= -(y - y_s) \varphi_z \\ v &= (x - x_s) \varphi_z \end{aligned} \right\}, \quad (2.7)$$

pri čemu je kod pomaka  $u$  pridodan predznak minus, jer se taj pomak odvija u negativnom smjeru osi  $x$ .

Nadalje, označimo pomake točke N po pravcima osi  $\boldsymbol{n}$ ,  $\boldsymbol{t}$  i  $\boldsymbol{z}$  sa:  $\bar{u} = \bar{u}(s, z)$ ,  $\bar{v} = \bar{v}(s, z)$  i  $\bar{w} = \bar{w}(s, z)$ . U skladu sa sl. 2.3 slijedi da je pomak točke N po pravcu osi  $\boldsymbol{n}$ :

$$\bar{u} \cong -q \varphi_z, \quad (2.8)$$

odnosno po pravcu osi  $\boldsymbol{t}$ :

$$\bar{v} \cong r \varphi_z. \quad (2.9)$$

Pošto je prema pretpostavci 2.1.2 (Vlasova pretpostavka)  $\gamma_{sz} = 0$ , to u skladu s izrazom (2.9) proizlazi:

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} &= -\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -r \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} = -r \frac{d\varphi_z}{dz} \\ \bar{w} &= -\frac{d\varphi_z}{dz} \int_D^N r ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Kako je:

$$r ds = d\bar{\omega}, \quad (2.11)$$

gdje je  $\bar{\omega} = \bar{\omega}(s)$  sektorska koordinata ili funkcija vitoperenja za točke konture (*contour warping function*) [1], iz izraza (2.10) dobivamo:

$$\bar{w} = -(\bar{\omega}_N - \bar{\omega}_D) \frac{d\varphi_z}{dz}. \quad (2.12)$$

Kako, pak, točka D konture može biti izabrana tako da je  $\bar{\omega}_D = 0$ , onda iz izraza (2.12) slijedi da je pomak točke N po pravcu osi  $z$ :

$$\bar{w} = -\bar{\omega}_N \frac{d\varphi_z}{dz}, \quad (2.13)$$

gdje je:

$$\bar{\omega}_N = \int_D^N r(s) ds. \quad (2.14)$$

Prema pretpostavci 2.1.3 (Kirchhoffova pretpostavka) proizlazi da je aksijalni pomak točaka poprečnog presjeka izvan konture, a koje leže na normali  $\boldsymbol{n}$  u točki N:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{w}} &= \bar{w} - n \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\bar{\omega}_N \frac{d\varphi_z}{dz} + n q \frac{d\varphi_z}{dz} = \\ &= -(\bar{\omega}_N - n q) \frac{d\varphi_z}{dz} = -(\bar{\omega}_N + \bar{\bar{\omega}}_N) \frac{d\varphi_z}{dz} = -\omega \frac{d\varphi_z}{dz}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

gdje je:

$$\omega = \bar{\omega}_N + \bar{\bar{\omega}}_N, \quad (2.16)$$

pri čemu je  $\bar{\bar{\omega}}_N$  sektorska koordinata ili funkcija vitoperenja točaka izvan konture (*thickness warping function*) [1], a koje leže na pravcu normale konture u točki N:

$$\bar{\omega}_N = -nq. \quad (2.17)$$

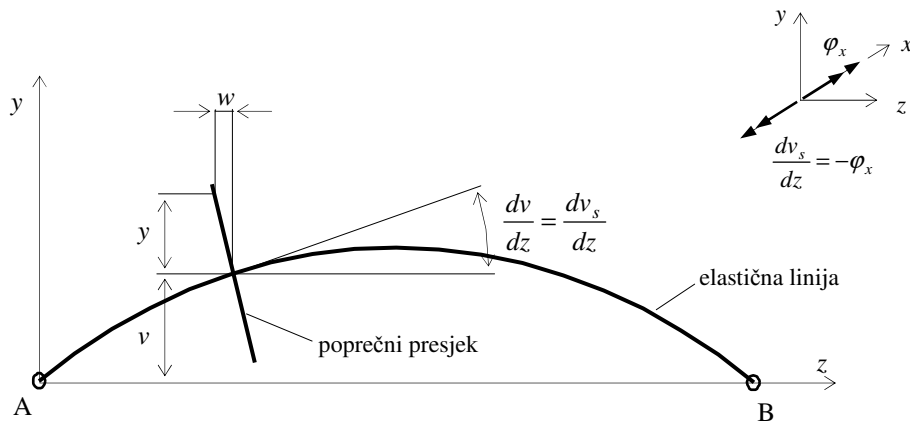
Kako je u praktičnim primjerima za tankostijene gredne nosače  $\bar{\omega} \gg \bar{\omega}_N$ , tada se za izraz (2.16) može pisati:

$$\omega \cong \bar{\omega}_N = \bar{\omega}, \quad (2.18)$$

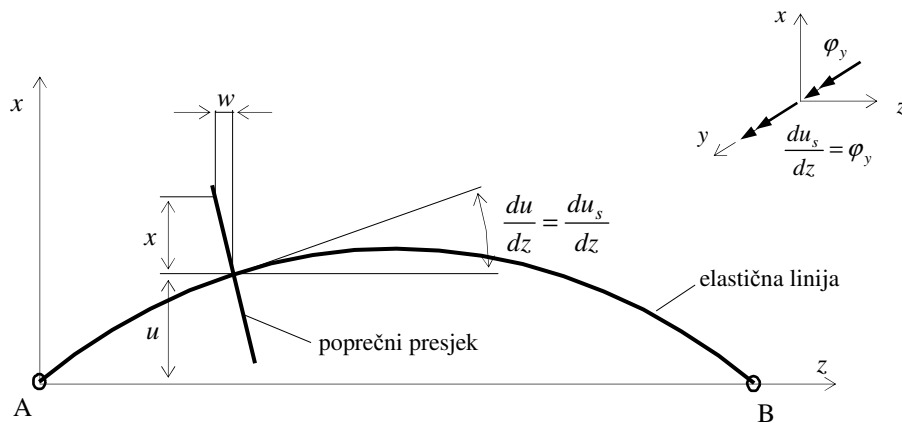
odnosno definira li se funkcija vitoperenja iz izraza (2.14) u koordinatnom sustavu  $(x, y)$ , na osnovi izraza (2.13) i (2.18) slijedi:

$$\bar{w} = w = -\omega(x, y) \frac{d\varphi_z}{dz} = w(z, x, y). \quad (2.19)$$

Nadalje, aksijalni su pomaci točaka poprečnog presjeka zbog savijanja (bez torzije):



a)



b)

**Sl. 2.4.** Aksijalni pomaci točaka poprečnog presjeka zbog savijanja u ravnini: a)  $(z, y)$ ; b)  $(z, x)$

- u ravnini  $(z, y)$ , sl. 2.4 a:

$$w = -y \frac{dv_s}{dz} = y\varphi_x, \quad (2.20)$$

- u ravnini  $(z, x)$ , sl. 2.4 b:

$$w = -x \frac{du_s}{dz} = -x\varphi_y. \quad (2.21)$$



Zbrojimo li, sada, izraze (2.19) – (2.21), slijedi da su aksijalni pomaci zbog torzije i savijanja:

$$w = -y \frac{dv_s}{dz} - x \frac{du_s}{dz} - \omega \frac{d\varphi_z}{dz}. \quad (2.22)$$

Ukupno ćemo polje pomaka dobiti tako da izrazima (2.7) i (2.22) pridodamo pomake poprečnog presjeka kao krutog tijela iz izraza (2.1), što daje:

$$w = w_o - y \frac{dv_s}{dz} - x \frac{du_s}{dz} - \omega \frac{d\varphi_z}{dz}, \quad (2.23a)$$

$$u = u_s - (y - y_s) \varphi_z, \quad (2.23b)$$

$$v = v_s + (x - x_s) \varphi_z. \quad (2.23c)$$

Kao što vidimo iz izraza (2.23), svi su članovi u polju pomaka veličine prvoga reda, tj. nemamo kvadrata niti umnožaka pojedinih članova, pa se zato takvo polje pomaka i naziva linearnim poljem.

### 2.3. Cauchyjev tenzor deformacije

Za slučaj kada su prilikom deformiranja nosača pomaci mali, tj. kada geometrijski nelinearne efekte možemo zanemariti, tada vezu između komponenata deformacije i komponenata pomaka možemo prikazati u obliku Cauchyjeva tenzora deformacije [24]:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.24)$$

Kako se, u skladu s pretpostavkom 2.1.1, deformacije u ravnini poprečnoga presjeka mogu zanemariti, tj.

$$e_{11} = e_{xx} = 0, \quad e_{22} = e_{yy} = 0, \quad 2e_{12} = e_{xy} = 0, \quad (2.25)$$

to na osnovi izraza (2.23) slijedi da su komponente deformacije različite od nule:

$$e_{33} = e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d^2v_s}{dz^2} - x \frac{d^2u_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2\varphi_z}{dz^2}, \quad (2.26a)$$

$$2e_{31} = e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = - \left( y - y_s + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \frac{d\varphi_z}{dz}, \quad (2.26b)$$

$$2e_{32} = e_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \left( x - x_s - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \frac{d\varphi_z}{dz}. \quad (2.26c)$$

### 2.4. Geometrijske karakteristike ravnih presjeka nosača

Geometrijske su karakteristike tankostijenog poprečnog presjeka, sljedeće:

- statički momenti površine za os  $x$  i  $y$ :

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA, \quad (2.27a)$$

- sektorski statički moment:

$$S_\omega = \int_A \omega dA, \quad (2.27b)$$

- aksijalni momenti inercije za os  $x$  i  $y$ :

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad (2.27c)$$

- centrifugalni moment inercije:

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA, \quad (2.27d)$$

- sektorski moment inercije:

$$I_\omega = \int_A \omega^2 \, dA, \quad (2.27e)$$

- sektorski centrifugalni momenti inercije:

$$I_{x\omega} = \int_A x\omega \, dA, \quad I_{y\omega} = \int_A y\omega \, dA. \quad (2.27f)$$

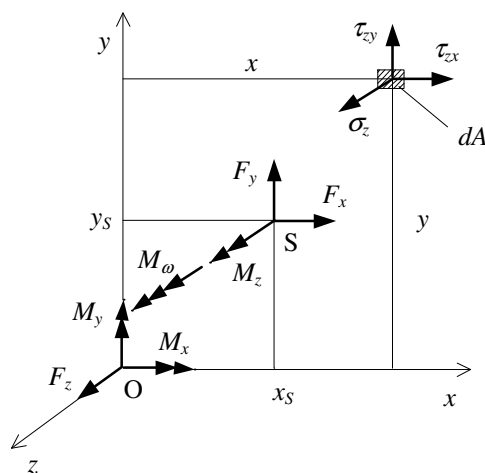
Ako su osi  $x$  i  $y$  težišne osi tada je  $S_x = S_y = 0$ . Ako je točka D iz izraza (2.14) glavna sektorska nultočka, onda je  $S_\omega = 0$ . Za slučaj da je sektorska koordinata  $\omega$  definirana u odnosu na centar smicanja, slijedi da je  $I_{x\omega} = I_{y\omega} = 0$ . Sektorska koordinata koja zadovoljava uvjete:

$$S_\omega = I_{x\omega} = I_{y\omega} = 0, \quad (2.28)$$

naziva se glavnim sektorskom koordinatom [74].

## 2.5. Unutarnje sile

Kod općeg se slučaja opterećenja tankostijenog grednog nosača rezultanta unutarnjih sila može rastaviti na sedam komponentata, pri čemu su aksijalna sila  $F_z$  i momenti savijanja  $M_x$  i  $M_y$  definirani za težište poprečnoga presjeka, dok su smične sile  $F_x$  i  $F_y$ , torzijski moment  $M_z$  i bimoment  $M_\omega$  definirani za centar smicanja, sl. 2.5.



Sl. 2.5. Unutarnje sile

U skladu s pretpostavkom 2.1.1, slijedi da je  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , odnosno od komponentata se naprezanja u proizvoljnoj točki poprečnoga presjeka mogu pojaviti samo  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$  i  $\tau_{zy}$ . Komponente su rezultante unutarnjih sila definirane na sljedeći način:

- aksijalna sila:

$$F_z = N = \int_A \sigma_z \, dA, \quad (2.29a)$$

- smične sile:

$$F_x = \int_A \tau_{zx} \, dA, \quad F_y = \int_A \tau_{zy} \, dA, \quad (2.29b)$$

- torzijski moment:

$$\begin{aligned} M_z = M_T &= \int_A [\tau_{zy}(x-x_s) - \tau_{zx}(y-y_s)] dA = \\ &= \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA - F_y x_s + F_x y_s = T_{sv} + T_\omega, \end{aligned} \quad (2.29c)$$

- momenti savijanja:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA, \quad M_y = -\int_A \sigma_z x dA, \quad (2.29d)$$

- bimoment:

$$M_\omega = B = \int_A \sigma_z \omega dA. \quad (2.29e)$$

U izrazu (2.29c)  $T_{sv}$  predstavlja dio torzijskog momenta koji se javlja kod slobodne torzije i često se naziva St. Venantovim torzijskim momentom, dok je  $T_\omega$  dio torzijskog momenta koji se javlja zbog ograničenog vitoperenja i naziva se torzijskim momentom vitoperenja.

Također, ako torzijski moment vitoperenja definiramo kao reaktivnu komponentu, tj. ako ga definiramo kao prvu derivaciju bimonenta po varijabli  $z$ , tada iz izraza (2.29e) imamo:

$$T_\omega = \frac{dM_\omega}{dz} = \frac{d}{dz} \int_A \sigma_z \omega(x, y) dA = \int_A \frac{d\sigma_z}{dz} \omega dA. \quad (2.30)$$

Pošto iz Navierovih jednadžbi ravnoteže za neslobodnu torziju dobivamo [41]:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}, \quad (2.31)$$

to uvođenjem izraza (2.31) u izraz (2.30), proizlazi:

$$T_\omega = -\int_A \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \omega + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \omega \right) dA. \quad (2.32)$$

Kako parcijalnim integriranjem imamo da je:

$$\int_A \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \omega dA = \int_{y_1}^{y_2} \left[ (\tau_{zx} \omega)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \tau_{zx} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx \right] dy = -\int_A \tau_{zx} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA, \quad (2.33a)$$

$$\int_A \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \omega dA = \int_{x_1}^{x_2} \left[ (\tau_{zy} \omega)_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \tau_{zy} \frac{\partial \omega}{\partial y} dy \right] dx = -\int_A \tau_{zy} \frac{\partial \omega}{\partial y} dA, \quad (2.33b)$$

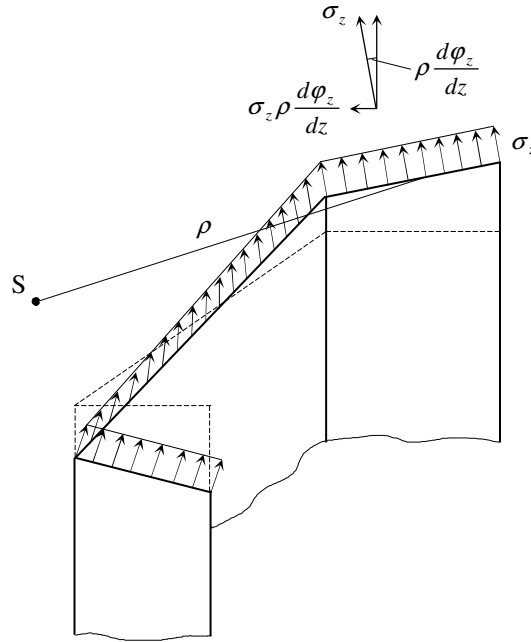
iz izraza (2.32) slijedi:

$$T_\omega = \int_A \left( \tau_{zx} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dA. \quad (2.34)$$

Odbije li se, sada, izraz (2.34) od izraza (2.29c), dobivamo da je St. Venantov torzijski moment:

$$T_{sv} = \int_A \left[ \tau_{zy} \left( x - x_s - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - \tau_{zx} \left( y - y_s + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \right] dA. \quad (2.35)$$

Zbog vitoperenja se poprečnog presjeka, kao sekundarni efekt, javlja još i dopunski torzijski moment uzrokovan normalnim naprezanjima, sl. 2.6. Ovaj je efekt poznat kao *Wagnerov efekt* [76 – 78], a on biva uzrokom tzv. čistog torzijskog izvijanja kod tankostijenih grednih nosača [18, 19, 79, 80]. Kod nosača punog poprečnog presjeka Wagnerov se efekt, u pravilu, zanemaruje.



Sl. 2.6. Wagnerov efekt

Vrijednost je tog sekundarnog torzijskog momenta:

$$T_{\sigma} = \int_A \rho \sigma_z \rho \frac{d\varphi_z}{dz} dA = \int_A \sigma_z \rho^2 dA \frac{d\varphi_z}{dz} = \bar{K} \frac{d\varphi_z}{dz}, \quad (2.36)$$

pri čemu je  $\rho$  udaljenost točke na konturi poprečnoga presjeka od centra smicanja, dok je  $\bar{K}$  Wagnerov koeficijent:

$$\bar{K} = \int_A \sigma_z \rho^2 dA = \int_A \sigma_z [(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2] dA. \quad (2.37)$$

Zbroje li se, sada, izrazi (2.29c) i (2.36), slijedi da je ukupni torzijski moment:

$$M_z = T_{sv} + T_{\omega} + T_{\sigma}. \quad (2.38)$$

Nadalje, kako je prema Hookeovu zakonu [24, 25]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \cdot & \cdot \\ \cdot & G & \cdot \\ \cdot & \cdot & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{zz} \\ e_{zx} \\ e_{zy} \end{Bmatrix}, \quad (2.39)$$

pri čemu je  $E$  modul elastičnosti ili Youngov modul,  $G$  modul smicanja, dok su komponente deformacije dane izrazom (2.26), to iz gornjih izraza dobivamo:

- za aksijalnu silu:

$$\begin{aligned} F_z &= E \int_A e_{zz} dA = E \int_A \left( \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d^2v_s}{dz^2} - x \frac{d^2u_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) dA = \\ &= E \left( \int_A dA \frac{dw_o}{dz} - \int_A y dA \frac{d^2v_s}{dz^2} - \int_A x dA \frac{d^2u_s}{dz^2} - \int_A \omega dA \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) = \\ &= E \left( A \frac{dw_o}{dz} - S_x \frac{d^2v_s}{dz^2} - S_y \frac{d^2u_s}{dz^2} - S_{\omega} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right), \end{aligned} \quad (2.40a)$$

- za moment savijanja oko osi x:

$$\begin{aligned}
 M_x &= E \int_A e_{zz} y dA = E \int_A \left( y \frac{dw_o}{dz} - y^2 \frac{d^2 v_s}{dz^2} - xy \frac{d^2 u_s}{dz^2} - y\omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) dA = \\
 &= E \left( \int_A y dA \frac{dw_o}{dz} - \int_A y^2 dA \frac{d^2 v_s}{dz^2} - \int_A xy dA \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \int_A y\omega dA \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) = \\
 &= E \left( S_x \frac{dw_o}{dz} - I_x \frac{d^2 v_s}{dz^2} - I_{xy} \frac{d^2 u_s}{dz^2} - I_{y\omega} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right), \tag{2.40b}
 \end{aligned}$$

- za moment savijanja oko osi y:

$$\begin{aligned}
 M_y &= -E \int_A e_{zz} x dA = -E \int_A \left( x \frac{dw_o}{dz} - xy \frac{d^2 v_s}{dz^2} - x^2 \frac{d^2 u_s}{dz^2} - x\omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) dA = \\
 &= E \left( - \int_A x dA \frac{dw_o}{dz} + \int_A xy dA \frac{d^2 v_s}{dz^2} + \int_A x^2 dA \frac{d^2 u_s}{dz^2} + \int_A x\omega dA \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) = \\
 &= E \left( -S_y \frac{dw_o}{dz} + I_{xy} \frac{d^2 v_s}{dz^2} + I_y \frac{d^2 u_s}{dz^2} + I_{x\omega} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right), \tag{2.40c}
 \end{aligned}$$

- za bimoment:

$$\begin{aligned}
 M_\omega &= E \int_A e_{zz} \omega dA = E \int_A \left( \omega \frac{dw_o}{dz} - y\omega \frac{d^2 v_s}{dz^2} - x\omega \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \omega^2 \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) dA = \\
 &= E \left( \int_A \omega dA \frac{dw_o}{dz} - \int_A y\omega dA \frac{d^2 v_s}{dz^2} - \int_A x\omega dA \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \int_A \omega^2 dA \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) = \\
 &= E \left( S_\omega \frac{dw_o}{dz} - I_{y\omega} \frac{d^2 v_s}{dz^2} - I_{x\omega} \frac{d^2 u_s}{dz^2} - I_\omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right). \tag{2.40d}
 \end{aligned}$$

Za slučaj da su osi x i y glavne centralne osi inercije poprečnoga presjeka te da je  $\omega$  glavna sektorska koordinata, slijedi da je:

$$S_x = S_y = S_\omega = I_{xy} = I_{x\omega} = I_{y\omega} = 0, \tag{2.41}$$

pa iz izraza (2.40) proizlazi:

$$F_z = EA \frac{dw_o}{dz} \tag{2.42a}$$

$$M_x = -EI_x \frac{d^2 v_s}{dz^2} = EI_x \frac{d\varphi_x}{dz} \tag{2.42b}$$

$$M_y = EI_y \frac{d^2 u_s}{dz^2} = EI_y \frac{d\varphi_y}{dz} \tag{2.42c}$$

$$M_\omega = -EI_\omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = EI_\omega \frac{d\theta}{dz}. \tag{2.42d}$$

Napišemo li izraze (2.40) u matricnom obliku kao:

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_\omega \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & -S_x & -S_y & -S_\omega \\ S_x & -I_x & -I_{xy} & -I_{y\omega} \\ -S_y & I_{xy} & I_y & I_{x\omega} \\ S_\omega & -I_{y\omega} & -I_{x\omega} & -I_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dw_o/dz \\ d^2 v_s/dz^2 \\ d^2 u_s/dz^2 \\ d^2 \varphi_z/dz^2 \end{Bmatrix}, \tag{2.43}$$

tada za normalno naprezanje dobivamo:

$$\begin{aligned} \sigma_z = E e_{zz} = E [1 \quad -y \quad -x \quad -\omega] & \begin{Bmatrix} dw_o/dz \\ d^2 v_s/dz^2 \\ d^2 u_s/dz^2 \\ d^2 \varphi_z/dz^2 \end{Bmatrix} = \\ & = [1 \quad -y \quad -x \quad -\omega] \begin{bmatrix} A & -S_x & -S_y & -S_\omega \\ S_x & -I_x & -I_{xy} & -I_{y\omega} \\ -S_y & I_{xy} & I_y & I_{x\omega} \\ S_\omega & -I_{y\omega} & -I_{x\omega} & -I_\omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_\omega \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

odnosno, ako vrijedi izraz (2.41), imamo:

$$\sigma_z = \frac{F_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_\omega}{I_\omega} \omega. \quad (2.45)$$

Uvrsti li se izraz (2.45) u izraz (2.37), proizlazi da je Wagnerov koeficijent:

$$\bar{K} = F_z \alpha_z + M_x \alpha_x + M_y \alpha_y + M_\omega \alpha_\omega, \quad (2.46)$$

gdje je:

$$\alpha_z = \frac{I_x + I_y}{A} + x_s^2 + y_s^2, \quad (2.47a)$$

$$\alpha_x = \frac{1}{I_x A} \int (x^2 y + y^3) dA - 2y_s, \quad (2.47b)$$

$$\alpha_y = -\frac{1}{I_y A} \int (x^3 + xy^2) dA + 2x_s, \quad (2.47c)$$

$$\alpha_\omega = \frac{1}{I_\omega A} \int (x^2 + y^2) \omega dA. \quad (2.47d)$$

Za dvoosnosimetrične poprečne presjeke ( $x_s = y_s = 0$ ), a na osnovi izraza (2.47b) i (2.47c), slijedi da je  $\alpha_x = \alpha_y = 0$ , pa iz izraza (2.46) proizlazi:

$$\bar{K} = \frac{F_z}{A} (I_x + I_y) + \frac{M_\omega}{I_\omega A} \int (x^2 + y^2) \omega dA, \quad (2.48)$$

odnosno zanemari li se utjecaj bimometa na Wagnerov efekt, iz izraza (2.48) dobivamo:

$$\bar{K} = \frac{F_z}{A} (I_x + I_y) = F_z \frac{I_p}{A} = F_z i_p^2, \quad (2.49)$$

gdje je  $I_p$  polarni moment inercije poprečnoga presjeka za težište, dok je  $i_p$  odgovarajući polumjer inercije.

Uvrsti li se, pak, izraz (2.40d) u izraz (2.30), slijedi:

$$T_\omega = \frac{dM_\omega}{dz} = E \left( S_\omega \frac{d^2 w_o}{dz^2} - I_{y\omega} \frac{d^3 v_s}{dz^3} - I_{x\omega} \frac{d^3 u_s}{dz^3} - I_\omega \frac{d^3 \varphi_z}{dz^3} \right), \quad (2.50)$$

odnosno za  $S_\omega = I_{x\omega} = I_{y\omega} = 0$ , imamo:

$$T_\omega = -EI_\omega \frac{d^3 \varphi_z}{dz^3} = EI_\omega \frac{d^2 \theta}{dz^2}. \quad (2.51)$$

Nadalje, ako vrijenosti za  $\tau_{zx}$  i  $\tau_{zy}$  iz izraza (2.39) uvrstimo u izraz (2.35), dobivamo da je St. Venantov torzijski moment:

$$T_{sv} = GJ \frac{d\varphi_z}{dz} = -GJ\theta, \quad (2.52)$$

gdje je  $J$  torzijski moment inercije ili St. Venantova torzijska konstanta:

$$J = \int_A \left[ \left( x - x_s - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left( y - y_s + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] dA. \quad (2.53)$$

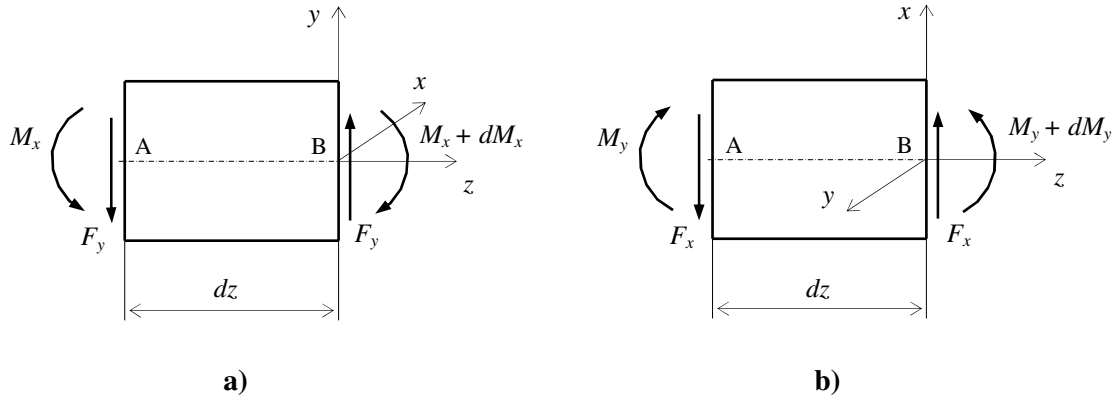
Uvrstimo li izraze (2.36), (2.51) i (2.52) u izraz (2.38), proizlazi:

$$M_z = -EI_\omega \frac{d^3 \varphi_z}{dz^3} + (GJ + \bar{K}) \frac{d\varphi_z}{dz}, \quad (2.54)$$

ili u matričnom obliku:

$$\{M_z\} = \begin{bmatrix} -EI_\omega & GJ + \bar{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^3 \varphi_z / dz^3 \\ d\varphi_z / dz \end{Bmatrix}. \quad (2.55)$$

Kako smične sile  $F_x$  i  $F_y$ , kao i torzijski moment vitoperenja  $T_\omega$ , spadaju u klasu reaktivnih sila, to se one mogu odrediti samo na osnovi ravnotežnih uvjeta [1, 6, 8].



Sl. 2.7. Ravnoteža segmenta nosača pri savijanju: a) u ravnini (y, z); b) u ravnini (x, z)

Tako iz ravnoteže segmenta sa sl. 2.7a, dobivamo:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ -F_y dz - M_x + M_x + dM_x &= 0 \rightarrow F_y = \frac{dM_x}{dz}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

odnosno iz ravnoteže segmenta sa sl. 2.7b, proizlazi:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ F_x dz - M_y + M_y + dM_y &= 0 \rightarrow F_x = -\frac{dM_y}{dz}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ako, sada, za  $M_x$  i  $M_y$  u izraze (2.56) i (2.57) uvrstimo izraze (2.42), imamo:

$$F_y = -EI_x \frac{d^3 v_s}{dz^3} = EI_x \frac{d^2 \varphi_x}{dz^2}, \quad (2.57a)$$

$$F_x = -EI_y \frac{d^3 u_s}{dz^3} = -EI_y \frac{d^2 \varphi_y}{dz^2}. \quad (2.57b)$$

## 2.6. Nelinearno polje pomaka

Da bismo u polje pomaka uključili i veličine drugoga reda, koje se javljaju kao posljedica velikih (konačnih) rotacija, razmotrit ćemo pomake vektora položaja  $\mathbf{r}$  proizvoljne točke poprečnog presjeka u koordinatnom sustavu  $(z, x, y)$ , a pri rotacijama:  $\varphi_z$ ,  $\varphi_x$  i  $\varphi_y$ , oko centra smicanja.

Neka su:  $\varphi_z$ ,  $\varphi_x$  i  $\varphi_y$ , velike rotacije i neka se one sastoje od velikog broja vrlo malih rotacija:  $\varphi_z/n$ ,  $\varphi_x/n$ , i  $\varphi_y/n$ , pri čemu je  $n$  veliki pozitivni cijeli broj. Neka je  $\mathbf{r}_0$  početni položaj vektora  $\mathbf{r}$ , definiran kao:

$$\mathbf{r}_0^T = \{0 \quad x \quad y\}, \quad (2.59)$$

dok je položaj centra smicanja definiran vektorom  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s}^T = \{0 \quad x_s \quad y_s\}. \quad (2.60)$$

Transformacija je vektora  $\mathbf{r}_0$  u beskonačno bliski položaj  $\mathbf{r}_1$ , a zbog rotacija:  $\varphi_z/n$ ,  $\varphi_x/n$ , i  $\varphi_y/n$ , dana sljedećim izrazom:

$$\mathbf{r}_1 = (\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n)\mathbf{r}_0 - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_n\mathbf{s}, \quad (2.61)$$

gdje je  $\mathbf{I}_3$  jedinična matrica dimenzija  $3 \times 3$ , dok su  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n$  i  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n$  transformacijske matrice:

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_y/n & \varphi_x/n \\ \varphi_y/n & 0 & -\varphi_z/n \\ -\varphi_x/n & \varphi_z/n & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_z/n \\ 0 & \varphi_z/n & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Ovdje je potrebno naglasiti da se u izrazu (2.61), umnožak  $\mathbf{w}_n\mathbf{s}$  javlja zbog toga što su:  $\varphi_z$ ,  $\varphi_x$  i  $\varphi_y$ , rotacije oko koordinatnih osi  $(z_s, x_s, y_s)$  s ishodištem u centru smicanja, dok je ishodište vektora  $\mathbf{r}$  u težištu poprečnog presjeka [51]. Nadalje, transformacija vektora  $\mathbf{r}_1$  u beskonačno bliski položaj  $\mathbf{r}_2$  iznosi:

$$\mathbf{r}_2 = (\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n)\mathbf{r}_1 - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_n\mathbf{s} = (\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n)^2\mathbf{r}_0 - (\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n)\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n\mathbf{s} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_n\mathbf{s}. \quad (2.63)$$

odnosno, analogno, za  $n$ -tu rotaciju imamo:

$$\mathbf{r}_n = (\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n)^n\mathbf{r}_0 - (\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n)^{n-1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n\mathbf{s} - \dots - (\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n)\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n\mathbf{s} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_n\mathbf{s}. \quad (2.64)$$

Primijenimo li na izraz (2.64) binomni teorem [81] te, pritom, zanemarimo sve članove trećeg i višeg reda, dobivamo:

$$\mathbf{r}_n \cong \left[ \mathbf{I}_3 + n\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n + \frac{n(n-1)}{2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n^2 \right] \mathbf{r}_0 - n\mathbf{I}_3\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n\mathbf{s} + [1 + 2 + \dots + (n-1)]\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n\mathbf{s}. \quad (2.65)$$

Povećavamo li, sada, broj  $n$  do beskonačnosti, tada se položaj vektora  $\mathbf{r}_n$  sve više približava konačnom položaju vektora  $\mathbf{r}$ , kojeg taj vektor poprima pri konačnim rotacijama:  $\varphi_z$ ,  $\varphi_x$  i  $\varphi_y$ . Postavimo li, tako, za izraz (2.65) granični slučaj, proizlazi:

$$\mathbf{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{r}_n = \left( \mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 \right) \mathbf{r}_0 - \left( \mathbf{I}_3 + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \right) \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{s}, \quad (2.66)$$

gdje je:

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_y & \varphi_x \\ \varphi_y & 0 & -\varphi_z \\ -\varphi_x & \varphi_z & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_z \\ 0 & \varphi_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Kako se ukupno polje pomaka  $\mathbf{U}_{uk}$  tankostijenog poprečnoga presjeka dobiva kao zbroj translacijskih pomaka  $\mathbf{U}_0$  i rotacijskih pomaka  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ , pri čemu vektor  $\mathbf{U}_0$  sadrži translacijske pomake poprečnog presjeka kao krutog tijela i aksijalne pomake zbog vitoperenja, to se na osnovi izraza (2.66), dobiva:

$$\mathbf{U}_{uk} = \mathbf{U}_0 + \left( \tilde{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 \right) \mathbf{r}_0 - \left( \mathbf{I}_3 + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \right) \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{s}, \quad (2.68)$$



pri čemu je:

$$\mathbf{U}_{ik}^T = \{w + \tilde{w} \quad u + \tilde{u} \quad v + \tilde{v}\}, \quad (2.69a)$$

$$\mathbf{U}_0^T = \{w_o + \omega\theta \quad u_s \quad v_s\}. \quad (2.69b)$$

U izrazu (2.69a) veličine:  $w$ ,  $u$  i  $v$ , predstavljaju komponente linearnog polja pomaka iz izraza (2.23), dok:  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{u}$  i  $\tilde{v}$ , predstavljaju veličine drugoga reda, koje se javljaju zbog podcrtanih članova u izrazu (2.68):

$$\tilde{w} = \frac{1}{2} \left[ (x - x_s) \varphi_z \varphi_x + (y - y_s) \varphi_z \varphi_y \right], \quad (2.70a)$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2} \left[ -x (\varphi_z^2 + \varphi_y^2) + y \varphi_x \varphi_y + x_s \varphi_z^2 \right], \quad (2.70b)$$

$$\tilde{v} = \frac{1}{2} \left[ x \varphi_x \varphi_y - y (\varphi_z^2 + \varphi_x^2) + y_s \varphi_z^2 \right]. \quad (2.70c)$$

Zbroje li se, pak, izrazi (2.23) i (2.70), slijedi da je ukupno polje pomaka iz izraza (2.68), napisano sada u eksplicitnom obliku:

$$w + \tilde{w} = w_o - y \frac{dv_s}{dz} - x \frac{du_s}{dz} - \omega \frac{d\varphi_z}{dz} + \frac{1}{2} \left[ -(x - x_s) \varphi_z \frac{dv_s}{dz} + (y - y_s) \varphi_z \frac{du_s}{dz} \right], \quad (2.71a)$$

$$u + \tilde{u} = u_s - (y - y_s) \varphi_z + \frac{1}{2} \left\{ -x \left[ \varphi_z^2 + \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 \right] - y \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} + x_s \varphi_z^2 \right\}, \quad (2.71b)$$

$$v + \tilde{v} = v_s + (x - x_s) \varphi_z + \frac{1}{2} \left\{ -x \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} - y \left[ \varphi_z^2 + \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 \right] + y_s \varphi_z^2 \right\}, \quad (2.71c)$$

pri čemu su:  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  i  $\theta$ , u izrazima (2.71) zamijenjeni veličinama iz izraza (2.1). Polje pomaka dano izrazima (2.71) naziva se nelinearnim poljem pomaka.

## 2.7. Green-Lagrangeov tenzor deformacije

Kako problemi stabilnosti spadaju u klasu geometrijski nelinearnih problema, gdje se nelinearni efekti javljaju zbog velikih pomaka, tada vezu između komponenata deformacije i komponenata pomaka možemo prikazati npr. pomoću Green-Lagrangeova tenzora deformacije [82, 83]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ (u_i + \tilde{u}_i)_{,j} + (u_j + \tilde{u}_j)_{,i} + (u_k + \tilde{u}_k)_{,i} (u_k + \tilde{u}_k)_{,j} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} + \tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i} + u_{k,i} \tilde{u}_{k,j} + \tilde{u}_{k,i} u_{k,j} + \tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,j} \right). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Zanemarimo li, pak, u izrazu (2.72) posljednja tri člana, dobivamo:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} + \tilde{e}_{ij}, \quad (2.73)$$

gdje je  $e_{ij}$  Cauchyjev tenzor deformacije iz izraza (2.24), dok je:

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j}, \quad (2.74a)$$

$$\tilde{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}). \quad (2.74b)$$

Pošto, u skladu s pretpostavkom 2.1.1, imamo da je:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy} = 0, \quad 2\varepsilon_{12} = \gamma_{xy} = 0, \quad (2.75)$$

slijedi da su komponente tenzora iz izraza (2.74), zapisane sada u eksplisitnom obliku:

$$\eta_{33} = \eta_{zz} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d^2 v_s}{dz^2} - x \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right)^2 + \left[ \frac{du_s}{dz} - (y - y_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] + \left[ \frac{dv_s}{dz} + (x - x_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] \right\}, \quad (2.76a)$$

$$2\eta_{31} = \eta_{zx} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} = - \left( \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d^2 v_s}{dz^2} - x \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) \left( \frac{du_s}{dz} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + \left[ \frac{dv_s}{dz} + (x - x_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] \varphi_z, \quad (2.76b)$$

$$2\eta_{32} = \eta_{zy} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} = - \left( \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d^2 v_s}{dz^2} - x \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) \left( \frac{dv_s}{dz} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - \left[ \frac{du_s}{dz} - (y - y_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] \varphi_z, \quad (2.76c)$$

odnosno:

$$\tilde{e}_{33} = \tilde{e}_{zz} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[ - (x - x_s) \frac{d}{dz} \left( \varphi_z \frac{dv_s}{dz} \right) + (y - y_s) \frac{d}{dz} \left( \varphi_z \frac{du_s}{dz} \right) \right], \quad (2.77a)$$

$$2\tilde{e}_{31} = \tilde{e}_{zx} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[ - \varphi_z \frac{dv_s}{dz} - 2x \frac{du_s}{dz} \frac{d^2 u_s}{dz^2} - 2(x - x_s) \varphi_z \frac{d\varphi_z}{dz} - y \frac{d}{dz} \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} \right) \right], \quad (2.77b)$$

$$2\tilde{e}_{32} = \tilde{e}_{zy} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[ \varphi_z \frac{du_s}{dz} - x \frac{d}{dz} \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} \right) - 2y \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2 v_s}{dz^2} - 2(y - y_s) \varphi_z \frac{d\varphi_z}{dz} \right]. \quad (2.77c)$$

Komponente su tenzora  $e_{ij}$  dane izrazima (2.26).

## 2.8. Ravnotežne jednadžbe izvijenog prostornog tankostijenog grednog nosača

Da bismo odredili jednadžbe ravnoteže izvijenog tankostijenog grednog nosača, primijenit ćemo princip virtualnih radova, koji za slučaj da nema volumenskih sila, glasi [84]:

$$\int_V {}^t S_{ij} \delta {}^t \varepsilon_{ij} dV = \int_{A_\sigma} {}^t t_i \delta ({}^t u_i + {}^t \tilde{u}_i) dA_\sigma, \quad (2.78)$$

gdje:  $S_{ij}$  predstavlja Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja druge vrste,  $\varepsilon_{ij}$  Green-Lagrangeov tenzor deformacije,  $t_i$  površinske (kontaktne) sile,  $u_i$  i  $\tilde{u}_i$  linearne i nelinearne komponente pomaka, dok gornji lijevi indeks  $t$  uz veličine znači da se radi o njihovim totalnim ili ukupnim vrijednostima. Zanimarimo li, pak, pomake i deformaciju nosača prije izvijanja, imamo:

$$\left. \begin{aligned} {}^t S_{ij} &= {}^0 S_{ij} + S_{ij}, & {}^t \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}, \\ {}^t t_i &= {}^0 t_i + t_i, & {}^t u_i + {}^t \tilde{u}_i &= u_i + \tilde{u}_i \end{aligned} \right\}, \quad (2.79)$$

pri čemu gornji lijevi indeks 0 uz  $S_{ij}$  i  $t_i$  znači da se radi o njihovim početnim ili inicijalnim vrijednostima, odnosno o vrijednostima unutarnjih i vanjskih sila kod neizvijena nosača. Veličine bez gornjeg lijevog indeksa predstavljaju inkrementalne vrijednosti. Vratimo li, sada, vrijednosti iz izaraza (2.79) u izraz (2.78), stim da za tenzor deformacije uvedemo izraz (2.72), dobivamo:

$$\int_V ({}^0 S_{ij} + S_{ij}) \delta (e_{ij} + \eta_{ij} + \tilde{e}_{ij}) dV = \int_{A_\sigma} ({}^0 t_i + t_i) \delta (u_i + \tilde{u}_i) dA_\sigma, \quad (2.80)$$

odnosno:

$$\int_V (S_{ij} \delta e_{ij} + {}^0S_{ij} \delta e_{ij} + {}^0S_{ij} \delta \eta_{ij} + {}^0S_{ij} \delta \tilde{e}_{ij}) dV = \int_{A_\sigma} ({}^0t_i \delta u_i + {}^0t_i \delta \tilde{u}_i + t_i \delta u_i) dA_\sigma, \quad (2.81)$$

pri čemu su u izrazu (2.81) zanemareni članovi višeg reda iz izraza (2.80). Nadalje, pretpostavimo li da početne unutarnje i vanjske sile čine jedan uravnoteženi sustav sila, tj.

$$\int_V {}^0S_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_{A_\sigma} {}^0t_i \delta u_i dA_\sigma, \quad (2.82)$$

tada odbijajući izraz (2.82) od izraza (2.81), proizlazi:

$$\int_V S_{ij} \delta e_{ij} dV + \int_V {}^0S_{ij} \delta \eta_{ij} dV + \int_V {}^0S_{ij} \delta \tilde{e}_{ij} dV - \int_{A_\sigma} {}^0t_i \delta \tilde{u}_i dA_\sigma = \int_{A_\sigma} t_i \delta u_i dA_\sigma. \quad (2.83)$$

Izraz (2.83) naziva se *linearizirani princip virtualnih radova* [50, 51, 57], gdje prvi integral predstavlja elastičnu potencijalnu energiju unutarnjih sila, drugi integral predstavlja standardni geometrijski potencijal početnih unutarnjih sila, dok treći i četvrti integral predstavljaju geometrijski potencijal početnih unutarnjih i vanjskih sila zbog efekta velikih rotacija. Peti integral predstavlja virtualni rad vanjskih sila. Izraz (2.83) možemo napisati i kao:

$$\delta U_E + \delta U_G - \delta W = \delta \Pi = 0, \quad (2.84)$$

gdje je:

$$\delta U_E = \int_V S_{ij} \delta e_{ij} dV, \quad (2.85a)$$

$$\delta U_G = \int_V {}^0S_{ij} \delta \eta_{ij} dV + \int_V {}^0S_{ij} \delta \tilde{e}_{ij} dV - \int_{A_\sigma} {}^0t_i \delta \tilde{u}_i dA_\sigma, \quad (2.85b)$$

$$\delta W = \int_{A_\sigma} t_i \delta u_i dA_\sigma. \quad (2.85c)$$

dok  $\Pi$  predstavlja ukupni ili totalni potencijal. Uvedemo li, sada, u izraz (2.85a) vrijednosti iz izraza (2.26), (2.29) i (2.35), imamo:

$$\begin{aligned} \delta U_E &= \int_V (\sigma_z \delta e_{zz} + \tau_{zx} \delta e_{zx} + \tau_{zx} \delta e_{zx}) dV = \\ &= \int_0^l \int_A \left[ \sigma_z \left( \delta \frac{dw_o}{dz} - y \delta \frac{d^2v_s}{dz^2} - x \delta \frac{d^2u_s}{dz^2} - \omega \delta \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \tau_{zx} \left( y - y_s + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \delta \frac{d\varphi_z}{dz} + \tau_{zy} \left( x - x_s - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right] dA dz = \\ &= \int_0^l \left( F_z \delta \frac{dw_o}{dz} - M_x \delta \frac{d^2v_s}{dz^2} + M_y \delta \frac{d^2u_s}{dz^2} - M_\omega \delta \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} + T_{sv} \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right) dz, \end{aligned} \quad (2.86)$$

odnosno, na osnovi izraza (2.42) i (2.52), slijedi:

$$\begin{aligned} \delta U_E &= \int_0^l \left( EA \frac{dw_o}{dz} \delta \frac{dw_o}{dz} + EI_x \frac{d^2v_s}{dz^2} \delta \frac{d^2v_s}{dz^2} + EI_y \frac{d^2u_s}{dz^2} \delta \frac{d^2u_s}{dz^2} + \right. \\ &\quad \left. + EI_\omega \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \delta \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} + GJ \frac{d\varphi_z}{dz} \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right) dz. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Ako izraz (2.85b) napišemo kao:

$$\delta U_G = \delta U_{G1} + \delta U_{G2} + \delta U_{G3}, \quad (2.88)$$

gdje je:

$$\delta U_{G1} = \int_V {}^0S_{ij} \delta \eta_{ij} dV, \quad (2.89a)$$

$$\delta U_{G2} = \int_V {}^0 S_{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} dV, \quad (2.89b)$$

$$\delta U_{G3} = - \int_{A_\sigma} {}^0 t_i \delta \tilde{u}_i dA_\sigma, \quad (2.89c)$$

tada iz izraza (2.89a), a na osnovi izraza (2.76), dobivamo:

$$\begin{aligned} \delta U_{G1} &= \int_V \left( {}^0 \sigma_z \delta \eta_{zz} + {}^0 \tau_{zx} \delta \eta_{zx} + {}^0 \tau_{zy} \delta \eta_{zy} \right) dV = \\ &= \int_0^l \int_A \left\{ {}^0 \sigma_z \left[ \frac{du_s}{dz} - (y - y_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] \delta \left[ \frac{du_s}{dz} - (y - y_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] + \right. \\ &+ {}^0 \sigma_z \left[ \frac{dv_s}{dz} + (x - x_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] \delta \left[ \frac{dv_s}{dz} + (x - x_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] + \\ &+ {}^0 \sigma_z \left( \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d^2 v_s}{dz^2} - x \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) \delta \left( \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d^2 v_s}{dz^2} - x \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) + \\ &+ {}^0 \tau_{zx} \delta \left[ \frac{dv_s}{dz} + (x - x_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] \varphi_z + {}^0 \tau_{zx} \left[ \frac{dv_s}{dz} + (x - x_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] \delta \varphi_z - \\ &- {}^0 \tau_{zx} \delta \left( \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d^2 v_s}{dz^2} - x \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) \left( \frac{du_s}{dz} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - \\ &- {}^0 \tau_{zx} \left( \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d^2 v_s}{dz^2} - x \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) \delta \left( \frac{du_s}{dz} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - \\ &- {}^0 \tau_{zy} \delta \left[ \frac{du_s}{dz} - (y - y_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] \varphi_z - {}^0 \tau_{zy} \left[ \frac{du_s}{dz} - (y - y_s) \frac{d\varphi_z}{dz} \right] \delta \varphi_z - \\ &- {}^0 \tau_{zy} \delta \left( \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d^2 v_s}{dz^2} - x \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) \left( \frac{dv_s}{dz} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - \\ &- {}^0 \tau_{zy} \left( \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d^2 v_s}{dz^2} - x \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) \delta \left( \frac{dv_s}{dz} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \left. \right\} dA dz, \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \delta U_{G1} &= \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \int_A {}^0 \sigma_z dA \left[ \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 + 2y_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - 2x_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] - \right. \\ &- \int_A {}^0 \sigma_z y dA \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + \int_A {}^0 \sigma_z x dA \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + \frac{1}{2} \int_A {}^0 \sigma_z [(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2] dA \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \right)^2 - \\ &- \int_A {}^0 \sigma_z y dA \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2 v_s}{dz^2} \right) - \int_A {}^0 \sigma_z x dA \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2 u_s}{dz^2} \right) - \int_A {}^0 \sigma_z \omega dA \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) + \\ &+ \int_A {}^0 \tau_{zx} dA \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{du_s}{dz} \right) \right] - \int_A {}^0 \tau_{zy} dA \left[ \delta \left( \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) + \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{dv_s}{dz} \right) \right] + \\ &+ \int_A \left[ {}^0 \tau_{zx} (x - x_s) + {}^0 \tau_{zy} (y - y_s) \right] dA \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \varphi_z \right) + \int_A {}^0 \tau_{zx} x dA \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2 u_s}{dz^2} \right) + \\ &+ \int_A {}^0 \tau_{zy} y dA \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2 v_s}{dz^2} \right) + \int_A {}^0 \tau_{zx} y dA \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2 v_s}{dz^2} \right) + \int_A {}^0 \tau_{zy} x dA \delta \left( \frac{d^2 u_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} \right) \left. \right\} dz. \quad (2.90) \end{aligned}$$

Uvedu li se u izraz (2.90), izrazi (2.29) i (2.37), slijedi:

$$\begin{aligned}
\delta U_{G1} = & \int_0^l \left\{ \frac{{}^0F_z}{2} \left[ \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 + 2y_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - 2x_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] + \right. \\
& + {}^0F_x \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{du_s}{dz} \right) \right] - {}^0F_y \left[ \delta \left( \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) + \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{dv_s}{dz} \right) \right] - \\
& - {}^0M_x \left[ \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) \right] + {}^0M_y \left[ \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) - \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] + \\
& \left. + \frac{{}^0\bar{K}}{2} \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \right)^2 - {}^0M_\omega \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) \right\} dz \\
& + \int_V \left[ {}^0\tau_{zx} (x - x_s) + {}^0\tau_{zy} (y - y_s) \right] \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \varphi_z \right) dV + \int_V {}^0\tau_{zx} x \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) dV + \\
& + \int_V {}^0\tau_{zy} y \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) dV + \int_V {}^0\tau_{zx} y \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) dV + \int_V {}^0\tau_{zy} x \delta \left( \frac{d^2u_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} \right) dV. \quad (2.91)
\end{aligned}$$

Isto tako, na osnovi izraza (2.89b), (2.77) i (2.29), proizlazi:

$$\begin{aligned}
\delta U_{G2} = & \int_V \left( {}^0\sigma_z \delta \tilde{e}_{zz} + {}^0\tau_{zx} \delta \tilde{e}_{zx} + {}^0\tau_{zy} \delta \tilde{e}_{zy} \right) dV = \\
= & \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \left\{ {}^0\sigma_z \delta \left[ - (x - x_s) \frac{d^2v_s}{dz^2} \varphi_z - (x - x_s) \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} + (y - y_s) \frac{d^2u_s}{dz^2} \varphi_z + (y - y_s) \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right] + \right. \\
& + {}^0\tau_{zx} \delta \left[ - \frac{dv_s}{dz} \varphi_z - 2x \frac{du_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} - 2x \varphi_z \frac{d\varphi_z}{dz} - y \frac{d^2v_s}{dz^2} \frac{du_s}{dz} - y \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} + 2x_s \varphi_z \frac{d\varphi_z}{dz} \right] + \\
& \left. + {}^0\tau_{zy} \delta \left[ \frac{du_s}{dz} \varphi_z - x \frac{d^2v_s}{dz^2} \frac{du_s}{dz} - x \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} - 2y \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} - 2y \varphi_z \frac{d\varphi_z}{dz} + 2y_s \varphi_z \frac{d\varphi_z}{dz} \right] \right\} dA dz = \\
= & \frac{1}{2} \int_0^l \left[ ({}^0M_y + {}^0F_z x_s) \delta \frac{d}{dz} \left( \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) + ({}^0M_x - {}^0F_z y_s) \delta \frac{d}{dz} \left( \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) - {}^0F_x \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) + \right. \\
& + {}^0F_y \delta \left( \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) \left. \right] dz - \int_V \left[ {}^0\tau_{zx} (x - x_s) + {}^0\tau_{zy} (y - y_s) \right] \delta \left( \varphi_z \frac{d\varphi_z}{dz} \right) dV - \int_V {}^0\tau_{zx} x \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) dV - \\
& - \int_V {}^0\tau_{zy} y \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) dV - \frac{1}{2} \int_V ({}^0\tau_{zx} y + {}^0\tau_{zy} x) \delta \frac{d}{dz} \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} \right) dV. \quad (2.92)
\end{aligned}$$

Zbrojimo li, sada, izraze (2.91) i (2.92), dobivamo:

$$\begin{aligned}
\delta U_{G1} + \delta U_{G2} = & \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ {}^0F_z \left[ \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 \right] - ({}^0M_x - {}^0F_z y_s) \left[ \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - \right. \right. \\
& - \delta \left( \frac{d^2u_s}{dz^2} \varphi_z \right) \left. \right] - ({}^0M_y + {}^0F_z x_s) \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - \delta \left( \frac{d^2v_s}{dz^2} \varphi_z \right) \right] + {}^0F_x \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{du_s}{dz} \right) \right] - \\
& - {}^0F_y \left[ \delta \left( \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) + 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{dv_s}{dz} \right) \right] - 2{}^0M_x \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) + 2{}^0M_y \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) + {}^0\bar{K} \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \right)^2 - \\
& \left. - 2{}^0M_\omega \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) \right\} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \int_A ({}^0\tau_{zy} x - {}^0\tau_{zx} y) dA \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) - \delta \left( \frac{d^2v_s}{dz^2} \frac{du_s}{dz} \right) \right] dz. \quad (2.93)
\end{aligned}$$

Kako je u skladu s izrazom (2.29c):

$$\int_A ({}^0\tau_{zy} x - {}^0\tau_{zx} y) dA = {}^0M_z - {}^0F_x y_s + {}^0F_y x_s,$$

to iz izraza (2.92) proizlazi:

$$\begin{aligned}
\delta U_{G1} + \delta U_{G2} = & \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ {}^0F_z \left[ \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 \right] - ({}^0M_x - {}^0F_z y_s) \left[ \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - \right. \right. \\
& - \delta \left( \frac{d^2 u_s}{dz^2} \varphi_z \right) \left. \right] - ({}^0M_y + {}^0F_z x_s) \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - \delta \left( \frac{d^2 v_s}{dz^2} \varphi_z \right) \right] + {}^0F_x \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{du_s}{dz} \right) \right] - \\
& - {}^0F_y \left[ \delta \left( \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) + 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{dv_s}{dz} \right) \right] + {}^0M_z \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2 u_s}{dz^2} \right) - \delta \left( \frac{d^2 v_s}{dz^2} \frac{du_s}{dz} \right) \right] - 2{}^0M_x \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2 v_s}{dz^2} \right) + \\
& + 2{}^0M_y \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2 u_s}{dz^2} \right) + {}^0\bar{K} \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \right)^2 - 2{}^0M_\omega \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \right) + \\
& \left. + ({}^0F_y x_s - {}^0F_x y_s) dA \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2 u_s}{dz^2} \right) - \delta \left( \frac{d^2 v_s}{dz^2} \frac{du_s}{dz} \right) \right] \right\} dz. \quad (2.94)
\end{aligned}$$

Za izraz (2.89c), uz pretpostavku da sila  ${}^0F_z$  djeluje u težištu poprečnog presjeka, a sile  ${}^0F_x$  i  ${}^0F_y$  u centru smicanja, možemo pisati:

$$\begin{aligned}
\delta U_{G3} = & - \int_{A_\sigma} ({}^0t_z \delta \tilde{w} + {}^0t_x \delta \tilde{u} + {}^0t_y \delta \tilde{v}) dA_\sigma = -\delta \int_{A_\sigma} ({}^0t_z \tilde{w} + {}^0t_x \tilde{u} + {}^0t_y \tilde{v}) dA_\sigma = \\
= & -\delta \left\{ \int_A [{}^0F_z \delta(x, y) \tilde{w} + {}^0F_x \delta(x - x_s, y - y_s) \tilde{u} + {}^0F_y \delta(x - x_s, y - y_s) \tilde{v}] dA \right\}_0^l, \quad (2.95)
\end{aligned}$$

pri čemu  $\delta(x, y)$  i  $\delta(x - x_s, y - y_s)$  predstavljaju Dirachove delta-funkcije [81]. Kako su, na osnovi izraza (2.71), rješenja tih funkcija:

$$\delta(x, y) \tilde{w} = \frac{1}{2} \left( x_s \frac{dv_s}{dz} \varphi_z - y_s \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right), \quad (2.96a)$$

$$\delta(x - x_s, y - y_s) \tilde{u} = \frac{1}{2} \left[ -x_s \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 - y_s \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} \right], \quad (2.96b)$$

$$\delta(x - x_s, y - y_s) \tilde{v} = \frac{1}{2} \left[ -x_s \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} - y_s \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 \right], \quad (2.96c)$$

to se povratom izraza (2.96) u izraz (2.95), dobiva:

$$\begin{aligned}
\delta U_{G3} = & \frac{1}{2} \left\{ {}^0F_z \delta \left( y_s \frac{du_s}{dz} \varphi_z - x_s \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) + {}^0F_x \delta \left[ x_s \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 + y_s \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} \right] + \right. \\
& \left. + {}^0F_y \delta \left[ x_s \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} + y_s \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 \right] \right\}_0^l. \quad (2.97)
\end{aligned}$$

Za slučaj da su vrijednosti:  ${}^0F_z$ ,  ${}^0F_x$  i  ${}^0F_y$ , konstantne na duljini  $l$  grednog nosača, tada izraz (2.97) možemo napisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}
\delta U_{G3} = & \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ {}^0F_z \delta \frac{d}{dz} \left( y_s \frac{du_s}{dz} \varphi_z - x_s \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) + {}^0F_x \delta \frac{d}{dz} \left[ x_s \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 + y_s \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} \right] + \right. \\
& \left. + {}^0F_y \delta \frac{d}{dz} \left[ x_s \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} + y_s \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 \right] \right\} dz. \quad (2.98)
\end{aligned}$$

Pretpostavimo li da je prostorni tankostijeni gredni element opterećen samo u krajnjim poprečnim presjecima, tj. u presjecima  $z = 0$  i  $z = l$ , tada povratom izraza (2.86), (2.94) i (2.98), dobivamo:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left( EA \frac{dw_o}{dz} \delta \frac{dw_o}{dz} + EI_x \frac{d^2v_s}{dz^2} \delta \frac{d^2v_s}{dz^2} + EI_y \frac{d^2u_s}{dz^2} \delta \frac{d^2u_s}{dz^2} + EI_\omega \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \delta \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} + GJ \frac{d\varphi_z}{dz} \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right) dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ {}^0F_z \left[ \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 + 2y_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - 2x_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] + \right. \\
& + {}^0F_x \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) + 2x_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) + 2y_s \delta \left( \frac{d^2v_s}{dz^2} \frac{du_s}{dz} \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{du_s}{dz} \right) \right] + \\
& + {}^0F_y \left[ -\delta \left( \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) + 2x_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) + 2y_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{dv_s}{dz} \right) \right] + \\
& + {}^0M_z \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) - \delta \left( \frac{d^2v_s}{dz^2} \frac{du_s}{dz} \right) \right] + {}^0\bar{K} \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \right)^2 - 2{}^0M_\omega \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) + \\
& + {}^0M_x \left[ \delta \left( \frac{d^2u_s}{dz^2} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) \right] + \\
& \left. + {}^0M_y \left[ \delta \left( \frac{d^2v_s}{dz^2} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) \right] \right\} dz = \\
& = \left[ F_z^* \delta w_o^* + F_x^* \delta u_s^* + F_y^* \delta v_s^* + M_z^* \delta \varphi_z^* - M_x^* \delta \frac{dv_s^*}{dz} + M_y^* \delta \frac{du_s^*}{dz} - M_\omega^* \delta \frac{d\varphi_z^*}{dz} \right]_0^l, \quad (2.99)
\end{aligned}$$

pri čemu znak "\*" uz veličine s desne strane znaka jednakosti znači da se radi o rubnim vrijednostima tih veličina.

Euler-Lagrangeove jednadžbe totalnog funkcionala dobivamo parcijalnom integracijom izraza (2.99), a nakon sređivanja one glase:

$$EA \frac{d^2w_o}{dz^2} - \frac{d}{dz} \left( {}^0F_z \frac{dw_o}{dz} + {}^0F_x \frac{du_s}{dz} + {}^0F_y \frac{dv_s}{dz} - {}^0M_x \frac{d^2v_s}{dz^2} + {}^0M_y \frac{d^2u_s}{dz^2} - {}^0M_\omega \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) = 0, \quad (2.100a)$$

$$\begin{aligned}
EI_x \frac{d^4v_s}{dz^4} + \frac{d^2}{dz^2} \left( {}^0F_x y_s \frac{du_s}{dz} + {}^0F_y y_s \frac{dv_s}{dz} - \frac{1}{2} {}^0M_z \frac{du_s}{dz} - {}^0M_x \frac{dw_o}{dz} \right) - \frac{d}{dz} \left( {}^0F_z \frac{dv_s}{dz} - {}^0F_x x_s \frac{d\varphi_z}{dz} - \right. \\
\left. - {}^0F_y \frac{dw_o}{dz} - {}^0M_y \frac{d\varphi_z}{dz} + {}^0F_x \varphi_z + {}^0F_y x_s \frac{d^2u_s}{dz^2} + {}^0F_y y_s \frac{d^2v_s}{dz^2} + \frac{1}{2} {}^0M_z \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) = 0, \quad (2.100b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EI_y \frac{d^4u_s}{dz^4} + \frac{d^2}{dz^2} \left( {}^0F_x x_s \frac{du_s}{dz} + {}^0F_y x_s \frac{dv_s}{dz} + \frac{1}{2} {}^0M_z \frac{dv_s}{dz} + {}^0M_y \frac{dw_o}{dz} \right) - \frac{d}{dz} \left( {}^0F_z \frac{du_s}{dz} + {}^0F_y y_s \frac{d\varphi_z}{dz} - \right. \\
\left. - {}^0F_x \frac{dw_o}{dz} - {}^0M_x \frac{d\varphi_z}{dz} - {}^0F_y \varphi_z + {}^0F_x x_s \frac{d^2u_s}{dz^2} + {}^0F_x y_s \frac{d^2v_s}{dz^2} - \frac{1}{2} {}^0M_z \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) = 0, \quad (2.100c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EI_\omega \frac{d^4\varphi_z}{dz^4} - GJ \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} - \frac{d^2}{dz^2} \left( {}^0M_\omega \frac{dw_o}{dz} \right) - \frac{d}{dz} \left( {}^0F_z y_s \frac{du_s}{dz} - {}^0F_z x_s \frac{dv_s}{dz} - {}^0M_x \frac{du_s}{dz} - \right. \\
\left. - {}^0M_y \frac{dv_s}{dz} + {}^0\bar{K} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) + {}^0F_x \frac{dv_s}{dz} - {}^0F_y \frac{du_s}{dz} = 0, \quad (2.100d)
\end{aligned}$$

uz rubne uvjete za  $z = 0$  i  $z = l$ :

$$EA \frac{dw_o}{dz} + {}^0F_z \frac{dw_o}{dz} - {}^0F_x \frac{du_s}{dz} - {}^0F_y \frac{dv_s}{dz} - {}^0M_x \frac{d^2v_s}{dz^2} + {}^0M_y \frac{d^2u_s}{dz^2} - {}^0M_\omega \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} = F_z^* \text{ ili } w_o = w_o^*, \quad (2.101a)$$

$$EI_x \frac{d^3v_s}{dz^3} + \frac{d}{dz} \left( {}^0F_x y_s \frac{du_s}{dz} + {}^0F_y y_s \frac{dv_s}{dz} - \frac{1}{2} {}^0M_z \frac{du_s}{dz} - {}^0M_x \frac{dw_o}{dz} \right) - {}^0F_z \frac{dv_s}{dz} - {}^0F_z x_s \frac{d\varphi_z}{dz} - {}^0F_y \frac{dw_o}{dz} + {}^0M_y \frac{d\varphi_z}{dz} - {}^0F_x \varphi_z - {}^0F_y x_s \frac{d^2u_s}{dz^2} - {}^0F_y y_s \frac{d^2v_s}{dz^2} - \frac{1}{2} {}^0M_z \frac{d^2u_s}{dz^2} = -F_y^* \text{ ili } v_s = v_s^*, \quad (2.101b)$$

$$EI_y \frac{d^3u_s}{dz^3} + \frac{d}{dz} \left( {}^0F_x x_s \frac{du_s}{dz} + {}^0F_y x_s \frac{dv_s}{dz} + \frac{1}{2} {}^0M_z \frac{dv_s}{dz} - {}^0M_y \frac{dw_o}{dz} \right) - {}^0F_z \frac{du_s}{dz} - {}^0F_z y_s \frac{d\varphi_z}{dz} - {}^0F_x \frac{dw_o}{dz} + {}^0M_x \frac{d\varphi_z}{dz} + {}^0F_y \varphi_z - {}^0F_x x_s \frac{d^2u_s}{dz^2} - {}^0F_x y_s \frac{d^2v_s}{dz^2} + \frac{1}{2} {}^0M_z \frac{d^2v_s}{dz^2} = -F_x^* \text{ ili } u_s = u_s^*, \quad (2.101c)$$

$$EI_\omega \frac{d^3\varphi_z}{dz^3} - GJ \frac{d\varphi_z}{dz} - \frac{d}{dz} \left( {}^0M_\omega \frac{dw_o}{dz} \right) - {}^0F_z y_s \frac{du_s}{dz} + {}^0F_z x_s \frac{dv_s}{dz} + \frac{1}{2} {}^0M_x \frac{du_s}{dz} + \frac{1}{2} {}^0M_y \frac{dv_s}{dz} - {}^0\bar{K} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} = -M_z^* \text{ ili } \varphi_z = \varphi_z^*, \quad (2.101d)$$

$$EI_x \frac{d^2v_s}{dz^2} + {}^0F_x y_s \frac{du_s}{dz} + {}^0F_y y_s \frac{dv_s}{dz} - \frac{1}{2} {}^0M_z \frac{du_s}{dz} - {}^0M_x \frac{dw_o}{dz} + \frac{1}{2} {}^0M_y \varphi_z = -M_x^* \text{ ili } \frac{dv_s}{dz} = \frac{dv_s^*}{dz}, \quad (2.101e)$$

$$EI_y \frac{d^2u_s}{dz^2} + {}^0F_x x_s \frac{du_s}{dz} + {}^0F_y x_s \frac{dv_s}{dz} + \frac{1}{2} {}^0M_z \frac{dv_s}{dz} + {}^0M_y \frac{dw_o}{dz} + \frac{1}{2} {}^0M_x \varphi_z = M_y^* \text{ ili } \frac{du_s}{dz} = \frac{du_s^*}{dz}, \quad (2.101f)$$

$$EI_\omega \frac{d^3\varphi_z}{dz^3} - {}^0M_\omega \frac{dw_o}{dz} = -M_\omega^*, \text{ ili } \frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{d\varphi_z^*}{dz}. \quad (2.101g)$$

Izrazi (2.100) predstavljaju sustav homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi četvrtog reda, a rješenjem se kojih, uz rubne uvjete iz izraza (2.101), dobivaju forme izvijanja prostornog tankostijenog grednog elementa proizvoljne okvirne konstrukcije, odnosno kritične vrijednosti za:  ${}^0F_z$ ,  ${}^0F_x$ ,  ${}^0F_y$ ,  ${}^0M_z$ ,  ${}^0M_x$ ,  ${}^0M_y$  i  ${}^0M_\omega$ , koje bivaju uzrokom tog izvijanja. Kako je poprečni presjek grednog elementa nesimetričan, tada se, pri izvijanju, torzija i savijanje pojavljuju istovremeno, odnosno forme su izvijanja torzijsko-fleksijskog tipa [18, 19]. U izrazima se (2.100) i (2.101) članovi podcrtani jednom linijom javljaju zbog toga što je u izrazu (2.76a) uključen i član  $(\partial w / \partial z)^2$ , dok se članovi podcrtani dvjema linijama javljaju kao posljedica velikih rotacija. Ukoliko se konstrukcija sastoji samo od jednog pravocrtnog tankostijenog grednog elementa, tada je te članove moguće zanemariti te iz izraza (2.100) imamo:

$$EA \frac{d^2w_o}{dz^2} = 0, \quad (2.102a)$$

$$EI_x \frac{d^4v_s}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left( {}^0F_z \frac{dv_s}{dz} - {}^0F_z x_s \frac{d\varphi_z}{dz} - {}^0M_y \frac{d\varphi_z}{dz} + {}^0F_x \varphi_z \right) = 0, \quad (2.102b)$$

$$EI_y \frac{d^4u_s}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left( {}^0F_z \frac{du_s}{dz} + {}^0F_z y_s \frac{d\varphi_z}{dz} - {}^0M_x \frac{d\varphi_z}{dz} - {}^0F_y \varphi_z \right) = 0, \quad (2.102c)$$

$$EI_\omega \frac{d^4\varphi_z}{dz^4} - GJ \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} - \frac{d}{dz} \left( {}^0F_z y_s \frac{du_s}{dz} - {}^0F_z x_s \frac{dv_s}{dz} - {}^0M_x \frac{du_s}{dz} - \right.$$



$$\left. -{}^0M_y \frac{dv_s}{dz} + {}^0\bar{K} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) + {}^0F_x \frac{dv_s}{dz} - {}^0F_y \frac{du_s}{dz} = 0, \quad (2.102d)$$

odnosno rubni uvjeti iz izraza (2.101), a za  $z = 0$  i  $z = l$ , sada glase:

$$EA \frac{dw_o}{dz} = F_z^* \text{ ili } w_o = w_o^*, \quad (2.103a)$$

$$EI_x \frac{d^3v_s}{dz^3} - {}^0F_z \frac{dv_s}{dz} - {}^0F_z x_s \frac{d\varphi_z}{dz} - {}^0M_y \frac{d\varphi_z}{dz} - {}^0F_x \varphi_z = -F_y^* \text{ ili } v_s = v_s^*, \quad (2.103b)$$

$$EI_y \frac{d^3u_s}{dz^3} - {}^0F_z \frac{du_s}{dz} - {}^0F_z y_s \frac{d\varphi_z}{dz} + {}^0M_x \frac{d\varphi_z}{dz} + {}^0F_y \varphi_z = -F_x^* \text{ ili } u_s = u_s^*, \quad (2.103c)$$

$$EI_\omega \frac{d^3\varphi_z}{dz^3} - GJ \frac{d\varphi_z}{dz} - {}^0F_z y_s \frac{du_s}{dz} + {}^0F_z x_s \frac{dv_s}{dz} + {}^0M_x \frac{du_s}{dz} + {}^0M_y \frac{dv_s}{dz} - {}^0\bar{K} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} = -M_z^* \text{ ili } \varphi_z = \varphi_z^*, \quad (2.103d)$$

$$EI_x \frac{d^2v_s}{dz^2} = -M_x^* \text{ ili } \frac{dv_s}{dz} = \frac{dv_s^*}{dz}, \quad (2.103e)$$

$$EI_y \frac{d^3u_s}{dz^3} = M_y^* \text{ ili } \frac{du_s}{dz} = \frac{du_s^*}{dz}, \quad (2.103f)$$

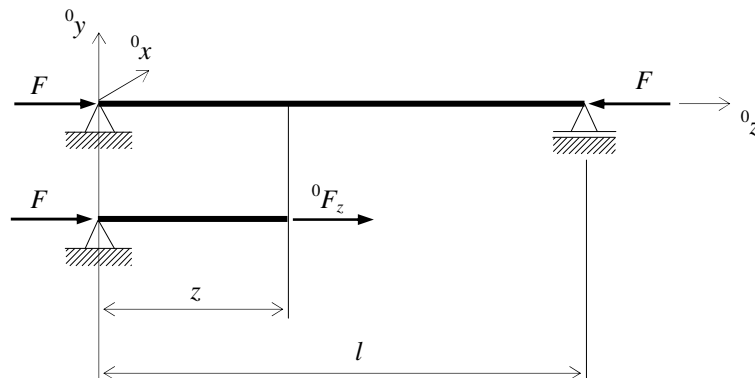
$$EI_\omega \frac{d^3\varphi_z}{dz^3} = -M_\omega^* \text{ ili } \frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{d\varphi_z^*}{dz}, \quad (2.103g)$$

pri čemu su u gornjim izrazima zanemareni i oni članovi proistekli iz izraza (2.91), a od komponente  $dw_o/dz$  uz smične sile  ${}^0F_x$  i  ${}^0F_y$ .

Ovdje je potrebno napomenuti da je iznalaženje analitičkog rješenja sustava diferencijalnih jednadžbi iz izraza (2.100) praktički nemoguće, dok je iz izraza (2.102) analitičko rješenje moguće dobiti samo u jednostavnijim slučajevima. U složenijim je slučajevima potrebno promijeniti neku od približnih metoda za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, kao što je: metoda konačnih diferencija, numeričko integriranje itd. Međutim, kako su i tada rješenja vrlo ograničena, nužno je pri rješavanju problema stabilnosti rabiti neku od matričnih metoda poput metode konačnih elemenata.

## 2.9. Torzijsko-fleksijsko izvijanje

Pretpostavimo da je tankostijeni gredni nosač nesimetričnog poprečnog presjeka opterećen aksijalnom tlačnom silom  $F$ , sl. 2.8. Neka su krajevi nosača zgloбно oslonjeni, stim da je rotacija krajnjih poprečnih presjeka oko uzdužne osi spriječena, dok je vitoperenje slobodno.



Sl. 2.8. Tlačno opterećeni tankostijeni gredni nosač

Kako od unutarnjih sila prije no što se nosač izvije imamo samo silu  ${}^0F_z = -F$ , dok je prema izrazu (2.29e) vrijednost bimomenta  ${}^0M_\omega = 0$ , a Wagnerov koeficijent prema izrazima (2.46) i (2.47) iznosi:

$${}^0\bar{K} = {}^0F_z \alpha_z = -F \left( \frac{I_x + I_y}{A} + x_s^2 + y_s^2 \right) = -F \frac{I_{ps}}{A}, \quad (2.104)$$

gdje je  $I_{ps}$  polarni moment inercije poprečnog presjeka za centar smicanja:

$$I_{ps} = I_x + I_y + (x_s^2 + y_s^2)A, \quad (2.105)$$

tada iz izraza (2.102b – d) dobivamo:

$$EI_x \frac{d^4 v_s}{dz^4} + F \frac{d^2 v_s}{dz^2} - F x_s \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0, \quad (2.106a)$$

$$EI_y \frac{d^4 u_s}{dz^4} + F \frac{d^2 u_s}{dz^2} + F y_s \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0, \quad (2.106b)$$

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi_z}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} + F y_s \frac{d^2 u_s}{dz^2} - F x_s \frac{d^2 v_s}{dz^2} + F \frac{I_{ps}}{A} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0. \quad (2.106c)$$

Pošto se za zadane rubne uvjete rješenje izraza (2.106) može pretpostaviti u sljedećem obliku:

$$v_s = A_n \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad u_s = B_n \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad \varphi_z = C_n \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (2.107)$$

gdje je  $n$  broj sinusnih poluvalova, dok su  $A_n$ ,  $B_n$  i  $C_n$  nepoznate konstante, tada povratom izraza (2.107) u izraze (2.106), imamo:

$$\begin{bmatrix} n^2 \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} - F & 0 & F x_s \\ 0 & n^2 \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} - F & -F y_s \\ F x_s & -F y_s & n^2 \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2} + GJ - F \frac{I_{ps}}{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.108)$$

Da bi izraz (2.107) imao netrivialno rješenje, determinanta sustava mora biti jednaka nuli, tj.:

$$\begin{vmatrix} F_{nx} - F & 0 & F x_s \\ 0 & F_{ny} - F & -F y_s \\ F x_s & -F y_s & \frac{I_{ps}}{A} (F_{nx} - F) \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$F^2 \left[ (F - F_{ny}) x_s^2 + (F - F_{nx}) y_s^2 \right] - \frac{I_{ps}}{A} (F - F_{nx}) (F - F_{ny}) (F - F_{n\varphi}) = 0, \quad (2.109)$$

pri čemu je:

$$F_{nx} = n^2 \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}, \quad F_{ny} = n^2 \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}, \quad F_{n\varphi} = \frac{A}{I_{ps}} \left( GJ + n^2 \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2} \right). \quad (2.110)$$

U izrazu (2.110)  $F_{nx}$  i  $F_{ny}$  predstavljaju Eulerove kritične sile za čisto fleksijsko izvijanje oko osi  $x$  i  $y$  [14], dok je  $F_{n\varphi}$  kritična sila za čisto torzijsko izvijanje [19], a za slučajeve kada su elastične linije izvijena nosača oblika danih izrazom (2.107). Izraz (2.109) predstavlja kubičnu jednadžbu koja daje tri rješenja za kritičnu silu izvijanja  $F = F_{kr}$ , pri čemu se za svako od ta tri rješenja elastična linija sastoji od  $n$  sinusnih

poluvalova. Kako se, pri tome, istovremeno javljaju i torzija i savijanje, tada se ovaj oblik izvijanja naziva *torzijsko-fleksijskim* izvijanjem [18]. Od praktičnog je značenja samo slučaj kada se elastična linija sastoji samo od jednog sinusnog poluvala, što iz izraza (2.107) i (2.109), a za  $n = 1$ , daje:

$$v_s = A \sin \frac{\pi z}{l}, \quad u_s = B \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \varphi_z = C \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (2.111)$$

odnosno:

$$F_x = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}, \quad F_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}, \quad F_\varphi = \frac{A}{I_{ps}} \left( GJ + \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2} \right), \quad (2.112)$$

dok izraz (2.110) poprima sljedeći oblik:

$$F^2 \left[ (F - F_y) x_s^2 + (F - F_x) y_s^2 \right] - \frac{I_{ps}}{A} (F - F_x) (F - F_y) (F - F_\varphi) = 0, \quad (2.113)$$

pri čemu, kao kritičnu silu izvijanja nosača sa sl. 2.8, usvajamo najmanju vrijednost od tri moguća rješenja izraza (2.113). Rješenje se u obliku izraza (2.113) može dobiti i za slučaj kada su krajevi nosača ukliješteni, tako da se rješenja za  $v_s$ ,  $u_s$  i  $\varphi_z$  pretpostave u obliku [1, 2]:

$$v_s = A \left( 1 - \cos \frac{2\pi z}{l} \right), \quad u_s = B \left( 1 - \cos \frac{2\pi z}{l} \right), \quad \varphi_z = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi z}{l} \right), \quad (2.114)$$

stim da je:

$$F_x = \frac{\pi^2 EI_x}{(0,5l)^2}, \quad F_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(0,5l)^2}, \quad F_\varphi = \frac{A}{I_{ps}} \left[ GJ + \frac{\pi^2 EI_\omega}{(0,5l)^2} \right], \quad (2.115)$$

U slučaju da poprečni presjek ima jednu os simetrije, npr. os  $y$ , tade je  $x_s = 0$ , pa iz izraza (2.106) imamo:

$$EI_x \frac{d^4 v_s}{dz^4} + F \frac{d^2 v_s}{dz^2} = 0, \quad (2.116a)$$

$$EI_y \frac{d^4 u_s}{dz^4} + F \frac{d^2 u_s}{dz^2} + F y_s \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0, \quad (2.116b)$$

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi_z}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} + F y_s \frac{d^2 u_s}{dz^2} + F \frac{I_{ps}}{A} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0, \quad (2.116c)$$

pri čemu je polarni moment inercije poprečnog presjeka sada:

$$I_{ps} = I_x + I_y + y_s^2 A. \quad (2.117)$$

Iz izraza (2.116) vidimo da prva jednačba predstavlja Eulerovu diferencijalnu jednačbu izvijenja štapa u ravnini  $(z, y)$ , što znači da su u ovom slučaju moguća dva oblika izvijanja i to: čisti fleksijski oblik i torzijsko-fleksijski oblik. Vrijednost je kritične sile izvijanja za čisti fleksijski oblik izvijanja kod obostrano zgloбно oslonjena štapa:

$$F_{kr} = F_x = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}, \quad (2.118)$$

dok se unošenjem druge i treće jednačbe iz izraza (2.111) u diferencijalne jednačbe (2.116b) i (2.116c), dobiva:

$$\begin{vmatrix} F_y - F & -F y_s \\ -F y_s & \frac{I_{ps}}{A} (F_\varphi - F) \end{vmatrix} = 0$$

odnosno:

$$\frac{I_{ps}}{A}(F - F_y)(F - F_\varphi) - F^2 y_s^2 = 0, \quad (2.119)$$

gdje su vrijednosti za  $F_y$  i  $F_\varphi$  dane u izrazu (2.112). Kvadratna jednadžba iz izraza (2.119) daje dva rješenja za kritičnu silu izvijanja  $F = F_{kr}$  pri torzijsko-fleksijskom izvijanju, stim da je jedna manja, a druga veća i od  $F_y$  i od  $F_\varphi$ .

Ako je, pak, poprečni presjek nosača dvoosno simetričan, tada se težište i centar smicanja poklapaju, tj.  $x_s = y_s = 0$ , pa iz izraza (2.116), imamo:

$$EI_x \frac{d^4 v_s}{dz^4} + F \frac{d^2 v_s}{dz^2} = 0, \quad (2.120a)$$

$$EI_y \frac{d^4 u_s}{dz^4} + F \frac{d^2 u_s}{dz^2} = 0, \quad (2.120b)$$

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi_z}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} + F \frac{I_{ps}}{A} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0, \quad (2.120c)$$

pri čemu je, sada,  $I_{ps}$  jednak polarnom momentu inercije  $I_p$  za težište poprečnoga presjeka, tj.

$$I_{ps} = I_p = I_x + I_y. \quad (2.121)$$

Kako izraz (2.120) predstavlja sustav od tri međusobno neovisne diferencijalne jednadžbe, to znači da su u ovom slučaju moguća tri oblika izvijanja i to dva čista fleksijska oblika te jedan čisti torzijski oblik. Iz prve dvije diferencijalne jednadžbe dobivamo, tako, da su kritične sile kod čistog fleksijskog izvijanja u ravninama ( $z, y$ ) i ( $z, x$ ):

$$F_{kr} = F_x = \frac{\pi^2 EI_x}{l_0^2}, \quad F_{kr} = F_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l_0^2}, \quad (2.122)$$

pri čemu je  $l_0$  slobodna duljina izvijanja pri čistom fleksijskom izvijanju, a vrijednost koje ovisi o vrsti oslonaca. Napišemo li treću diferencijalnu jednadžbu iz izraza (2.120) u sljedećem obliku:

$$\frac{d^4 \varphi_z}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0, \quad (2.123)$$

gdje je:

$$k^2 = \frac{1}{EI_\omega} \left( F \frac{I_p}{A} - GJ \right), \quad (2.124)$$

tada rješenje izraza (2.123) možemo pretpostaviti u sljedećem obliku:

$$\varphi_z = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 z + C_4, \quad (2.125)$$

pri čemu su  $C_1, \dots, C_4$  integracijske konstante čije se vrijednosti određuju na osnovi zadanih rubnih uvjeta. Tako, npr. za slučaj da je spriječena rotacija krajnjih presjeka oko osi  $z$ , dok je njihovo vitoperenje slobodno, tada je za  $z = 0$  i  $z = l$ :

$$\varphi_z = \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0, \quad (2.126)$$

što iz izraza (2.125) daje:

$$z = 0, \quad \varphi_z = 0 \rightarrow C_2 + C_4 = 0,$$

$$z = 0, \quad \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0 \rightarrow C_2 = 0,$$

$$z = l, \quad \varphi_z = 0 \rightarrow C_1 \sin kl + C_3 l + C_4 = 0,$$

$$z = l, \quad \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0 \rightarrow -C_1 k^2 \sin kl - C_2 k^2 \cos kl = 0,$$

ili zapisano u matricnoj formi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & l & 1 \\ -k^2 \sin kl & -k^2 \cos kl & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.127)$$

Da bi izraz (2.127) imao netrivialno rješenje, mora biti:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & l & 1 \\ -k^2 \sin kl & -k^2 \cos kl & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.128)$$

Rješenjem determinante iz izraza (2.128), dobivamo:

$$\sin kl = 0 \rightarrow kl = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.129)$$

Vratimo li, sada, izraz (2.129) u (2.124), slijedi da je kritična sila kod čistog torzijskog izvijanja, a za slučaj kada se elastična linija sastoji od  $n$  sinusnih poluvalova:

$$F_{n\varphi} = \frac{A}{I_p} \left( GJ + n^2 \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2} \right). \quad (2.130)$$

Kako je od praktičnog značenja samo onaj slučaj kada je  $n = 1$ , to iz izraza (2.130) slijedi:

$$F_{kr} = F_\varphi = \frac{A}{I_p} \left( GJ + \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2} \right). \quad (2.131)$$

Ukoliko su, pak, oba kraja nosača ukliještena, tj. ako je krajnjim presjecima spriječeno i uvijanje i vitoperenje, tada za  $z = 0$  i  $z = l$  vrijedi da je:

$$\varphi_z = \frac{d\varphi_z}{dz} = 0 \quad (2.132)$$

te ukoliko ponovimo postupak kao u prethodnom slučaju, dobivamo da je determinanta sustava:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & l & 1 \\ k \sin kl & k \cos kl & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.133)$$

rješenjem koje proizlazi:

$$kl \sin kl + 2(\cos kl - 1) = 0. \quad (2.134)$$

Kako je:

$$1 - \cos kl = 2 \sin^2 \frac{kl}{2}, \quad \sin kl = 2 \sin \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2},$$

tada iz izraza (2.134) slijedi:

$$2 \sin \frac{kl}{2} \left( \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2} \right) = 0. \quad (2.135)$$

Da bi izraz (2.135) bio zadovoljen, mora biti:

$$\sin \frac{kl}{2} = 0 \rightarrow \frac{kl}{2} = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.136)$$

ili:

$$\tan \frac{kl}{2} = \frac{kl}{2} \rightarrow \frac{kl}{2} = 4,49. \quad (2.137)$$

Pošto za  $n = 1$  izraz (2.136) daje manju vrijednost nego izraz (2.137), to na osnovi izraza (2.124) i (2.136) slijedi da je u ovom slučaju kritična sila za čisto torzijsko izvijanje:

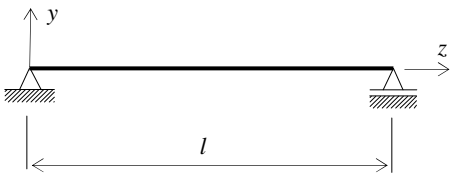
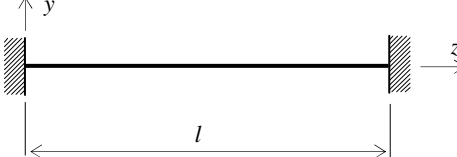
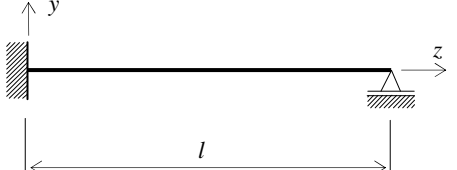
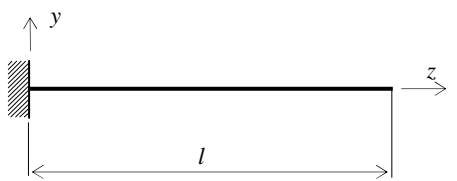
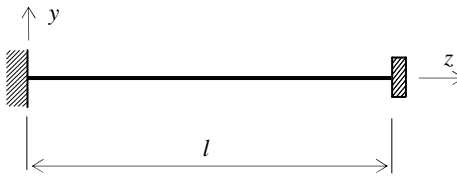
$$F_{kr} = F_{\varphi} = \frac{A}{I_p} \left[ GJ + \frac{\pi^2 EI_{\omega}}{(0,5l)^2} \right]. \quad (2.138)$$

U općem je slučaju izraz (2.138), kao i izraz (2.122), moguće napisati u sljedećem obliku:

$$F_{kr} = F_{\varphi} = \frac{A}{I_p} \left( GJ + \frac{\pi^2 EI_{\omega}}{l_0^2} \right), \quad (2.139)$$

pri čemu je  $l_0$  slobodna duljina izvijanja kod torzijskog izvijanja, a čije su vrijednosti za razne tipove oslonaca dane u tabl. 2.1.

**Tab. 2.1.** Vrijednosti slobodne duljine izvijanja  $l_0$  kod čistog torzijskog izvijanja

Rubni uvjeti za $z = 0$	OSLONCI	Rubni uvjeti za $z = l$	$l_0$
$\varphi_z = 0$ (nema uvijanja) ----- $\frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0$ ( $M_{\omega} = 0$ )		$\varphi_z = 0$ ----- $\frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0$	$l$
$\varphi_z = 0$ ----- $\frac{d\varphi_z}{dz} = 0$ (nema vitoperenja)		$\varphi_z = 0$ ----- $\frac{d\varphi_z}{dz} = 0$	$0,5l$
$\varphi_z = 0$ ----- $\frac{d\varphi_z}{dz} = 0$		$\varphi_z = 0$ ----- $\frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0$	$0,7l$
$\varphi_z = 0$ ----- $\frac{d\varphi_z}{dz} = 0$		$\frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0$ ----- $\frac{d^3 \varphi_z}{dz^3} + k^2 \frac{d\varphi_z}{dz} = 0$ ( $M_z = 0$ )	$2l$
$\varphi_z = 0$ ----- $\frac{d\varphi_z}{dz} = 0$		$\frac{d\varphi_z}{dz} = 0$ ----- $\frac{d^3 \varphi_z}{dz^3} + k^2 \frac{d\varphi_z}{dz} = 0$	$l$

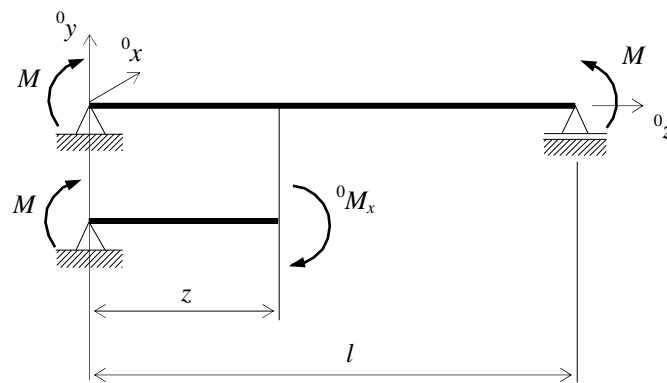
Iz izraza (2.139) može se primijetiti da je, za poprečne presjeka kod kojih je  $I_\omega = 0$ , kritična sila za čisto torzijsko izvijanje:

$$F_{kr} = F_\varphi = GA \frac{J}{I_p}, \quad (2.140)$$

odnosno da njena vrijednost ne ovisi, niti o duljini nosača, niti o vrsti oslonaca.

## 2.10. Lateralno ili bočno izvijanje

Neka imamo obostrano zglobno oslonjeni tankostijeni gredni nosač dvoosno simetričnog poprečnog presjeka, opterećen nad osloncima protusmjernim momentima intenziteta  $M$ , sl. 2.9. Zbog ovakvog djelovanja momenata greda se savija u glavnoj centralnoj ravnini inercije ( ${}^0z, {}^0y$ ). Međutim, ukoliko ona nije bočno pridržavana, može doći do pojave tzv. lateralnog ili bočnog izvijanja grede, pri čemu se ona dodatno uvija te savija u glavnoj centralnoj ravnini inercije ( ${}^0z, {}^0x$ ).



Sl. 2.9. Tankostijeni gredni nosač opterećen spregovima  $M$  na osloncima

Pošto od unutarnjih sila, prije nego što se nosač izvija, imamo samo moment savijanja  ${}^0M_x = M$ , dok je prema izrazu (2.48) Wagnerov koeficijent  ${}^0\bar{K} = 0$ , tada iz izraza (2.102b-d) proizlazi:

$$EI_x \frac{d^4 v_s}{dz^4} = 0, \quad (2.141a)$$

$$EI_y \frac{d^4 u_s}{dz^4} - M \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0, \quad (2.141b)$$

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi_z}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} - M \frac{d^2 u_s}{dz^2} = 0, \quad (2.141c)$$

pri čemu diferencijalna jednačba iz izraza (2.141a) opisuje neizvijeni nosač te je u daljnjem razmatranju možemo zanemariti. Integriramo li dvaput diferencijalnu jednačbu iz izraza (2.141b), proizlazi:

$$EI_y \frac{d^3 u_s}{dz^3} - M \frac{d \varphi_z}{dz} = C_1$$

$$EI_y \frac{d^2 u_s}{dz^2} - M \varphi_z = C_1 z + C_2, \quad (2.142)$$

gdje su  $C_1$  i  $C_2$  konstante integracije. Ako je npr. za nosač sa sl. 2.9 rotacija krajnjih presjeka oko osi  ${}^0y$  slobodna, dok je oko osi  ${}^0z$  spriječena, tada iz izraza (2.142) za  $z = 0$  i  $z = l$  dobivamo:

$$EI_y \frac{d^2 u_s}{dz^2} - M \varphi_z = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = 0, \quad (2.143)$$

odnosno:

$$\frac{d^2 u_s}{dz^2} = \frac{M}{EI_y} \varphi_z. \quad (2.144)$$

Vratimo li, sada, izraz (2.144) natrag u izraz (2.141c), slijedi:

$$\frac{d^4 \varphi_z}{dz^4} - \frac{GJ}{EI_\omega} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} - \frac{M^2}{E^2 I_y I_\omega} \varphi_z = 0. \quad (2.145)$$

Rješenje izraza (2.145) možemo pretpostaviti u sljedećem obliku:

$$\varphi_z = C_3 \sin k_1 z + C_4 \cos k_1 z + C_5 \sinh k_2 z + C_6 \cosh k_2 z, \quad (2.146)$$

gdje je:

$$k_1^2 = -\frac{GJ}{2EI_\omega} + \sqrt{\left(\frac{GJ}{2EI_\omega}\right)^2 + \frac{M^2}{E^2 I_y I_\omega}}, \quad (2.147a)$$

$$k_2^2 = \frac{GJ}{2EI_\omega} + \sqrt{\left(\frac{GJ}{2EI_\omega}\right)^2 + \frac{M^2}{E^2 I_y I_\omega}}, \quad (2.147b)$$

dok su  $C_3, \dots, C_6$  konstante integracije koje određujemo na osnovi poznatih rubnih uvjeta za  $\varphi_z$ . Tako, npr. ako je, uz već spriječeno uvijanje, vitoperenje krajnjih presjeka slobodno ( $M_\omega = 0$ ), slijedi da su rubni uvjeti za  $z = 0$  i  $z = l$ , istovjetni onima danim izrazom (2.126), što iz izraza (2.146) daje:

$$z = 0, \quad \varphi_z = 0 \rightarrow C_4 + C_6 = 0,$$

$$z = 0, \quad \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0 \rightarrow -C_4 k_1^2 + C_6 k_2^2 = 0,$$

$$z = l, \quad \varphi_z = 0 \rightarrow C_3 \sin k_1 l + C_4 \cos k_1 l + C_5 \sinh k_2 l + C_6 \cosh k_2 l = 0,$$

$$z = l, \quad \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = 0 \rightarrow -C_3 k_1^2 \sin k_1 l - C_4 k_1^2 \cos k_1 l + C_5 k_2^2 \sinh k_2 l + C_6 k_2^2 \cosh k_2 l = 0,$$

ili u matricnoj formi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -k_1^2 & 0 & k_2^2 \\ \sin k_1 l & \cos k_1 l & \sinh k_2 l & \cosh k_2 l \\ -k_1^2 \sin k_1 l & -k_1^2 \cos k_1 l & k_2^2 \sinh k_2 l & k_2^2 \cosh k_2 l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.148)$$

Riješimo li, analogno prethodnim primjerima, determinantu sustava iz izraza (2.148), dobivamo:

$$(k_1^2 + k_2^2)^2 \sin k_1 l \sinh k_2 l = 0. \quad (2.149)$$

Izraz (2.149) bit će jednak nuli, ako je:

$$\sin k_1 l = 0, \quad (2.150)$$

ili:

$$\sinh k_2 l = 0. \quad (2.151)$$

Kako je, pak, izraz (2.151) uvijek veći od nule, slijedi da je rješenje izraza (2.149) dano izrazom (2.150), odnosno:

$$k_1 l = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.152)$$

Povratom vrijednosti (2.152) u izraz (2.147a), imamo:



$$M = \frac{n\pi}{l} \sqrt{EI_y GJ} \sqrt{1 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{EI_\omega}{GJ}}, \quad (2.153)$$

odnosno za  $n = 1$  slijedi da je kritična vrijednost momenta  $M = M_{kr}$ , kod kojeg se nosač počinje bočno izvijati:

$$M = M_{kr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y GJ} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{l^2} \frac{EI_\omega}{GJ}}. \quad (2.154)$$

Kod poprečnih presjeka kod kojih je  $I_\omega = 0$ , izraz (2.154) poprima sljedeći oblik:

$$M = M_{kr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y GJ}, \quad (2.155)$$

dok je za poprečne presjeke kod kojih je torzijska krutost  $GJ$  puno manja od fleksijskih krutosti  $EI_y$  i  $EI_\omega$ , kritična vrijednost momenta:

$$M = M_{kr} = \frac{\pi^2}{l^2} E \sqrt{I_y I_\omega}. \quad (2.156)$$

Ukoliko je tankostijeni gredni nosač sa sl.2.9 jednoosno simetričan, pri čemu je ( $^0y$ ,  $^0z$ ) ravnina simetrije, tada Wagnerov koeficijent nije jednak nuli i prema izrazima (2.46) i (2.47), iznosi:

$$^0\bar{K} = ^0M_x \alpha_x = -M \alpha_x \quad (2.157)$$

te je, u skladu s izrazom (2.102d), diferencijalna jednadžba iz izraza (2.141c), sada:

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi_z}{dz^4} - (GJ - M \alpha_x) \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} - M \frac{d^2 u_s}{dz^2} = 0, \quad (2.158)$$

odnosno izraz (2.145) poprima sljedeći oblik:

$$\frac{d^4 \varphi_z}{dz^4} - \frac{GJ - M \alpha_x}{EI_\omega} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} - \frac{M^2}{E^2 I_y I_\omega} \varphi_z = 0. \quad (2.159)$$

Kako se izraz (2.159) razlikuje od izraza (2.145) samo za član uz  $d^2 \varphi_z / dz^2$ , tada rješenje tog izraza također možemo pretpostaviti u obliku danom izrazom (2.146), stim da su sada:

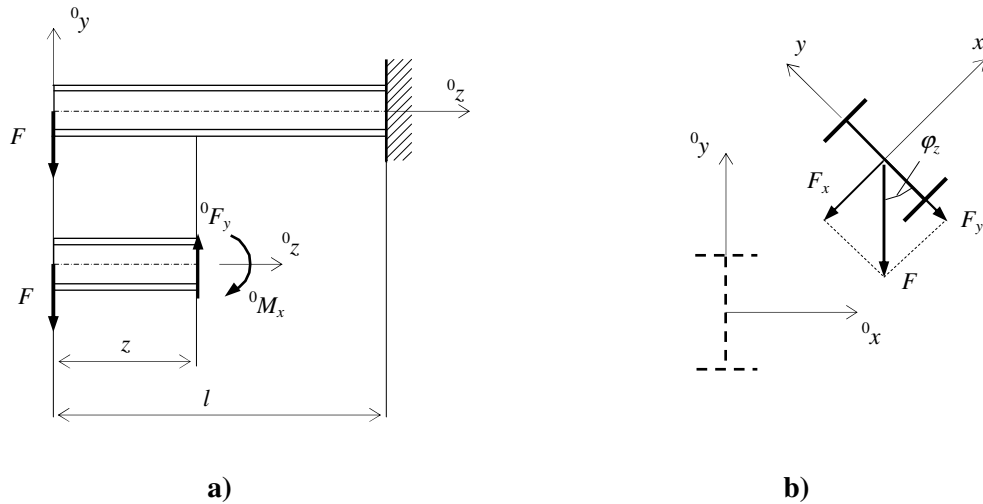
$$k_1^2 = -\frac{GJ}{2EI_\omega} + \sqrt{\left(\frac{GJ - M \alpha_x}{2EI_\omega}\right)^2 + \frac{M^2}{E^2 I_y I_\omega}}, \quad (2.160a)$$

$$k_2^2 = \frac{GJ}{2EI_\omega} + \sqrt{\left(\frac{GJ - M \alpha_x}{2EI_\omega}\right)^2 + \frac{M^2}{E^2 I_y I_\omega}}, \quad (2.160b)$$

odnosno iz izraza (2.152), a za  $n = 1$ , slijedi da je kritična vrijednost momenta:

$$M = M_{kr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y GJ} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{l^2} \frac{EI_\omega}{GJ} - \frac{M \alpha_x}{GJ}}. \quad (2.161)$$

U slučaju da je konzola dvoosno simetričnog poprečnog presjeka opterećena na slobodnome kraju vertikalnom silom  $F$ , sl. 2.10a, slijedi da od unutarnjih sila prije izvijanja imamo  $^0F_y = F$  i  $^0M_x = Fz$ , pa iz izraza (2.102b-d) dobivamo:



Sl. 2.10. Konzola opterećena vertikalnom silom  $F$  na slobodnome kraju

$$EI_x \frac{d^4 v_s}{dz^4} = 0, \quad (2.162a)$$

$$EI_y \frac{d^4 u_s}{dz^4} + Fz \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} + 2F \frac{d\varphi_z}{dz} = 0, \quad (2.162b)$$

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi_z}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} + Fz \frac{d^2 u_s}{dz^2} = 0, \quad (2.162c)$$

pri čemu diferencijalnu jednadžbu iz izraza (2.162a), kao i onu iz izraza (2.141a), možemo zanemariti.

Nadalje, da bismo iz izraza (2.162c) anulirali član  $d^2 u_s / dz^2$ , razmotrimo ravnotežu izvijenja nosača. Pretpostavimo li da se prilikom izvijanja težište poprečnog presjeka pomiče u pozitivnom smjeru osi  $^0x$  i  $^0y$  te da, pritom, poprečni presjek rotira oko osi  $z$  u pozitivnim smjeru, sl. 2.10b, tada silu  $F$  možemo rastaviti na komponente:

$$F_x = F \sin \varphi_z \cong F \varphi_z, \quad F_y = F \cos \varphi_z \cong F, \quad (2.163)$$

pa je moment savijanja  $M_y$  u proizvoljnom presjeku  $z$ :

$$M_y = EI_y \frac{d^2 u_s}{dz^2} = -F_x z = -F z \varphi_z, \quad (2.164)$$

odnosno:

$$\frac{d^2 u_s}{dz^2} = -\frac{Fz}{EI_y} \varphi_z. \quad (2.165)$$

Uvrstimo li, sada, izraz (2.165) u izraz (2.162c), dobivamo:

$$\frac{d^4 \varphi_z}{dz^4} - \frac{GJ}{EI_\omega} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} - \frac{F^2 z^2}{E^2 I_y I_\omega} \varphi_z = 0. \quad (2.166)$$

Izraz (2.166) predstavlja homogenu diferencijalnu jednadžbu s promjenljivim koeficijentima, a koja kao rješenje daje kritičnu vrijednost sile  $F = F_{kr}$  pri kojoj može nastupiti bočno izvijanje nosača sa sl. 2.10. Kako je egzaktno rješenje toga izraza vrlo teško iznaći, tada se primjenom beskonačnih redova kao rješenje za kritičnu silu izvijanja, dobiva [19]:

$$F = F_{kr} = \frac{4,013}{l^2} \frac{\sqrt{EI_y GJ}}{\left(1 - \sqrt{\frac{EI_\omega}{l^2 GJ}}\right)^2}, \quad (2.167)$$

odnosno za poprečne presjeke kod kojih je  $I_\omega = 0$ , imamo:

$$F = F_{kr} = \frac{4,013}{l^2} \sqrt{EI_y GJ}. \quad (2.168)$$

### 3. TANKOSTIJENI GREDNI KONAČNI ELEMENT

U prethodnom je poglavlju prikazano rješavanje problema stabilnosti tankostijenih grednih struktura s pomoću sustava diferencijalnih jednadžbi i odgovarajućih rubnih uvjeta. Pošto je iznalaženje egzaktnog rješenja tih sustava ograničeno samo na slučajeve relativno jednostavne geometrije, oblike opterećenja i vrste oslanjanja nosača, to je, pri rješavanju složenijih slučajeva, nužno rabiti neku od aproksimativnih metoda. Ove se metode mogu podijeliti u tri skupine: metode rezidua, varijacijske metode i numeričke metode [14, 24].

Metode rezidua pripadaju skupini metoda za približno rješavanje diferencijalnih jednadžbi, a temelje se na minimizaciji rezidua ili odstupanja aproksimativnog rješenja od točnog. Najpoznatija je iz ove skupine *Galerkinova* metoda.

Varijacijske se metode temelje na principu stacionarnosti funkcionala, pri čemu se kao funkcional definira ili potencijalna ili komplarnarna energija sustava. Osnovna je pretpostavka kod varijacijskih metoda da je sustav konzervativan, odnosno da se može transformirati u varijacijski oblik. Iz ove je skupine metoda najpoznatija *Rayleigh-Ritzova* metoda.

Kod numeričkog se pristupa najčešće koriste matrične metode i to: *metoda konačnih diferencija* i *metoda konačnih elemenata*, pri čemu prva od spomenutih metoda predstavlja numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi, dok druga metoda predstavlja posebne varijante Galerkinove i Rayleigh-Ritzove metode. Za razliku od metode konačnih diferencija, koja se temelji na matematičkoj diskretizaciji diferencijalnih jednadžbi, kod metode se konačnih elemenata diskretizira kontinuum (konstrukcija) na odgovarajući broj podkontinuum (konačnih elemenata), međusobno povezanih u jednom ili više čvorova. Zatim se primjenom odgovarajućih jednadžbi mehanike kontinuuma dovode u vezu pomaci i/sile u polju konačnog elementa s pomacima i/silama u čvorovima te se, na taj način, problem svodi na rješavanje sustava algebarskih jednadžbi iz kojih se, zatim, kao rješenja dobivaju pomaci i sile u čvorovima konačnih elemenata.

U rješavanju problema stabilnosti tankostijenih grednih nosača metodom konačnih elemenata razlikujemo dva osnovna pristupa. Kod prvog se pristupa problem stabilnosti tretira kao linearni problem, odnosno svodi se na matrični problem vlastitih vrijednosti, pri čemu najniža vlastita vrijednost predstavlja nivo vanjskog opterećenja kod kojeg konstrukcija prelazi iz stabilnog u nestabilno deformacijsko stanje [36, 50, 79]. Kako kod tog nivoa vanjskog opterećenja dolazi do grananja ili bifurkacije deformacijskih formi konstrukcije, tada se ono, vrlo često, naziva i bifurkacijskim opterećenjem konstrukcije [14]. Pripadni vlastiti vektor predstavlja samo oblik deformacijske forme koja se javlja pri gubitku stabilnosti, dok vrijednost same deformacije ostaje nepoznata. Također, kao nepoznate ostaju vrijednosti deformacije u pretkritičnoj i postkritičnoj fazi, odnosno pretpostavlja se da veličina pretkritične deformacije ne utječe na vrijednost kritičnog opterećenja, kao i da, nakon dostizanja kritične vrijednosti, konstrukcija nema više mogućnosti nošenja vanjskog opterećenja. Dobra je strana ovog pristupa ta što omogućava vrlo brzu kontrolu stabilnosti i kod vrlo složenih konstrukcija, a modeliranje kojih zahtijeva uporabu većeg broja konačnih elemenata, dok je loša strana ta što je kod konstrukcija kod kojih se pretkritična deformacija ne može zanemariti, vrijednost kritičnog opterećenja, u pravilu, precijenjena.

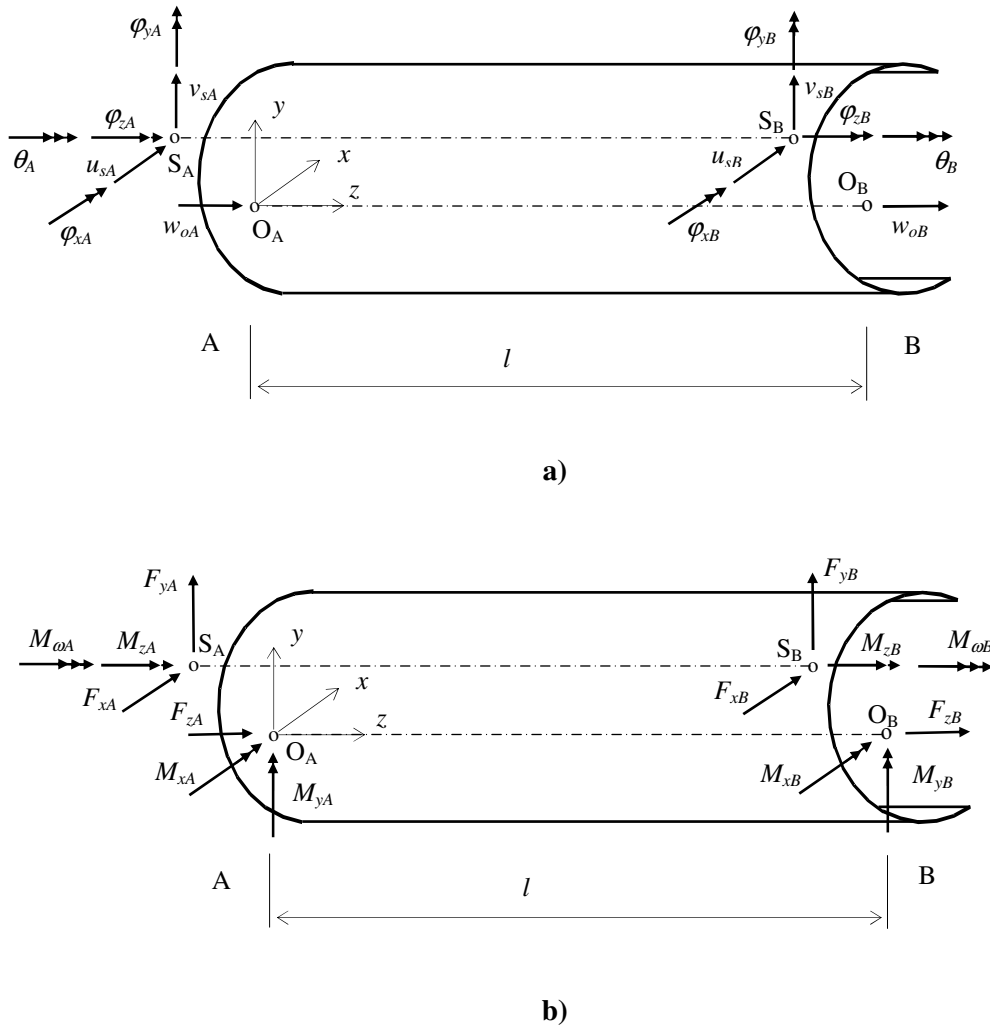
Kod drugog se pristupa problem stabilnosti tretira kao nelinearni problem, odnosno kritična se vrijednost vanjskog opterećenja određuje na način da se prati veza između vanjskog opterećenja i deformacije konstrukcije i u pretkritičnoj i u postkritičnoj fazi [34, 48]. Pri tome se cijeli proces opterećenja i deformacije dijeli na određeni broj koraka ili inkremenata, stim da se unutar jednog inkrementa problem tretira kao linearan [57, 84]. Dobra je strana ovoga pristupa što je opisivanje prijelaza konstrukcije iz stabilnog u nestabilno deformacijsko stanje mnogo realnije, a dobivena je vrijednost kritičnog opterećenja konstrukcije kod koje se utjecaj pretkritične deformacije ne može zanemariti, mnogo bliža stvarnoj vrijednosti. Loša je strana ovoga pristupa ta što je trajanje proračuna, vrlo često, dosta dugotrajno, kao i ta što takvi proračuni zahtijevaju primjenu kompjutera puno većih mogućnosti po pitanju kapaciteta i brzine.

U inkrementalnom načinu opisivanja procesa deformiranja konstrukcije razlikujemo tri ravnotežne konfiguracije: početnu ili nedeformiranu konfiguraciju, zadnju poznatu deformiranu konfiguraciju i prvu sljedeću nepoznatu deformiranu konfiguraciju [85]. Ukoliko se sve veličine (pomaci i sile) u ravnotežnim jednadžbama nepoznate konfiguracije definiraju u odnosu na početnu konfiguraciju, tada govorimo o *total Lagrangian* (TL) formulaciji. Kada su sve veličine iz nepoznate konfiguracije definirane u odnosu na zadnju poznatu deformiranu konfiguraciju, tada govorimo o *updated Lagrangian* (UL) formulaciji, a

ako su te veličine definirane u odnosu na istu nepoznatu konfiguraciju, onda se radi o *Eulerovoj* formulaciji ravnotežnih jednažbi.

### 3.1. Vektor čvornih pomaka i vektor čvornih sila konačnog elementa

Na sl. 3.1 prikazan je prostorni tankostijeni gredni konačni element nesimetričnog poprečnog presjeka. Pri tome su s A i B označeni čvorovi konačnog elementa, O i S su težište i centar smicanja poprečnog presjeka u čvorovima, z je uzdužna os konačnog elementa koja prolazi težišta čvornih presjeka, dok su x i y glavne centralne osi poprečnog presjeka.



**Sl. 3.1.** Tankostijeni gredni konačni element: a) komponente čvornih pomaka; b) komponente čvornih sila

Kao što se vidi sa sl. 3.1, u svakom čvoru imamo 7 komponenta čvornih pomaka i 7 komponenta čvornih sila, odnosno konačni element ima ukupno 14 stupnjeva slobode. Vektor je čvornih pomaka konačnog elementa sa sl. 3.1:

$$\left(\mathbf{u}^e\right)^T = \left\{w_{oA}, u_{sA}, v_{sA}, \varphi_{zA}, \varphi_{xA}, \varphi_{yA}, w_{oB}, u_{sB}, v_{sB}, \varphi_{zB}, \varphi_{xB}, \varphi_{yB}, \theta_A, \theta_B\right\}, \quad (3.1)$$

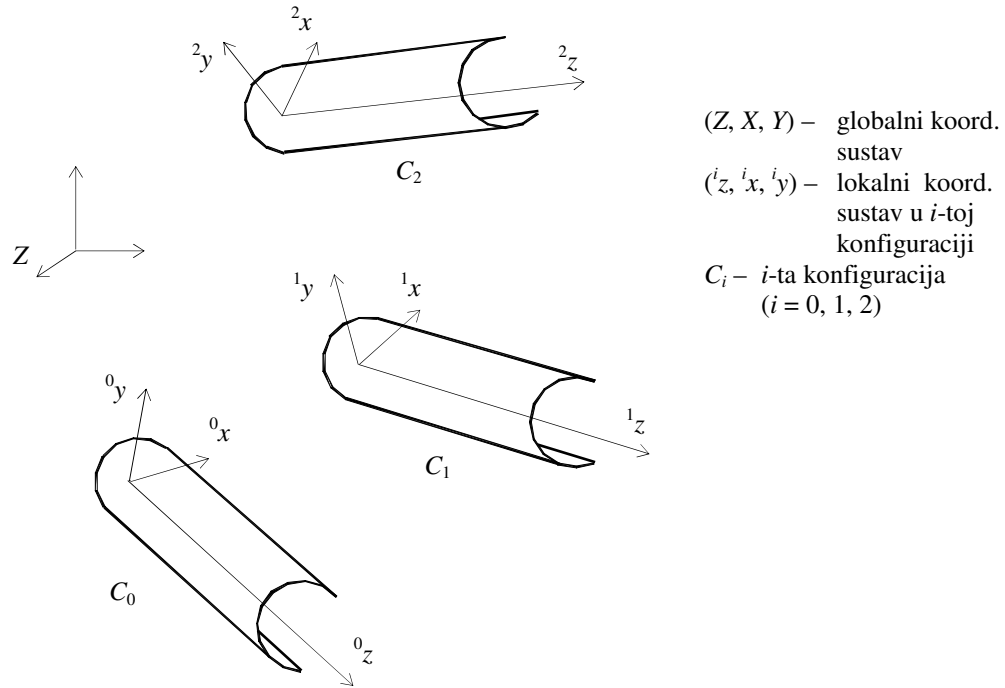
stim da su komponente:  $\varphi_{xi}$ ,  $\varphi_{yi}$  i  $\theta_i$ ,  $i = A, B$ , definirane izrazom (2.1), dok je vektor čvornih sila:

$$\left(\mathbf{f}^e\right)^T = \left\{F_{zA}, F_{xA}, F_{yA}, M_{zA}, M_{xA}, M_{yA}, F_{zB}, F_{xB}, F_{yB}, M_{zB}, M_{xB}, M_{yB}, M_{\omega A}, M_{\omega B}\right\}. \quad (3.2)$$

Pri tome su čvorni pomak  $w_o$  i čvorne sile:  $F_x$ ,  $M_x$  i  $M_y$ , definirani za težište, dok su sve preostale komponente definirane za centar smicanja. Gornji desni indeks  $e$  uz čvorne vektore iz izraza (3.1) i (3.2) označava  $e$ -ti konačni element diskretizirane konstrukcije.

### 3.2. Updated Lagrangian (UL) formulacija

Na sl. 3.2 prikazani su inkrementalni pomaci tankostijenog grednog konačnog elementa, pri čemu  $C_0$  predstavlja početnu ili nedeformiranu konfiguraciju,  $C_1$  zadnju poznatu deformiranu konfiguraciju, dok je  $C_2$  prva sljedeća nepoznata konfiguracija. Cartesijev koordinatni sustav  $(Z, X, Y)$  predstavljaju globalni koordinatni sustav, a  $(z, x, y)$  lokalni koordinatni sustav konačnog elementa. Lijevi gornji indeks uz lokalne osi definira konfiguraciju konačnog elementa.



Sl. 3.2. Inkrementalni pomaci konačnog elementa

Princip virtualnih radova za konfiguraciju  $C_2$ , glasi [57]:

$$\int_{{}^2V} {}^2\tau_{ij} \delta_2 e_{ij} {}^2dV = \delta_2^2 W, \quad (3.3)$$

gdje je:  $\tau_{ij}$  Cauchyjev (Eulerov) tenzor naprezanja,  $e_{ij}$  Almansijev tenzor deformacije, dok je  $\delta W$  virtualni rad vanjski sila:

$$\delta_2^2 W = \int_{{}^2A_\sigma} {}^2t_i \delta(u_i + \tilde{u}_i) {}^2dA_\sigma + \int_{{}^2V} {}^2f_i \delta(u_i + \tilde{u}_i) {}^2dV, \quad (3.4)$$

pri čemu  $t_i$  predstavlja površinske ili kontaktne sile,  $f_i$  volumenske sile, dok su  $u_i$  i  $\tilde{u}_i$  linearna i nelinearna komponenta pomaka iz izraza (2.71). U izrazima (3.3) i (3.4) lijevi gornji indeks označava konfiguraciju u kojoj se dotična veličina pojavljuje. Nepostojanje takova indeksa znači da se radi o inkrementalnoj vrijednosti. Donji lijevi indeks predstavlja konfiguraciju u odnosu na koju je dotična veličina definirana. Ukoliko su oba lijeva indeksa jednaka, tada se donji indeks može izostaviti, npr.  ${}^2\tau_{ij} = {}^2\tau_{ij}$ . Pretpostavimo li, nadalje, da na konačni element ne djeluju volumenske sile, tada iz izraza (3.4) imamo:

$$\delta_2^2 W = \int_{{}^2A_\sigma} {}^2t_i \delta(u_i + \tilde{u}_i) {}^2dA_\sigma. \quad (3.5)$$

Kako su u izrazu (3.5) sve vrijednosti definirane u odnosu na konfiguraciju  $C_2$ , a koja je nepoznata, tada ih u skladu s UL formulacijom trebamo izraziti u odnosu na zadnju poznatu konfiguraciju  $C_1$ . Pošto je:

$$\int_{{}^2V} {}^2\tau_{ij} \delta_2 e_{ij} {}^2dV = \int_{{}^1V} {}^1S_{ij} \delta_1 \varepsilon_{ij} {}^1dV, \quad (3.6)$$

gdje je  $S_{ij}$  Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja druge vrste, a  $\varepsilon_{ij}$  Green-Lagrangeov tenzor deformacije.

Kako je, pak:

$${}^2t_i \, {}^2dA_\sigma = {}^2t_i \, {}^1dA_\sigma, \quad (3.7)$$

to se povratom izraza (3.5) – (3.7) u izraz (3.3), dobiva:

$$\int_V {}^2S_{ij} \, \delta_1 \varepsilon_{ij} \, {}^1dV = \int_{A_\sigma} {}^2t_i \, \delta(u_i + \tilde{u}_i) \, {}^1dA_\sigma. \quad (3.8)$$

Izraz (3.8) predstavlja ravnotežne jednadžbe konačnog elementa u konfiguraciji  $C_2$ , stim da su sve veličine u njima definirane u odnosu na konfiguraciju  $C_1$ .

Nadalje, kako se u inkrementalnoj analizi tenzor  ${}^2S_{ij}$  može prikazati u obliku:

$${}^2S_{ij} = {}^1\tau_{ij} + {}^1S_{ij} = {}^1S_{ij} + {}^1S_{ij}, \quad (3.9)$$

dok je prema izrazu (2.72):

$$\delta_1 \varepsilon_{ij} = \delta_1 e_{ij} + \delta_1 \eta_{ij} + \delta_1 \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad (3.10)$$

tada uvođenjem izraza (3.9) i (3.10) u izraz (3.8), proizlazi:

$$\int_V {}^2S_{ij} (\delta_1 e_{ij} + \delta_1 \eta_{ij} + \delta_1 \tilde{\varepsilon}_{ij}) \, {}^1dV = \int_{A_\sigma} {}^2t_i (\delta u_i + \delta \tilde{u}_i) \, {}^1dA_\sigma,$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \int_V {}^1S_{ij} \, \delta_1 \varepsilon_{ij} \, {}^1dV + \int_V {}^1S_{ij} \, \delta_1 \eta_{ij} \, {}^1dV + \int_V {}^1S_{ij} \, \delta_1 \tilde{\varepsilon}_{ij} \, {}^1dV - \int_{A_\sigma} {}^2t_i \, \delta \tilde{u}_i \, {}^1dA_\sigma = \\ = \int_{A_\sigma} {}^2t_i \, \delta u_i \, {}^1dA_\sigma - \int_V {}^1S_{ij} \, \delta_1 e_{ij} \, {}^1dV. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nadalje, kako inkrementalne konstitutivne jednadžbe glase:

$${}^1S_{ij} = {}^1C_{ijkl} \, {}^1\varepsilon_{kl}, \quad (3.12)$$

gdje je  $C_{ijkl}$  tenzor elastičnih konstanti [86], te kako možemo pretpostaviti da je:

$$\int_{A_\sigma} {}^2t_i \, \delta \tilde{u}_i \, {}^1dA_\sigma = \int_{A_\sigma} ({}^1t_i + {}^1t_i) \, \delta \tilde{u}_i \, {}^1dA_\sigma \cong \int_{A_\sigma} {}^1t_i \, \delta \tilde{u}_i \, {}^1dA_\sigma, \quad (3.13)$$

to iz izraza (3.11), imamo:

$$\begin{aligned} \int_V {}^1C_{ijkl} \, {}^1\varepsilon_{kl} \, \delta_1 \varepsilon_{ij} \, {}^1dV + \int_V {}^1S_{ij} \, \delta_1 \eta_{ij} \, {}^1dV + \int_V {}^1S_{ij} \, \delta_1 \tilde{\varepsilon}_{ij} \, {}^1dV - \int_{A_\sigma} {}^1t_i \, \delta \tilde{u}_i \, {}^1dA_\sigma = \\ = \int_{A_\sigma} {}^2t_i \, \delta u_i \, {}^1dA_\sigma - \int_V {}^1S_{ij} \, \delta_1 e_{ij} \, {}^1dV. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Izraz (3.14) predstavlja tenzorski oblik inkrementalnih ravnotežnih jednadžbi konačnog elementa pri inkrementalnom pomaku iz konfiguracije  $C_1$  u konfiguraciju  $C_2$ , a zapisanih u skladu s UL formulacijom. Međutim, kako izraz (3.14) ne može biti riješen direktno jer je nelinearan u inkrementalnom pomaku, tada približno rješenje toga izraza možemo potražiti uvođenjem sljedeće pretpostavke:

$$\delta_1 \varepsilon_{ij} \cong \delta_1 e_{ij} \rightarrow {}^1S_{ij} \cong {}^1C_{ijkl} \, {}^1e_{kl}, \quad (3.15)$$

što, konačno, daje:

$$\int_V {}^1C_{ijkl} \, {}^1e_{kl} \, \delta_1 e_{ij} \, {}^1dV + \int_V {}^1S_{ij} \, \delta_1 \eta_{ij} \, {}^1dV + \int_V {}^1S_{ij} \, \delta_1 \tilde{\varepsilon}_{ij} \, {}^1dV - \int_{A_\sigma} {}^1t_i \, \delta \tilde{u}_i \, {}^1dA_\sigma = \delta_1^2 W - \delta_1^1 W, \quad (3.16)$$

gdje je za konačni element sa sl. 3.1:

$$\delta_1^2 W = \int_{A_\sigma} {}^2t_i \, \delta u_i \, {}^1dA_\sigma = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{2} \mathbf{f}^e, \quad (3.17)$$

$$\delta_1^1 W = \int_V {}^1S_{ij} \, \delta_1 e_{ij} \, {}^1dV = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{1} \mathbf{f}^e. \quad (3.18)$$

Izraz (3.16) predstavlja *linearizirane inkrementalne ravnotežne jednadžbe* konačnog elementa zapisanih u skladu s UL formulacijom. Pošto je dio tog izraza lijevo od znaka jednakosti istovjetan lijevoj strani izraza (2.83), s jedinom razlikom u konfiguraciji u odnosu na koju su vrijednosti definirane, to se kao konačno rješenje lijevog dijela izraza (3.16) može rabiti lijevi dio izraz (2.99), pa imamo:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left( EA \frac{dw_o}{dz} \delta \frac{dw_o}{dz} + EI_x \frac{d^2v_s}{dz^2} \delta \frac{d^2v_s}{dz^2} + EI_y \frac{d^2u_s}{dz^2} \delta \frac{d^2u_s}{dz^2} + EI_\omega \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \delta \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} + GJ \frac{d\varphi_z}{dz} \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right) dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ {}^1F_z \left[ \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 + 2y_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - 2x_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] + \right. \\
& + {}^1F_x \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) + 2x_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) + 2y_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{du_s}{dz} \right) \right] + \\
& + {}^1F_y \left[ -\delta \left( \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) + 2x_s \delta \left( \frac{d^2u_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} \right) + 2y_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{dv_s}{dz} \right) \right] + \\
& + {}^1M_z \left[ \delta \left( \frac{d^2u_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} \right) - \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) \right] + {}^1\bar{K} \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \right)^2 + \\
& + {}^1M_x \left[ \delta \left( \frac{d^2u_s}{dz^2} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) \right] + \\
& + {}^1M_y \left[ \delta \left( \frac{d^2v_s}{dz^2} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) \right] - \\
& \left. - 2{}^1M_\omega \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) \right\} dz = (\delta \mathbf{u}^e)^T ({}^2\mathbf{f}^e - {}^1\mathbf{f}^e). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

U izrazu (3.19) prvi integral daje u matricnoj formulaciji elastičnu ili linearnu matricu krutosti  $\mathbf{k}_E^e$  konačnog elementa, dok drugi integral daje geometrijsku ili nelinearnu matricu krutosti  $\mathbf{k}_G^e$  konačnog elementa.

### 3.3. Elastična matrica krutosti konačnog elementa

Kao što je već rečeno, elastična se matrica krutosti konačnog elementa dobiva na osnovi prvog integrala iz izraza (3.19), odnosno:

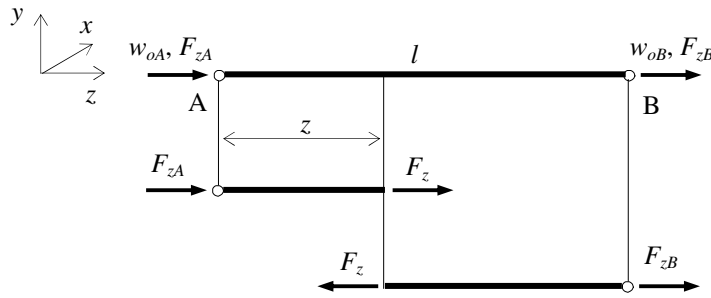
$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left( EA \frac{dw_o}{dz} \delta \frac{dw_o}{dz} + EI_x \frac{d^2v_s}{dz^2} \delta \frac{d^2v_s}{dz^2} + EI_y \frac{d^2u_s}{dz^2} \delta \frac{d^2u_s}{dz^2} + EI_\omega \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \delta \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} + \right. \\
& \left. + GJ \frac{d\varphi_z}{dz} \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right) dz = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_E^e \mathbf{u}^e. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Pošto tankostijeni gredni konačni element sa sl. 3.1 ima 14 stupnjeva slobode, to će dimenzije elastične matrice krutosti iz izraza (3.20) biti  $14 \times 14$ . Članove ove matrice, kao i članove geometrijske matrice krutosti konačnog elementa, možemo dobiti tako da ukupnu deformaciju konačnog elementa rastavimo na one zbog:

- aksijalnog opterećenja
- savijanja u ravnini (z, y)
- savijanja u ravnini (z, x)
- torzije.



## a) Aksijalno opterećenje



Sl. 3.3. Aksijalno opterećenje konačnog elementa: komponente pomaka i komponente sile

Kako sa stanovišta aksijalnog opterećenja, konačni element sa sl. 3.3 ima dva stupnja slobode, tada pomak  $w_o$  u polju konačnog elementa možemo aproksimirati polinomom prvoga stupnja, tj.

$$w_o = \alpha_1 + \alpha_2 z, \quad (3.21)$$

ili u matričnom obliku:

$$w_o = \mathbf{a} \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.22)$$

gdje je  $\mathbf{a}$  matrica polja konačnog elementa ili matrica polinoma:

$$\mathbf{a} = [1 \quad z], \quad (3.23)$$

dok je  $\boldsymbol{\alpha}$  vektor konstanti ili generaliziranih koordinata:

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1 \quad \alpha_2\}. \quad (3.24)$$

Pošto za čvorove A i B, a u skladu s izrazom (3.21), vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \rightarrow w_o = \alpha_1 = w_{oA} \\ z=l \rightarrow w_o = \alpha_1 + \alpha_2 l = w_{oB} \end{array} \right\}, \quad (3.25)$$

to za vektor čvornih pomaka  $\mathbf{w}$  možemo pisati:

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w_{oA} \\ w_{oB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.26)$$

ili kraće:

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}^k \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.27)$$

gdje indeks  $k$  označava konturu (čvorove) konačnog elementa. Kako na osnovi izraza (3.27), slijedi da je:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{a}^k)^{-1} \mathbf{w}, \quad (3.28)$$

to iz izraza (3.22) i (3.28), imamo:

$$w_o = \mathbf{a} (\mathbf{a}^k)^{-1} \mathbf{w} = \mathbf{N}_w \mathbf{w}, \quad (3.29)$$

pri čemu je  $\mathbf{N}_w$  matrica interpolacijskih funkcija:

$$\mathbf{N}_w = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{l} & \frac{z}{l} \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Na osnovi izraza (3.29), za prvi član integrala iz izraza (3.20), dobivamo:

$$\int_0^l EA \frac{dw_o}{dz} \delta \frac{dw_o}{dz} dz = EA \int_0^l \frac{d\delta w_o}{dz} \frac{dw_o}{dz} dz = (\delta \mathbf{w})^T EA \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_w}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_w}{dz} dz \mathbf{w} =$$

$$= (\delta \mathbf{w})^T \frac{EA}{l^2} \int_0^l \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} dz \mathbf{w} = (\delta \mathbf{w})^T \mathbf{k}_E^w \mathbf{w}, \quad (3.31)$$

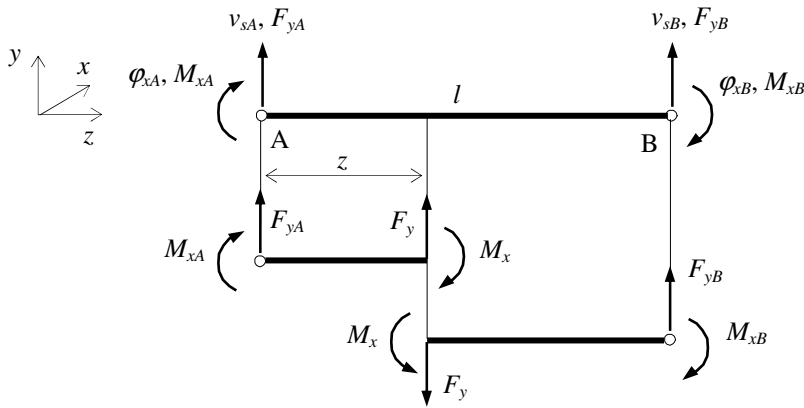
gdje je  $\mathbf{k}_E^w$  elastična matrica krutosti:

$$\mathbf{k}_E^w = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Pripadni je vektor čvornih sila:

$$(\mathbf{f}_w)^T = \{F_{zA} \quad F_{zB}\}. \quad (3.33)$$

### b) Savijanje u ravnini (z, y)



Sl. 3.4. Savijanje konačnog elementa u ravnini (z, y): komponente pomaka i komponente sila

Pošto konačni element sa sl. 3.4 ima četiri stupnja slobode, to se pomak  $v_s$  u polju konačnog elementa može aproksimirati polinomom trećeg stupnja:

$$v_s = \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \alpha_4 z^3, \quad (3.34)$$

ili u matričnom obliku:

$$v_s = \mathbf{a} \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.35)$$

gdje je, sada:

$$\mathbf{a} = [1 \quad z \quad z^2 \quad z^3], \quad (3.36)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4\}. \quad (3.37)$$

Budući da u čvorovima vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} z=0 \rightarrow v_s = \alpha_1 = v_{sA}, \quad \frac{dv_s}{dz} = \alpha_2 = -\varphi_{xA} \\ z=l \rightarrow v_s = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3, \quad \frac{dv_s}{dz} = \alpha_2 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2 = -\varphi_{xB} \end{aligned} \right\}, \quad (3.38)$$

za vektor čvornih pomaka  $\mathbf{v}$  možemo pisati:

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_{sA} \\ \varphi_{xA} \\ v_{sB} \\ \varphi_{xB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{a}^k \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.39)$$

odnosno vektor je konstanti:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{a}^k)^{-1} \mathbf{v}. \quad (3.40)$$

Vratimo li izraz (3.40) u izraz (3.35), imamo:

$$v_s = \mathbf{a} (\mathbf{a}^k)^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{N}_v \mathbf{v}, \quad (3.41)$$

gdje je  $\mathbf{N}_v$  matrica interpolacijskih funkcija:

$$\mathbf{N}_v = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3z^2}{l^2} + \frac{2z^3}{l^3} & -z + \frac{2z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2} & \frac{3z^2}{l^2} - \frac{2z^3}{l^3} & \frac{z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Za drugi član integrala iz izraza (3.20), a na osnovi izraza (3.41) i (3.42), proizlazi:

$$\int_0^l EI_x \frac{d^2 v_s}{dz^2} \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} dz = EI_x \int_0^l \frac{d^2 \delta v_s}{dz^2} \frac{d^2 v_s}{dz^2} dz = (\delta \mathbf{v})^T EI_x \int_0^l \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dz^2} \right)^T \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dz^2} dz \mathbf{v} = (\delta \mathbf{v})^T \mathbf{k}_E^v \mathbf{v}, \quad (3.43)$$

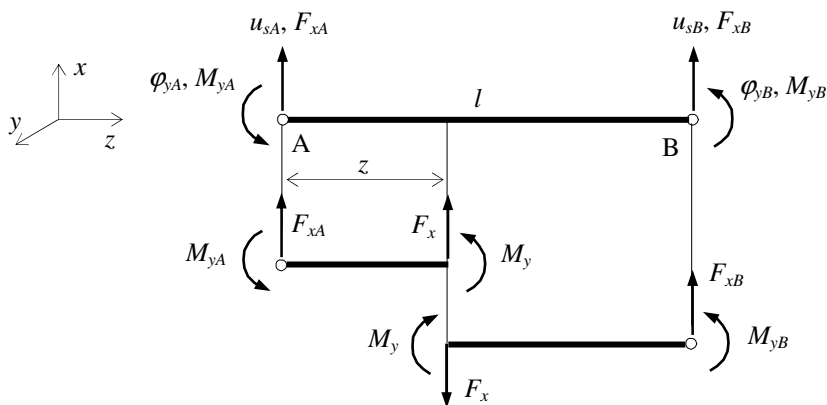
gdje je  $\mathbf{k}_E^v$  elastična matrica krutosti sljedećeg oblika:

$$\mathbf{k}_E^v = \begin{bmatrix} \frac{12EI_x}{l^3} & -\frac{6EI_x}{l^2} & -\frac{12EI_x}{l^3} & -\frac{6EI_x}{l^2} \\ -\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{4EI_x}{l} & \frac{6EI_x}{l^2} & \frac{2EI_x}{l} \\ -\frac{12EI_x}{l^3} & \frac{6EI_x}{l^2} & \frac{12EI_x}{l^3} & \frac{6EI_x}{l^2} \\ -\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{2EI_x}{l} & \frac{6EI_x}{l^2} & \frac{4EI_x}{l} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Odgovarajući je vektor čvornih sila, sl. 3.4:

$$(\mathbf{f}_v)^T = \{ F_{yA} \quad M_{xA} \quad F_{yB} \quad M_{xB} \}. \quad (3.45)$$

### c) Savijanje u ravnini ( $z, x$ )



Sl. 3.5. Savijanje konačnog elementa u ravnini ( $z, x$ ): komponente pomaka i komponente sila

Ponovimo li za konačni element sa sl. 3.5 postupak kao u prethodnom slučaju, tada za pomak  $u_s$  u polju konačnog elementa, imamo:

$$u_s = \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \alpha_4 z^3, \quad (3.46)$$

odnosno:

$$u_s = \mathbf{a} \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.47)$$

pri čemu su  $\mathbf{a}$  i  $\boldsymbol{\alpha}$  dani izrazima (3.36) i (3.37). Pošto u čvorovima konačnog elementa vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} z=0 \rightarrow u_s = \alpha_1 = v_{sA}, \quad \frac{du_s}{dz} = \alpha_2 = \varphi_{yA} \\ z=l \rightarrow u_s = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3, \quad \frac{du_s}{dz} = \alpha_2 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2 = \varphi_{yB} \end{aligned} \right\}, \quad (3.48)$$

to za vektor čvornih pomaka  $\mathbf{u}$ , imamo:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_{sA} \\ \varphi_{yA} \\ u_{sB} \\ \varphi_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{a}^k \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.49)$$

odnosno:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{a}^k)^{-1} \mathbf{u}. \quad (3.50)$$

Povratom izraza (3.50) u izraz (3.47), proizlazi:

$$u_s = \mathbf{a} (\mathbf{a}^k)^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}, \quad (3.51)$$

gdje je  $\mathbf{N}_u$  matrica interpolacijskih funkcija:

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3z^2}{l^2} + \frac{2z^3}{l^3} & z - \frac{2z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} & \frac{3z^2}{l^2} - \frac{2z^3}{l^3} & -\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Uvrstimo li, sada, izraz (3.51) u treći član integrala iz izraza (3.20), imamo:

$$\int_0^l EI_y \frac{d^2 u_s}{dz^2} \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} dz = EI_y \int_0^l \frac{d^2 \delta u_s}{dz^2} \frac{d^2 u_s}{dz^2} dz = (\delta \mathbf{u})^T EI_y \int_0^l \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_u}{dz^2} \right)^T \frac{d^2 \mathbf{N}_u}{dz^2} dz \mathbf{u} = (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{k}_E^u \mathbf{u}, \quad (3.53)$$

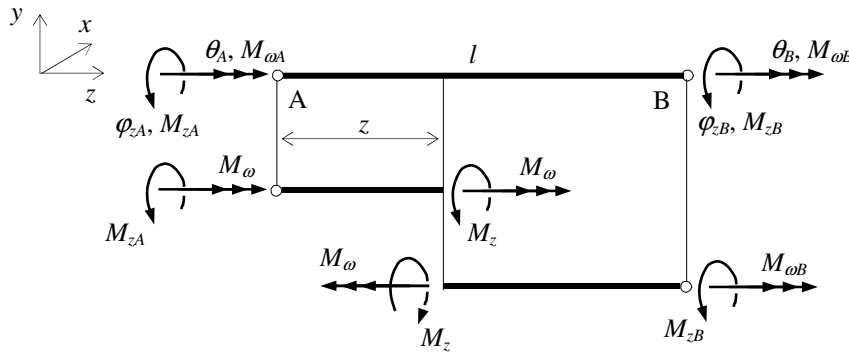
pri čemu je  $\mathbf{k}_E^u$  elastična matrica krutosti sljedećeg oblika:

$$\mathbf{k}_E^u = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{l^3} & \frac{6EI_y}{l^2} & -\frac{12EI_y}{l^3} & \frac{6EI_y}{l^2} \\ \frac{6EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l} & -\frac{6EI_y}{l^2} & \frac{2EI_y}{l} \\ -\frac{12EI_y}{l^3} & -\frac{6EI_y}{l^2} & \frac{12EI_y}{l^3} & -\frac{6EI_y}{l^2} \\ \frac{6EI_y}{l^2} & \frac{2EI_y}{l} & -\frac{6EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l} \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Pripadni je vektor čvornih sila, sl. 3.5:

$$(\mathbf{f}_u)^T = \{ F_{xA} \quad M_{yA} \quad F_{xB} \quad M_{yB} \}. \quad (3.55)$$

## d) Torzija



Sl. 3.6. Torzija konačnog elementa: komponente pomaka i komponente sila

Za razliku od grednog konačnog elementa punog poprečnog presjeka kod kojeg se utjecaj ograničenog vitoperenja zanemaruje te se kao stupnjevi slobode gibanja javljaju samo čvorni pomaci  $\varphi_{zA}$  i  $\varphi_{zB}$ , dok se pomak  $\varphi_z$  u polju konačnog elementa aproksimira polinomom prvoga stupnja, kod tankostijenog se grednog konačnog elementa utjecaj ograničenog vitoperenja ne može zanemariti pa se u čvorovima javljaju dodatni pomaci  $\theta_A$  i  $\theta_B$ , sl. 3.6. Pošto, sada, kod konačnog elementa imamo četiri stupnja slobode gibanja, to se pomak  $\varphi_z$  u polju konačnog elementa aproksimira istim polinomom kao i pomaci  $u_s$  i  $v_s$ , tj.

$$\varphi_z = \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \alpha_4 z^3, \quad (3.56)$$

odnosno:

$$\varphi_z = \mathbf{a} \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.57)$$

gdje su  $\mathbf{a}$  i  $\boldsymbol{\alpha}$  dani izrazima (3.36) i (3.37). Kako za čvorove vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} z=0 \rightarrow \varphi_z = \alpha_1 = \varphi_{zA}, \quad \frac{d\varphi_z}{dz} = \alpha_2 = -\theta_A \\ z=l \rightarrow \varphi_z = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3, \quad \frac{d\varphi_z}{dz} = \alpha_2 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2 = -\theta_B \end{aligned} \right\}, \quad (3.58)$$

za vektor čvornih pomaka  $\boldsymbol{\varphi}$  vrijedi:

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{Bmatrix} \varphi_{zA} \\ \theta_A \\ \varphi_{zB} \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{a}^k \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.59)$$

Pošto je matrica  $\mathbf{a}^k$  u ovom slučaju identična onoj iz izraza (3.39), tada je i matrica interpolacijskih funkcija  $\mathbf{N}_\varphi$  identična onoj iz izraza (3.42), odnosno:

$$\mathbf{N}_\varphi = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3z^2}{l^2} + \frac{2z^3}{l^3} & -z + \frac{2z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2} & \frac{3z^2}{l^2} - \frac{2z^3}{l^3} & \frac{z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2} \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

pa za pomak  $\varphi_z$  u polju elementa, imamo:

$$\varphi_z = \mathbf{N}_\varphi \boldsymbol{\varphi}. \quad (3.61)$$

Uvrstimo li izraz (3.61) u zadnja dva člana integrala iz izraza (3.20), dobivamo:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left( EI_\omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \delta \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} + GJ \frac{d\varphi_z}{dz} \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right) dz = EI_\omega \int_0^l \frac{d^2 \delta \varphi_z}{dz^2} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} dz + GJ \int_0^l \frac{d\delta \varphi_z}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} dz = \\
& = (\delta \boldsymbol{\Phi})^T \left[ EI_\omega \int_0^l \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_\varphi}{dz^2} \right)^T \frac{d^2 \mathbf{N}_\varphi}{dz^2} dz + GJ \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_\varphi}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_\varphi}{dz} dz \right] \boldsymbol{\Phi} = (\delta \boldsymbol{\Phi})^T \mathbf{k}_E^\varphi \boldsymbol{\Phi}, \quad (3.62)
\end{aligned}$$

gdje je  $\mathbf{k}_E^\varphi$  elastična matrica krutosti, oblika:

$$\mathbf{k}_E^\varphi = \begin{bmatrix} \frac{12EI_\omega}{l^3} + \frac{6GJ}{5l} & -\frac{6EI_\omega}{l^2} - \frac{GJ}{10} & -\frac{12EI_\omega}{l^3} - \frac{6GJ}{5l} & -\frac{6EI_\omega}{l^2} - \frac{GJ}{10} \\ -\frac{6EI_\omega}{l^2} - \frac{GJ}{10} & \frac{4EI_\omega}{l} + \frac{2GJ}{15} & \frac{6EI_\omega}{l^2} + \frac{GJ}{10} & \frac{2EI_\omega}{l} - \frac{GJ}{30} \\ -\frac{12EI_\omega}{l^3} - \frac{6GJ}{5l} & \frac{6EI_\omega}{l} + \frac{GJ}{15} & \frac{12EI_\omega}{l^3} + \frac{6GJ}{5l} & \frac{6EI_\omega}{l^2} + \frac{GJ}{10} \\ \frac{6EI_\omega}{l^2} + \frac{GJ}{10} & \frac{2EI_\omega}{l} - \frac{GJ}{30} & \frac{6EI_\omega}{l^2} + \frac{GJ}{10} & \frac{4EI_\omega}{l} + \frac{2GJ}{15} \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Odgovarajući je vektor čvornih sila, sl. 3.6:

$$(\mathbf{f}_\varphi)^T = \{M_{zA} \quad M_{\omega A} \quad M_{zB} \quad M_{\omega B}\}. \quad (3.64)$$

Zbrojimo li, sada, matrice iz izraza (3.32), (3.44), (3.54) i (3.64), dobivamo matricu elastičnu matricu krutosti konačnog elementa, izraz (3.20), a čiji je oblik s obzirom na definiciju vektora  $\mathbf{u}^e$  iz izraza (3.1), sljedeći:

$$\mathbf{k}_E^e = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b1 & \cdot & \cdot & \cdot & c1 & \cdot & -b1 & \cdot & \cdot & \cdot & c1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b2 & \cdot & -c2 & \cdot & \cdot & \cdot & -b2 & \cdot & -c2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -d & \cdot & \cdot & -e & -e \\ \cdot & \cdot & -c2 & \cdot & f2 & \cdot & \cdot & \cdot & c2 & \cdot & g2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c1 & \cdot & \cdot & \cdot & f1 & \cdot & -c1 & \cdot & \cdot & \cdot & g1 & \cdot & \cdot \\ -a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -b1 & \cdot & \cdot & \cdot & -c1 & \cdot & b1 & \cdot & \cdot & \cdot & -c1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -b2 & \cdot & c2 & \cdot & \cdot & \cdot & b2 & \cdot & c2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d & \cdot & \cdot & e & e \\ \cdot & \cdot & -c2 & \cdot & g2 & \cdot & \cdot & \cdot & c2 & \cdot & f2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c1 & \cdot & \cdot & \cdot & g1 & \cdot & -c1 & \cdot & \cdot & \cdot & f1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & h & i \\ \cdot & \cdot & \cdot & -e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & i & h \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

pri čemu je:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{EA}{l}, \quad b1 = \frac{12EI_y}{l^3}, \quad b2 = \frac{12EI_x}{l^3}, \quad c1 = \frac{6EI_y}{l^2}, \quad c2 = \frac{6EI_x}{l^2} \\ d &= \frac{12EI_\omega}{l^3} + \frac{6GJ}{5l}, \quad e = \frac{6EI_\omega}{l^2} + \frac{GJ}{10}, \quad f1 = \frac{4EI_y}{l}, \quad f2 = \frac{4EI_x}{l} \\ g1 &= \frac{2EI_y}{l}, \quad g2 = \frac{2EI_x}{l}, \quad h = \frac{4EI_\omega}{l} + \frac{2GJ}{15}, \quad i = \frac{2EI_\omega}{l} - \frac{GJ}{30} \end{aligned} \right\}. \quad (3.66)$$

### 3.4. Geometrijska matrica krutosti konačnog elementa

Drugi integral iz izraza (3.19), u matricnoj formulaciji daje geometrijsku matricu krutosti konačnog elementa, tj.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ {}^1F_z \left[ \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 + 2y_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - 2x_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] + \right. \\
& + {}^1F_x \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) + 2x_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) + 2y_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{du_s}{dz} \right) \right] + \\
& + {}^1F_y \left[ -\delta \left( \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) + 2x_s \delta \left( \frac{d^2u_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} \right) + 2y_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{dv_s}{dz} \right) \right] + \\
& + {}^1M_z \left[ \delta \left( \frac{d^2u_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} \right) - \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) \right] + \bar{K} \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \right)^2 + {}^1M_x \left[ \delta \left( \frac{d^2u_s}{dz^2} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - \right. \\
& \left. - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) \right] + {}^1M_y \left[ \delta \left( \frac{d^2v_s}{dz^2} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) \right] - \\
& \left. - 2{}^1M_\omega \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) \right\} dz = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_G^e \mathbf{u}^e. \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Zamijenimo li komponente pomaka i njihove derivacije u gornjem izrazu s čvornim pomacima konačnog elementa prema izrazima: (3.29), (3.41), (3.51) i (3.61), te ako unutarne sile u skladu sa sl. 3.3 – sl. 3.6 zamijenimo čvornim silama:

$$\left. \begin{aligned}
& {}^1F_z = -{}^1F_{zA} = {}^1F_{zB}, \quad {}^1F_x = -{}^1F_{xA} = {}^1F_{xB} = -\frac{1}{l} ({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}), \quad {}^1F_y = -{}^1F_{yA} = {}^1F_{yB} = \frac{1}{l} ({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}) \\
& {}^1M_x = -{}^1M_{xA} - {}^1F_{yA} z = -{}^1M_{xA} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) + {}^1M_{xB} \frac{z}{l}, \quad {}^1M_y = -{}^1M_{yA} + {}^1F_{xA} z = -{}^1M_{yA} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) + {}^1M_{yB} \frac{z}{l} \\
& {}^1M_z = -{}^1M_{zA} = {}^1M_{zB}, \quad {}^1M_\omega = -{}^1M_{\omega A} = {}^1M_{\omega B}, \quad \bar{K} = ({}^1F_z \alpha_z + {}^1M_x \alpha_x + {}^1M_y \alpha_y + {}^1M_\omega \alpha_\omega) = \\
& = {}^1F_{zB} \alpha_z + \left[ -{}^1M_{xA} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) + {}^1M_{xB} \frac{z}{l} \right] \alpha_x + \left[ -{}^1M_{yA} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) + {}^1M_{yB} \frac{z}{l} \right] \alpha_y + {}^1M_{\omega B} \alpha_\omega
\end{aligned} \right\}, \quad (3.68)$$

tada za prvi podintegralni član iz izraza (3.67), imamo:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^l {}^1F_z \left[ \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 + 2y_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - 2x_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] dz = \\
& = \int_0^l {}^1F_z \left( \frac{d\delta w_o}{dz} \frac{dw_o}{dz} + \frac{d\delta u_s}{dz} \frac{du_s}{dz} + \frac{d\delta v_s}{dz} \frac{dv_s}{dz} + y_s \frac{d\delta u_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} + y_s \frac{d\delta \varphi_z}{dz} \frac{du_s}{dz} - x_s \frac{d\delta v_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} - \right. \\
& \left. - x_s \frac{d\delta \varphi_z}{dz} \frac{dv_s}{dz} \right) dz = {}^1F_{zB} \left[ \delta \mathbf{w}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_w}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_w}{dz} dz \mathbf{w} + \delta \mathbf{u}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} dz \mathbf{u} + \right. \\
& \left. + \delta \mathbf{v}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} dz \mathbf{v} + \delta \mathbf{u}^T y_s \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_\varphi}{dz} dz \boldsymbol{\varphi} + \delta \boldsymbol{\varphi}^T y_s \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_\varphi}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} dz \mathbf{u} - \right. \\
& \left. - \delta \mathbf{v}^T x_s \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_\varphi}{dz} dz \boldsymbol{\varphi} - \delta \boldsymbol{\varphi}^T x_s \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_\varphi}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} dz \mathbf{v} \right]. \quad (3.69)
\end{aligned}$$

Za drugi podintegralni član iz izraza (3.67), slijedi:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^l {}^1F_x \left[ \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) + 2x_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} \right) + 2y_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{du_s}{dz} \right) \right] dz = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^l {}^1F_x \left( \frac{d\delta v_s}{dz} \varphi_z + \delta \varphi_z \frac{dv_s}{dz} + 2x_s \frac{d\delta u_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} + 2x_s \frac{d^2\delta u_s}{dz^2} \frac{du_s}{dz} + 2y_s \frac{d\delta u_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} + \right. \\
& \quad \left. + 2y_s \frac{d^2\delta v_s}{dz^2} \frac{du_s}{dz} - 2 \frac{d\delta w_o}{dz} \frac{du_s}{dz} - 2 \frac{d\delta u_s}{dz} \frac{dw_o}{dz} \right) dz = \\
& = -\frac{{}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}}{2l} \left[ \delta \mathbf{v}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} \right)^T \mathbf{N}_\varphi dz \boldsymbol{\varphi} + \delta \boldsymbol{\varphi}^T \int_0^l \mathbf{N}_\varphi^T \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} dz \mathbf{v} \right] - \\
& \quad - \frac{({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB})x_s}{l} \delta \mathbf{u}^T \left[ \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} \right)^T \frac{d^2\mathbf{N}_u}{dz^2} dz + \int_0^l \left( \frac{d^2\mathbf{N}_u}{dz^2} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} dz \right] \mathbf{u} - \\
& \quad - \frac{({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB})y_s}{l} \left[ \delta \mathbf{u}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} \right)^T \frac{d^2\mathbf{N}_v}{dz^2} dz \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}^T \int_0^l \left( \frac{d^2\mathbf{N}_v}{dz^2} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} dz \mathbf{u} \right] - \\
& \quad - \frac{{}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}}{l} \left[ \delta \mathbf{w}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_w}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} dz \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_w}{dz} dz \mathbf{w} \right]. \tag{3.70}
\end{aligned}$$

Iz trećeg podintegralnog člana iz izraza (3.67), proizlazi:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^l {}^1F_y \left[ -\delta \left( \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) + 2x_s \delta \left( \frac{d^2u_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} \right) + 2y_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{dv_s}{dz} \right) \right] dz = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^l {}^1F_y \left( -\frac{d\delta u_s}{dz} \varphi_z - \delta \varphi_z \frac{du_s}{dz} + 2x_s \frac{d^2\delta u_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} + 2x_s \frac{d\delta v_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} + 2y_s \frac{d\delta v_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} + \right. \\
& \quad \left. + 2y_s \frac{d^2\delta v_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} - 2 \frac{d\delta w_o}{dz} \frac{dv_s}{dz} - 2 \frac{d\delta v_s}{dz} \frac{dw_o}{dz} \right) dz = \\
& = -\frac{{}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}}{2l} \left[ \delta \mathbf{u}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} \right)^T \mathbf{N}_\varphi dz \boldsymbol{\varphi} + \delta \boldsymbol{\varphi}^T \int_0^l \mathbf{N}_\varphi^T \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} dz \mathbf{u} \right] + \\
& \quad + \frac{({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB})x_s}{l} \left[ \delta \mathbf{u}^T \int_0^l \left( \frac{d^2\mathbf{N}_u}{dz^2} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} dz \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} \right)^T \frac{d^2\mathbf{N}_u}{dz^2} dz \mathbf{u} \right] + \\
& \quad + \frac{({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB})x_s}{l} \delta \mathbf{v}^T \left[ \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} \right)^T \frac{d^2\mathbf{N}_v}{dz^2} dz + \int_0^l \left( \frac{d^2\mathbf{N}_v}{dz^2} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} dz \right] \mathbf{v} - \\
& \quad - \frac{{}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}}{l} \left[ \delta \mathbf{w}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_w}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} dz \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_w}{dz} dz \mathbf{w} \right]. \tag{3.71}
\end{aligned}$$

Za četvrti podintegralni član iz izraza (3.67), dobivamo:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^l {}^1M_z \left[ \delta \left( \frac{d^2u_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} \right) - \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} \right) \right] dz = \frac{1}{2} \int_0^l {}^1M_z \left( \frac{d^2\delta u_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} + \frac{d\delta v_s}{dz} \frac{d^2u_s}{dz^2} - \frac{d\delta u_s}{dz} \frac{d^2v_s}{dz^2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{d^2\delta v_s}{dz^2} \frac{du_s}{dz} \right) dz = \frac{{}^1M_{zB}}{2} \delta \mathbf{u}^T \left[ \int_0^l \left( \frac{d^2\mathbf{N}_u}{dz^2} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} dz - \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_u}{dz} \right)^T \frac{d^2\mathbf{N}_v}{dz^2} dz \right] \mathbf{v} +
\end{aligned}$$



$$+ \frac{{}^1M_{zB}}{2} \delta \mathbf{v}^T \left[ \int_0^l \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dz^2} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_u}{dz} dz - \int_0^l \left( \frac{d \mathbf{N}_v}{dz} \right)^T \frac{d^2 \mathbf{N}_u}{dz^2} dz \right] \mathbf{u}. \quad (3.72)$$

Za peti podintegralni član iz izraza (3.67), imamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l {}^1\bar{K} \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \right)^2 dz &= \int_0^l \left( {}^1F_z \alpha_z + {}^1M_x \alpha_x + {}^1M_y \alpha_y + {}^1M_\omega \alpha_\omega \right) \frac{d\delta\varphi_z}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} dz = \\ &= \left( {}^1F_{zB} \alpha_z - {}^1M_{xA} \alpha_x - {}^1M_{yA} \alpha_y + {}^1M_{\omega B} \alpha_\omega \right) \delta \boldsymbol{\varphi}^T \int_0^l \left( \frac{d \mathbf{N}_\varphi}{dz} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_\varphi}{dz} dz \boldsymbol{\varphi} + \\ &+ \frac{1}{l} \left( {}^1M_{xA} \alpha_x + {}^1M_{xB} \alpha_x + {}^1M_{yA} \alpha_y + {}^1M_{yB} \alpha_y \right) \delta \boldsymbol{\varphi}^T \int_0^l z \left( \frac{d \mathbf{N}_\varphi}{dz} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_\varphi}{dz} dz \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Iz šestog podintegralnog člana iz izraza (3.67), slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l {}^1M_x \left[ \delta \left( \frac{d^2 u_s}{dz^2} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2 v_s}{dz^2} \right) \right] dz &= \frac{1}{2} \int_0^l {}^1M_x \left( \frac{d^2 \delta u_s}{dz^2} \varphi_z + \delta \varphi_z \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \right. \\ &\left. - \frac{d\delta u_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} - \frac{d\delta \varphi_z}{dz} \frac{du_s}{dz} - 2 \frac{d\delta w_o}{dz} \frac{d^2 v_s}{dz^2} - 2 \frac{d^2 \delta v_s}{dz^2} \frac{dw_o}{dz} \right) dz = \\ &= \frac{{}^1M_{xA}}{2} \left\{ \delta \mathbf{u}^T \left[ \int_0^l \left( \frac{d \mathbf{N}_u}{dz} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_\varphi}{dz} dz - \int_0^l \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_u}{dz^2} \right)^T \mathbf{N}_\varphi dz \right] \boldsymbol{\varphi} + \delta \boldsymbol{\varphi}^T \left[ \int_0^l \left( \frac{d \mathbf{N}_\varphi}{dz} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_u}{dz} dz - \right. \right. \\ &\left. \left. - \int_0^l \mathbf{N}_\varphi^T \frac{d^2 \mathbf{N}_u}{dz^2} dz \right] \mathbf{u} + 2\delta \mathbf{w}^T \int_0^l \left( \frac{d \mathbf{N}_w}{dz} \right)^T \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dz^2} dz \mathbf{v} + 2\delta \mathbf{v}^T \int_0^l \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dz^2} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_w}{dz} dz \mathbf{w} \right\} + \\ &+ \frac{{}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}}{2l} \left\{ \delta \mathbf{u}^T \left[ \int_0^l z \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_u}{dz^2} \right)^T \mathbf{N}_\varphi dz - \int_0^l z \left( \frac{d \mathbf{N}_u}{dz} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_\varphi}{dz} dz \right] \boldsymbol{\varphi} + \delta \boldsymbol{\varphi}^T \left[ \int_0^l z \mathbf{N}_\varphi^T \frac{d^2 \mathbf{N}_u}{dz^2} dz - \right. \right. \\ &\left. \left. - \int_0^l z \left( \frac{d \mathbf{N}_\varphi}{dz} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_u}{dz} dz \right] \mathbf{u} - 2\delta \mathbf{w}^T \int_0^l z \left( \frac{d \mathbf{N}_w}{dz} \right)^T \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dz^2} dz \mathbf{v} - 2\delta \mathbf{v}^T \int_0^l z \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dz^2} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_w}{dz} dz \mathbf{w} \right\}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Za sedmi podintegralni član iz izraza (3.67), proizlazi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l {}^1M_y \left[ \delta \left( \frac{d^2 v_s}{dz^2} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + 2\delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2 u_s}{dz^2} \right) \right] dz &= \frac{1}{2} \int_0^l {}^1M_y \left( \frac{d^2 \delta v_s}{dz^2} \varphi_z + \delta \varphi_z \frac{d^2 v_s}{dz^2} - \right. \\ &\left. - \frac{d\delta v_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} - \frac{d\delta \varphi_z}{dz} \frac{dv_s}{dz} + 2 \frac{d\delta w_o}{dz} \frac{d^2 u_s}{dz^2} + 2 \frac{d^2 \delta u_s}{dz^2} \frac{dw_o}{dz} \right) dz = \\ &= -\frac{{}^1M_{yA}}{2} \left\{ \delta \mathbf{v}^T \left[ \int_0^l \left( \frac{d \mathbf{N}_v}{dz} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_\varphi}{dz} dz - \int_0^l \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dz^2} \right)^T \mathbf{N}_\varphi dz \right] \boldsymbol{\varphi} + \delta \boldsymbol{\varphi}^T \left[ \int_0^l \left( \frac{d \mathbf{N}_\varphi}{dz} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_v}{dz} dz - \right. \right. \\ &\left. \left. - \int_0^l \mathbf{N}_\varphi^T \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dz^2} dz \right] \mathbf{v} - 2\delta \mathbf{w}^T \int_0^l \left( \frac{d \mathbf{N}_w}{dz} \right)^T \frac{d^2 \mathbf{N}_u}{dz^2} dz \mathbf{u} - 2\delta \mathbf{u}^T \int_0^l \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_u}{dz^2} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_w}{dz} dz \mathbf{w} \right\} + \\ &+ \frac{{}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}}{2l} \left\{ \delta \mathbf{v}^T \left[ \int_0^l z \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dz^2} \right)^T \mathbf{N}_\varphi dz - \int_0^l z \left( \frac{d \mathbf{N}_v}{dz} \right)^T \frac{d \mathbf{N}_\varphi}{dz} dz \right] \boldsymbol{\varphi} + \delta \boldsymbol{\varphi}^T \left[ \int_0^l z \mathbf{N}_\varphi^T \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dz^2} dz - \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\int_0^l z \left( \frac{d\mathbf{N}_\varphi}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_v}{dz} dz \left[ \mathbf{u} + 2\delta\mathbf{w}^T \int_0^l z \left( \frac{d\mathbf{N}_w}{dz} \right)^T \frac{d^2\mathbf{N}_u}{dz^2} dz \mathbf{u} + 2\delta\mathbf{u}^T \int_0^l z \left( \frac{d^2\mathbf{N}_u}{dz^2} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_w}{dz} dz \mathbf{w} \right]. \quad (3.75)$$

Iz posljednjeg podintegralnog člana iz izraza (3.67), dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l 2 {}^1M_\omega \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} \right) dz &= \int_0^l {}^1M_\omega \left( \frac{d\delta w_o}{dz} \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} + \frac{d^2\delta\varphi_z}{dz^2} \frac{dw_o}{dz} \right) dz = \\ &= {}^1M_{\omega B} \left[ \delta\mathbf{w}^T \int_0^l \left( \frac{d\mathbf{N}_\omega}{dz} \right)^T \frac{d^2\mathbf{N}_\varphi}{dz^2} dz \boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi}^T \int_0^l \left( \frac{d^2\mathbf{N}_\varphi}{dz^2} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_\omega}{dz} dz \mathbf{w} \right]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Vratimo li, sada, izraze (3.69) – (3.76) nazad u izraz (3.67) te za matrice interpolacijskih funkcija  $\mathbf{N}_w$ ,  $\mathbf{N}_v$ ,  $\mathbf{N}_u$  i  $\mathbf{N}_j$ , uvedemo izraze (3.30), (3.42), (3.52) i (3.60), tada nakon integriranja dobivamo geometrijsku matricu krutosti konačnog elementa, koja, s obzirom na definiciju vektora čvornih pomak iz izraza (3.1), ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{k}_G^e = \begin{bmatrix} a & . & . & . & -u1 & -v1 & -a & . & . & . & -u2 & -v2 & w1 & -w1 \\ . & c & . & d & e & f & . & -c & . & g & -e & f & h & i \\ . & . & c & b & -f & e & . & . & -c & g1 & -f & -e & h1 & i1 \\ . & d & b & j & k & k1 & . & -d & -b & -j & l1 & l & m & m1 \\ -u1 & e & -f & k & n & o & u1 & -e & f & l2 & -p & e1 & q & r \\ -v1 & f & e & k1 & o & n1 & v1 & -f & -e & l3 & -e1 & -p & q1 & r1 \\ -a & . & . & . & u1 & v1 & a & . & . & . & u2 & v2 & -w1 & w1 \\ . & -c & . & g2 & -e & -f & . & c & . & -g & e & -f & -h & -i \\ . & . & -c & -b & f & -e & . & . & c & -g1 & f & e & -h1 & -i1 \\ . & g & g1 & -j & l2 & l3 & . & -g & -g1 & j & k2 & k3 & -m & -m1 \\ -u2 & -e & -f & l1 & -p & -e1 & u2 & e & f & k2 & n2 & -o & r2 & s \\ -v2 & f & -e & l & e1 & -p & v2 & -f & e & k3 & -o & n3 & r3 & s1 \\ w1 & h & h1 & m & q & q1 & -w1 & -h & -h1 & -m & r2 & r3 & t1 & t \\ -w1 & i & i1 & m1 & r & r1 & w1 & -i & -i1 & -m1 & s & s1 & t & t2 \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} a &= \frac{{}^1F_{zB}}{l}, \quad b = -\frac{6 {}^1F_{zB} x_s}{5l} + \frac{11 {}^1M_{yA} - {}^1M_{yB}}{10l}, \quad c = \frac{6 {}^1F_{zB}}{5l}, \quad d = \frac{6 {}^1F_{zB} y_s}{5l} + \frac{11 {}^1M_{xA} - {}^1M_{xB}}{10l}, \\ e &= \frac{{}^1M_{zB}}{l} + \frac{({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB})x_s}{l^2} + \frac{({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB})y_s}{l^2}, \quad e1 = \frac{{}^1M_{zB}}{2} + \frac{({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB})x_s}{2l} + \frac{({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB})y_s}{2l}, \\ f &= \frac{{}^1F_{zB}}{10}, \quad g = -\frac{6 {}^1F_{zB} y_s}{5l} - \frac{{}^1M_{xA} - 11 {}^1M_{xB}}{10l}, \quad g1 = \frac{6 {}^1F_{zB} x_s}{5l} - \frac{{}^1M_{yA} - 11 {}^1M_{yB}}{10l}, \\ g2 &= -\frac{6 {}^1F_{zB} y_s}{5l} - \frac{11 {}^1M_{xA} - {}^1M_{xB}}{10l}, \quad h = -\frac{{}^1F_{zB} y_s}{10} - \frac{{}^1M_{xA}}{10}, \quad h1 = \frac{{}^1F_{zB} x_s}{10} - \frac{{}^1M_{yA}}{10}, \\ i &= -\frac{{}^1F_{zB} y_s}{10} + \frac{{}^1M_{xB}}{10}, \quad i1 = \frac{{}^1F_{zB} x_s}{10} + \frac{{}^1M_{yB}}{10}, \\ j &= \frac{6 {}^1F_{zB} \alpha_z}{5l} - \frac{3({}^1M_{xA} - {}^1M_{xB})\alpha_x}{5l} - \frac{3({}^1M_{yA} - {}^1M_{yB})\alpha_y}{5l} + \frac{6 {}^1M_{\omega B} \alpha_\omega}{5l}, \\ k &= \frac{{}^1F_{zB} x_s}{10} - \frac{2 {}^1M_{yA} - {}^1M_{yB}}{5}, \quad k1 = \frac{{}^1F_{zB} y_s}{10} + \frac{2 {}^1M_{xA} - {}^1M_{xB}}{5}, \quad k2 = -\frac{{}^1F_{zB} x_s}{10} + \frac{{}^1M_{yA} - 2 {}^1M_{yB}}{5}, \\ k3 &= -\frac{{}^1F_{zB} y_s}{10} - \frac{{}^1M_{xA} - 2 {}^1M_{xB}}{5}, \quad l = \frac{{}^1F_{zB} y_s}{10} + \frac{2 {}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}}{10}, \quad l1 = \frac{{}^1F_{zB} x_s}{10} - \frac{2 {}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}}{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l2 &= -\frac{{}^1F_{zB}x_s}{10} - \frac{{}^1M_{yA} + 2{}^1M_{yB}}{10}, & l3 &= -\frac{{}^1F_{zB}y_s}{10} + \frac{{}^1M_{xA} + 2{}^1M_{xB}}{10}, \\
m &= -\frac{{}^1F_{zB}\alpha_z}{10} - \frac{{}^1M_{xB}\alpha_x}{10} - \frac{{}^1M_{yB}\alpha_y}{10} - \frac{{}^1M_{\omega B}\alpha_\omega}{10}, & m1 &= -\frac{{}^1F_{zB}\alpha_z}{10} + \frac{{}^1M_{xA}\alpha_x}{10} + \frac{{}^1M_{yA}\alpha_y}{10} - \frac{{}^1M_{\omega B}\alpha_\omega}{10}, \\
n &= \frac{2{}^1F_{zB}l}{15} - \frac{({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB})y_s}{2l}, & n1 &= \frac{2{}^1F_{zB}l}{15} + \frac{({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB})x_s}{2l}, & n2 &= \frac{2{}^1F_{zB}l}{15} + \frac{({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB})y_s}{l}, \\
n3 &= \frac{2{}^1F_{zB}l}{15} - \frac{({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB})x_s}{l}, & o &= \frac{({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB})x_s}{2l} - \frac{({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB})y_s}{2l}, & p &= \frac{{}^1F_{zB}l}{30}, \\
q &= -\frac{2{}^1F_{zB}x_sl}{15} + \frac{(3{}^1M_{yA} - {}^1M_{yB})l}{30}, & q1 &= -\frac{2{}^1F_{zB}y_sl}{15} - \frac{(3{}^1M_{xA} - {}^1M_{xB})l}{30}, & r &= \frac{{}^1F_{zB}x_sl}{30} - \frac{{}^1M_{yA}l}{30}, \\
r1 &= \frac{{}^1F_{zB}y_sl}{30} + \frac{{}^1M_{xA}l}{30}, & r2 &= \frac{{}^1F_{zB}x_sl}{30} + \frac{{}^1M_{yB}l}{30}, & r3 &= \frac{{}^1F_{zB}y_sl}{30} - \frac{{}^1M_{xB}l}{30}, \\
s &= -\frac{2{}^1F_{zB}x_sl}{15} + \frac{({}^1M_{yA} - 3{}^1M_{yB})l}{30}, & s1 &= -\frac{2{}^1F_{zB}y_sl}{15} - \frac{({}^1M_{xA} - 3{}^1M_{xB})l}{30}, \\
t &= -\frac{{}^1F_{zB}\alpha_zl}{30} + \frac{({}^1M_{xA} - {}^1M_{xB})\alpha_xl}{60} + \frac{({}^1M_{yA} - {}^1M_{yB})\alpha_yl}{60} - \frac{{}^1M_{\omega B}\alpha_\omega l}{30}, \\
t1 &= \frac{2{}^1F_{zB}\alpha_zl}{15} - \frac{(3{}^1M_{xA} - {}^1M_{xB})\alpha_xl}{30} - \frac{(3{}^1M_{yA} - {}^1M_{yB})\alpha_yl}{30} + \frac{2{}^1M_{\omega B}\alpha_\omega l}{15}, \\
t2 &= \frac{2{}^1F_{zB}\alpha_zl}{15} - \frac{({}^1M_{xA} - 3{}^1M_{xB})\alpha_xl}{30} - \frac{({}^1M_{yA} - 3{}^1M_{yB})\alpha_yl}{30} + \frac{2{}^1M_{\omega B}\alpha_\omega l}{15}, \\
u1 &= \frac{{}^1M_{xA}}{l}, & u2 &= \frac{{}^1M_{xB}}{l}, & v1 &= \frac{{}^1M_{yA}}{l}, & v2 &= \frac{{}^1M_{yB}}{l}, & w1 &= \frac{{}^1M_{\omega B}}{l}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

### 3.5. Jednadžba konačnog elementa

Vratimo li izraze (3.20) i (3.67) u izraz (3.19), dobivamo:

$$(\delta \mathbf{u}^e)^\Gamma (\mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e) \mathbf{u}^e = (\delta \mathbf{u}^e)^\Gamma ({}^2\mathbf{f}^e - {}^1\mathbf{f}^e), \tag{3.79}$$

odnosno:

$$\mathbf{k}_T^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e, \tag{3.80}$$

gdje je  $\mathbf{k}_T^e$  tangentna matrica krutosti  $e$ -tog konačnog elementa:

$$\mathbf{k}_T^e = \mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e, \tag{3.81}$$

dok je  $\mathbf{f}^e$  pripadni vektor inkrementalnog čvornog opterećenja:

$$\mathbf{f}^e = {}^2\mathbf{f}^e - {}^1\mathbf{f}^e. \tag{3.82}$$

Izraz (3.80) predstavlja matrični oblik ravnotežnih jednadžbi  $e$ -tog konačnog elementa, za inkrementalni pomak konačnog elementa iz konfiguracije  $C_1$  u konfiguraciju  $C_2$ , a u skladu s UL formulacijom sve su veličine u tom izrazu definirane u odnosu na konfiguraciju  $C_1$ . Tangentnu je matricu krutosti iz izraza (3.81) potrebno formirati na početku svakog koraka (inkrementa i/ili iteracije), jer geometrijska matrica krutosti iz izraza (3.77) sadrži komponente vektora čvornih sila sa početka svakog koraka, a određenih na kraju prethodna koraka.

Nadalje, iz izraza (3.80) – (3.82), a na osnovi poznatog vektora inkrementalnih čvornih pomaka konačnog elementa, proizlazi da je vektor čvornih sila konačnog elementa za novu ravnotežnu konfiguraciju  $C_2$ :

$${}^2\mathbf{f}^e = {}^1\mathbf{f}^e + \mathbf{f}^e = {}^1\mathbf{f}^e + (\mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e) \mathbf{u}^e. \tag{3.83}$$

Međutim, kako vektor  ${}^2\mathbf{f}^e$  sadrži komponente čvornih sila konačnog elementa u konfiguraciji  $C_2$ , ali pravci kojih su paralelni s pravcima osi konačnog elementa u konfiguraciji  $C_1$ , tj.  ${}^2\mathbf{f}^e = {}^2_1\mathbf{f}^e$ , to ih ne možemo smatrati generaliziranim silama, odnosno na osnovi njih ne možemo formirati matricu  $\mathbf{k}_G^e$  za naredni korak (inkrement i/ili iteraciju). Stoga je, da bismo mogli odrediti vektor  ${}^2\mathbf{f}^e = {}^2_2\mathbf{f}^e$ , odnosno vektor čvornih sila za konfiguraciju  $C_2$ , a komponente kojeg djeluju na pravcima osi konačnog elementa u toj novoj konfiguraciji, potrebno u izrazu (3.83) izvršiti određene preinake. Naime, taj je izraz potrebno preurediti tako da za naredni korak daje vektor  ${}^2_2\mathbf{f}^e$ , čije su komponente nastale samo kao posljedica čiste deformacije, tj. da ne sadrži i dijelove komponenata koji se induciraju pri pomaku konačnog elementa iz  $C_1$  u  $C_2$  kao krutog tijela. Tu imamo, kod uporabe UL formulacije, nekoliko pristupa od kojih su dva pristupa najzastupljenija: NDA (*natural deformation approach*) i ESA (*eksternal stiffness approach*) [44, 57, 87, 88].

Kod prvog se pristupa od vektora inkrementalni čvorni pomaka  $\mathbf{u}^e$  oduzima vektor  $\mathbf{u}_r^e$ , koji sadrži inkrementalne čvorne pomaka konačnog elementa kao krutog tijela ( $r = \text{rigid body}$ ), što daje:

$$\mathbf{u}_n^e = \mathbf{u}^e - \mathbf{u}_r^e, \quad (3.84)$$

pri čemu vektor  $\mathbf{u}_n^e$  sadrži samo one komponente inkrementalnih čvornih pomaka nastale zbog čiste deformacije konačnog elementa ( $n = \text{natural deformation}$ ). Vektor je čvorni sila konačnog elementa u konfiguraciji  $C_2$ , tako:

$${}^2\mathbf{f}^e = {}^2_2\mathbf{f}^e = {}^1\mathbf{f}^e + (\mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e)\mathbf{u}_n^e. \quad (3.85)$$

Međutim, da bi se NDA pristup mogao primijeniti, nužno je da konačni element zadovolji tzv. *rigid body test*, tj. za inkrementalni pomak konačnog elementa kao krutog tijela iz  $C_1$  u  $C_2$ , mora vrijediti:

$${}^2_2\mathbf{f}^e = {}^1_1\mathbf{f}^e. \quad (3.86)$$

Ako s  ${}^1_2\mathbf{R}^e$  označimo rotacijsku matricu, koja preslikava koordinatne osi konačnog elementa iz konfiguracije  $C_2$  u konfiguraciju  $C_1$ , tada možemo pisati da je:

$${}^2_1\mathbf{f}^e = {}^1_2\mathbf{R}^e {}^2_2\mathbf{f}^e, \quad (3.87)$$

gdje je s obzirom na definiciju vektora čvornih sila prema izrazu (3.2):

$${}^1_2\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R}_0^e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & {}^1_2\mathbf{R}_0^e & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & {}^1_2\mathbf{R}_0^e & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & {}^1_2\mathbf{R}_0^e & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.88)$$

$${}^1_2\mathbf{R}_0^e = \begin{bmatrix} \cos({}^1_z, {}^2_z) & \cos({}^1_z, {}^2_x) & \cos({}^1_z, {}^2_y) \\ \cos({}^1_x, {}^2_z) & \cos({}^1_x, {}^2_x) & \cos({}^1_x, {}^2_y) \\ \cos({}^1_y, {}^2_z) & \cos({}^1_y, {}^2_x) & \cos({}^1_y, {}^2_y) \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

stim da je  $\mathbf{I}_2$  jedinična matrica dimenzija  $2 \times 2$ . Unesemo li izraz (3.87) u izraz (3.80), tada za slučaj da se konačni element pri inkrementalnom pomaku iz  $C_1$  u  $C_2$  ponaša kao kruto tijelo, dobivamo:

$$\mathbf{k}_T^e \mathbf{u}_r^e = {}^1_2\mathbf{R}^e {}^2_2\mathbf{f}^e - {}^1_1\mathbf{f}^e = ({}^1_2\mathbf{R}^e - \mathbf{I}_{14})_1 \mathbf{f}^e, \quad (3.90)$$

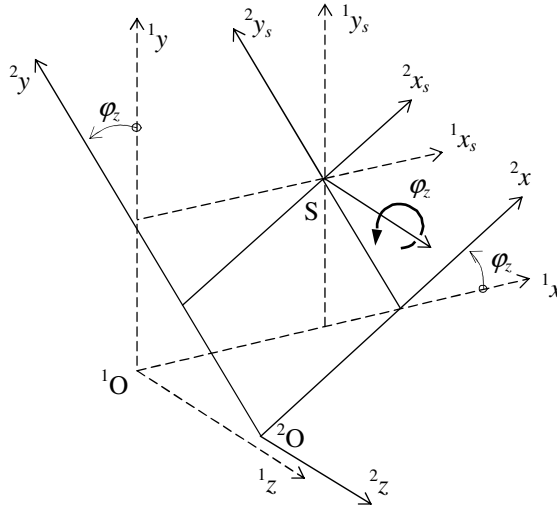
pri čemu je  $\mathbf{I}_{14}$  jedinična matrica dimenzija  $14 \times 14$ . Kak se, pak, može dokazati da vrijedi:

$$\mathbf{k}_E^e \mathbf{u}_r^e = \mathbf{0}, \quad (3.91)$$

gdje je  $\mathbf{0}$  nul-vektor, to izraz (3.90) poprima sljedeći oblik:

$$\mathbf{k}_G^e \mathbf{u}_r^e = ({}^1_2\mathbf{R}^e - \mathbf{I}_{14})_1 \mathbf{f}^e. \quad (3.92)$$

Izraz (3.92) predstavlja nuždan i dovoljan uvjet da bi konačni element zadovoljio *rigid body* test. Tako, npr. ako zarotiramo konačni element sa sl. 3.1, kao kruto tijelo oko centra smicanja za mali kut  $\varphi_z$ , sl. 3.7, tada vektor inkrementalnih čvorni pomaka ima sljedeće komponente:



Sl. 3.7. Rotacija koordinatnih osi za kut  $\varphi_z$

$$(\mathbf{u}^e)^T = (\mathbf{u}_r^e)^T = \{0 \ 0 \ 0 \ \varphi_z \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \varphi_z \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}, \quad (3.93)$$

dok rotacijska matrica iz izraza (3.89) ima oblik:

$${}^1_2\mathbf{R}_0^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_z & \cos(90^\circ + \varphi_z) \\ 0 & \cos(90^\circ - \varphi_z) & \cos\varphi_z \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varphi_z \\ 0 & \varphi_z & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

Vratimo li, sada, izraze (3.93) i (3.94) u izraz (3.92), tada iz lijeve strane toga izraza, dobivamo:

$$\mathbf{k}_G^e \mathbf{u}_r^e = \mathbf{f}_L^e \varphi_z, \quad (3.95)$$

gdje je:

$$\mathbf{f}_L^e = \left\{ 0 \quad \frac{{}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}}{l} \quad \frac{{}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}}{l} \quad 0 \quad -\frac{{}^1M_{yA}}{2} \quad \frac{{}^1M_{xA}}{2} \quad 0 \quad -\frac{{}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}}{l} \right. \\ \left. -\frac{{}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}}{l} \quad 0 \quad -\frac{{}^1M_{yB}}{l} \quad \frac{{}^1M_{xB}}{l} \quad 0 \quad 0 \right\}, \quad (3.96)$$

odnosno iz desne strane, proizlazi:

$$\left( {}^1_2\mathbf{R}^e - \mathbf{I}_{14} \right)_1 \mathbf{f}^e = \mathbf{f}_D^e \varphi_z, \quad (3.97)$$

pri čemu je:

$$\left( \mathbf{f}_D^e \right)^T = \left\{ 0 \quad -{}^1F_{yA} \quad {}^1F_{xA} \quad 0 \quad -{}^1M_{yA} \quad {}^1M_{xA} \quad 0 \quad -{}^1F_{yB} \quad {}^1F_{xB} \quad 0 \quad -{}^1M_{yB} \quad {}^1M_{xB} \quad 0 \quad 0 \right\}. \quad (3.98)$$

Donji desni indeksi  $L$  i  $D$  uz vektore inkrementalnog opterećenja iz izraza (3.95) – (3.98), znače da su oni proizašli iz množenja lijeve, odnosno desne strane izraza (3.92). Kako su vrijednosti smičnih sila iz izraza (3.98) dane izrazom (3.68), tada se oduzimanjem izraza (3.97) od izraza (3.95), dobiva:

$$\mathbf{k}_G^e \mathbf{u}_r^e - \left( {}^1_2\mathbf{R}^e - \mathbf{I}_{14} \right)_1 \mathbf{f}^e = \left( \mathbf{f}_L^e - \mathbf{f}_D^e \right) \varphi_z = \mathbf{f}^e \varphi_z = \\ = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{{}^1M_{yA}}{2} \quad -\frac{{}^1M_{xA}}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{{}^1M_{yB}}{2} \quad -\frac{{}^1M_{xB}}{2} \quad 0 \quad 0 \right\}^T \varphi_z. \quad (3.99)$$

Kao što vidimo iz izraza (3.99), pri rotaciji se tankostijenog grednog konačnog elementa kao krutog tijela oko centra smicanja za kut  $\varphi_z$ , u konfiguraciji  $C_2$  induciraio vektor inkrementalnog opterećenja različit od nul-vektora, što znači da taj konačni element nije prošao *rigid body test*. Stoga se za određivanje vektora  ${}^2\mathbf{f}^e$  ne može rabiti NDA pristup.

Kod ESA pristupa utjecaj se pomaka konačnog elementa kao krutog tijela eliminira indirektno kroz uvođenje tzv. *eksterne matrice krutosti*. Naime, kako se pri takvim pomacima u konfiguraciji  $C_2$  također induciraju sile, izraz (3.95), možemo pisati da je u tom slučaju:

$${}^1\mathbf{f}^e + \mathbf{f}_L^e = {}^2\mathbf{f}^e, \quad (3.100)$$

pri čemu vektor  $\mathbf{f}_L^e$  iz izraza (3.95), sada sadrži i komponente koje se induciraju pri rotacijama  $\varphi_x$  i  $\varphi_y$  konačnog elementa kao krutog tijela, dok se lako može dokazati da su vrijednosti komponenata tog vektora, a koje se induciraju pri translatorskim pomacima konačnog elementa kao krutog tijela, jednake nuli. Napišemo li taj vektor u sljedećem obliku:

$$\mathbf{f}_L^e = \mathbf{k}_{Ext}^e \mathbf{u}_r^e, \quad (3.101)$$

gdje je  $\mathbf{k}_{Ext}^e$  tzv. *eksterna matrica krutosti* konačnog elementa, tada iz izraza (3.100) imamo:

$${}^1\mathbf{f}^e + \mathbf{k}_{Ext}^e \mathbf{u}_r^e = {}^2\mathbf{f}^e. \quad (3.102)$$

Unesemo li, pak, u izraz (3.83) za  ${}^2\mathbf{f}^e$  izraz (3.102), za  $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}_r^e$  proizlazi:

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{f}^e + \mathbf{k}_{Ext}^e \mathbf{u}_r^e &= {}^1\mathbf{f}^e + (\mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e) \mathbf{u}_r^e \\ {}^1\mathbf{f}^e + (\mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e - \mathbf{k}_{Ext}^e) \mathbf{u}_r^e &= {}^1\mathbf{f}^e = {}^2\mathbf{f}^e, \end{aligned} \quad (3.103)$$

tj.

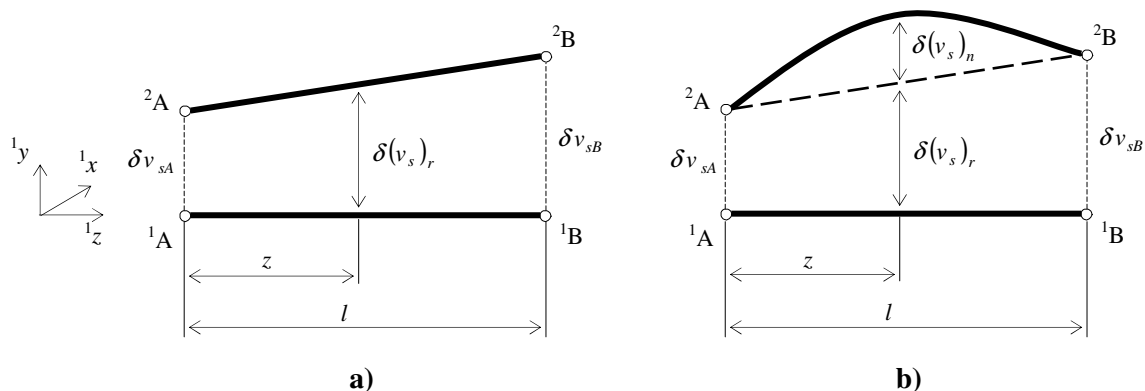
$${}^2\mathbf{f}^e - {}^1\mathbf{f}^e = \mathbf{0}, \quad (3.104)$$

čime je zadovoljen uvjet dan izrazom (3.86), što znači da je:

$${}^2\mathbf{f}^e = {}^2\mathbf{f}^e. \quad (3.105)$$

Iz izraza (3.103) vidimo da se uvođenjem eksterne matrice krutosti u ravnotežne jednadžbe konačnog elementa, anulira utjecaj pomaka konačnog elementa kao krutog tijela na vrijednost komponenata vektora čvornih sila u novoj konfiguraciji, a što je vrlo bitno kod određivanja geometrijske matrice krutosti za novi korak (inkrement i/ili iteraciju).

Eksternu matricu krutosti tankostijenog grednog konačnog elementa možemo odrediti na osnovi izraza (3.67). Naime, inkrementalni se pomak (stvarni i virtualni) konačnog elementa iz konfiguracije  $C_1$  u konfiguraciju  $C_2$  sastoji od pomaka konačnog elementa kao krutog tijela, sl. 3.8a i pomaka koji su posljedica čiste deformacije, sl. 3.8b.



Sl. 3.8. Virtualni pomaci konačnog elementa: a) kao krutog tijela; b) zbog ukupne deformacije

Stoga, za ukupni virtualni pomak konačnog elementa unutar jednog inkrementa, možemo pisati:

$$\left. \begin{aligned} \delta w_o &= \delta(w_o)_r + \delta(w_o)_n, & \delta u_s &= \delta(u_s)_r + \delta(u_s)_n, & \delta v_s &= \delta(v_s)_r + \delta(v_s)_n \\ \delta \varphi_z &= \delta(\varphi_z)_r + \delta(\varphi_z)_n, & \delta \varphi_x &= \delta(\varphi_x)_r + \delta(\varphi_x)_n, & \delta \varphi_y &= \delta(\varphi_y)_r + \delta(\varphi_y)_n \\ \delta \theta &= \delta \theta_r + \delta \theta_n \end{aligned} \right\}, \quad (3.106)$$

pri čemu indeks  $r$  označava dijelove pomaka konačnog elementa kao krutog tijela, dok indeks  $n$  označava dijelove pomaka zbog čiste deformacije. Kako su, pak, pri pomaku konačnog elementa kao krutog tijela komponente pomaka:  $w_o$ ,  $\varphi_z$ ,  $\varphi_x$  i  $\varphi_y$  konstantne, dok se  $u_s$  i  $v_s$  linearno mijenjaju, to iz izraza (3.106) slijedi:

$$\left. \begin{aligned} \delta \frac{dw_o}{dz} &= \delta \left( \frac{dw_o}{dz} \right)_n, & \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} &= \delta \left( \frac{d^2 u_s}{dz^2} \right)_n, & \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} &= \delta \left( \frac{d^2 v_s}{dz^2} \right)_n \\ \delta \frac{d\varphi_z}{dz} &= \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \right)_n, & \delta \frac{d\varphi_x}{dz} &= \delta \left( \frac{d\varphi_x}{dz} \right)_n = -\delta \left( \frac{d^2 v_s}{dz^2} \right)_n \\ \delta \frac{d\varphi_y}{dz} &= \delta \left( \frac{d\varphi_y}{dz} \right)_n = \delta \left( \frac{d^2 u_s}{dz^2} \right)_n, & \delta \theta &= \delta \frac{d\varphi_z}{dz} = \delta \theta_n \end{aligned} \right\}. \quad (3.107)$$

Sljedeći je korak da iz lijeve strane izraza (3.67) izlučimo sve članove koji ne sadrže pomake dane izrazom (3.107), što daje:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l \left[ 2^1 F_z \left( \frac{du_s}{dz} \delta \frac{du_s}{dz} + \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{dv_s}{dz} + y_s \frac{d\varphi_z}{dz} \delta \frac{du_s}{dz} - x_s \frac{d\varphi_z}{dz} \delta \frac{dv_s}{dz} \right) + \right. \\ & + {}^1 F_x \left( \frac{dv_s}{dz} \delta \varphi_z + \varphi_z \delta \frac{dv_s}{dz} + 2x_s \frac{d^2 u_s}{dz^2} \delta \frac{du_s}{dz} + 2y_s \frac{d^2 v_s}{dz^2} \delta \frac{du_s}{dz} - 2 \frac{dw_o}{dz} \delta \frac{du_s}{dz} \right) + \\ & + {}^1 F_y \left( -\frac{du_s}{dz} \delta \varphi_z - \varphi_z \delta \frac{du_s}{dz} + 2x_s \frac{d^2 u_s}{dz^2} \delta \frac{dv_s}{dz} + 2y_s \frac{d^2 v_s}{dz^2} \delta \frac{dv_s}{dz} - 2 \frac{dw_o}{dz} \delta \frac{dv_s}{dz} \right) + \\ & + {}^1 M_z \left( \frac{d^2 u_s}{dz^2} \delta \frac{dv_s}{dz} - \frac{d^2 v_s}{dz^2} \delta \frac{du_s}{dz} \right) + {}^1 M_x \left( \frac{d^2 u_s}{dz^2} \delta \varphi_z - \frac{d\varphi_z}{dz} \delta \frac{du_s}{dz} \right) + \\ & \left. + {}^1 M_y \left( \frac{d^2 v_s}{dz^2} \delta \varphi_z - \frac{d\varphi_z}{dz} \delta \frac{dv_s}{dz} \right) \right] dz. \quad (3.108) \end{aligned}$$

Ako, sada, izraz (3.108) parcijalno integriramo na način da u integralu povećamo red derivacije virtualnih pomaka, nakon sređivanja imamo:

$$\begin{aligned} & \left[ {}^1 F_z \left( u_s \delta \frac{du_s}{dz} + v_s \delta \frac{dv_s}{dz} + y_s \varphi_z \delta \frac{du_s}{dz} - x_s \varphi_z \delta \frac{dv_s}{dz} \right) \right]_0^l + \\ & + \left[ {}^1 F_x \left( v_s \delta \varphi_z + x_s \frac{du_s}{dz} \delta \frac{du_s}{dz} + y_s \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{du_s}{dz} - w_o \delta \frac{du_s}{dz} \right) \right]_0^l + \\ & + \left[ {}^1 F_y \left( -u_s \delta \varphi_z + x_s \frac{du_s}{dz} \delta \frac{dv_s}{dz} + y_s \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{dv_s}{dz} - w_o \delta \frac{dv_s}{dz} \right) \right]_0^l + \\ & + \left[ \frac{{}^1 M_z}{2} \left( \frac{du_s}{dz} \delta \frac{dv_s}{dz} - \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{du_s}{dz} \right) \right]_0^l + \left[ \frac{{}^1 M_x}{2} \left( \frac{du_s}{dz} \delta \varphi_z - \varphi_z \delta \frac{du_s}{dz} \right) \right]_0^l + \\ & + \left[ \frac{{}^1 M_y}{2} \left( \frac{dv_s}{dz} \delta \varphi_z - \varphi_z \delta \frac{dv_s}{dz} \right) \right]_0^l + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^l \left[ {}^1F_z \left( -u_s \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} - v_s \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} - y_s \varphi_z \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} + x_s \varphi_z \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} \right) + \right. \\
& + {}^1F_x \left( -v_s \delta \frac{d\varphi_z}{dz} - x_s \frac{du_s}{dz} \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} - y_s \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} + w_o \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} \right) + \\
& + {}^1F_y \left( u_s \delta \frac{d\varphi_z}{dz} - x_s \frac{du_s}{dz} \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} - y_s \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} + w_o \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} \right) + \\
& + \frac{{}^1M_z}{2} \left( \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \frac{du_s}{dz} \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} \right) + \frac{{}^1M_x}{2} \left( \varphi_z \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \frac{du_s}{dz} \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + \\
& \left. + \frac{{}^1M_y}{2} \left( \varphi_z \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} - \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] dz. \quad (3.109)
\end{aligned}$$

Kako, u skladu s izrazom (3.107), integral iz izraza (3.109) sadrži samo virtualne pomake zbog čiste deformacije, to se eksterna matrica krutosti konačnog elementa dobiva samo na osnovi članova iz uglatih zagrada, tj.

$$\begin{aligned}
& \left[ {}^1F_z \left( u_s \delta \frac{du_s}{dz} + v_s \delta \frac{dv_s}{dz} + y_s \varphi_z \delta \frac{du_s}{dz} - x_s \varphi_z \delta \frac{dv_s}{dz} \right) \right]_0^l + \\
& + \left[ {}^1F_x \left( v_s \delta \varphi_z + x_s \frac{du_s}{dz} \delta \frac{du_s}{dz} + y_s \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{du_s}{dz} - w_o \delta \frac{du_s}{dz} \right) \right]_0^l + \\
& + \left[ {}^1F_y \left( -u_s \delta \varphi_z + x_s \frac{du_s}{dz} \delta \frac{dv_s}{dz} + y_s \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{dv_s}{dz} - w_o \delta \frac{dv_s}{dz} \right) \right]_0^l + \\
& + \left[ \frac{{}^1M_z}{2} (\varphi_x \delta \varphi_y - \varphi_y \delta \varphi_x) \right]_0^l + \left[ \frac{{}^1M_x}{2} (\varphi_y \delta \varphi_z - \varphi_z \delta \varphi_y) \right]_0^l + \\
& + \left[ \frac{{}^1M_y}{2} (\varphi_z \delta \varphi_x - \varphi_x \delta \varphi_z) \right]_0^l = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_{Ext}^e \mathbf{u}^e, \quad (3.110)
\end{aligned}$$

pri čemu su u izrazu (3.110), za rotacijske pomake uvedene sljedeće substitucije:

$$\frac{du_s}{dz} = \varphi_y, \quad \frac{dv_s}{dz} = -\varphi_x. \quad (3.111)$$

Pošto je pri pomaku konačnog elementa kao krutog tijela veza između pomaka u polju konačnog elementa i čvornih pomaka, sljedeća:

$$\left. \begin{aligned}
& w_o = w_{oA} = w_{oB}, \quad \mathbf{w}^T = \{w_{oA} \quad w_{oB}\} \\
& u_s = \mathbf{N}_1 \mathbf{u}, \quad v_s = \mathbf{N}_1 \mathbf{v}, \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{l} & \frac{z}{l} \end{bmatrix} \\
& \mathbf{u}^T = \{u_{sA} \quad u_{sB}\}, \quad \mathbf{v}^T = \{v_{sA} \quad v_{sB}\} \\
& \varphi_z = \varphi_{zA} = \varphi_{zB}, \quad \boldsymbol{\varphi}_z^T = \{\varphi_{zA} \quad \varphi_{zB}\} \\
& \varphi_x = \varphi_{xA} = \varphi_{xB}, \quad \boldsymbol{\varphi}_x^T = \{\varphi_{xA} \quad \varphi_{xB}\} \\
& \varphi_y = \varphi_{yA} = \varphi_{yB}, \quad \boldsymbol{\varphi}_y^T = \{\varphi_{yA} \quad \varphi_{yB}\}
\end{aligned} \right\}, \quad (3.112)$$

dok je veza između unutarnjih i čvornih sila dana izrazom (3.68), tada iz izraza (3.110), a za svaku pojedinu zagradu, dobivamo:



$$\begin{aligned}
\left[ {}^1F_z \left( u_s \delta \frac{du_s}{dz} + v_s \delta \frac{dv_s}{dz} + y_s \varphi_z \delta \frac{du_s}{dz} - x_s \varphi_z \delta \frac{dv_s}{dz} \right) \right]_0^l &= \left\{ {}^1F_z \left[ \delta \mathbf{u}^T \left( \frac{d\mathbf{N}}{dz} \right)^T \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta \mathbf{v}^T \left( \frac{d\mathbf{N}}{dz} \right)^T \mathbf{N}_1 \mathbf{v} + \delta \mathbf{u}^T y_s \left( \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \right)^T \varphi_z - \delta \mathbf{v}^T x_s \left( \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \right)^T \varphi_z \right] \right\}^l = \\
&= \delta \mathbf{u}^T \left( \frac{{}^1F_{zB}}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \frac{{}^1F_{zB} y_s}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \varphi_z \right) + \\
&\quad + \delta \mathbf{v}^T \left( \frac{{}^1F_{zB}}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} - \frac{{}^1F_{zB} x_s}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \varphi_z \right), \tag{3.113}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ {}^1F_x \left( v_s \delta \varphi_z + x_s \frac{du_s}{dz} \delta \frac{du_s}{dz} + y_s \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{du_s}{dz} - w_o \delta \frac{du_s}{dz} \right) \right]_0^l &= \left[ -\frac{{}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}}{l} (\delta \varphi_z \mathbf{N}_1 \mathbf{v} + \right. \\
&\quad \left. + \delta \mathbf{u}^T x_s \left( \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}^T y_s \left( \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \mathbf{v} - \delta \mathbf{u}^T \left( \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \right)^T w_o \right]_0^l = \\
&= \delta \varphi_z^T \frac{{}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \delta \mathbf{u}^T \left( \frac{{}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}) x_s}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} - \frac{({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}) y_s}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} \right), \tag{3.114}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ {}^1F_y \left( -u_s \delta \varphi_z + x_s \frac{du_s}{dz} \delta \frac{dv_s}{dz} + y_s \frac{dv_s}{dz} \delta \frac{dv_s}{dz} - w_o \delta \frac{dv_s}{dz} \right) \right]_0^l &= \left[ \frac{{}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}}{l} (-\delta \varphi_z \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \right. \\
&\quad \left. + \delta \mathbf{v}^T x_s \left( \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \mathbf{u} + \delta \mathbf{v}^T y_s \left( \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \right)^T \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}^T \left( \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \right)^T w_o \right]_0^l = \\
&= \delta \varphi_z^T \frac{{}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \delta \mathbf{v}^T \left( -\frac{{}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}) x_s}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \frac{({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}) y_s}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} \right), \tag{3.115}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{{}^1M_z}{2} (\varphi_x \delta \varphi_y - \varphi_y \delta \varphi_x) \right]_0^l + \left[ \frac{{}^1M_x}{2} (\varphi_y \delta \varphi_z - \varphi_z \delta \varphi_y) \right]_0^l + \left[ \frac{{}^1M_y}{2} (\varphi_z \delta \varphi_x - \varphi_x \delta \varphi_z) \right]_0^l = \\
&= \left[ \delta \varphi_z \left( \frac{{}^1M_x}{2} \varphi_y - \frac{{}^1M_y}{2} \varphi_x \right) + \delta \varphi_x \left( \frac{{}^1M_y}{2} \varphi_z - \frac{{}^1M_z}{2} \varphi_y \right) + \delta \varphi_y \left( \frac{{}^1M_z}{2} \varphi_x - \frac{{}^1M_x}{2} \varphi_z \right) \right]_0^l = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \delta \varphi_z \left[ -{}^1M_{xA} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) + {}^1M_{xB} \frac{z}{l} \right] \varphi_y - \delta \varphi_z \left[ -{}^1M_{yA} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) + {}^1M_{yB} \frac{z}{l} \right] \varphi_x + \right. \\
&\quad \left. + \delta \varphi_x \left[ -{}^1M_{yA} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) + {}^1M_{yB} \frac{z}{l} \right] \varphi_z - \delta \varphi_x {}^1M_z \varphi_y + \delta \varphi_y {}^1M_z \varphi_x - \delta \varphi_y \left[ -{}^1M_{xA} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) + {}^1M_{xB} \frac{z}{l} \right] \varphi_z \right\}^l = \\
&= \delta \varphi_z^T \left( \frac{1}{2} \begin{bmatrix} {}^1M_{xA} & 0 \\ 0 & {}^1M_{xB} \end{bmatrix} \varphi_y + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -{}^1M_{yA} & 0 \\ 0 & -{}^1M_{yB} \end{bmatrix} \varphi_x \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta \boldsymbol{\varphi}_x^T \left( \frac{1}{2} \begin{bmatrix} {}^1M_{yA} & 0 \\ 0 & {}^1M_{yB} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_z + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -{}^1M_{zA} & 0 \\ 0 & -{}^1M_{zB} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_y \right) + \\
& + \delta \boldsymbol{\varphi}_y^T \left( \frac{1}{2} \begin{bmatrix} {}^1M_{zA} & 0 \\ 0 & {}^1M_{zB} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_x + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -{}^1M_{xA} & 0 \\ 0 & -{}^1M_{xB} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_z \right). \tag{3.116}
\end{aligned}$$

Zbrojimo li, sada, izraze (3.113) – (3.116) te ih, potom, vratimo u izraz (3.110), dobivamo eksternu matricu krutosti dimenzija  $14 \times 14$ , koja s obzirom na definiciju vektora čvornih pomaka prema izrazu (3.1), ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{k}_{Ext}^e = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & m & -k & e & \cdot & \cdot & -b & -m & k & -e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a & j & l & -f & \cdot & \cdot & a & -j & -l & f & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & d & \cdot & -i & h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & i & \cdot & -g & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -h & g & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -b & -m & k & -e & \cdot & \cdot & b & m & -k & e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & -j & -l & f & \cdot & \cdot & -a & j & l & -f & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -c & -d & \cdot & -il & h1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & il & \cdot & -g1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -h1 & g1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \tag{3.117}$$

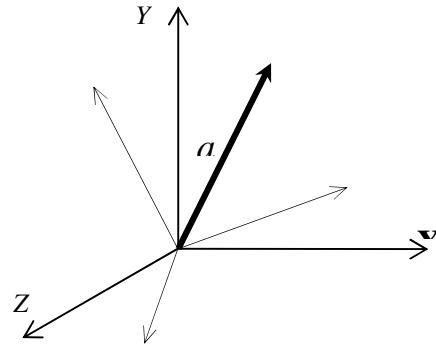
gdje je:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{{}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}}{l^2}, & b &= \frac{{}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}}{l^2}, & c &= \frac{{}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}}{l}, & d &= \frac{{}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}}{l}, \\
e &= \frac{{}^1F_{zB} y_s}{l}, & f &= \frac{{}^1F_{zB} x_s}{l}, & g &= \frac{{}^1M_{zA}}{2}, & g1 &= \frac{{}^1M_{zB}}{2}, & h &= \frac{{}^1M_{xA}}{2}, & h1 &= \frac{{}^1M_{xB}}{2}, \\
i &= \frac{{}^1M_{yA}}{2}, & i1 &= \frac{{}^1M_{yB}}{2}, & j &= \frac{({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}) x_s}{l^3}, & k &= \frac{({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}) y_s}{l^3}, \\
l &= \frac{{}^1F_{zB}}{l} + \frac{({}^1M_{xA} + {}^1M_{xB}) y_s}{l^3}, & m &= \frac{{}^1F_{zB}}{l} - \frac{({}^1M_{yA} + {}^1M_{yB}) x_s}{l^3}. \tag{3.118}
\end{aligned}$$

Iz izraza (3.117) vidimo da eksterna matrica krutosti, za razliku od elastične i geometrijske matrice krutosti, nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu matrice. No, kako ova matrica ne ulazi u jednadžbu konstrukcije, već služi samo za određivanje komponenata vektora čvornih sila konačnog elementa na kraju svakog koraka (inkrementa i iteracije), to će se nesimetričnost ravnotežnih jednadžbi pojaviti samo na razini konačnog elementa.

### 3.6. Transformacijske matrice

Pošto su ravnotežne jednadžbe konačnih elemenata, izraz (3.80), definirane u odnosu na lokalni koordinatni sustav svakog pojedinog konačnog elementa u konfiguraciji  $C_1$ , tada ih je prije stvaranja jednadžbe sustava (konstrukcije) potrebno transformirati u globalni koordinatni sustav [29 – 34].



$(Z, X, Y)$  - globalni koord. sustav

$({}^1z, {}^1x, {}^1y)$  - lokani koord. sustav

Sl. 3.9. Lokalni i globalni koordinatni sustav

Neka su komponente vektora  $\mathbf{a}$  u lokalnom koordinatnom sustavu  $({}^1z, {}^1x, {}^1y)$ :  ${}^1a_z, {}^1a_x, {}^1a_y$ , dok komponente tog vektora u globalnom koordinatnom sustavu  $(Z, X, Y)$ , iznose:  $\bar{a}_z, \bar{a}_x, \bar{a}_y$ , sl. 3.9. Veza je između tih komponenata, sljedeća:

$${}^1a_z = \bar{a}_z \cos({}^1z, Z) + \bar{a}_x \cos({}^1z, X) + \bar{a}_y \cos({}^1z, Y), \quad (3.119a)$$

$${}^1a_x = \bar{a}_z \cos({}^1x, Z) + \bar{a}_x \cos({}^1x, X) + \bar{a}_y \cos({}^1x, Y), \quad (3.119b)$$

$${}^1a_y = \bar{a}_z \cos({}^1y, Z) + \bar{a}_x \cos({}^1y, X) + \bar{a}_y \cos({}^1y, Y), \quad (3.119c)$$

ili u matričnom obliku:

$${}^1\mathbf{a} = {}^1\mathbf{t}_0 \bar{\mathbf{a}}, \quad (3.120)$$

gdje je:

$${}^1\mathbf{a}^T = \{ {}^1a_z \quad {}^1a_x \quad {}^1a_y \}, \quad (3.121)$$

$$\bar{\mathbf{a}}^T = \{ \bar{a}_z \quad \bar{a}_x \quad \bar{a}_y \}, \quad (3.122)$$

$${}^1\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} \cos({}^1z, Z) & \cos({}^1z, X) & \cos({}^1z, Y) \\ \cos({}^1x, Z) & \cos({}^1x, X) & \cos({}^1x, Y) \\ \cos({}^1y, Z) & \cos({}^1y, X) & \cos({}^1y, Y) \end{bmatrix}. \quad (3.123)$$

Matrica  ${}^1\mathbf{t}_0$  dana izrazom (3.123), naziva se osnovnom transformacijskom matricom za konfiguraciju  $C_1$ . Kako je ona ortogonalna [57], vrijedi da je:

$${}^1\mathbf{t}_0^{-1} = {}^1\mathbf{t}_0^T. \quad (3.124)$$

Analogno, za proizvoljnu konfiguraciju  $C_n$ , osnovna transformacijska matrica ima oblik:

$${}^n\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} \cos({}^nz, Z) & \cos({}^nz, X) & \cos({}^nz, Y) \\ \cos({}^nx, Z) & \cos({}^nx, X) & \cos({}^nx, Y) \\ \cos({}^ny, Z) & \cos({}^ny, X) & \cos({}^ny, Y) \end{bmatrix}. \quad (3.125)$$

U skladu s izrazom (3.120), slijedi da je veza između vektora inkrementalnih čvornih pomaka  $\mathbf{u}^e$ , izraz (3.1), odnosno vektora inkrementalnih čvornih sila  $\mathbf{f}^e$ , izraz (3.2), definiranih u lokalnom koordinatnom sustavu  $({}^1z, {}^1x, {}^1y)$ , te vektora inkrementalnih čvornih pomaka  $\bar{\mathbf{u}}^e$  i vektora inkrementalnih čvornih sila  $\bar{\mathbf{f}}^e$  definiranih u globalnom koordinatnom sustavu  $(Z, X, Y)$ :

$$\mathbf{u}^e = {}^1\mathbf{t}^e \bar{\mathbf{u}}^e, \quad (3.126)$$

$$\mathbf{f}^e = {}^1\mathbf{t}^e \bar{\mathbf{f}}^e, \quad (3.127)$$

gdje je  ${}^1\mathbf{t}^e$  transformacijska matrica  $e$ -tog konačnog elementa u konfiguraciji  $C_1$ , a koja, s obzirom na izraze (3.1) i (3.2), ima sljedeći oblik:

$${}^1\mathbf{t}^e = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{t}_0^e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & {}^1\mathbf{t}_0^e & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & {}^1\mathbf{t}_0^e & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & {}^1\mathbf{t}_0^e & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.128)$$

pri čemu je  ${}^1\mathbf{t}_0^e$  osnovna transformacijska matrica identična onoj iz izraza (3.123), dok je  $\mathbf{I}_2$  jedinična matrica dimenzija  $2 \times 2$ . Kako su i osnovna transformacijska matrica i jedinična matrica ortogonalne matrice, tada je i transformacijska matrica iz izraza (3.128) ortogonalna, odnosno i za nju vrijedi pravilo iz izraza (3.124). Analogno, za konačni element u konfiguraciji  $C_n$ , transformacijska matrica ima oblik:

$${}^n\mathbf{t}^e = \begin{bmatrix} {}^n\mathbf{t}_0^e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & {}^n\mathbf{t}_0^e & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & {}^n\mathbf{t}_0^e & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & {}^n\mathbf{t}_0^e & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.129)$$

gdje je  ${}^n\mathbf{t}_0^e$  matrica dana izrazom (3.125).

Uvedemo li, sada, izraze (3.126) i (3.127) u izraz (3.80), imamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_T^e {}^1\mathbf{t}^e \bar{\mathbf{u}}^e &= {}^1\mathbf{t}^e \bar{\mathbf{f}}^e \\ ({}^1\mathbf{t}^e)^T \mathbf{k}_T^e {}^1\mathbf{t}^e \bar{\mathbf{u}}^e &= \bar{\mathbf{f}}^e \\ \bar{\mathbf{k}}_T^e \bar{\mathbf{u}}^e &= \bar{\mathbf{f}}^e, \end{aligned} \quad (3.130)$$

pri čemu je  $\bar{\mathbf{k}}_T^e$  tangentna matrica krutosti  $e$ -tog konačnog elementa iz konfiguracije  $C_1$ , definirana u globalnom koordinatnom sustavu:

$$\bar{\mathbf{k}}_T^e = ({}^1\mathbf{t}^e)^T \mathbf{k}_T^e {}^1\mathbf{t}^e. \quad (3.131)$$

Uvedemo li u izraz (3.131) matrice iz izraza (3.81), dobivamo:

$$\bar{\mathbf{k}}_T^e = \bar{\mathbf{k}}_E^e + \bar{\mathbf{k}}_G^e, \quad (3.132)$$

gdje su  $\bar{\mathbf{k}}_E^e$  i  $\bar{\mathbf{k}}_G^e$  elastična i geometrijska matrica krutosti konačnog elementa iz konfiguracije  $C_1$ , definirane u globalnom koordinatnom sustavu:

$$\bar{\mathbf{k}}_E^e = ({}^1\mathbf{t}^e)^T \mathbf{k}_E^e {}^1\mathbf{t}^e, \quad (3.133)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_G^e = ({}^1\mathbf{t}^e)^T \mathbf{k}_G^e {}^1\mathbf{t}^e. \quad (3.134)$$

Za konačni se element iz konfiguracije  $C_n$ , pri transformaciji iz lokalnog u globalni koordinatni sustav, koristi matrica iz izraza (3.129).

### 3.7. Jednadžba konstrukcije

Jednadžba se konstrukcije ili jednadžba sustava dobiva odgovarajućim sumiranjem ili asembliranjem izraza (3.130) svih konačnih elemenata [31, 32], što daje:

$$\mathbf{K}_T \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (3.135)$$

gdje je  $\mathbf{K}_T$  tangenta matrica krutosti konstrukcije:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G, \quad (3.136)$$

dok su  $\mathbf{K}_E$  i  $\mathbf{K}_G$  elastična i geometrijska matrica krutosti konstrukcije. Sve se tri matrice krutosti dobivaju asembliranjem istoimenih matrica krutosti svih konačnih elemenata, transformiranih u globalni koordinatni sustav prema izrazima (3.131), (3.133) i (3.134). Također, sve su tri matrice simetrične kvadratne matrice reda  $7 \times m$ , gdje je  $m$  ukupan broj čvorova konstrukcije. Vektor  $\mathbf{U}$  sadrži inkrementalne čvorne pomake konstrukcije i to za svaki čvor po tri translacijska pomaka:  $W$ ,  $U$  i  $V$ , odnosno tri rotacijska pomaka:  $\phi_z$ ,  $\phi_x$  i  $\phi_y$  te parametar vitoperenja  $\Theta$ .  $\mathbf{P}$  je vektor inkrementalnog opterećenja konstrukcije, a predstavlja razliku opterećenja konstrukcije na kraju i početku inkrementa, tj.

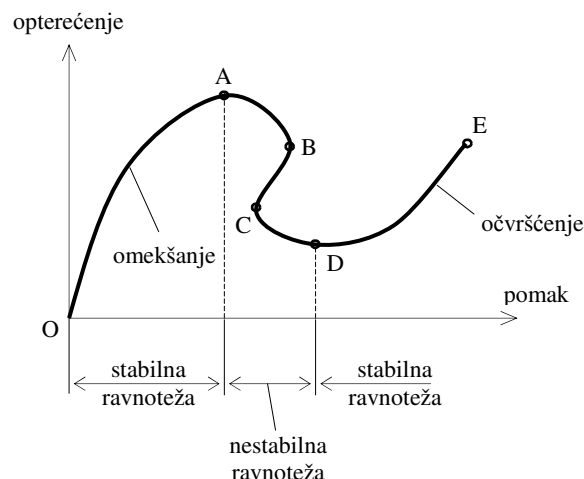
$$\mathbf{P} = {}^2\mathbf{P} - {}^1\mathbf{P}. \quad (3.137)$$

Izraz (3.135) predstavlja matricni zapis inkrementalnih ravnotežnih jednadžbi konstrukcije diskretizirane s  $n$  konačnih elemenata. Pri izvođenju se toga izraza podrazumijeva da su u konfiguraciji  $C_1$  konstrukcije poznate:

- koordinate svih čvorova konstrukcije
- deformirani oblik svakog konačnog elementa
- svi vektori čvornih sila  ${}^1\mathbf{f}^e$ ,  $e = 1, \dots, n$
- vektor vanjskog opterećenja  ${}^1\mathbf{P}$ .

Rješenjem se izraza (3.135), uz odgovarajuće rubne uvjete, dobiva vektor  $\mathbf{U}$ , koji predstavlja odgovor (*response*) konstrukcije na inkrementalnu promjenu vanjskog opterećenja konstrukcije prema izrazu (3.137). Za slučaj da su rubni uvjeti zadani u obliku spriječenih ili nultih pomaka, tada se oni u jednadžbu konstrukcije mogu uvesti na dva načina. U prvom se slučaju jednadžba sustava kondenzira ili *skraćuje* na način da se iz nje izbacuju svi retci i stupci, a koji odgovaraju nultim pomacima [24, 29]. U drugom se slučaju uvode tzv. *numerički rubni uvjeti*, tj. dijagonalni se članovi tangentne matrice krutosti konstrukcije, a koji odgovaraju nultim pomacima, množe s jako velikim brojem, dok se članovi vektora  $\mathbf{P}$  koji predstavljaju reaktivne komponente, zamjenjuju s nulama [89].

Zbrojimo li, potom, vektore  $\mathbf{U}$  svih inkremenata, tada je za svaki stupanj slobode konstrukcije moguće nacrtati tzv. *krivulju opterećenje – pomak*, a čiji je opći oblik prikazan na sl. 3.10.



Sl. 3.10. Krivulja 'opterećenje – pomak'

Iz sl. 3.10 vidimo da ravnoteža konstrukcije može biti *stabilna* ili *nestabilna*, da se krutost konstrukcije može nalaziti u području *omekšanja* ili području *očvršćenja* te da konstrukcija, što se tiče vanjskog opterećenja, može biti u području *opterećenja* (dio O – A i D – E) ili u području *rasterećenja* (dio A – D). Sva su ova svojstva popraćena pojavom kritičnih točaka, koje se, općenito, mogu podijeliti u dvije skupine [57]:

- granične točke (A i D)
- *snap-back* točke (B i C).

Karakteristika je graničnih točaka da nakon njih ravnotežna deformacijska forma konstrukcije prelazi is stabilnog u nestabilno područje ili obrnuto, a ako kod takve granične točke jednoj vrijednosti opterećenja pripadaju dvije ili više vrijednosti pomaka, onda se takva točka, vrlo često, naziva i *snap-through* točkom. Za *snap-back* točke karakteristično je da jednoj vrijednosti pomaka odgovaraju dvije ili više vrijednosti opterećenja. Ono što je zajedničko svim tim točkama je to da one predstavljaju određene numeričke poteškoće pri rješavanju izraza (3.135), jer se u blizini tih točaka numerički algoritam može ponašati nestabilno.

Kako se pomoću izraza (3.135) opisuje nelinearno ponašanje konstrukcije opterećene vanjskim opterećenjem, to se za rješavanje takovih problema, najčešće, koriste inkrementalno-iterativne procedure ili sheme, koje su okarakterizirane s tri glavne faze [84, 85]. Prva je tzv. *prediktor* faza, koja obuhvaća određivanje vektora inkrementalnih pomaka  $\mathbf{U}$  konstrukcije iz izraza (3.135), tj.

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}, \quad (3.138)$$

a na osnovi čega je, potom, moguće odrediti inkrementalne pomake svakog konačnog elementa pomoću izraza (3.130). Druga je tzv. *korektor* faza, koja obuhvaća određivanje vektora inkrementalnog opterećenja  $\mathbf{f}^e$  svakog konačnog elementa prema izrazu (3.80), dok treća faza obuhvaća provjeru da li je uspostavljena ravnoteža između vanjskih i unutarnjih sila u konfiguraciji  $C_2$ . Naime, na kraju se svakog koraka (inkrementa i iteracije) zbrajaju vektori  ${}^2\mathbf{f}^e = {}^2\mathbf{f}^e$  svih konačnih elemenata i uspoređuju s vektorom  ${}^2\mathbf{P}$ . Ukoliko je ravnoteža uspostavljena, odnosno ukoliko je razlika unutar dopuštenih odstupanja, prelazi se u novi inkrement, a ako je razlika veća od dopuštene, ponavljaju se prediktor i korektor faza sve dok se ne postigne tražena točnost. Istraživanja su pokazala da točnost rješenja najviše ovisi o korektor fazi, dok prediktor faza najviše utječe na brzinu konvergencije, odnosno na broj iteracija unutar jednog inkrementa [57]. Kod primjene se tzv. *čiste inkrementalne sheme* treća faza preskače te se direktno ide u novi inkrement, a što ima za posljedicu da tako dobivena rješenja mogu biti vrlo nepouzdana.

Korektor se faza, nadalje, može podijeliti na tri podfaze i to:

- korekcija geometrije svakog konačnog elementa (*updating of geometry*)
- određivanje eksterne matrice krutosti svakog konačnog elementa prema izrazu (3.115)
- određivanje vektora čvornih sila svakog konačnog elementa prema sljedećem izrazu:

$${}^2\mathbf{f}^e = {}^2\mathbf{f}^e = {}^1\mathbf{f}^e + \left( \mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e - \mathbf{k}_{Ext}^e \right) \mathbf{u}^e \quad (3.139)$$

te njegova transformacija u globalni koordinatni sustav.

Treća se podfaza u literaturi, ponekad, definira kao zasebna faza i naziva *force recovery* fazom. Ovdje je potrebno napomenuti da se kod druge podfaze podrazumijeva da je primijenjen ESA pristup, a da se u slučaju primjene NDA pristupa, umjesto eksterne matrice krutosti, u toj podfazi određuje vektor inkrementalnih čvornih pomaka  $\mathbf{u}_n^e$  svakog konačnog elementa, prema izrazu (3.84). Također, vektor je čvornih sila konačnog elementa dobiven prema izrazu (3.139), potrebno transformirati u globalni koordinatni sustav prema izrazu (3.127), stim da se transformacijska matrica  ${}^1\mathbf{t}^e$  zamijeni transformacijskom matricom  ${}^2\mathbf{t}^e$ , jer komponente tog vektora djeluju na pravcu osi konačnog elementa u konfiguraciji  $C_2$ .

### 3.8. Korekcija geometrije konačnog elementa

Kao što je u prethodnom poglavlju rečeno, kod rješavanja se nelinearnih problema koriste tzv. *korak po korak* procedure ili sheme. Ono što je zajedničko svim tim shemama je da se nakon svakog koraka (inkrementa i iteracije), izvodi korekcija geometrije diskretizirane konstrukcije i svih konačnih elemenata, a tu se u slučaju velikih rotacija, kao poseban problem javlja korekcija položaja koordinatnih osi čvorova konstrukcije zbog nekomutativnosti rotacijskih stupnjeva slobode gibanja [39, 53, 54, 57].

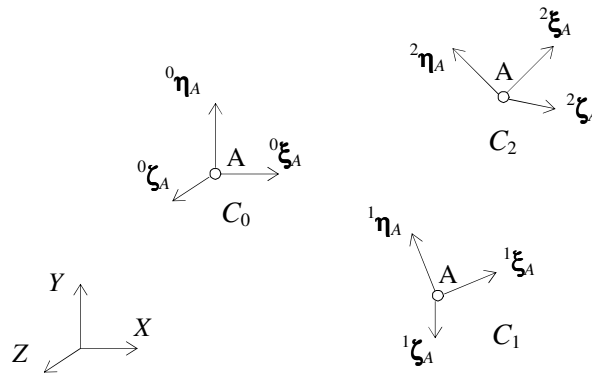
U slučaju je malih prostornih rotacija, korekcija položaja koordinatnih osi čvorova trivijalna. Naime, kako za male prostorne rotacije zakon komutativnosti vrijedi, to se ukupne rotacije čvorova na kraju svakog koraka mogu dobiti jednostavnim sumiranjem inkrementalnih rotacija iz trenutnog koraka, s ukupnim rotacijama akumuliranim do tog koraka. Isto vrijedi i u slučaju velikih rotacijski pomaka kod ravninskih problema, jer je kod njih vektor rotacijskih pomaka uvijek okomit na ravninu u kojoj se nalazi geometrija konstrukcija i u kojoj se odvija deformiranje same konstrukcije.

Međutim, kako velike prostorne rotacije nemaju svojstvo komutativnosti, odnosno nevektorske su prirode, to se korekcija položaja koordinatnih osi čvorova diskretizirane konstrukcije mora temeljiti na teoriji velikih rotacija [53]. U tu je svrhu potrebno definirati tri sustava koordinatnih osi:

- referentne osi svakog čvora konstrukcije
- osi konačnog elementa
- osi čvorova konačnog elementa.

### 3.8.1. Referentne osi

Neka je proizvoljnom čvoru A konstrukcije u konfiguraciji  $C_0$  pridodan sustav međusobno okomitih osi definiranih s jediničnim vektorima  $({}^0\zeta_A, {}^0\xi_A, {}^0\eta_A)$ , a koji je paralelan s globalnim koordinatnim sustavom  $(Z, X, Y)$ , sl. 3.11. Nazovimo te osi *referentnim osima*. Položaj je tih osi u konfiguraciji  $C_1$  definiran jediničnim vektorima  $({}^1\zeta_A, {}^1\xi_A, {}^1\eta_A)$ , a u konfiguraciji  $C_2$  jediničnim vektorima  $({}^2\zeta_A, {}^2\xi_A, {}^2\eta_A)$ . Položaj je čvora A u sve tri konfiguracije definiran koordinatama:  $({}^0Z_A, {}^0X_A, {}^0Y_A)$ ,  $({}^1Z_A, {}^1X_A, {}^1Y_A)$  i  $({}^2Z_A, {}^2X_A, {}^2Y_A)$ .



Sl. 3.11. Referentne osi

Ukupan je inkrementalni pomak čvora A iz konfiguracije  $C_1$  u konfiguraciju  $C_2$ , moguće u globalnom koordinatnom sustavu prikazati pomoću translacijskog inkrementa  $\Delta\mathbf{U}_A$ :

$$\Delta\mathbf{U}_A = W_A \mathbf{k} + U_A \mathbf{i} + V_A \mathbf{j} \quad (3.140)$$

i rotacijskog inkrementa  $\Delta\phi_A$ :

$$\Delta\phi_A = \phi_{ZA} \mathbf{k} + \phi_{XA} \mathbf{i} + \phi_{YA} \mathbf{j}, \quad (3.141)$$

gdje su:  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{i}$  i  $\mathbf{j}$ , jedinični vektori na pravcima globalnih osi  $(Z, X, Y)$ .

Intenzitet je rotacijskog inkrementa:

$$\Delta\phi_A = |\Delta\phi_A| = \sqrt{\phi_{ZA}^2 + \phi_{XA}^2 + \phi_{YA}^2}, \quad (3.142)$$

dok je pravac rotacijskog inkrementa definiran jediničnim vektorom  $\mathbf{n}_A$ :

$$\mathbf{n}_A = \frac{\Delta\phi_A}{|\Delta\phi_A|} = \frac{\Delta\phi_A}{\sqrt{\phi_{ZA}^2 + \phi_{XA}^2 + \phi_{YA}^2}}. \quad (3.143)$$

U skladu s Rodrigueзовom formulom za velike rotacije [53, 57], položaj je referentnih osi čvora A u konfiguraciji  $C_2$ , sljedeći:

$${}^2\zeta_A = \cos \Delta\phi_A \cdot {}^1\zeta_A + \sin \Delta\phi_A (\mathbf{n}_A \times {}^1\zeta_A) + (1 - \cos \Delta\phi_A) (\mathbf{n}_A \cdot {}^1\zeta_A) \cdot \mathbf{n}_A, \quad (3.144a)$$

$${}^2\xi_A = \cos \Delta\phi_A \cdot {}^1\xi_A + \sin \Delta\phi_A (\mathbf{n}_A \times {}^1\xi_A) + (1 - \cos \Delta\phi_A) (\mathbf{n}_A \cdot {}^1\xi_A) \cdot \mathbf{n}_A, \quad (3.144b)$$

$${}^2\eta_A = \cos \Delta\phi_A \cdot {}^1\eta_A + \sin \Delta\phi_A (\mathbf{n}_A \times {}^1\eta_A) + (1 - \cos \Delta\phi_A) (\mathbf{n}_A \cdot {}^1\eta_A) \cdot \mathbf{n}_A. \quad (3.144c)$$

Izraze (3.144) moguće je napisati i u matričnom obliku kao:

$${}^2\mathbf{q}_A = {}^2\mathbf{R}_A {}^1\mathbf{q}_A, \quad \mathbf{q} = \zeta, \xi, \eta, \quad (3.145)$$

gdje je  ${}^2\mathbf{R}_A$  inkrementalna rotacijska matrica čvora A, oblika:

$${}^2\mathbf{R}_A = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin \Delta\phi_A}{\Delta\phi_A} \Phi_A + \frac{(1 - \cos \Delta\phi_A)}{\Delta\phi_A^2} \Phi_A^2, \quad (3.146)$$

dok je:

$$\Phi_A = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_{YA} & \phi_{XA} \\ \phi_{YA} & 0 & -\phi_{ZA} \\ -\phi_{XA} & \phi_{ZA} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.147)$$

Uvedu li se u izraz (3.146) sljedeće aproksimacije:

$$\sin \Delta\phi_A \cong \Delta\phi_A, \quad \cos \Delta\phi_A \cong 1 - \frac{1}{2} \Delta\phi_A^2, \quad (3.148)$$

dobivamo:

$${}^2\mathbf{R}_A \cong \mathbf{I}_3 + \Phi_A + \frac{1}{2} \Phi_A^2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\phi_{XA}^2 + \phi_{YA}^2) & -\phi_{YA} + \frac{1}{2}\phi_{ZA}\phi_{XA} & \phi_{XA} + \frac{1}{2}\phi_{ZA}\phi_{YA} \\ \phi_{YA} + \frac{1}{2}\phi_{ZA}\phi_{XA} & 1 - \frac{1}{2}(\phi_{ZA}^2 + \phi_{YA}^2) & -\phi_{ZA} + \frac{1}{2}\phi_{XA}\phi_{YA} \\ -\phi_{XA} + \frac{1}{2}\phi_{ZA}\phi_{YA} & \phi_{ZA} + \frac{1}{2}\phi_{XA}\phi_{YA} & 1 - \frac{1}{2}(\phi_{ZA}^2 + \phi_{XA}^2) \end{bmatrix}. \quad (3.149)$$

U slučaju malih rotacija možemo zanemariti kvadrate i umnoške rotacijskih pomaka, pa izraz (3.149) poprima sljedeći oblik:

$${}^2\mathbf{R}_A \cong \mathbf{I}_3 + \Phi_A = \begin{bmatrix} 1 & -\phi_{YA} & \phi_{XA} \\ \phi_{YA} & 1 & -\phi_{ZA} \\ -\phi_{XA} & \phi_{ZA} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.150)$$

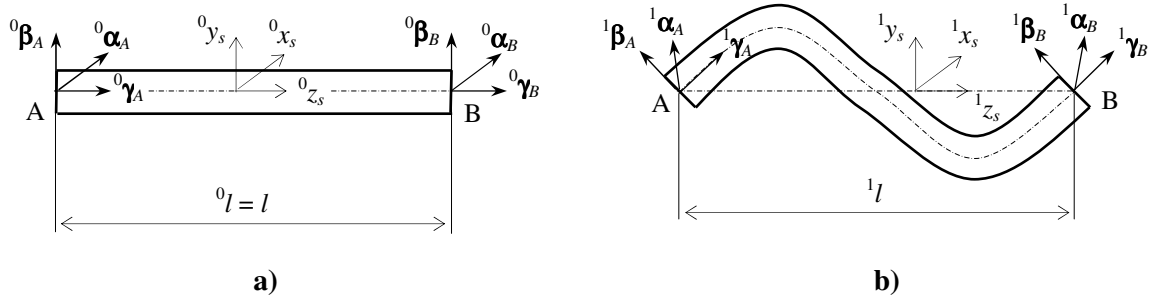
Koordinate su čvora A u konfiguraciji  $C_2$ :

$$\begin{Bmatrix} {}^2Z_A \\ {}^2X_A \\ {}^2Y_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^1Z_A \\ {}^1X_A \\ {}^1Y_A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} W_A \\ U_A \\ V_A \end{Bmatrix}. \quad (3.151)$$

### 3.8.2. Osi čvorova konačnog elementa i osi konačnog elementa

Neka imamo gredni konačni element kojem se čvorovi nalaze u krajnjim presjecima A i B, sl. 3.12a, i neka su lokalne osi tih čvorova u konfiguraciji  $C_0$  definirane jediničnim vektorima  $({}^0\boldsymbol{\gamma}_i, {}^0\boldsymbol{\alpha}_i, {}^0\boldsymbol{\beta}_i; i = A, B)$  sa zajedničkim sjecištem u centru smicanja. Pri tome je os definirana s  ${}^0\boldsymbol{\gamma}_i$  paralelna s uzdužnom osi  ${}^0z$  elementa, dok su osi definirane s  ${}^0\boldsymbol{\alpha}_i$  i  ${}^0\boldsymbol{\beta}_i$  paralelne s glavnim centralnim osima inercije  ${}^0x$  i  ${}^0y$  poprečnoga presjeka. Nazovimo te osi *osima čvorova konačnog elementa* ili *čvornim osima* za konfiguraciju  $C_0$ . Također, pridodajmo konačnom elementu još jedan sustav koordinatnih osi  $({}^0z_s, {}^0x_s, {}^0y_s)$ , pri čemu je os  ${}^0z_s$  kolinearna s osima definiranim s  ${}^0\boldsymbol{\gamma}_A$  i  ${}^0\boldsymbol{\gamma}_B$ , dok je os  ${}^0x_s$  paralelna s osima definiranim s  ${}^0\boldsymbol{\alpha}_A$  i  ${}^0\boldsymbol{\alpha}_B$ , odnosno os  ${}^0y_s$  paralelna s osima definiranim s  ${}^0\boldsymbol{\beta}_A$  i  ${}^0\boldsymbol{\beta}_B$ . Taj ćemo sustav koordinatnih osi nazvati *osima konačnog elementa* za konfiguraciju  $C_0$ .





Sl. 3.12. Čvorne osi i osi konačnog elementa: a) u konfiguraciji  $C_0$ ; b) u konfiguraciji  $C_1$

Kako se pri inkrementalnom pomaku iz konfiguracije  $C_0$  u konfiguraciju  $C_1$  konačni element deformira, tj. gubi pravocrtnost, to sustavi čvornih osi  $({}^0\gamma_A, {}^0\alpha_A, {}^0\beta_A)$  i  $({}^0\gamma_B, {}^0\alpha_B, {}^0\beta_B)$  u novoj konfiguraciji neće više biti međusobno paralelni, sl. 3.12b. Stoga je i u konfiguraciji  $C_1$  potrebno uvesti sustav osi konačnog elementa  $({}^1z_s, {}^1x_s, {}^1y_s)$ , stim da, sada, os  ${}^1z_s$  leži na pravcu koji spaja centre smicanja poprečnih presjeka čvorova A i B, dok osi  ${}^0x_s$  i  ${}^0y_s$  leže na pravcima koji predstavljaju srednje vrijednost projekcija vektora  ${}^0\alpha_A$  i  ${}^0\alpha_B$ , odnosno  ${}^0\beta_A$  i  ${}^0\beta_B$ , u ravnini okomitoj na os  ${}^1z_s$ . Ovdje je, potrebno napomenuti da je koordinatni sustav  $(z_s, x_s, y_s)$  paralelan s lokalnim koordinatnom sustavom  $(z, x, y)$  konačnog elementa u svim ravnotežnim konfiguracijama, sl. 3.2. Veza je između čvornih osi konačnog elementa i referentnih osi u konfiguraciji  $C_0$ , dana izrazom:

$${}^0\mathbf{p}_i = {}^0\mathbf{R} {}^0\mathbf{q}_i, \quad (i = A, B; \quad \mathbf{p} = \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \quad \mathbf{q} = \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \quad (3.152)$$

gdje je  ${}^0\mathbf{R}$  transformacijska matrica sljedećeg oblika:

$${}^0\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos({}^0\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{k}) & \cos({}^0\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{k}) & \cos({}^0\boldsymbol{\beta}, \mathbf{k}) \\ \cos({}^0\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{i}) & \cos({}^0\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{i}) & \cos({}^0\boldsymbol{\beta}, \mathbf{i}) \\ \cos({}^0\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{j}) & \cos({}^0\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{j}) & \cos({}^0\boldsymbol{\beta}, \mathbf{j}) \end{bmatrix}, \quad (3.153)$$

stim da je:  ${}^0\boldsymbol{\gamma} = {}^0\boldsymbol{\gamma}_i$ ,  ${}^0\boldsymbol{\alpha} = {}^0\boldsymbol{\alpha}_i$ ,  ${}^0\boldsymbol{\beta} = {}^0\boldsymbol{\beta}_i$ ,  $i = A$  ili  $B$ . Kako je u konfiguraciji  $C_0$  konačni element nedeformiran, to su čvorne osi i osi konačnog elementa međusobno paralelne, pa se za matricu  ${}^0\mathbf{R}$ , u skladu s izrazom (3.125), također može pisati:

$${}^0\mathbf{R}^T = {}^0\mathbf{t}_0^e = \begin{bmatrix} \cos({}^0z_s, Z) & \cos({}^0z_s, X) & \cos({}^0z_s, Y) \\ \cos({}^0x_s, Z) & \cos({}^0x_s, X) & \cos({}^0x_s, Y) \\ \cos({}^0y_s, Z) & \cos({}^0y_s, X) & \cos({}^0y_s, Y) \end{bmatrix}. \quad (3.154)$$

Pretpostavimo li da su konačni elementi u čvorovima međusobno kruto spojeni, tj. da nema unutarnjih zglobova, tada na transformaciju između čvornih konačnog elementa i referentnih osi neće utjecati deformiranje konačnog elementa, pa se, stoga, može pisati da je i u konfiguracijama  $C_1$  i  $C_2$  veza između tih dvaju sustava koordinatnih osi, sljedeća:

$$\left. \begin{aligned} {}^1\mathbf{p}_i &= {}^0\mathbf{R} {}^1\mathbf{q}_i = ({}^0\mathbf{t}_0^e)^T {}^1\mathbf{q}_i \\ {}^2\mathbf{p}_i &= {}^0\mathbf{R} {}^2\mathbf{q}_i = ({}^0\mathbf{t}_0^e)^T {}^2\mathbf{q}_i \end{aligned} \right\}, \quad i = A, B; \quad \mathbf{p} = \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \quad \mathbf{q} = \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}. \quad (3.155)$$

Kao što se vidi iz izraza (3.154) matrica  ${}^0\mathbf{R}$  transformira lokalne osi  $({}^0z_s, {}^0x_s, {}^0y_s)$  konačnog elementa u globalni koordinatni sustav  $(Z, X, Y)$ , a možemo je napisati i u sljedećem obliku:

$${}^0\mathbf{R} = ({}^0\mathbf{t}_0^e)^T = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{z}_s & {}^0\mathbf{x}_s & {}^0\mathbf{y}_s \end{bmatrix}, \quad (3.156)$$

gdje je:

$$({}^0\mathbf{z}_s)^T = \{ \cos({}^0z_s, Z) \quad \cos({}^0z_s, X) \quad \cos({}^0z_s, Y) \}, \quad (3.157a)$$

$$({}^0\mathbf{x}_s)^T = \{ \cos({}^0x_s, Z) \quad \cos({}^0x_s, X) \quad \cos({}^0x_s, Y) \}, \quad (3.157b)$$

$$({}^0\mathbf{y}_s)^T = \{\cos({}^0y_s, Z) \cos({}^0y_s, X) \cos({}^0y_s, Y)\}. \quad (3.157c)$$

Sljedeći korak predstavlja određivanje matrice  ${}^1\mathbf{R}$ , koja transformira osi  $({}^1z_s, {}^1x_s, {}^1y_s)$  konačnog elementa iz konfiguracije  $C_1$  u globalni koordinatni sustav, odnosno:

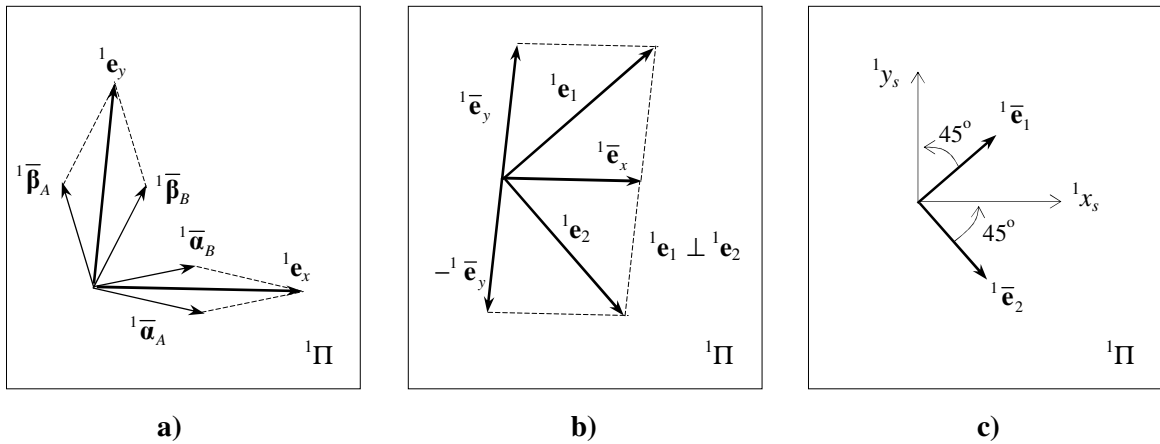
$${}^1\mathbf{R} = ({}^1\mathbf{t}_0^e)^T = [{}^1z_s \quad {}^1x_s \quad {}^1y_s]. \quad (3.158)$$

Kako os  ${}^1z_s$  leži na na pravcu koji u konfiguraciji  $C_1$  spaja centre smicanja poprečnih presjeka čvorova A i B, to se komponente vektora  ${}^1z_s$  mogu dobiti na osnovi koordinata čvorova A i B, tj.

$$({}^1z_s)^T = \frac{1}{l} \{ {}^1Z_B - {}^1Z_A \quad {}^1X_B - {}^1X_A \quad {}^1Y_B - {}^1Y_A \}, \quad (3.159)$$

gdje je  $l$  udaljenost između čvorova A i B u konfiguraciji  $C_1$ :

$$l = \sqrt{({}^1Z_B - {}^1Z_A)^2 + ({}^1X_B - {}^1X_A)^2 + ({}^1Y_B - {}^1Y_A)^2}. \quad (3.160)$$



**Sl. 3.13.** *Određivanje položaja osi  ${}^1x_s$  i  ${}^1y_s$ : a) projekcije čvornih osi u ravninu  ${}^1\Pi$ ; b) jedinični vektori srednjih vrijednosti; c) konačni položaj osi  ${}^1x_s$  i  ${}^1y_s$*

Ako sa  ${}^1\Pi$  označimo ravninu okomitu na os  ${}^1z_s$ , slijedi da su projekcije vektora  ${}^0\alpha_i$  i  ${}^0\beta_i$ ,  $i = A, B$ , u tu ravninu, sl. 3.13a:

$${}^1\mathbf{p}_j^* = {}^1\mathbf{p}_j - ({}^1\mathbf{p}_j^T {}^1z_s) {}^1z_s, \quad (j = A, B; \quad \mathbf{p} = \alpha, \beta), \quad (3.161)$$

odnosno nakon normalizacije, imamo:

$${}^1\bar{\mathbf{p}}_j = \frac{{}^1\mathbf{p}_j^*}{\sqrt{({}^1\mathbf{p}_j^*)^T {}^1\mathbf{p}_j^*}}, \quad (j = A, B; \quad \mathbf{p} = \alpha, \beta). \quad (3.162)$$

Kako koordinatni sustavi  $({}^0\alpha_A, {}^0\beta_A)$  i  $({}^0\alpha_B, {}^0\beta_B)$  u konfiguraciji  $C_1$  nisu međusobno paralelni, to se njihove projekcije u ravnini  ${}^1\Pi$  neće podudarati, pa je potrebno uzeti srednje vrijednosti tih projekcija, tj.

$${}^1\mathbf{e}_i = {}^1\bar{\mathbf{p}}_A + {}^1\bar{\mathbf{p}}_B, \quad (i = x, y; \quad \mathbf{p} = \alpha, \beta), \quad (3.163)$$

odnosno normalizacijom vektora dobivenih izrazom (3.163), imamo:

$${}^1\bar{\mathbf{e}}_i = \frac{{}^1\mathbf{e}_i}{\sqrt{({}^1\mathbf{e}_i)^T {}^1\mathbf{e}_i}}, \quad (i = x, y). \quad (3.164)$$

Pošto, u općem slučaju, srednje vrijednosti definirane, sada, jediničnim vektorima  ${}^1\bar{\mathbf{e}}_x$  i  ${}^1\bar{\mathbf{e}}_y$ , nisu međusobno okomite, potrebno je učiniti sljedeću modifikaciju [57]. Zbrojimo li ova dva jedinična vektora, pa ih zatim oduzmemo, sl. 3.13b, dobivamo:

$$\left. \begin{aligned} {}^1\mathbf{e}_1 &= {}^1\bar{\mathbf{e}}_x + {}^1\bar{\mathbf{e}}_y \\ {}^1\mathbf{e}_2 &= {}^1\bar{\mathbf{e}}_x - {}^1\bar{\mathbf{e}}_y \end{aligned} \right\}, \quad (3.165)$$

što nakon normalizacije daje:

$${}^1\bar{\mathbf{e}}_j = \frac{{}^1\mathbf{e}_j}{\sqrt{({}^1\mathbf{e}_j)^T {}^1\mathbf{e}_j}}, \quad (j=1, 2), \quad (3.166)$$

pri čemu je, sada,  ${}^1\bar{\mathbf{e}}_1 \perp {}^1\bar{\mathbf{e}}_2$ . Zarotiramo li, potom, jedinične vektore  ${}^1\bar{\mathbf{e}}_1$  i  ${}^1\bar{\mathbf{e}}_2$  za  $45^\circ$  suprotno od rotacije kazaljki na satu, sl. 3.13c, slijedi da je novi položaj osi  ${}^1x_s$  i  ${}^1y_s$  definiran vektorima:

$${}^1\mathbf{x}_s = {}^1\bar{\mathbf{e}}_1 \sin 45^\circ + {}^1\bar{\mathbf{e}}_2 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} ({}^1\bar{\mathbf{e}}_1 + {}^1\bar{\mathbf{e}}_2), \quad (3.167a)$$

$${}^1\mathbf{y}_s = {}^1\bar{\mathbf{e}}_1 \cos 45^\circ - {}^1\bar{\mathbf{e}}_2 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} ({}^1\bar{\mathbf{e}}_1 - {}^1\bar{\mathbf{e}}_2). \quad (3.167b)$$

Povratom izraza (3.158) i (3.167) u izraz (3.158), dobivamo transformacijsku matricu konačnog elementa za novu ravnotežnu konfiguraciju. Postupak opisan izrazima (3.159) – (3.167) ponavlja se u svakom narednom koraku (inkrementu i iteraciji).

### 3.9. Numeričke procedure za rješavanje nelinearnih problema

Kao što je već rečeno, izraz (3.135) predstavlja matrični oblik inkrementalnih ravnotežnih jednadžbi konstrukcije, s kojim se nelinearni odziv konstrukcije zbog djelovanja vanjskog opterećenja, rješava po tzv. *korak po korak* proceduri ili shemi. Numeričke algoritme koji se pritom rabe možemo svrstati u one koji se temelje na čistoj inkrementalnoj proceduri [76] i na one koji su organizirani prema inkrementalno-iterativnoj proceduri [26, 34, 57, 84].

#### 3.9.1. Čista inkrementalna procedura

Kod čiste inkrementalne procedure proces se opterećenja konstrukcije dijeli na konačan broj koraka (inkrementata), pri čemu se unutar jednog koraka sustav (3.135) rješava kao linearan. Kako se unutar tog koraka ne vrši iteriranje, to točnost ove procedure uvelike ovisi o veličini koraka.

Za slučaj čiste inkrementalne procedure izraz (3.135) možemo napisati u sljedećem obliku:

$$\mathbf{K}_T^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = \Delta \mathbf{P}^{(i)}, \quad (3.168)$$

gdje je:  $\mathbf{K}_T^{(i-1)}$  tangentna matrica krutosti konstrukcije na početku  $i$ -tog inkrementa,  $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$  vektor inkrementalnih čvornih pomaka dobiven u  $i$ -tom inkrementu, a  $\Delta \mathbf{P}^{(i)}$  vektor inkrementalnog opterećenja u  $i$ -tom inkrementu, dobiven kao:

$$\Delta \mathbf{P}^{(i)} = \mathbf{P}^{(i)} - \mathbf{P}^{(i-1)}, \quad (3.169)$$

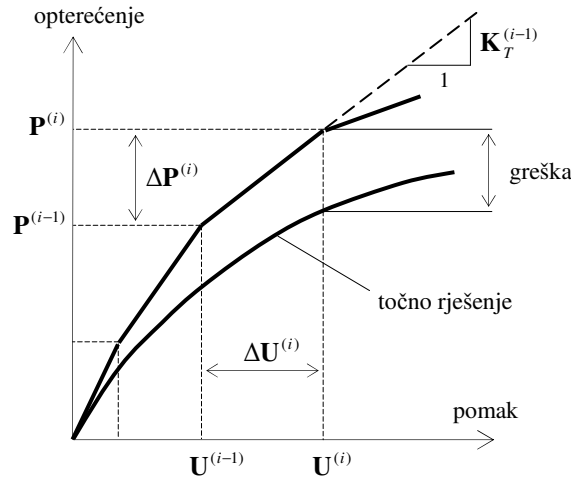
pri čemu su  $\mathbf{P}^{(i)}$  i  $\mathbf{P}^{(i-1)}$  vektori vanjskog opterećenja u konfiguracijama  $C_{(i)}$  i  $C_{(i-1)}$ . Ovdje je  $C_{(i-1)}$  zadnja poznata konfiguracija, dok je  $C_{(i)}$  nova (nepoznata) konfiguracija. Pri tome je u izrazima (3.168) i (3.169), inkrementalnim veličinama pridodan znak  $\Delta$ . Na kraju se svakog  $i$ -tog inkrementa ukupno opterećenje konstrukcije dobiva tako da se zbroje sva prethodna inkrementalna opterećenja:

$$\mathbf{P}^{(i)} = \sum_{r=1}^{r=i} \Delta \mathbf{P}^{(r)}, \quad (3.170)$$

dok se ukupni pomak konstrukcije dobiva zbrajanjem svih prethodnih inkrementalnih pomaka:

$$\mathbf{U}^{(i)} = \sum_{r=1}^{r=i} \Delta \mathbf{U}^{(r)}. \quad (3.171)$$

Shematski je prikaz čiste inkrementalne procedure prikazan na sl. 3.14.



Sl. 3.14. Čista inkrementalna procedura

Osnovna je pretpostavka kod ove procedure ta da je veličina inkrementalnog opterećenja  $\Delta \mathbf{P}$  dovoljno mala da se unutar jednog inkrementa može zanemariti promjena tangentne matrice krutosti konstrukcije. Dobra je strana ove procedure što je ona vrlo jednostavna za primjenu i što je vrijeme potrebno za proračun, u usporedbi s inkrementalno-iterativnim procedurama, znatno kraće. Loša je strana čiste inkrementalne procedure što točnost dobivenog rješenja, kao što je već rečeno, ovisi o veličini koraka, jer se unutar jednog inkrementa ne vrši iteriranje, odnosno ne provjerava se da li je uspostavljena ravnoteža između unutarnjih i vanjskih sila. Kako u problemima, koji uključuju velike pomake, greška akumulirana tijekom procesa rješavanja primjenom ove procedure može biti značajna, to se ona kod njih, u pravilu, izbjegava.

### 3.9.2. Inkrementalno-iterativne procedure

Pri uporabi se inkrementalno-iterativnih procedura u rješavanju nelinearnih problema, susrećemo s dva osnovna problema.

Prvi je problem kako odrediti veličinu inkrementalnog opterećenja za svaki naredni inkrement. Kod čiste inkrementalne procedure veličinu inkrementalnog opterećenja možemo procijeniti na osnovi veličine greške akumulirane tijekom proračuna, dok se kod inkrementalnih procedura koje uključuju iteriranje unutar inkremenata, ta procjena može temeljiti na broju izvršenih iteracija u prethodnom inkrementu.

Drugi je problem na koji način izvoditi iteracije unutar inkremenata. Ovo se pitanje bavi problemom konvergencije primijenjene iterativne sheme, odnosno ponašanjem iterativne sheme u blizini kritičnih točaka.

Općenito, u slučaju primjene inkrementalno-iterativne sheme, za  $i$ -ti inkrement i  $j$ -tu iteraciju izraz (3.135) možemo napisati kao:

$$(\mathbf{K}_T)_{(j-1)}^{(i)} \Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)} = \mathbf{P}_{(j)}^{(i)} - \mathbf{F}_{(j-1)}^{(i)}, \quad (3.172)$$

pri čemu je  $i = 1, 2, \dots, m$ , dok je  $j = 1, 2, \dots, n$ . Na početku je svakog inkrementa, pritom:

$$(\mathbf{K}_T)_{(0)}^{(i)} = (\mathbf{K}_T)_{(n)}^{(i-1)}, \quad \mathbf{F}_{(0)}^{(i)} = \mathbf{F}_{(n)}^{(i-1)}, \quad \mathbf{U}_{(0)}^{(i)} = \mathbf{U}_{(n)}^{(i-1)}. \quad (3.173)$$

U izrazu (3.172), za  $i$ -ti inkrement,  $\Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)}$  predstavlja vektor inkrementalnih pomaka konstrukcije u  $j$ -toj iteraciji,  $\mathbf{P}_{(j)}^{(i)}$  vanjsko opterećenje konstrukcije u  $j$ -toj iteraciji, dok je  $\mathbf{F}_{(j-1)}^{(i)}$  vektor unutarnjih sila

konstrukcije, čije su komponente dobivene sumiranjem odgovarajućih komponenti vektora čvornih sila iz izraza (3.139) svih konačnih elemenata, a do posljednje, tj.  $(j - 1)$  iteracije.

Nadalje, vektor vanjskog opterećenja  $\mathbf{P}_{(j)}^{(i)}$  možemo prikazati kao:

$$\mathbf{P}_{(j)}^{(i)} = \mathbf{P}_{(j-1)}^{(i)} + \Delta\mathbf{P}_{(j)}^{(i)}, \quad (3.174)$$

odnosno:

$$\mathbf{P}_{(j)}^{(i)} = \mathbf{P}_{(j-1)}^{(i)} + \Lambda_{(j)}^{(i)} \hat{\mathbf{P}}, \quad (3.175)$$

dok je početni uvjet:

$$\mathbf{P}_{(0)}^{(i)} = \mathbf{P}_{(n)}^{(i-1)}. \quad (3.176)$$

U izrazu (3.175)  $\Lambda_{(j)}^{(i)}$  predstavlja faktor inkrementalnog opterećenja za  $j$ -tu iteraciju u  $i$ -tom inkrementu, dok je  $\hat{\mathbf{P}}$  vektor tzv. referentnog opterećenja.

Nakon što se iz izraza (3.172) dobije vektor inkrementalnih pomaka za  $j$ -tu iteraciju, slijedi da je ukupan pomak konstrukcije u  $i$ -tom inkrementu:

$$\mathbf{U}_{(j)}^{(i)} = \mathbf{U}_{(j-1)}^{(i)} + \Delta\mathbf{U}_{(j)}^{(i)}. \quad (3.177)$$

Razliku između vektora  $\mathbf{P}_{(j-1)}^{(i)}$  i vektora  $\mathbf{F}_{(j-1)}^{(i)}$  iz prethodne,  $(j - 1)$  iteracije, nazivamo vektorom neuravnoteženog opterećenja:

$$\mathbf{R}_{(j-1)}^{(i)} = \mathbf{P}_{(j-1)}^{(i)} - \mathbf{F}_{(j-1)}^{(i)}, \quad (3.178)$$

a komponente se kojeg, na početku svakog inkrementa, izjednačuju s nulom. Vratimo li izraz (3.178) u izraz (3.175), imamo:

$$\mathbf{P}_{(j)}^{(i)} = \mathbf{R}_{(j-1)}^{(i)} + \mathbf{F}_{(j-1)}^{(i)} + \Lambda_{(j)}^{(i)} \hat{\mathbf{P}}, \quad (3.179)$$

odnosno iz izraza (3.172), slijedi:

$$(\mathbf{K}_T)_{(j-1)}^{(i)} \Delta\mathbf{U}_{(j)}^{(i)} = \Lambda_{(j)}^{(i)} \hat{\mathbf{P}} + \mathbf{R}_{(j-1)}^{(i)}. \quad (3.180)$$

Napišemo li, pak, vektor  $\Delta\mathbf{U}_{(j)}^{(i)}$  u sljedećem obliku:

$$\Delta\mathbf{U}_{(j)}^{(i)} = \Lambda_{(j)}^{(i)} \Delta\hat{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)} + \Delta\bar{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)}, \quad (3.181)$$

tada povratom izraza (3.181) u izraz (3.180), dobivamo [57, 84]:

$$(\mathbf{K}_T)_{(j-1)}^{(i)} \Delta\hat{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)} = \hat{\mathbf{P}}, \quad (3.182)$$

$$(\mathbf{K}_T)_{(j-1)}^{(i)} \Delta\bar{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)} = \mathbf{R}_{(j-1)}^{(i)}. \quad (3.183)$$

Rješenjem se izraza (3.182) i (3.183) dobivaju vektori  $\Delta\hat{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)}$  i  $\Delta\bar{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)}$ , povratom se kojih u izraz (3.181), a uz uvjet da je poznat  $\Lambda_{(j)}^{(i)}$ , dobiva vektor inkrementalnih pomaka  $\Delta\mathbf{U}_{(j)}^{(i)}$ . Također, kako je u prvoj iteraciji svakog inkrementa vektor neuravnoteženog opterećenja jednak nul-vektoru, to je i vektor  $\Delta\bar{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)}$ , za prvu iteraciju svakog inkrementa, nul-vektor.

Sljedeći je problem kako odrediti faktor inkrementalnog opterećenja  $\Lambda_{(j)}^{(i)}$ , a što ovisi o tome koja je inkrementalno-iterativna procedura uporabljena. Među najpoznatije spadaju: *Newton-Raphsonova* procedura [28], *displacement control* procedura [48], *arc-length* procedura [26], *work control* procedura [47] te *generalized displacement control* procedura [57]. Pošto je u ovom radu uporabljena zadnja spomenuta procedura, a za koju su istraživanja pokazala da je najstabilnija u blizini kritičnih točaka, to se kod nje faktor inkrementalnog opterećenja određuje prema sljedećem izrazu:

$$\Lambda_{(j)}^{(i)} = \frac{H_{(j)}^{(i)} - \Lambda_{(1)}^{(i)} \left( \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(i-1)} \right)^T \Delta \bar{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)}}{\Lambda_{(1)}^{(i)} \left( \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(i-1)} \right)^T \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)}}, \quad (3.184)$$

gdje je  $H_{(j)}^{(i)}$  tzv. *generalizirani pomak*, a vrijednost je kojeg, za sve iteracije osim prve, jednaka nuli. Budući je  $\Delta \bar{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)} = \mathbf{0}$  za  $j = 1$  i  $H_{(j)}^{(i)} = 0$  za  $j \geq 2$ , to iz izraza (3.184), proizlazi:

$$\Lambda_{(j)}^{(i)} = \sqrt{\frac{H_{(j)}^{(i)}}{\left( \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(i-1)} \right)^T \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)}}}, \quad j = 1, \quad (3.185)$$

odnosno:

$$\Lambda_{(j)}^{(i)} = -\frac{\left( \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(i-1)} \right)^T \Delta \bar{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)}}{\left( \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(i-1)} \right)^T \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(j)}^{(i)}}, \quad j \geq 2. \quad (3.186)$$

Postavimo li, pak, da je za prvi inkrement:

$$\Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(0)} = \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(1)}, \quad (3.187)$$

iz izraza (3.185), slijedi:

$$H_{(1)}^{(1)} = \left( \Lambda_{(1)}^{(1)} \right)^2 \left( \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(1)} \right)^T \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(1)}. \quad (3.188)$$

Usvojimo li da je  $H_{(1)}^{(i)} = H_{(1)}^{(1)}$  za sve inkremente, tada se povratom izraza (3.188) u izraz (3.185), za prvu iteraciju proizvoljnog inkrementa, dobiva:

$$\Lambda_{(1)}^{(i)} = \Lambda_{(1)}^{(1)} \sqrt{\frac{\left( \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(1)} \right)^T \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(1)}}{\left( \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(i-1)} \right)^T \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(i)}}}, \quad (3.189)$$

pri čemu je  $\Lambda_{(1)}^{(1)}$  unaprijed zadana vrijednost. Definiramo li tzv. *generalizirani parametar krutosti* GSP, kao:

$$\text{GSP} = \frac{\left( \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(1)} \right)^T \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(1)}}{\left( \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(i-1)} \right)^T \Delta \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{(i)}}, \quad (3.190)$$

tada izraz (3.189) možemo napisati u sljedećem obliku:

$$\Lambda_{(1)}^{(i)} = \pm \Lambda_{(1)}^{(1)} \sqrt{|\text{GSP}|}. \quad (3.191)$$

stim da je predznak definiran rješenjem izraza (3.190), tj. pozitivan se predznak usvaja za slučaj kada se GSP iz toga izraza dobiva kao pozitivan, dok se negativan predznak usvaja kada se GSP dobiva kao negativan. Negativan predznak GSP-a znači da konstrukcija prelazi iz područja opterećenja u područje rasterećenja ili obrnuto, sl. 3.10.

Na kraju je svake iteracije potrebno provjeriti da li su vrijednosti komponenta vektora  $\mathbf{R}_{(j)}^{(i)}$  i  $\Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)}$  ili njihovih normi:

$$\|\mathbf{R}_{(j)}^{(i)}\| = \sqrt{\left( \mathbf{R}_{(j)}^{(i)} \right)^T \mathbf{R}_{(j)}^{(i)}}, \quad (3.192)$$

$$\|\Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)}\| = \sqrt{\left( \Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)} \right)^T \Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)}}, \quad (3.193)$$

unutar dopuštenih granica, odnosno potrebno je provjeriti da li je zadovoljen kriterij konvergencije. Najčešće se rabe tri vrste kriterija, kod kojih se kao mjera koristi:

- pomak:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)}\|}{\|\Delta \mathbf{U}_{(1)}^{(i)}\|} \leq \varepsilon_D, \quad (3.194)$$

- neuravnoteženo opterećenje:

$$\frac{\|\mathbf{R}_{(j)}^{(i)}\|}{\|\mathbf{R}_{(1)}^{(i)}\|} \leq \varepsilon_F, \quad (3.195)$$

- rad neuravnoteženog opterećenja:

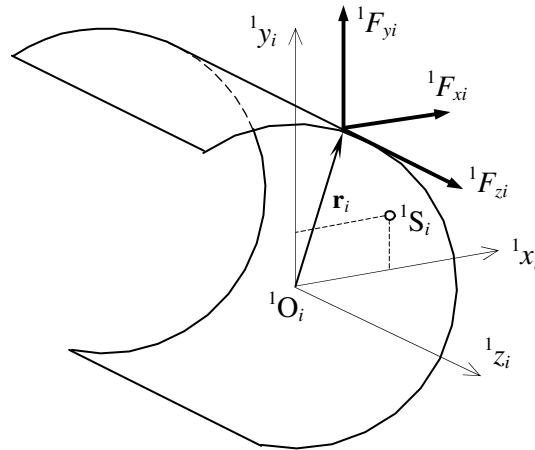
$$\frac{(\Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)})^T \mathbf{R}_{(j)}^{(i)}}{(\Delta \mathbf{U}_{(1)}^{(i)})^T \mathbf{R}_{(1)}^{(i)}} \leq \varepsilon_E, \quad (3.196)$$

pri čemu su:  $\varepsilon_D$ ,  $\varepsilon_F$  i  $\varepsilon_E$ , dopuštena odstupanja ili tolerancije. Uobičajene su vrijednosti ovih tolerancija [90]:

$$\varepsilon_D = \varepsilon_F = 10^{-3}; \quad \varepsilon_E = 10^{-10}, \dots, 10^{-6}. \quad (3.197)$$

### 3.10. Off-axis opterećenje

Pri izvođenju je geometrijske matrice krutosti konačnog elementa, izraz (3.77), pretpostavljeno da se hvatište aksijalne sile  ${}^1F_z$  nalazi u težištu poprečnog presjeka, a hvatište smičnih sila  ${}^1F_x$  i  ${}^1F_y$  u centru smicanja. Međutim, kada u  $i$ -tom čvoru konstrukcije djeluje tzv. *off-axis* sila, sl. 3.15, tada je geometrijskoj matrici krutosti konstrukcije potrebno pridodati korektivnu matricu krutosti za *off-axis* opterećenje.



Sl. 3.15. Off-axis opterećenje u  $i$ -tom čvoru konstrukcije

Ako je hvatište sile  $\mathbf{F}_i (F_{zi}, F_{xi}, F_{yi})$  definirano vektorom položaja  $\mathbf{r}_i (0, x_i, y_i)$ , tada korektivnu matricu krutosti za *off-axis* opterećenje možemo dobiti iz izraza (2.95), koji sada glasi:

$$\delta U_{G3}^{off} = -\delta \left\{ \int_A \left[ {}^1F_{zi} \delta(x - x_i, y - y_i) \tilde{w} + {}^1F_{xi} \delta(x - x_i, y - y_i) \tilde{u} + {}^1F_{yi} \delta(x - x_i, y - y_i) \tilde{v} \right] dA \right\}_i. \quad (3.198)$$

Kako su vrijednosti Dirachovh delta-funkcija, sada:

$$\delta(x - x_i, y - y_i) \tilde{w} = \frac{1}{2} \left( x_s \frac{dv_s}{dz} \varphi_z - y_s \frac{du_s}{dz} \varphi_z - x_i \frac{dv_s}{dz} \varphi_z + y_i \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right), \quad (3.199a)$$

$$\delta(x - x_i, y - y_i)\tilde{u} = \frac{1}{2} \left\{ -x_s \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 - y_s \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} - (x_i - x_s) \left[ \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 + \varphi_z^2 \right] - (y_i - y_s) \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} \right\}, \quad (3.199b)$$

$$\delta(x - x_i, y - y_i)\tilde{v} = \frac{1}{2} \left\{ -x_s \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} - y_s \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 - (x_i - x_s) \frac{dv_s}{dz} \frac{du_s}{dz} - (y_i - y_s) \left[ \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 + \varphi_z^2 \right] \right\}, \quad (3.199c)$$

tada povratom izraza (3.199) u izraz (3.198), uz substituciju iz izraza (3.111), dobivamo:

$$\begin{aligned} \delta U_{G3}^{off} &= \frac{1}{2} {}^1F_{zi} \delta \left( \underline{y_s \varphi_{zi} \varphi_{yi} + x_s \varphi_{zi} \varphi_{xi}} - x_i \varphi_{zi} \varphi_{xi} - y_i \varphi_{zi} \varphi_{yi} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} {}^1F_{xi} \delta \left[ \underline{x_s \varphi_{yi}^2 - y_s \varphi_{xi} \varphi_{yi}} + (x_i - x_s) (\varphi_{zi}^2 + \varphi_{yi}^2) - (y_i - y_s) \varphi_{xi} \varphi_{yi} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} {}^1F_{yi} \delta \left[ \underline{-x_s \varphi_{xi} \varphi_{yi} + y_s \varphi_{xi}^2} - (x_i - x_s) \varphi_{xi} \varphi_{yi} + (y_i - y_s) (\varphi_{zi}^2 + \varphi_{xi}^2) \right], \end{aligned} \quad (3.200)$$

stim da su podcrtani oni članovi koje sadrži i izraz (2.97), odnosno članovi koji su već uključeni u izraz (3.67). Odbijemo li od izraza (3.200) te članove, tada za  $i$ -ti čvor konstrukcije, dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^1F_{zi} \delta (-x_i \varphi_{zi} \varphi_{xi} - y_i \varphi_{zi} \varphi_{yi}) + \frac{1}{2} {}^1F_{xi} \delta [(x_i - x_s) (\varphi_{zi}^2 + \varphi_{yi}^2) - (y_i - y_s) \varphi_{xi} \varphi_{yi}] + \\ + \frac{1}{2} {}^1F_{yi} \delta [(x_i - x_s) \varphi_{xi} \varphi_{yi} + (y_i - y_s) (\varphi_{zi}^2 + \varphi_{xi}^2)] = \delta \hat{\boldsymbol{\phi}}_i^T \mathbf{k}_m^{off} \hat{\boldsymbol{\phi}}_i, \end{aligned} \quad (3.201)$$

pri čemu je:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_i^T = \{ \varphi_{zi} \quad \varphi_{xi} \quad \varphi_{yi} \}, \quad (3.202)$$

odnosno:

$$\delta \hat{\boldsymbol{\phi}}_i^T = \{ \delta \varphi_{zi} \quad \delta \varphi_{xi} \quad \delta \varphi_{yi} \}, \quad (3.203)$$

dok je  $\mathbf{k}_m^{off}$  korektivna matrica krutosti za *off-axis* opterećenje  $i$ -tog čvora, a čiji je oblik:

$$\mathbf{k}_m^{off} = \begin{bmatrix} {}^1F_{xi} (x_i - x_s) + {}^1F_{yi} (y_i - y_s) & -\frac{1}{2} {}^1F_{zi} x_i & -\frac{1}{2} {}^1F_{zi} y_i \\ -\frac{1}{2} {}^1F_{zi} x_i & {}^1F_{yi} (y_i - y_s) & -\frac{1}{2} [{}^1F_{xi} (y_i - y_s) + {}^1F_{yi} (x_i - x_s)] \\ -\frac{1}{2} {}^1F_{zi} y_i & -\frac{1}{2} [{}^1F_{xi} (y_i - y_s) + {}^1F_{yi} (x_i - x_s)] & {}^1F_{xi} (x_i - x_s) \end{bmatrix}. \quad (3.204)$$

Iz izraza (3.204) vidimo da je korektivna matrica krutosti simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu matrice, a da elementi na glavnoj dijagonali predstavljaju korektivne članove za tzv. *ekscentrične smične sile* [51], tj. za smične sile čija se hvatišta ne nalaze u centru smicanja poprečnog presjeka nosača, ali leže na pravcima koji prolaze kroz centar smicanja. Korektivnu je matricu krutosti danu izrazom (3.204), potrebno pridodati geometrijskoj matrici krutosti konstrukcije i to uz one članove te matrice, koji pripadaju čvoru konstrukcije u kojem se *off-axis* opterećenje javlja i koji se množe s rotacijskim pomacima toga čvora. Ovdje je potrebno naglasiti da je ovu korektivnu matricu bilo moguće dobiti samo iz razloga što je u analizu uključen i efekt velikih rotacija, a koji se manifestira kroz nelinearne komponente pomaka iz izraza (2.70).

### 3.11. Rotacijska svojstva momenata

Kao što je poznato, momenti se s obzirom na uzroke dijele na [1 – 6]:

- vanjske
- unutarnje.



Vanjski se momenti, pritom, javljaju kao posljedica mehaničkog djelovanja jednog tijela na drugo, dok se unutarnji momenti javljaju kao posljedica pojave naprezanja u poprečnim presjecima.

S obzirom na ponašanje koje iskazuju pri velikim prostornim rotacijama, momenti se dijele na [48, 50, 51, 52, 57]:

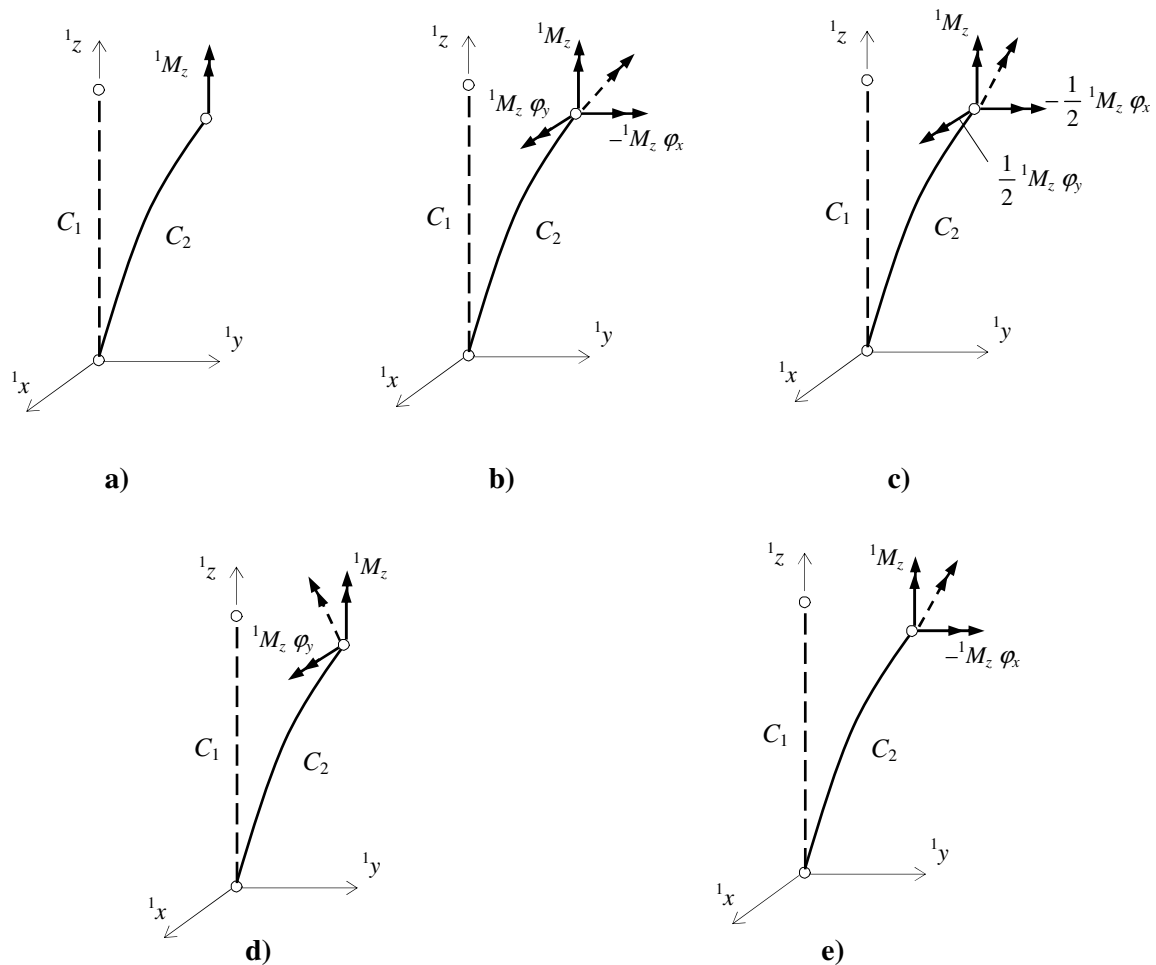
- aksijalne
- tangencijalne
- polutangencijalne
- kvazitangencijalne.

Moment se ponaša kao *aksijalni (axial moment)* onda kada njegov pravac i smjer pri prostornim rotacijama ostaju nepromijenjeni, što ima za posljedicu da su inducirani momenti na osima  $^1x$  i  $^1y$ , a u konfiguraciji  $C_2$ , jednaki nuli. Pod pojmom se induciranih momenata, pritom, podrazumijevaju momenti koji inkrementalnom rotacijom nekog momenta oko osi okomitih na pravac vektora tog momenta u konfiguraciji  $C_1$ , bivaju generirani ili inducirani na pravcu tih istih osi, ali u konfiguraciji  $C_2$  [57].

*Tangencijalni moment (tangential or follower moment)* u potpunosti prati prostornu rotaciju poprečnog presjeka u kojem djeluje, što ima za posljedicu da se na obje osi, koje su u konfiguraciji  $C_1$  okomite na pravac vektora tog momenta, u konfiguraciji  $C_2$  induciraju momenti.

*Polutangencijalni moment (semitangential moment)*, pri velikim prostornim rotacijama, inducira u konfiguraciji  $C_2$  momente jednake polovini vrijednosti momenata, induciranih pri prostornim rotacijama tangencijalnog momenta.

*Kvazitangencijalni moment (quasitangential moment)* inducira u konfiguraciji  $C_2$  moment samo na jednoj od osi, a intenzitet je induciranih momenta jednak intenzitetu momenta kojeg na istoj osi inducira tangencijalni moment. Također, kvazitangencijalni se momenti dijele, još, na tzv. prvu i drugu vrstu, a što će biti objašnjeno kasnije.



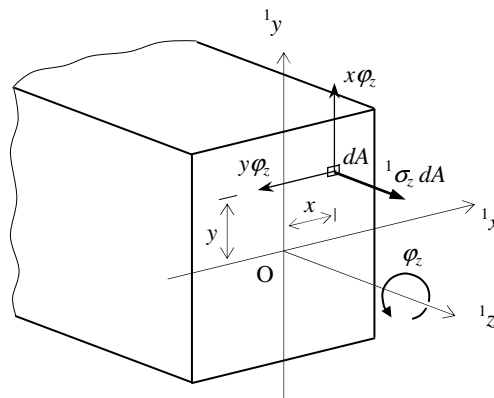
**Sl. 3.16.** Vrste torzijskog momenta  $^1M_z$ : a) aksijalni moment; b) tangencijalni moment; c) polutangencijalni moment; d) kvazitangencijalni moment prve vrste; e) kvazitangencijalni moment druge vrste

Na sl. 3.16 prikazan je primjer različitog ponašanja torzijskog momenta  ${}^1M_z$  u prisustvu velikih prostornih rotacija, a pri inkrementalnom pomaku konačnog elementa iz konfiguracije  $C_1$  u  $C_2$ . On se, pritom, ponaša kao aksijalni kada pri rotaciji tog momenta oko osi  ${}^1x$  i  ${}^1y$ , na pravcu tih osi u konfiguraciji  $C_2$  ne inducira nikakve momente, sl. 3.16a; kod tangencijalnog se momenta na osima  ${}^1x$  i  ${}^1y$  induciraju momenti  ${}^1M_z \varphi_y$  i  ${}^1M_z \varphi_x$ , sl. 3.16b; kod polutangencijalnog se momenta pri istim rotacijama induciraju u pola manje vrijednosti nego kod tangencijalnog, sl. 3.16c; kod kvazitangencijalnog se momenta prve vrste na osi  ${}^1x$  inducira moment  ${}^1M_z \varphi_y$ , sl. 3.16d, odnosno kod kvazitangencijalnog se momenta druge vrste na osi  ${}^1y$  inducira moment  ${}^1M_z \varphi_x$ , sl. 3.16e.

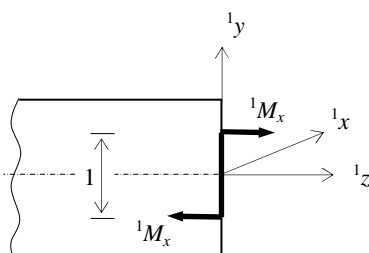
Ovdje je, također, potrebno napomenuti da polutangencijalni i kvazitangencijalni momenti spadaju u klasu konzervativnih momenata, dok aksijalni i tangencijalni momenti spadaju u klasu nekonzervativnih momenata [50, 57].

### 3.11.1. Unutarnji momenti

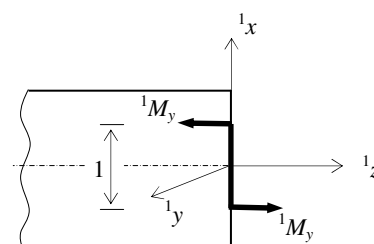
Radi pojednostavljenja, analiza će se sprovesti na grednom nosaču dvoosno simetričnog poprečnog presjeka ( $x_s = y_s = 0$ ), a zanemarit će se i utjecaj ograničenog vitoperenja poprečnog prejeka, tj. smatrat će se da je  ${}^1M_z = {}^1T_{sv}$ .



a)



b)



c)

**Sl. 3.17.** *Momenti savijanja: a) inkrementalna rotacija normalnog naprezanja oko osi  ${}^1z$  za kut  $\varphi_z$ ; b) kvazitangencijalni moment  ${}^1M_x$ ; c) kvazitangencijalni moment  ${}^1M_y$*

U skladu s izrazom (2.29d), slijedi da su vrijednosti momenata savijanja u konfiguraciji  $C_1$ :

$${}^1M_x = \int_A {}^1\sigma_z y dA, \quad {}^1M_y = -\int_A {}^1\sigma_z x dA. \quad (3.205)$$

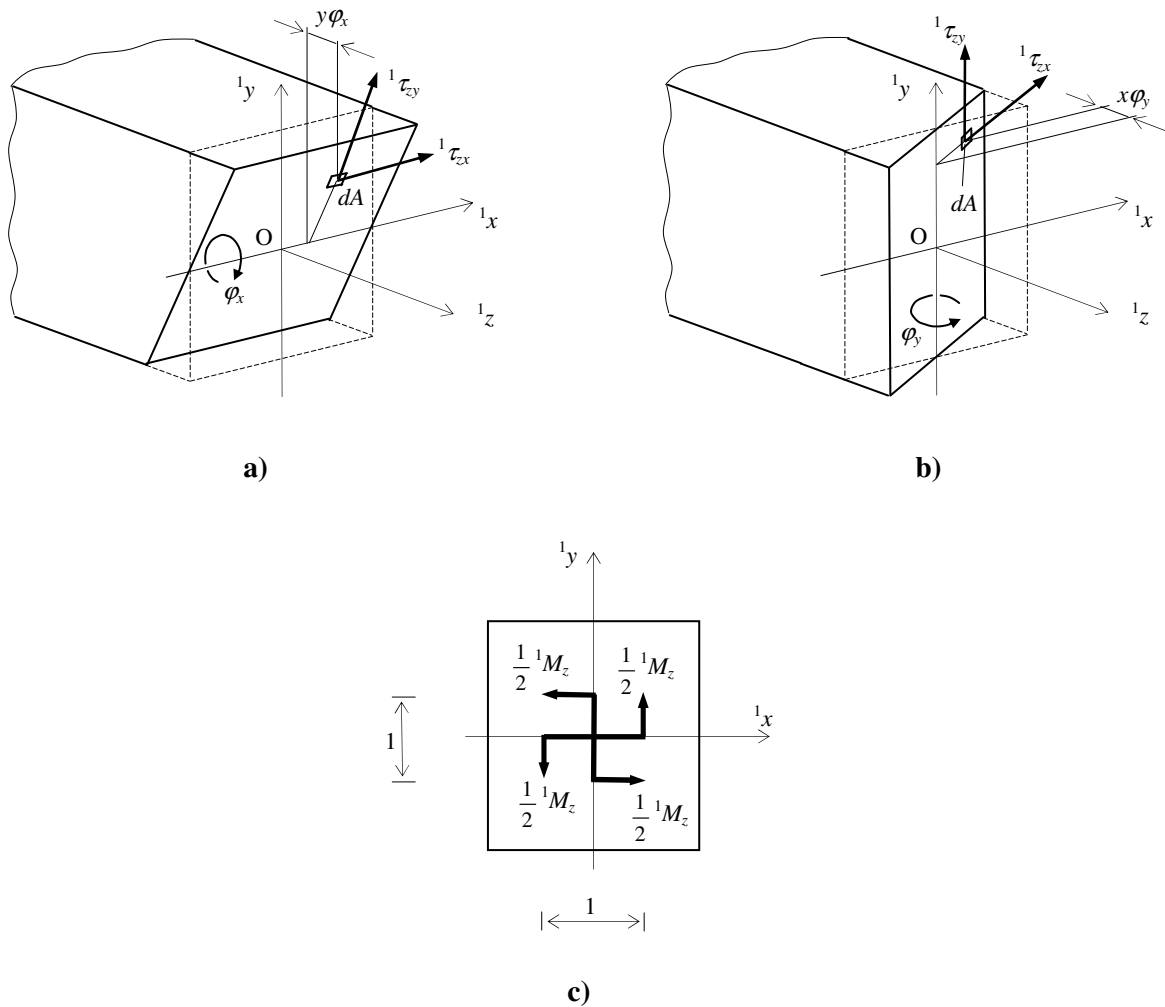
Pri inkrementalnoj rotaciji poprečnog presjeka oko osi  ${}^1z$  za kut  $\varphi_z$ , sl. 3.17a, sila  $\sigma_z dA$  inducira sljedeće vrijednosti momenata na osima  ${}^1x$  i  ${}^1y$ :

$$d(\Delta M_x) = {}^1\sigma_z x dA \varphi_z, \quad d(\Delta M_y) = {}^1\sigma_z y dA \varphi_z, \quad (3.206)$$

što nakon integriranja daje:

$$\Delta M_x = \int_A {}^1\sigma_z x dA \varphi_z = -{}^1M_y \varphi_z, \quad \Delta M_y = \int_A {}^1\sigma_z y dA \varphi_z = {}^1M_x \varphi_z. \quad (3.207)$$

U izrazu (3.207)  $\Delta M_x$  predstavlja moment savijanja za os  ${}^1x$  konačnog elementa u konfiguraciji  $C_2$ , induciran pri inkrementalnoj rotaciji momenta  ${}^1M_y$  oko osi  ${}^1z$  za kut  $\varphi_z$ . Analogno,  $\Delta M_y$  predstavlja moment savijanja za os  ${}^1y$  konačnog elementa u konfiguraciji  $C_2$ , induciran pri inkrementalnoj rotaciji momenta  ${}^1M_x$  oko osi  ${}^1z$  za kut  $\varphi_z$ . Izraz (3.207) definira momente savijanja  ${}^1M_x$  i  ${}^1M_y$  kao kvazitangencijalne momente, a simbolički ih možemo prikazati kao spreg sila jediničnog kraka, stim da su intenziteti sila jednaki  ${}^1M_x$ , sl. 3.17b, odnosno  ${}^1M_y$ , sl. 3.17c.



**Sl. 3.18.** Moment torzije: a) inkrementalna rotacija tangencijalnog naprezanja oko osi  ${}^1x$  za kut  $\varphi_x$ ; b) inkrementalna rotacija tangencijalnog naprezanja oko osi  ${}^1y$  za kut  $\varphi_y$ ; c) polutangencijalni moment  ${}^1M_z$

U slučaju torzije grednog nosača dvoosno simetričnog poprečnog presjeka, iz izraza (2.29c), a za konfiguraciju  $C_1$ , slijedi:

$${}^1M_z = \int_A ({}^1\tau_{zy} x - {}^1\tau_{zx} y) dA. \quad (3.208)$$

Kako pri čistoj torziji Navierova jednadžba iz izraza (2.31), glasi [5, 69]:

$$\frac{\partial {}^1\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial {}^1\tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (3.209)$$

te kako će ona biti zadovoljena, ako je:

$${}^1\tau_{zx} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad {}^1\tau_{zy} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (3.210)$$

gdje je  $\Psi = \Psi(x, y)$  potencijalna ili *Prandtlova* funkcija naprezanja, tada povratom izraza (3.210) u izraz (3.208), imamo:

$${}^1M_z = -\int_A \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} y \right) dA, \quad (3.211)$$

odnosno:

$$\int_A {}^1\tau_{zy} x dA = -\int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x} x dA, \quad -\int_A {}^1\tau_{zx} y dA = -\int_A \frac{\partial \Psi}{\partial y} y dA. \quad (3.212)$$

Pošto je vrijednost Prandtlove funkcije naprezanja na konturi jednaka nuli, to se parcijalnom integracijom izraza (3.212), dobiva:

$$\left. \begin{aligned} \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x} x dA &= \int_y \left[ (\Psi_x)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \Psi dx \right] dy = -\int_A \Psi dA \\ \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial y} y dA &= \int_x \left[ (\Psi_y)_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \Psi dy \right] dx = -\int_A \Psi dA \end{aligned} \right\}, \quad (3.213)$$

odnosno povratom izraza (3.213) u izraz (3.212), proizlazi:

$$\left. \begin{aligned} \int_A {}^1\tau_{zy} x dA &= \int_A \Psi dA \\ -\int_A {}^1\tau_{zx} y dA &= \int_A \Psi dA \end{aligned} \right\}. \quad (3.214)$$

Na osnovi izraza (3.208) i (3.214), konačno slijedi:

$$\int_A {}^1\tau_{zy} x dA = -\int_A {}^1\tau_{zx} y dA = \frac{1}{2} {}^1M_z. \quad (3.215)$$

Ako, sada, zarotiramo poprečni presjek oko osi  ${}^1x$  za kut  $\varphi_x$ , sl. 3.18a, odnosno oko osi  ${}^1y$  za kut  $\varphi_y$ , sl. 3.18b, tada će se na osima  ${}^1x$  i  ${}^1y$ , a zbog tangencijalnog naprezanja  ${}^1\tau_{zx}$  i  ${}^1\tau_{zy}$ , inducirati sljedeće vrijednosti momenata:

$$d(\Delta M_x) = {}^1\tau_{zy} x dA \varphi_y, \quad d(\Delta M_y) = {}^1\tau_{zx} y dA \varphi_x, \quad (3.216)$$

što, nakon integriranja, daje:

$$\Delta M_x = \int_A {}^1\tau_{zy} x dA \varphi_y = \frac{1}{2} {}^1M_z \varphi_y, \quad \Delta M_y = \int_A {}^1\tau_{zx} y dA \varphi_x = -\frac{1}{2} {}^1M_z \varphi_x. \quad (3.217)$$

U izrazu (3.217)  $\Delta M_x$  i  $\Delta M_y$  predstavljaju momente inducirane na osima  ${}^1x$  i  ${}^1y$  konačnog elementa u konfiguraciji  $C_2$ , zbog inkrementalne rotacije momenta  ${}^1M_z$  oko osi  ${}^1x$  za kut  $\varphi_x$ , odnosno oko osi  ${}^1y$  za kut  $\varphi_y$ . Izraz (3.217) definira St. Venantov torzijski moment  ${}^1M_z = {}^1T_{sv}$  kao polutangencijalni, a simbolički ga možemo prikazati s pomoću dva sprega sila jediničnih krakova, stim da su intenziteti sila jednaki polovini vrijednosti intenziteta samog momenta, sl. 3.18c. Karakter je torzijskog momenta u slučaju neslobodne torzije vrlo teško odrediti iz razloga što je unaprijed nepoznat udio torzijskog momenta vitoperenja  $T_\omega$  u ukupnom torzijskom momentu, kao i ponašanje torzijskog momenta vitoperenja pri velikim prostornim

rotacijama. Neka su istraživanja pokazala da se taj moment može ponašati i kao kvazitangencijalni i kao polutangencijalni [41].

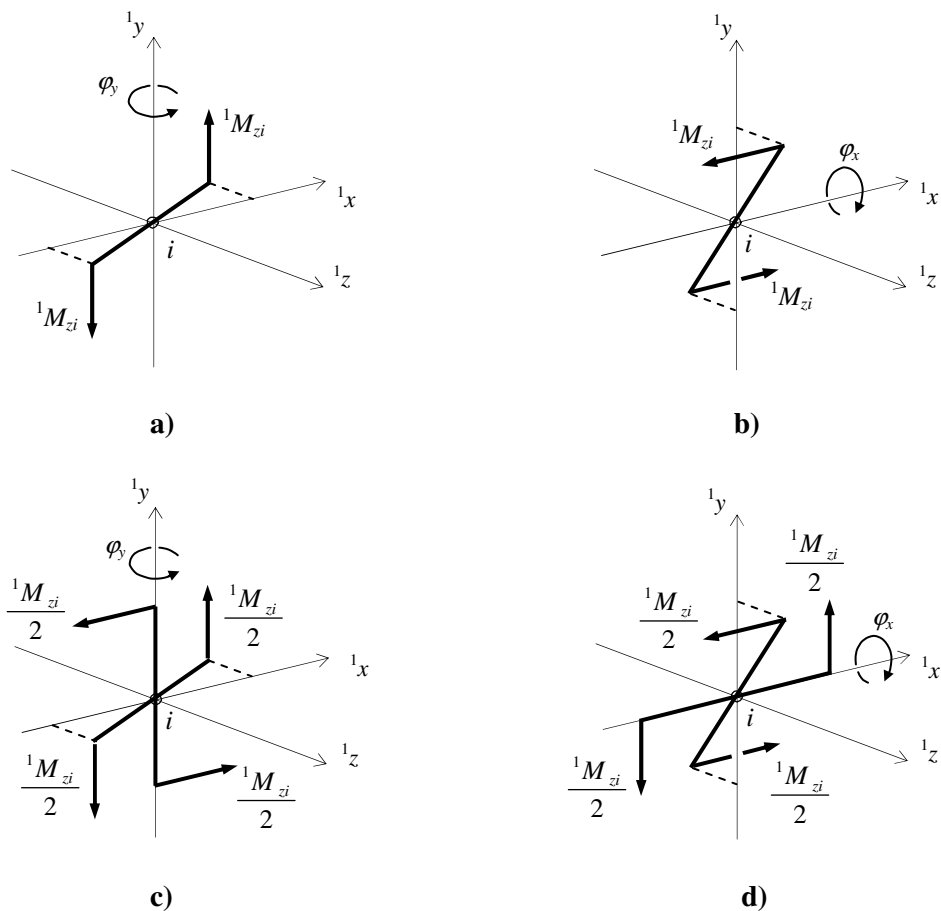
### 3.11.2. Vanjski momenti

U prethodnom smo poglavlju vidjeli da se pri prostornim rotacijama unutarnji momenti savijanja ponašaju kao kvazitangencijalni momenti, a da se unutarnji torzijski moment pri čistoj torziji ponaša kao polutangencijalni.

Međutim, vanjski se momenti savijanja pri prostornim rotacijama mogu ponašati kao polutangencijalni, dok se vanjski torzijski momenti mogu ponašati kao kvazitangencijalni. Pri tome se vanjski kvazitangencijalni momenti mogu ponašati kao oni prve vrste ili kao oni druge vrste. Vanjski se momenti savijanja definiraju kao kvazitangencijalni momenti prve vrste onda, kada pri prostornim rotacijama induciraju iste momente kao i unutarnji momenti savijanja. U protivnom se definiraju kao kvazitangencijalni momenti druge vrste. U daljnjem ćemo dijelu teksta polutangencijalnim momentima dodati oznaku ST, a kvazitangencijalnim momentima oznaku QT1 ili QT2, ovisno o tome da li su oni prve ili druge vrste.

Pretpostavit ćemo da su  ${}^1M_{zi}$ ,  ${}^1M_{xi}$  i  ${}^1M_{yi}$  vanjski momenti, a vektori kojih u konfiguraciji  $C_1$  leže na pravcu osi  ${}^1z$ ,  ${}^1x$  i  ${}^1y$ ,  $i$ -tog čvora konstrukcije. Pri tome ćemo kvazitangencijalni moment simbolički prikazivati prema sl. 3.17b ili 3.17c, tj. kao spreg sila jediničnog kraka i intenziteta sila jednakog momentu sprega, odnosno polutangencijalni moment prema sl. 3.18c, tj. kao dva sprega sila jediničnih krakova i intenziteta sila jednakog polovini momenta sprega.

#### a) Moment ${}^1M_{zi}$ :



**Sl. 3.19.** Inkrementalne rotacije momenta  ${}^1M_{zi}$  oko koordinatnih osi: a) rotacija momenta  ${}^1M_{zi}$ -QT1 oko osi  ${}^1y$ ; b) rotacija momenta  ${}^1M_{zi}$ -QT2 oko osi  ${}^1x$ ; c) rotacija momenta  ${}^1M_{zi}$ -ST oko osi  ${}^1y$ ; d) rotacija momenta  ${}^1M_{zi}$ -ST oko osi  ${}^1x$

Pri inkrementalnoj će se rotaciji momenta  ${}^1M_{zi}$ -QT1 oko osi  ${}^1y$  za kut  $\varphi_y$ , sl. 3.19a, inducirati sljedeći momenti:

$$\Delta M_{xi} = {}^1M_{zi} \varphi_y, \quad \Delta M_{yi} = 0, \quad (3.218)$$

dok će se pri inkrementalnoj rotaciji momenta  ${}^1M_{zi}$ -QT2 oko osi  ${}^1x$  za kut  $\varphi_x$ , sl. 3.19b, inducirati:

$$\Delta M_{xi} = 0, \quad \Delta M_{yi} = -{}^1M_{zi} \varphi_x. \quad (3.219)$$

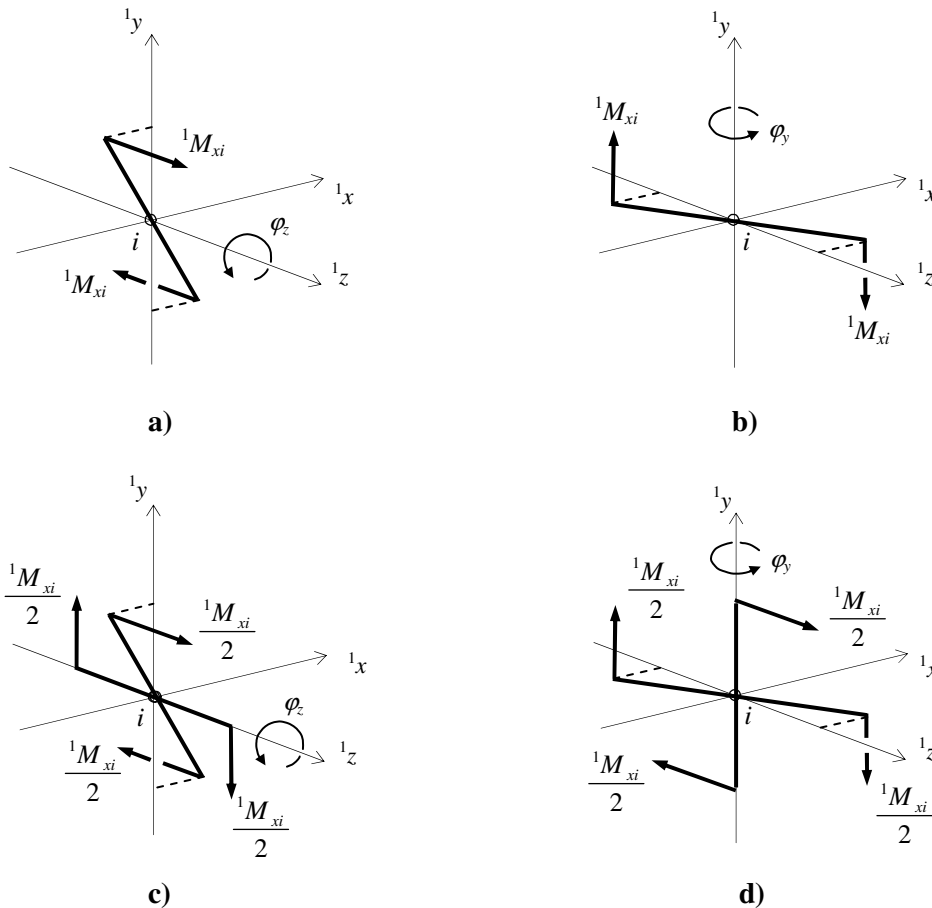
Momenti inducirani inkrementalnom rotacijom momenta  ${}^1M_{zi}$ -ST oko osi  ${}^1y$  za kut  $\varphi_y$ , sl. 3.19c, iznose:

$$\Delta M_{xi} = \frac{1}{2} {}^1M_{zi} \varphi_y, \quad \Delta M_{yi} = 0, \quad (3.220)$$

odnosno inkrementalnom rotacijom momenta  ${}^1M_{zi}$ -ST oko osi  ${}^1x$  za kut  $\varphi_x$ , sl. 3.19d:

$$\Delta M_{xi} = 0, \quad \Delta M_{yi} = -\frac{1}{2} {}^1M_{zi} \varphi_x. \quad (3.221)$$

### b) Moment ${}^1M_{xi}$ :



**Sl. 3.20.** Inkrementalne rotacije momenta  ${}^1M_{xi}$  oko koordinatnih osi: a) rotacija momenta  ${}^1M_{xi}$ -QT1 oko osi  ${}^1z$ ; b) rotacija momenta  ${}^1M_{xi}$ -QT2 oko osi  ${}^1y$ ; c) rotacija momenta  ${}^1M_{xi}$ -ST oko osi  ${}^1z$ ; d) rotacija momenta  ${}^1M_{xi}$ -ST oko osi  ${}^1y$

Inkrementalnom se rotacijom momenta  ${}^1M_{xi}$ -QT1 oko osi  ${}^1z$  za kut  $\varphi_z$ , sl. 3.20a, inducira:

$$\Delta M_{zi} = 0, \quad \Delta M_{yi} = {}^1M_{xi} \varphi_z, \quad (3.222)$$

odnosno inkrementalnom se rotacijom momenta  ${}^1M_{xi}$ -QT2 oko osi  ${}^1y$  za kut  $\varphi_y$ , sl. 3.20b, inducira:

$$\Delta M_{zi} = -^1M_{xi} \varphi_y, \quad \Delta M_{yi} = 0. \quad (3.223)$$

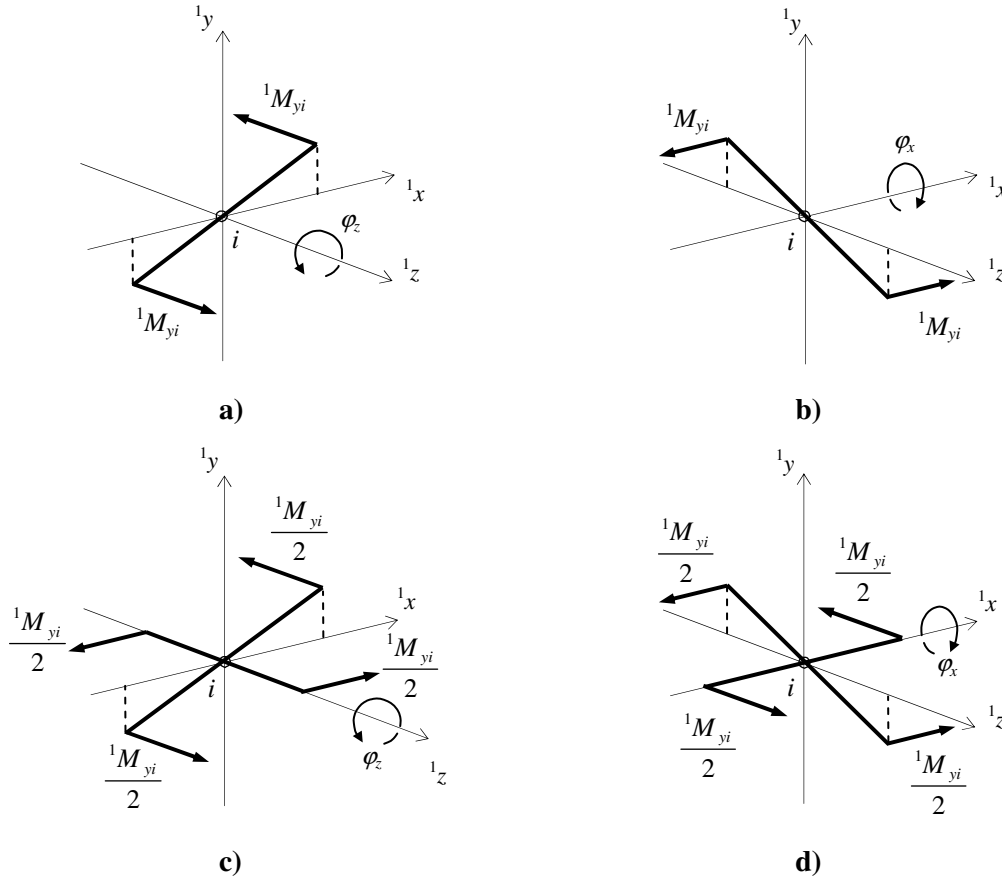
Rotacijom se, pak, momenta  $^1M_{xi}$ -ST oko osi  $^1z$  za kut  $\varphi_z$ , sl. 3.20c, inducira:

$$\Delta M_{zi} = 0, \quad \Delta M_{yi} = \frac{1}{2} ^1M_{xi} \varphi_z, \quad (3.224)$$

odnosno rotacijom oko osi  $^1y$  za kut  $\varphi_y$ , sl. 3.20d:

$$\Delta M_{zi} = -\frac{1}{2} ^1M_{xi} \varphi_y, \quad \Delta M_{yi} = 0 \quad (3.225)$$

c) Moment  $^1M_{yi}$ :



**Sl. 3.21.** Inkrementalne rotacije momenta  $^1M_{yi}$  oko koordinatnih osi: a) rotacija momenta  $^1M_{yi}$ -QT1 oko osi  $^1z$ ; b) rotacija momenta  $^1M_{yi}$ -QT2 oko osi  $^1x$ ; c) rotacija momenta  $^1M_{yi}$ -ST oko osi  $^1z$ ; d) rotacija momenta  $^1M_{yi}$ -ST oko osi  $^1x$

Zbog inkrementalne će se rotacije momenta  $^1M_{yi}$ -QT1 oko osi  $^1z$  za kut  $\varphi_z$ , sl. 3.21a, inducirati momenti:

$$\Delta M_{zi} = 0, \quad \Delta M_{xi} = -^1M_{yi} \varphi_z. \quad (3.226)$$

Isto tako, pri inkrementalnoj će se rotaciji momenta  $^1M_{yi}$ -QT2 oko osi  $^1x$  za kut  $\varphi_x$ , sl. 3.21b, inducirati momenti:

$$\Delta M_{zi} = ^1M_{yi} \varphi_x, \quad \Delta M_{xi} = 0. \quad (3.227)$$

Inkrementalnom se rotacijom momenta  $^1M_{yi}$ -ST oko osi  $^1z$  za kut  $\varphi_z$ , sl. 3.21c, inducira:

$$\Delta M_{zi} = 0, \quad \Delta M_{xi} = -\frac{1}{2} ^1M_{yi} \varphi_z, \quad (3.228)$$

a pri inkrementalnoj rotaciji oko osi  $^1x$  za kut  $\varphi_x$ , sl. 3.21d:

$$\Delta M_{zi} = \frac{1}{2} {}^1M_{yi} \varphi_x, \quad \Delta M_{xi} = 0 \quad (3.229)$$

Zbrojimo li, sada, sve momente inducirane pri inkrementalnim rotacijama kvazitangencijalnih momenata prve vrste (QT1), izrazi: (3.218), (3.222) i (3.226), u matičnom obliku imamo:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{zi} \\ \Delta M_{xi} \\ \Delta M_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -{}^1M_{yi} & 0 & {}^1M_{zi} \\ {}^1M_{xi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{M}}_{\text{QT1}} \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (3.230)$$

Ako, isto tako, zbrojimo sve inducirane momente nastale inkrementalnim rotacijama kvazitangencijalnih momenata druge vrste (QT2), izrazi: (3.219), (3.223) i (3.227), dobivamo:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{zi} \\ \Delta M_{xi} \\ \Delta M_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & {}^1M_{yi} & -{}^1M_{xi} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^1M_{zi} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{M}}_{\text{QT2}} \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (3.231)$$

Zbrojimo li, pak, sve momente inducirane pri inkrementalnim rotacijama polutangencijalnih momenata (ST), izrazi: (3.220), (3.221), (3.224), (3.225), (3.228) i (3.229), proizlazi:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{zi} \\ \Delta M_{xi} \\ \Delta M_{yi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & {}^1M_{yi} & -{}^1M_{xi} \\ -{}^1M_{yi} & 0 & {}^1M_{zi} \\ {}^1M_{xi} & -{}^1M_{zi} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{M}}_{\text{ST}} \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (3.232)$$

Da bismo ustvrdili kojeg su tipa unutarnji momenti u geometrijskoj matrici krutosti iz izraza (3.77), izdvojiti ćemo iz izraza (3.67) sve članove vezane uz momente  ${}^1M_z$ ,  ${}^1M_x$  i  ${}^1M_y$ , a koji sadrže samo rotacijske stupnjeve slobode ili njihove derivacije. Na taj način, uz substitucije iz izraza (3.111), dobivamo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ {}^1M_z \left[ \delta \left( \frac{d^2 u_s}{dz^2} \frac{dv_s}{dz} \right) - \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d^2 v_s}{dz^2} \right) \right] + {}^1M_x \left[ \delta \left( \frac{d^2 u_s}{dz^2} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + {}^1M_y \left[ \delta \left( \frac{d^2 v_s}{dz^2} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] \right\} dz = \\ & = \delta \frac{1}{2} \int_0^l \left[ {}^1M_z \left( \varphi_y \frac{d\varphi_x}{dz} - \varphi_x \frac{d\varphi_y}{dz} \right) + {}^1M_x \left( \varphi_z \frac{d\varphi_y}{dz} - \varphi_y \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + {}^1M_y \left( \varphi_x \frac{d\varphi_z}{dz} - \varphi_z \frac{d\varphi_x}{dz} \right) \right] dz = \\ & = \delta \frac{1}{2} \int_0^l \left[ ({}^1M_y \varphi_x - {}^1M_x \varphi_y) \frac{d\varphi_z}{dz} + ({}^1M_z \varphi_y - {}^1M_y \varphi_z) \frac{d\varphi_x}{dz} + ({}^1M_x \varphi_z - {}^1M_z \varphi_x) \frac{d\varphi_y}{dz} \right] dz = \\ & = \delta \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & {}^1M_y & -{}^1M_x \\ -{}^1M_y & 0 & {}^1M_z \\ {}^1M_x & -{}^1M_z & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} d\varphi_z/dz \\ d\varphi_x/dz \\ d\varphi_y/dz \end{Bmatrix} dz. \quad (3.233) \end{aligned}$$

Usporedimo li, sada, izraze (3.232) i (3.233), vidimo da se unutarnji momenti pri prostornim rotacijama ponašaju kao polutangencijalni. To ima za posljedicu da će ravnoteža između unutarnjih i vanjskih momenata na kraju inkrementa (konfiguracija  $C_2$ ) biti zadovoljena samo onda, ako su i vanjski momenti definirani kao polutangencijalni. Ukoliko se vanjski momenti ne ponašaju kao polutangencijalni, tada ravnoteža na kraju inkrementa neće biti zadovoljena, pa je, u tom slučaju, potrebno izvršiti korekciju geometrijske matrice krutosti konstrukcije s pomoću korektivnih matrica  $\mathbf{k}_m$ , kao i kod *off-axis* opterećenja.



Tako se, za slučaj da je u  $i$ -tom čvoru konstrukcija opterećena kvazitangencijalnim momentom prve vrste (QT1), korektivna matrica krutosti dobiva na način da se od matrice  $\hat{\mathbf{M}}_{ST}$  iz izraza (3.237), odbije matrica  $\hat{\mathbf{M}}_{QT1}$  iz izraza (3.230), tj.

$$\mathbf{k}_m^{QT1} = \hat{\mathbf{M}}_{ST} - \hat{\mathbf{M}}_{QT1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & {}^1M_{yi} & -{}^1M_{xi} \\ {}^1M_{yi} & 0 & -{}^1M_{zi} \\ -{}^1M_{xi} & -{}^1M_{zi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.234)$$

Ako je, pak, vanjski moment kvazitangencijalni druge vrste (QT2), korektivna se matrica krutosti dobiva tako da se od matrice  $\hat{\mathbf{M}}_{ST}$  odbije matrica  $\hat{\mathbf{M}}_{QT2}$  iz izraza (3.231), odnosno:

$$\mathbf{k}_m^{QT2} = \hat{\mathbf{M}}_{ST} - \hat{\mathbf{M}}_{QT2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^1M_{yi} & {}^1M_{xi} \\ -{}^1M_{yi} & 0 & {}^1M_{zi} \\ {}^1M_{xi} & {}^1M_{zi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.235)$$

U slučaju da je vanjski moment definiran kao aksijalni (Ax), tada se pri inkrementalnim prostornim rotacijama ne induciraju momenati, sl. 3.16a, što znači da je korektivna matrica krutosti tada:

$$\mathbf{k}_m^{Ax} = \hat{\mathbf{M}}_{ST} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & {}^1M_{yi} & -{}^1M_{xi} \\ -{}^1M_{yi} & 0 & {}^1M_{zi} \\ {}^1M_{xi} & -{}^1M_{zi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.236)$$

odnosno ako je vanjski moment tangencijalnog tipa (Tan), sl. 3.16b, tada je korektivna matrica krutosti:

$$\mathbf{k}_m^{Tan} = -\hat{\mathbf{M}}_{ST} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^1M_{yi} & {}^1M_{xi} \\ {}^1M_{yi} & 0 & -{}^1M_{zi} \\ -{}^1M_{xi} & {}^1M_{zi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.237)$$

Korektivne je matrice krutosti iz izraza (3.234) – (3.237), kao i onu iz izraza (3.204) za *off-axis* opterećenje, potrebno pridodati geometrijskoj matrici krutosti konstrukcije uz one članove koji pripadaju čvoru konstrukcije u kojem se dotični momenti pojavljuju i koji se množe s rotacijskim pomacima toga čvora. Konačno, tangenta matrica krutosti konstrukcije iz izraza (3.136), ima sada sljedeći oblik:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \left( \mathbf{K}_G + \sum \mathbf{k}_m^{off} + \sum \mathbf{k}_m^{QT2} + \sum \mathbf{k}_m^{QT1} + \sum \mathbf{k}_m^{Ax} + \sum \mathbf{k}_m^{Tan} \right). \quad (3.237)$$

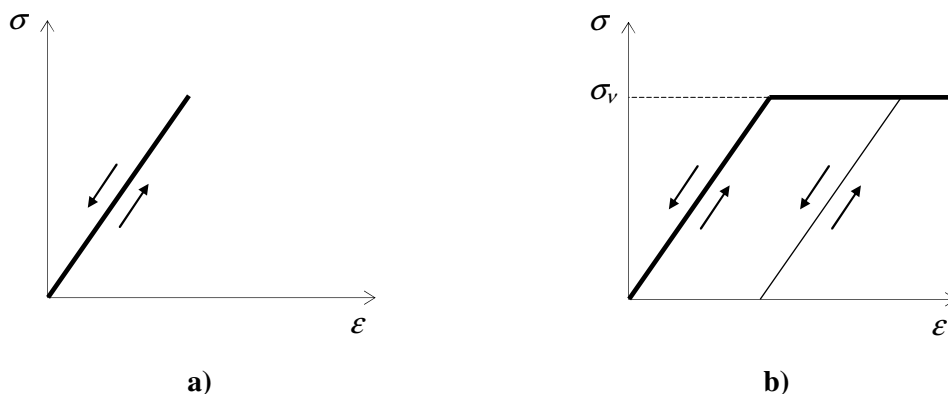
Prije uvođenja korektivnih matrica krutosti u izraz (3.237), potrebno ih je proširiti na red matrica krutosti konstrukcije. Ovdje je moguće primijetiti da su korektivne matrice krutosti iz izraza (3.236) i (3.237) nesimetrične, pa se, stoga, u slučaju opterećenja konstrukcije aksijalnim i/ili tangencijalnim momentima, narušava simetričnost geometrijske matrice krutosti konstrukcije. Razlog je nesimetričnosti ovih dviju korektivnih matrica krutosti nekonzervativna priroda aksijalnog i tangencijalnog momenta.

Također je potrebno naglasiti da su u izrazu (3.233) unutarnji momenti  ${}^1M_z$ ,  ${}^1M_x$  i  ${}^1M_y$  dobiveni kao polutangencijalni iz razloga što je geometrijska matrica krutosti konačnog elementa iz izraza (3.77), dobivena na osnovi nelinearnog polja pomaka iz izraza (2.71), a koje uzima u obzir efekt velikih prostornih rotacija. Zbog toga tangentnoj matrici krutosti konačnog elementa, izraz (3.81), nije potrebno dodavati tzv. čvornu momentnu matricu (*joint moment matrix*)  $\mathbf{k}_j^e$  konačnog elementa [91].

Naime, ukoliko se pri izvođenju geometrijske matrice krutosti koristi linearno polje pomaka iz izraza (2.23), tada se torzijski moment dobiva kao polutangencijalni, a momenti savijanja kao kvazitangencijalni. Kako se, u slučaju da su u nekom čvoru konstrukcije spojeni konačni elementi koji ne leže na istom pravcu, u vektoru unutarnjih sila  $\mathbf{F}$  konstrukcije, izraz (3.178), međusobno zbrajaju komponente momenata koji se pri velikim prostornim rotacijama ne ponašaju jednako, tada se na kraju inkrementa, a bez primjene matrice  $\mathbf{k}_j^e$ , javljaju neuravnoteženi inducirani momenti. Ova je neuravnoteženost upravo posljedica nekompatibilnosti velikih rotacijskih pomaka i kvazitangencijalne prirode unutarnjih momenata savijanja [57].

### 3.12. Materijalna nelinearnost

U dosadašnjem je razmatranju bilo pretpostavljeno da su tijekom inkrementalnog opterećenja diskretizirane konstrukcije, deformacije bile u potpunosti povratne te da je veza između napreznja i deformacije bila linearna i neovisna o vremenu, sl. 3.22a. Za takav odziv konstrukcije na djelovanje vanjskog opterećenja kažemo da je *materijalno linearan* [86].



Sl. 3.22. Krivulja  $\sigma - \varepsilon$  za: a) linearno-elastičan materijal; b) linearno-elastičan idealno-plastičan materijal

Međutim, ukoliko veza između napreznja i deformacije nije linearna ili se mijenja u vremenu, te ukoliko se tijekom procesa deformiranja konstrukcije pojavljuju trajne ili nepovratne deformacije, tada govorimo o *materijalno nelinearnom* odgovoru konstrukcije [24, 25, 92].

U ovom je radu materijalna nelinearnost uvedena uz sljedeće pretpostavke:

- materijal je linearno-elastičan idealno-plastičan, tj. kada napreznje  $\sigma$  u materijalu dostigne vrijednost napreznja na granici tečenja  $\sigma_v$ , deformacije rastu bez povećanja napreznja, sl. 3.22b
- nema zaostalih ili rezidualni napreznja
- svi su plastični efekti koncentrirani u tzv. plastičnim zglobovima (*plastic hinges*) nulte duljine [60, 68, 93 – 96]
- plastični se zglobovi pojavljuju samo u čvorovima konačnog elementa, dok je u polju konačnog elementa materijal linearno-elastičan
- geometrijska je nelinearnost uključena kroz velike translacijske i rotacijske pomake, dok su čiste deformacije male.

Za slučaj kada se plastifikacija poprečnog presjeka nosača definira primjenom plastičnih zglobova nulte duljine, materijalna se nelinearnost u jednadžbu konačnog elementa, izraz (3.80), uvodi kroz tzv. plastičnu redukcijsku matricu  $\mathbf{k}_p^e$  konačnog elementa [44, 94, 96]. Ova se matrica može dobiti uz pretpostavku da postoji kontinuirana funkcija tečenja  $\Phi$ , a koja je funkcija čvornih sila konačnog elementa i koja zadovoljava uvjet:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{f}^e) = 1, \quad (3.239)$$

stim da za slučaj  $\Phi < 1$  nema plastičnog zgloba, dok je slučaj  $\Phi > 1$  nedopušten. Ova funkcija tečenja predstavlja analitički oblik  $n$ -dimenzionalne plohe tečenja (*yield surface*), pri čemu za tankostijeni gredni konačni element  $n$  može poprimiti vrijednosti od 1 do 7, ovisno o tome za koje je komponente čvornih sila pretpostavljeno da utječu na plastifikaciju poprečnog presjeka.

Kako je pretpostavka da su čiste deformacije male, to se može primijeniti tzv. aditivna dekompozicija [84], tj. infinitezimalna se promijena vektora inkrementalnih pomaka  $d\mathbf{u}^e$  konačnog elementa može prikazati kao suma elastičnog i plastičnog dijela:

$$d\mathbf{u}^e = d\mathbf{u}_{el}^e + d\mathbf{u}_{pl}^e, \quad (3.240)$$

pri čemu donji desni indeks  $el$  označava elastični, a indeks  $pl$  plastični dio. U skladu s *Prandtlovim* kriterijem tečenja (*Prandtl's flow rule, normality principle*) [34, 92], plastična deformacija, definirana ovdje vektorom inkrementalnih čvornih pomaka  $d\mathbf{u}_{pl}^e$ , leži na pravcu normale plohe tečenja i okomita je na inkrement čvornih sila, odnosno:

$$(d\mathbf{u}_{pl}^e)^T d\mathbf{f}^e = 0, \quad (3.241)$$

ili

$$d\mathbf{u}_{pl}^e = \mathbf{G} d\lambda, \quad (3.242)$$

gdje je  $\mathbf{G}$  gradijentna matrica plohe tečenja, dok je  $d\lambda$  vektor proizvoljnih pozitivnih skalarnih funkcija ili plastičnih multiplikatora. Ako se plastični zglobovi javlja samo u čvoru A konačnog elementa, tada izraz (3.242) možemo napisati u sljedećem obliku:

$$d\mathbf{u}_{plA}^e = \mathbf{G}_A d\lambda_A, \quad (3.243)$$

pri čemu je:

$$\mathbf{G}_A^T = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_{zA}}, \frac{\partial \Phi}{\partial F_{xA}}, \frac{\partial \Phi}{\partial F_{yA}}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_{zA}}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_{xA}}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_{yA}}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_{\omega A}} \right\}. \quad (3.244)$$

Ukoliko se, pak, plastični zglobovi pojavljuju i u čvoru A i u čvoru B konačnog elementa, izraz (3.242) poprima oblik:

$$d\mathbf{u}_{pl}^e = \begin{Bmatrix} d\mathbf{u}_{plA}^e \\ d\mathbf{u}_{plB}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_A \\ d\lambda_B \end{Bmatrix}. \quad (3.245)$$

Za linearno-elastičan idealno-plastičan materijal inkrementalni se vektor čvornih sila konačnog elementa sastoji samo od elastičnog dijela, tj.

$$d\mathbf{f}^e = d\mathbf{f}_{el}^e, \quad d\mathbf{f}_{pl}^e = \mathbf{0}, \quad (3.246)$$

što na osnovi izraza (3.139), daje:

$$d\mathbf{f}^e = (\mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e - \mathbf{k}_{Ext}^e) d\mathbf{u}_{el}^e = \mathbf{k}_{T,Ext}^e d\mathbf{u}_{el}^e, \quad (3.247)$$

gdje je:

$$\mathbf{k}_{T,Ext}^e = \mathbf{k}_T^e - \mathbf{k}_{Ext}^e. \quad (3.248)$$

Ovdje je potrebno naglasiti da je za dobivanje vektora  $d\mathbf{f}^e$  iz izraza (3.247), rabljen izraz (3.139), a ne izraz (3.80), iz razloga što su generalizirane čvorne sile konačnog elementa definirane vektorom  ${}^2\mathbf{f}^e = {}_2^2\mathbf{f}^e$  [57, 60]. Vratimo li, sada, izraz (3.242) u izraz (3.241), dobivamo:

$$(\mathbf{G} d\lambda)^T d\mathbf{f}^e = d\lambda^T \mathbf{G}^T d\mathbf{f}^e = 0, \quad (3.249)$$

odnosno, kako je  $d\lambda$  proizvoljan, imamo:

$$\mathbf{G}^T d\mathbf{f}^e = 0. \quad (3.250)$$

Nadalje, kako na osnovi izraza (3.240), (3.242) i (3.247) slijedi:

$$d\mathbf{f}^e = \mathbf{k}_{T,Ext}^e (d\mathbf{u}^e - d\mathbf{u}_{pl}^e) = \mathbf{k}_{T,Ext}^e d\mathbf{u}^e - \mathbf{k}_{T,Ext}^e \mathbf{G} d\lambda, \quad (3.251)$$

to unošenjem izraza (3.251) u izraz (3.250), proizlazi:

$$d\lambda = (\mathbf{G}^T \mathbf{k}_{T,Ext}^e \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{k}_{T,Ext}^e d\mathbf{u}^e. \quad (3.252)$$

Vratimo li, pak, izraz (3.252) u izraz (3.251), dobivamo:

$$d\mathbf{f}^e = (\mathbf{k}_{T,Ext}^e - \mathbf{k}_P^e) d\mathbf{u}^e = (\mathbf{k}_T^e - \mathbf{k}_{Ext}^e - \mathbf{k}_P^e) d\mathbf{u}^e, \quad (3.253)$$

pri čemu je:

$$\mathbf{k}_P^e = \mathbf{k}_{T,Ext}^e \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{k}_{T,Ext}^e \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{k}_{T,Ext}^e, \quad (3.254)$$

U slučaju da plastični zglob nije formiran niti u jednom od čvorova konačnog elementa, tada je:

$$\mathbf{k}_P^e = \mathbf{0}. \quad (3.255)$$

Ukupna je matrica krutosti konačnog elementa u izrazu (3.80), sada:

$$\mathbf{k}_T^e - \mathbf{k}_P^e = \mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e - \mathbf{k}_P^e \quad (3.256)$$

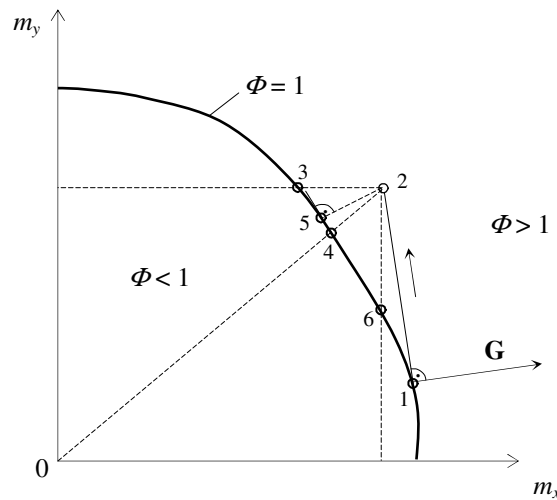
za prediktor fazu, odnosno u izrazu (3.139):

$$\mathbf{k}_{T,Ext}^e - \mathbf{k}_P^e = \mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e - \mathbf{k}_{Ext}^e - \mathbf{k}_P^e \quad (3.257)$$

za korektor fazu. Funkcija je plastične redukcijske matrice da inkrementalna promjena vektora čvornih sila konačnog elementa, kod kojeg je plastični zglob formiran u jednom ili oba čvora, u narednom inkrementu leži u tangencijalnoj ravnini plohe tečenja. No, kako se ta inkrementalna promjena odvija u tangencijalnoj ravnini, to znači da na kraju inkrementa neće biti zadovoljen kriterij tečenja, tj. imat ćemo:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{f}^e) > 1. \quad (3.258)$$

Stoga je na kraju inkrementa potrebno izvršiti korekciju vrijednosti komponenata vektora čvornih sila koje ulaze u funkciju tečenja, tako da bude zadovoljen uvjet iz izraza (3.239).



Sl. 3.23. Korekcija vrijednosti čvornih sila

Na sl. 3.23 prikazan je primjer kada izraz (3.239) predstavlja krivulju tečenja, odnosno kada je  $\Phi$  funkcija samo dviju komponenti i to:  $m_x = M_x / M_{x,gr}$  i  $m_y = M_y / M_{y,gr}$ , pri čemu su  $M_{x,gr}$  i  $M_{y,gr}$  granične vrijednosti momenata savijanja  $M_x$  i  $M_y$ , kod kojih je u svim točkama poprečnog presjeka normalno naprezanje pri savijanju oko osi  $x$ , odnosno osi  $y$ , jednako naprezanju na granici tečenja, tj.  $\sigma_z = \sigma_v$ . Uz pretpostavku da je u prethodnom inkrementu plastični zglob već formiran (točka 1), tada se promjena vrijednosti  $M_x$  i  $M_y$  može odvijati samo po pravcu 1 – 2, a koji predstavlja tangentu krivulje tečenja u točki 1, tj. u točki na početku inkrementa. Pošto se na kraju inkrementa točka 2 nalazi u području za koji je  $\Phi > 1$ , to ju je potrebno vratiti na krivulju tečenja, a što je moguće učiniti na nekoliko načina. Prvi je način da točku 2 vratimo po pravcu okomitom ili na os  $m_y$  ili na os  $m_x$ , što znači da se kraj inkrementa nalazi ili u točki 3 ili u točki 6. U ovom se slučaju korekcija obavlja uz konstantan  $M_y$  ili  $M_x$ . Sljedeća je mogućnost da točku 2 vratimo na krivulju tečenja po pravcu 0 – 2, što daje točku 4 ili da korekciju vršimo po pravcu 2 – 5, koji predstavlja normalu krivulje tečenja u točki 5. U praktičnim se primjerima, a zbog

svoje jednostavnosti, najviše koristi korekcija 2 – 4, pogotovo kada je  $\Phi$  funkcija od 3 ili više komponenata čvornih sila [60, 92]. Ovaj je oblik korigiranja vrijednosti čvornih sila u plastičnim zglobovima, po svom načinu analogan tzv. *radial return* metodi [84].

Transformacija se plastične redukcijske matrice konačnog elementa iz lokalnog u globalni koordinatni sustav izvodi na isti način kao kod elastične i geometrijske matrice, izrazi (3.133) i (3.134), tj.

$$\bar{\mathbf{k}}_p^e = \left({}^1\mathbf{t}^e\right)^T \mathbf{k}_p^e {}^1\mathbf{t}^e. \quad (3.259)$$

Tangentna matrica krutosti konstrukcije iz izraza (3.135), sada ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G - \mathbf{K}_P, \quad (3.260)$$

pri čemu je  $\mathbf{K}_P$  plastična redukcijska matrica konstrukcije, dobivena asembliranjem matrica  $\bar{\mathbf{k}}_p^e$  svih konačnih elemenata.

Također, budući da vektor  $d\lambda$  sadrži pozitivne skalarne funkcije, dobivanje negativnog člana toga vektora u izrazu (3.252), upućuje na pojavu tzv. *elastičnog rasterećenja* plastičnog zgloba tijekom inkrementalnog opterećenja [68]. U tom je slučaju dotični inkrement kod čiste inkrementalne procedure, odnosno dotičnu iteraciju kod inkrementalno-iterativne procedure, potrebno nulirati, tj. plastični zglob kod kojeg se elastično rasterećenje pojavilo, mora biti odstranjen modifikacijom plastične redukcijske matrice iz izraza (3.254) te se taj inkrement ili iteracija moraju ponoviti s tako modificiranom plastičnom redukcijskom matricom konačnog elementa [94].

## 4. PROGRAM THINWALL

Na osnovi numeričkog algoritma prikazanog u prethodnom poglavlju, a temeljenog na metodi konačnih elemenata, izrađen je kompjutorski program THINWALL, čiji je programski kod napisan u programskom jeziku *Fortran 77/90*. Program se sastoji od glavnog programa i 34 potprograma, a radi u režimu dvostruke preciznosti (*double precision*).

U ovom će dijelu biti dan kratki opis programa, kao i test primjeri s pomoću kojih je verificirana njegova točnost i pouzdanost.

### 4.1. Kratki opis programa

Program je namijenjen linearnoj i nelinearnoj analizi stabilnosti tankostijenih struktura, a diskretizaciju kojih je moguće izvoditi s pomoću tankostijenog grednog konačnog elementa prikazanog na sl. 3.1.

Linearna se analiza stabilnosti (bifurkacijska stabilnost) temelji na pretpostavci da je za svaki nivo vanjskog opterećenja konstrukcije odnos unutarnjih sila kvalitativno uvijek isti. Stoga, pri formiranju geometrijske matrice krutosti konstrukcije  $\mathbf{K}_G$ , možemo izlučiti faktor proporcionalnosti  $\lambda$ , nakon čega je ostali dio geometrijske matrice krutosti linearan [17, 34]. Tako, uz uvjet da se u trenutku gubitka stabilnosti vrijednost vanjskog opterećenja konstrukcije ne mijenja, tj.  $\mathbf{P} = {}^2\mathbf{P} - {}^1\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , iz izraza (3.135) proizlazi:

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G)\mathbf{U} = \mathbf{P} = \mathbf{0},$$

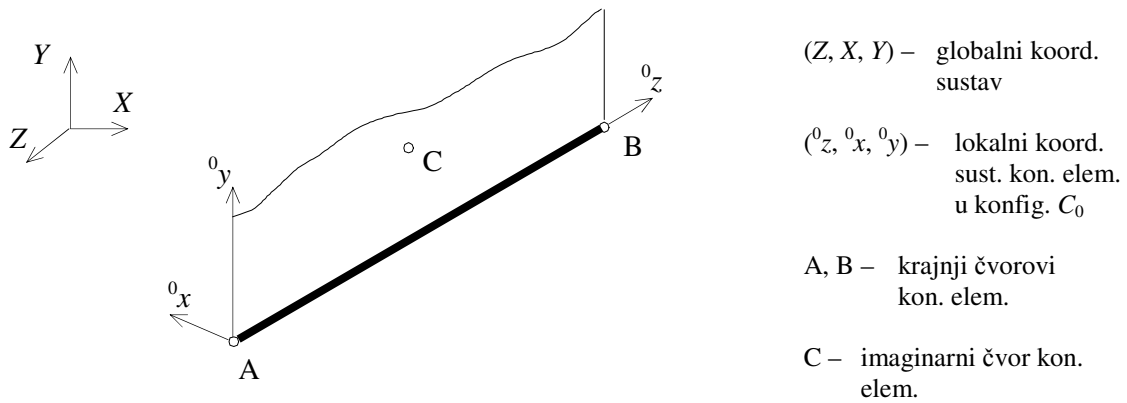
tj.

$$(\mathbf{K}_E + \lambda\hat{\mathbf{K}}_G)\mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

čime je dobiven standardni matični problem vlastitih vrijednosti, u kojem  $\lambda$  predstavlja vlastitu vrijednost ili faktor kritičnog opterećenja kod kojeg konstrukcija gubi stabilnost, dok je  $\mathbf{U}$  pripadni vlastiti vektor i ima, sada, značenje deformacijske forme pri kojoj konstrukcija gubi stabilnost. Od praktičnog su značenja samo najniže vlastite vrijednosti, odnosno vlastiti vektori. Za rješavanje se problema danog izrazom (4.1), koristi potprogram DGVCGRG iz IMSL biblioteke programskog paketa *Fortran PowerStation V.4*, temeljen na tzv. *QZ* algoritmu, stim da je potrebno, prije rješavanja samog problema, elastičnu i geometrijsku matricu krutosti konstrukcije kondenzirati izbacivanjem redaka i stupaca matrica, koji pripadaju spriječenim pomacima.

Također, da bi se sačuvala simetričnost geometrijske matrice krutosti konstrukcije, vanjsko opterećenje mora biti konzervativnog tipa, dok je u slučaju opterećenja konstrukcije *off-axis* opterećenjem i kvazitangencijalnim momentima, geometrijskoj matrici krutosti konstrukcije potrebno pridodati korektivne matrice krutosti iz izraza (3.204), (3.234) i (3.235).

Kako se cijela linearna analiza stabilnosti provodi na nedeformiranoj konstrukciji, tj. na konstrukciji u konfiguraciji  $C_0$ , to se za svaki konačni element pri transformaciji iz lokalnog u globalni koordinatni sustav, koristi samo transformacijska matrica  ${}^0\mathbf{t}^e$ , izraz (3.129). Da bi tu transformacijsku matricu bilo moguće formirati, za svaki je konačni element, uz dva krajnja čvora A i B, potrebno definirati i dodatni čvor C, a s kojim se određuje položaj glavne centralne ravnine inercije ( ${}^0z$ ,  ${}^0y$ ) konačnog elementa. Kao dodatni se čvor može koristiti ili već postojeći čvor diskretizirane konstrukcije ili se za dotični konačni element uvodi tzv. *imaginarni* čvor [31], sl. 4.1.



Sl. 4.1. Položaj imaginarnog čvora C prostornog grednog konačnog elementa

Nelinearna se analiza stabilnosti temelji na rješavanju problema danog izrazom (3.135), primjenom inkrementalno-iterativne procedure s automatskim podešavanjem inkrementa opterećenja, a opis koje je dan u pogl. 3.9.2. Da bi se ova analiza mogla izvoditi, potrebno je *savršene* sustave (konstrukcije), a koji se razmatraju kod bifurkacijske stabilnosti, pretvoriti u *nesavršene* sustave uvođenjem *poremećaja*, da bi se inicirao nastanak odgovarajuće deformacijske forme te omogućilo njeno praćenje tijekom cijelog procesa opterećenja konstrukcije. Na kraju se svake iteracije izvodi korekcija geometrije diskretizirane konstrukcije postupkom opisanom u pogl. 3.8. Pri tome se kod korekcije referentnih osi čvorova, a zbog uključenog efekta velikih rotacijskih pomaka, rabi matrica dana izrazom (3.149). Unutar svakog inkrementa, iteracije se ponavljaju sve dok nije zadovoljen uvjet konvergencije  $\varepsilon_E$ , dan izrazom (3.196), ili dok broj obavljenih iteracija unutar jednog inkrementa ne dostigne maksimalni dopušteni broj iteracija, čime je spriječena mogućnost *beskonačnog* iteriranja. Proces deformiranja konstrukcije traje sve dok je nivo vanjskog opterećenja konstrukcije ispod maksimalne dopuštene vrijednosti ili dok se broj obavljenih inkremenata ne izjednači s maksimalnim dopuštenim brojem inkremenata. Kako primijenjena inkrementalno-iterativna procedura zahtijeva da se vrijednosti članova vektora referentnog opterećenja u izrazu (3.182) ne mijenjaju tijekom procesa deformiranja konstrukcije, to kod nelinearne analize konstrukciju nije moguće opteretiti *off-axis* opterećenjem na način opisan u pogl. 3.10, dok vanjski momenti mogu biti samo aksijalnog tipa. U tom je slučaju tangentnoj matrici krutosti konstrukcije iz izraza (3.182) i (3.183), potrebno pridodati korektivnu matricu krutosti danu izrazom (3.236).

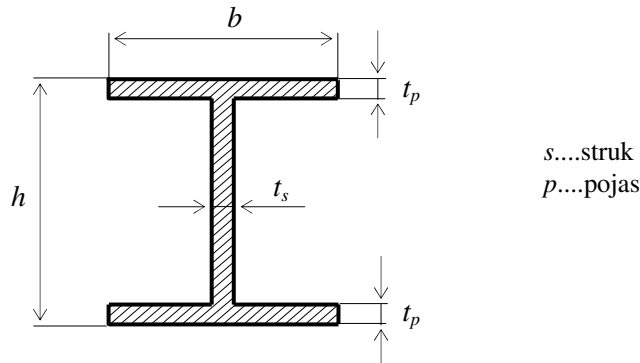
Materijalna je nelinearnost u nelinearnu analizu stabilnosti kod programa *THINWALL* uključena za slučaj linearno-elastičnog idealno-plastičnog materijala i temelji se na metodi plastičnih zglobova, opisanoj u pogl. 3.12. Pritom je za dotični poprečni presjek i dani materijal, potrebno poznavati krivulju tečenja iz izraza (3.239) te, na osnovi nje, članove gradijentne matrice iz izraza (3.244). Korekcija se vrijednosti komponenata vektora čvornih sila konačnog elementa, kod kojeg je plastični zglob formiran u jednom ili oba čvora, izvodi po pravcu 2 – 4 – 0, sl. 3.24. Proračun traje sve dok tangentna matrica krutosti konstrukcije, izraz (3.260), ne postane singularna.

Kao ogledni je primjer u ovoj disertaciji usvojena funkcija tečenja:

$$\Phi = 1,15 \left( \frac{F_z}{F_{z,gr}} \right)^2 + \left( \frac{M_z}{M_{z,gr}} \right)^2 + \left( \frac{M_x}{M_{x,gr}} \right)^2 + \left( \frac{M_y}{M_{y,gr}} \right)^4 + 3,67 \left( \frac{F_z}{F_{z,gr}} \right)^2 \left( \frac{M_x}{M_{x,gr}} \right)^2 + 3 \left( \frac{F_z}{F_{z,gr}} \right)^6 \left( \frac{M_y}{M_{y,gr}} \right)^2 + 4,65 \left( \frac{M_x}{M_{x,gr}} \right)^4 \left( \frac{M_y}{M_{y,gr}} \right)^2 + \left( \frac{M_\omega}{M_{\omega,gr}} \right)^2, \quad (4.2)$$

koju su u analitičkom obliku, a na osnovi tabličnih podataka za plohu tečenja ( $F_z - M_x - M_y$ ) lakog I-profila W12×31 (AISC standard), prvi dobili Orbison *et al.* [94] i koja je pokazala vrlo dobro poklapanje s plohama tečenja ostalih lakih i srednje teških I-profila prema AISC normativima (*American Institut of Steel Structures*), a potom je Conci i Gattass [60] proširili za slučaj plohe tečenja ( $F_z - M_x - M_y - M_z - M_\omega$ ). U izrazu (4.2) vrijednosti u brojnici predstavljaju komponente vektora čvornih sila konačnog

elementa, dok su s indeksom  $gr$  označene njihove granične vrijednosti. Pri tome su, kao granične vrijednosti aksijalne sile i momenata savijanja, usvojene one vrijednosti kod kojih je u svakoj točki poprečnog presjeka normalno naprežanje  $\sigma_z$  jednako onom na granici tečenja  $\sigma_v$ , a u slučaju kada je nosač izložen samo aksijalnom opterećenju, odnosno samo savijanju u jednoj ili drugoj glavnoj centralnoj ravnini inercije [17, 24, 74]. Za I-profil sa sl. 4.2, one iznose [76]:



Sl. 4.2. I-profil

$$F_{z,gr} = \sigma_v [2bt_p + t_s(h - 2t_p)], \quad (4.3)$$

$$M_{x,gr} = \sigma_v \left[ bt_p(h - t_p) + t_s \left( \frac{h}{2} - t_p \right)^2 \right], \quad (4.4)$$

$$M_{y,gr} = \sigma_v \left[ \frac{b^2 t_p}{2} + \frac{t_s^2}{4} (h - 2t_p) \right], \quad (4.5)$$

dok je kao granična vrijednost za bimoment usvojena ona vrijednost kod koje imamo potpunu plastifikaciju pojaseva profila [60], tj.

$$M_{\omega,gr} = \sigma_v b^2 t_p \frac{h - t_p}{4}. \quad (4.6)$$

Problem je određivanja granične vrijednosti torzijskog momenta  $M_{z,gr}$  mnogo složeniji, jer se kod nejednolike torzije on sastoji od granične vrijednosti St. Venatova torzijskog momenta  $T_{sv,gr}$  i granične vrijednosti torzijskog momenta vitoperenja  $T_{\omega,gr}$ , stim da je udio svakog unaprijed nepoznat. Također, za razliku od granične vrijednosti St. Venatova torzijskog momenta, koja za dani materijal ovisi samo o obliku poprečnoga presjeka, granična vrijednost torzijskog momenta vitoperenja ovisi, još, i o rubnim uvjetima, vrsti opterećenja, duljini nosača itd.

U ovom je radu usvojeno:

$$M_{z,gr} = T_{sv,gr}, \quad (4.7)$$

pri čemu je za I-profil sa sl. 4.1 [60]:

$$M_{z,gr} = \tau_v \left[ bt_p^2 + \frac{1}{2} (h - t_p) t_s^2 \right], \quad (4.8)$$

stim da je uz uvjet da vrijedi von Misesov kriterij tečenja [28, 92]:

$$\tau_v = \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} \cong 0,577 \sigma_v. \quad (4.9)$$

Na osnovi funkcije tečenja dane izrazom (4.2), slijedi da gradijentna matrica iz izraza (3.245) ima sljedeći oblik:



$$\mathbf{G}_i^T = \left\{ \frac{\partial \Phi_i}{\partial F_{zi}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial M_{zi}} \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial M_{xi}} \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial M_{yi}} \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial M_{\omega i}} \right\}, \quad i = A, B, \quad (4.10)$$

gdje je:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial F_{zi}} = \frac{1}{F_{z,gr}} \left[ 2,3 \frac{F_{zi}}{F_{z,gr}} + 7,34 \frac{F_{zi}}{F_{z,gr}} \left( \frac{M_{xi}}{M_{x,gr}} \right)^2 + 18 \left( \frac{F_{zi}}{F_{z,gr}} \right)^5 \left( \frac{M_{yi}}{M_{y,gr}} \right)^2 \right], \quad (4.11a)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial M_{zi}} = \frac{2M_{zi}}{M_{z,gr}^2}, \quad (4.11b)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial M_{xi}} = \frac{1}{M_{x,gr}} \left[ 2 \frac{M_{xi}}{M_{x,gr}} + 7,34 \left( \frac{F_{zi}}{F_{z,gr}} \right)^2 \frac{M_{xi}}{M_{x,gr}} + 18,6 \left( \frac{M_{xi}}{M_{x,gr}} \right)^3 \left( \frac{M_{yi}}{M_{y,gr}} \right)^2 \right], \quad (4.11c)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial M_{yi}} = \frac{1}{M_{y,gr}} \left[ 4 \left( \frac{M_{yi}}{M_{y,gr}} \right)^3 + 6 \left( \frac{F_{zi}}{F_{z,gr}} \right)^6 \frac{M_{yi}}{M_{y,gr}} + 9,3 \left( \frac{M_{xi}}{M_{x,gr}} \right)^4 \frac{M_{yi}}{M_{y,gr}} \right], \quad (4.11d)$$

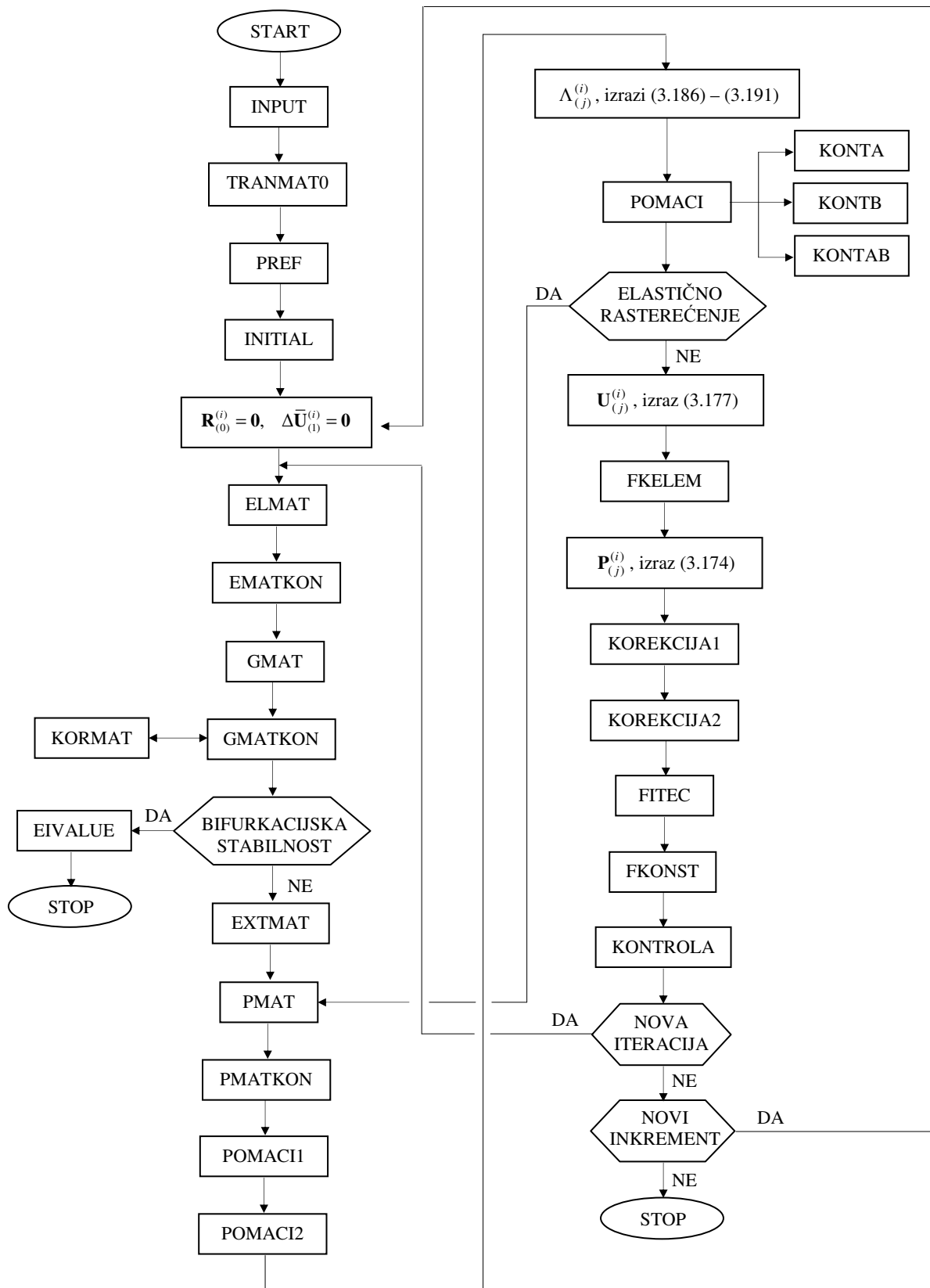
$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial M_{\omega i}} = \frac{2M_{\omega i}}{M_{\omega,gr}^2}. \quad (4.11e)$$

Kako se korekcija vrijednosti čvornih sila u plastičnom zglobu izvodi povratom iz točke 2 u točku 4, sl. 3.24, vrijedi da je:

$$\frac{F_{zi,4}}{F_{zi,2}} = \frac{M_{zi,4}}{M_{zi,2}} = \frac{M_{xi,4}}{M_{xi,2}} = \frac{M_{yi,4}}{M_{yi,2}} = \frac{M_{\omega i,4}}{M_{\omega i,2}} = p_i, \quad i = A, B. \quad (4.12)$$

Pošto su vrijednosti s indeksom 2 poznate na kraju iteracije, a za koje je  $\Phi_i > 1$ ,  $i = A, B$ ; to se unošanjem izraza (4.12) u izraz (4.2), dobiva polinom osmoga stupnja koji, zbog konveksnosti plohe tečenja, daje dva realna i šest kompleksnih rješenja za  $p_i$ , pri čemu su realna rješenja jednaka po apsolutnom iznosu, ali suprotnoga predznaka. Za rješavanje je ovog problema u programu THINWALL primijenjen potprogram BISECT iz ref. [97], koji za određivanje korjena polinoma rabi metodu *bisekcije*. Konačno, povratom se pozitivnog realnog rješenja u izraz (4.2), dobivaju korigirane vrijednosti čvornih sila, označene u izrazu (4.12) s indeksom 4.

Pojednostavljeni je dijagram tijeka programa THINWALL prikazan na sl. 4.3.



Sl. 4.3. Dijagram tijeka programa THINWALL

## 4.2. Opis potprograma

Potprogram INPUT učitava ulaznu datoteku, a s kojom se definira: geometrija konstrukcije, vrsta analize, geometrija i elasto-plastomehaničke karakteristike konačnih elemenata, rubni uvjeti i vanjsko opterećenje. Lista je ulaznih parametara:

NN	- broj stvarnih čvorova
NI	- broj imaginarnih čvorova
NK	- broj konačnih elemenata
N0	- broj čvorova s ograničenim pomacima
NF	- broj čvorova s vanjskim opterećenjem
N00F	- broj čvorova s <i>off-axis</i> opterećenjem
IOPT	- vrsta analize:
	IOPT = 1 - bifurkacijska stabilnost
	IOPT = 2 - inkrementalna elastična stabilnost
	IOPT = 3 - inkrementalna elasto-plastična stabilnost
PLAMBDA	- faktor početnog opterećenja $\Lambda_{(1)}^{(1)}$
PMAXLAM	- dopušteno opterećenje konstrukcije
EPS	- dopušteno odstupanje $\varepsilon_E$
ZI(I), XI(I), YI(I)	- koordinate čvorova konstrukcije u globalnom koordinatnom sustavu (Z, X, Y), pri čemu je I = 1, ..., (NN + NI).

Kod bifurkacijske stabilnosti PLAMBDA, PMAXLAM i EPS jednaki su 0.

Za svaki je konačni elementi (I = 1, ..., NK) potrebno definirati:

AC(I), BC(I)	- početni i krajnji čvor konačnog
CC(I)	- dodatni čvor za određivanje glavne centralne ravnine inercije ( $^0z, ^0y$ )
A(I)	- površina poprečnog presjeka A
Ix(I), Iy(I)	- glavni centralni momenti inercije $I_x$ i $I_y$ poprečnoga presjeka
J(I)	- torzijski moment inercije J poprečnoga presjeka
Iw(I)	- glavni sektorski moment inercije $I_\omega$
ALFAZ(I), ALFAX(I), ALFAY(I), ALFAW(I)	- vrijednosti faktora: $\alpha_z, \alpha_x, \alpha_y$ i $\alpha_\omega$ iz izraza (2.47)
E(I)	- Youngov modul
G(I)	- modul smicanja
Fzni(I)	- granična vrijednost aksijalne sile $F_{z,gr}$
Mzni(I)	- granična vrijednost torzijskog momenta $M_{z,gr}$
Mxni(I), Myni(I)	- granične vrijednosti momenata savijanja $M_{x,gr}$ i $M_{y,gr}$
Mwni(I)	- granična vrijednost bimomenta $M_{\omega,gr}$

Za definiciju je čvorova sa spriječenim pomacima potrebno definirati:

INN(I)	- broj čvorova s ograničenim pomacima
W(I), U(I), V(I)	- translacijski pomaci na pravcu globalnih osi Z, X i Y
Fiz(I), Flx(I), Fiy(I)	- rotacijski pomaci oko globalnih osi Z, X i Y
THETA(I)	- vitoperenje,

pri čemu se s 0 definira spriječeni pomak, dok 1 označava da je pomak slobodan.

Vanjsko je opterećenje (I = 1, ..., NF) definirano sljedećim podacima:

INF(I)	- broj čvorova s vanjskim opterećenjem
Fz(I), Fx(I), Fy(I)	- vrijednosti sila na pravcima globalnih osi Z, X i Y
Mz(I), Mx(I), My(I)	- vrijednost momenata za globalne osi Z, X i Y
MTyp(I)	- vrsta momenta:
	MTyp(I) = 0 - polutangencijalni moment (ST)
	MTyp(I) = 1 - kvazitangencijalni moment (QT1)
	MTyp(I) = 2 - kvazitangencijalni moment (QT2)
	MTyp(I) = 3 - aksijalni moment (Ax)
	MTyp(I) = 4 - aksijalni moment (Tan)

Mw(I) - bimoment.

U slučaju *off-axis* opterećenja potrebno je definirati:

IN00F(I)	- broj čvorova s <i>off-axis</i> opterećenjem
Fzoof(I), Fxoof(I),	

- Fyooof(I) - komponente *off-axis* sile u lokalnom koordinatnom sustavu ( ${}^0z, {}^0y, {}^0x$ )  
 Xoof(I), Yoof(I) - koordinate hvatišta *off-axis* sile u lokalnom koordinatnom sustavu ( ${}^0z, {}^0y, {}^0x$ )  
 XSoof(I), YSoof(I) - koordinate centra smicanja u lokalnom koordinatnom sustavu ( ${}^0z, {}^0y, {}^0x$ )

pri čemu je  $I = 1, \dots, N00F$ .

Za inkrementalnu je analizu, također, potrebno definirati:

- NINK - maksimalni broj inkremenata  $\Lambda_{\max}$   
 NITER - maksimalni broj iteracija po inkreментu.

Za slučaj NITER = 1 nelinearna se analiza stabilnosti odvija prema čistoj inkrementalnoj proceduri. Također, za slučaj NINK = 1 i NITER = 1 imamo linearnu statičku analizu, tj. dobivamo odziv konstrukcije prema tzv. *teoriji prvoga reda*.

Potprogram TRANMAT0 formira transformacijske matrice konačnih elementa za konfiguraciju  $C_0$ , izraz (3.129), odnosno članove vektora  ${}^0z_s, {}^0x_s$  i  ${}^0y_s$  iz izraza (3.157).

Potprogram PREF, na osnovi početnih vrijednosti vanjskog opterećenja iz ulazne datoteke, formira vektor referentnog opterećenja iz  $\hat{\mathbf{P}}$  izraza (3.175).

Potprogram INITIAL, za prvu iteraciju prvog inkrementa, formira početne vrijednosti sljedećih parametara:

- za konstrukciju:

$$\mathbf{\Lambda}_{(0)}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_{(0)}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_{(0)}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \Delta \mathbf{U}_{(0)}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U}_{(0)}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad (4.13)$$

- za svaki čvor konstrukcije:

$$\left. \begin{aligned} Z_{(0)}^{(1)} &= \mathbf{Z}\mathbf{I}(\mathbf{I}), & X_{(0)}^{(1)} &= \mathbf{X}\mathbf{I}(\mathbf{I}), & Y_{(0)}^{(1)} &= \mathbf{Y}\mathbf{I}(\mathbf{I}) \\ \zeta_{(0)}^{(1)} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, & \xi_{(0)}^{(1)} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, & \eta_{(0)}^{(1)} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (4.14)$$

- za svaki konačni element:

$$\left( \mathbf{f}^e \right)_{(0)}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \left( \mathbf{z}_s \right)_{(0)}^{(1)} = {}^0\mathbf{z}_s, \quad \left( \mathbf{x}_s \right)_{(0)}^{(1)} = {}^0\mathbf{x}_s, \quad \left( \mathbf{y}_s \right)_{(0)}^{(1)} = {}^0\mathbf{y}_s. \quad (4.15)$$

Potprogram ELMAT formira elastične matrice krutosti svih konačnih elemenata, izraz (3.65), transformira ih u globalni koordinatni sustav prema izrazu (3.133) te ih, potom, potprogram EMATKON slaže u elastičnu matricu krutosti konstrukcije.

Isto tako, potprogram GMAT formira geometrijske matrice krutosti konačnih elemenata, izraz (3.77), te ih transformira u globalni koordinatni sustav, izraz (3.134). Nakon toga ih potprogram GMATKON slaže u geometrijsku matricu krutosti konstrukcije, kojoj se, po potrebi, pozivanjem potprograma KORMAT dodaju korektivne matrice krutosti iz izraza (3.204), (3.234) – (3.236).

U slučaju bifurkacijske stabilnosti potprogram EIVALUE kondenzira elastičnu i geometrijsku matricu krutosti konstrukcije, formira problem vlastitih vrijednosti iz izraza (4.1), računa i ispisuje vlastite vrijednosti i vlastite vektore, stim da se prethodno dobiveni vlastiti vektor proširuje dodavanjem nultih pomaka.

Potprogram EXTMAT formira eksterne matrice krutosti konačnih elemenata prema izrazu (3.117), za *force recovery* fazu.

Prema izrazu (3.254), potprogram PMAT formira plastične redukcijske matrice konačnih elementa, transformira ih u globalni koordinatni sustav prema izrazu (3.259), a zatim ih potprogram PMATKON slaže u plastičnu redukcijsku matricu konstrukcije.

Potprogram POMACI1 kondenzira tangentnu matricu krutosti konstrukcije iz izraza (3.260) i određuje vektor inkrementalnih čvornih pomaka konstrukcije iz izraza (3.182), dok potprogram POMACI2 kondenzira vektor neuravnoteženog opterećenja iz izraza (3.178) te određuje vektor inkrementalnih čvornih pomaka konstrukcije iz izraza (3.183). Za rješavanje se sustava algebarskih jednadžbi kod oba potprograma rabi *Gassova metoda eliminacije* [97].

Na osnovi izraza (3.181) potprogram POMACI određuje ukupni vektor inkrementalnih čvornih pomaka konstrukcije, a u skladu s izrazom (3.126) i vektore inkrementalnih čvornih pomaka konačnih elemenata u lokalnom koordinatnom sustavu. Također, za slučaj da je u prethodnoj iteraciji kod nekog

konačnog elementa bio formiran plastični zglobov, primjenom izraza (3.252) provjerava da li je u tekućoj iteraciji došlo do elastičnog rasterećenja plastičnog zgloba. U tu se svrhu pozivaju potprogrami:

- KONTA - za slučaj plastičnog zgloba u čvoru A,
- KONTB - za slučaj plastičnog zgloba u čvoru B,
- KONTAB - za slučaj plastičnog zgloba u oba čvora.

Potprogram FKELEM za svaki konačni element, a na osnovi njegova vektora inkrementalnih čvornih pomaka, određuje vektor čvornih sila prema izrazu (3.139).

Potprogram KOREKCIJA1 korigira koordinate čvorova konstrukcije prema izrazu (3.151) i položaj referentnih osi čvorova prema izrazu (3.145), dok potprogram KOREKCIJA2 korigira geometriju konačnih elemenata i formira transformacijske matrice konačnih elemenata za narednu iteraciju, prema postupku opisanom u pogl. 3.8.2.

Za svaki konačni element potprogram FITEC provjerava da li su se pojavili plastični zglobovi te u skladu s izrazom (4.12) korigira vrijednosti komponenata vektora čvornih sila iz izraza, a koje ulaze u funkciju tečenja i za koje je  $\Phi > 1$ .

Potprogram FKONST transformira vektore čvornih sila konačnih elementa prema izrazu (3.127) te formira vektor unutarnjih sila konstrukcije iz izraza (3.172).

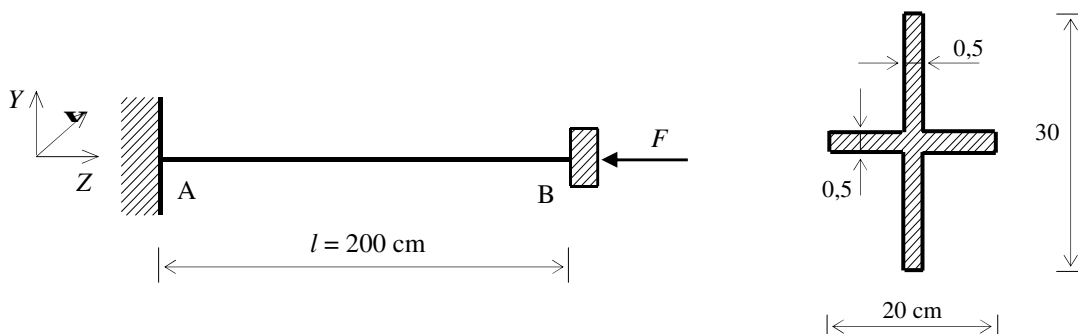
Potom, potprogram KONTROLA računa vektor neuravnoteženog opterećenja prema izrazu (3.178) te specifični rad neuravnoteženog opterećenja prema izrazu (3.196). Ako je specifični rad veći od dopuštenog specifičnog rada, definiranog ulaznim parametrom EPS, program prelazi u novu iteraciju, a ako je specifični rad manji od dopuštenog, program prelazi u novi inkrement.

### 4.3. Primjeri

U cilju testiranja kvalitete numeričkog algoritma prikazanog u pogl. 3 i implementiranog u program THINWALL, u ovome je dijelu rada prikazano 12 primjera. Od toga je kod prvih 7 primjera u analizu stabilnosti uključena samo geometrijska nelinearnost, dok je u preostalim 5 primjera analiziran geometrijski i materijalno nelinearan odziv dotične konstrukcije. Također, uz većinu su primjera dane i vrijednosti bifurkacijskog opterećenja, tj. vrijednosti kritičnog opterećenja dobivene linearnom analizom stabilnosti.

#### Primjer 4.3.1. Čisto torzijsko i čisto fleksijsko izvijanje

Na sl. 4.4 prikazana je konzola dvoosno simetričnog križnog poprečnog presjeka, opterećena u presjeku B centričnom tlačnom silom intenziteta  $F$ . Vitoperenje je, osim u presjeku A, spriječeno i u presjeku B. Materijal konzole je čelik s modulom elastičnosti  $E = 210 \cdot 10^5 \text{ Ncm}^{-2}$  i modulom smicanja  $G = 80,77 \cdot 10^5 \text{ Ncm}^{-2}$ .



Sl. 4.4. Tlačno opterećena konzola dvoosno simetričnog križnog poprečnog presjeka iz primjera 4.3.1

Kako je poprečni presjek dvoosno simetričan, to se njegovo težište i centar smicanja poklapaju te su, stoga, moguća dva oblika izvijanja: čisti torzijski i čisti fleksijski oblik. Također, pošto se kod križnog poprečnog presjeka srednje linije profila sijeku u istoj točki, tada je prema izrazu (2.27e) glavni sektorski moment inercije jednak nuli za slučaj da je glavna sektorska koordinata  $\omega$  definirana prema izrazu (2.18), odnosno različit je od nule kada je  $\omega$  definiran prema izrazu (2.16).

U tabl. 4.1 i 4.2 dane su vrijednosti kritične sile za oba oblika izvijanja dobivene linearnom analizom stabilnosti, a za različite stupnjeve diskretizacije konzole. Uz vrijednosti su dobivene programom THINWALL, dane i teorijske vrijednosti kritičnih sila, kao i vrijednosti dobivene programom MSC/NASTRAN primjenom *shell* modela [98].

**Tab. 4.1.** Vrijednosti kritične sile  $F = F_{kr} = F_{\varphi}$  (kN) kod čistog torzijskog izvijanja konzole iz primjera 4.3.1

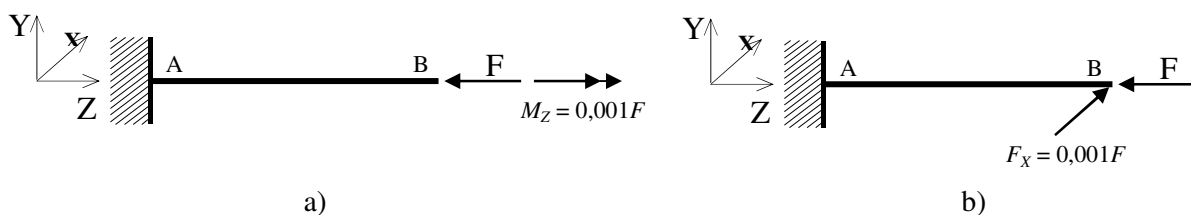
Br. elem.	THINWALL		Teorijska vrijednost	MSC/NASTRAN [98] ( <i>shell</i> model)
	$I_{\omega} = 0$	$I_{\omega} \neq 0$		
1	285,491	288,197	- izraz (2.140): 285,484	288,880
2	285,491	288,182		
4	285,491	288,163	- izraz (2.139): 286,155	
8	285,491	288,162		

**Tab. 4.2.** Vrijednosti kritične sile  $F = F_{kr} = F_y$  (kN) kod čistog fleksijskog izvijanja konzole iz primjera 4.3.1

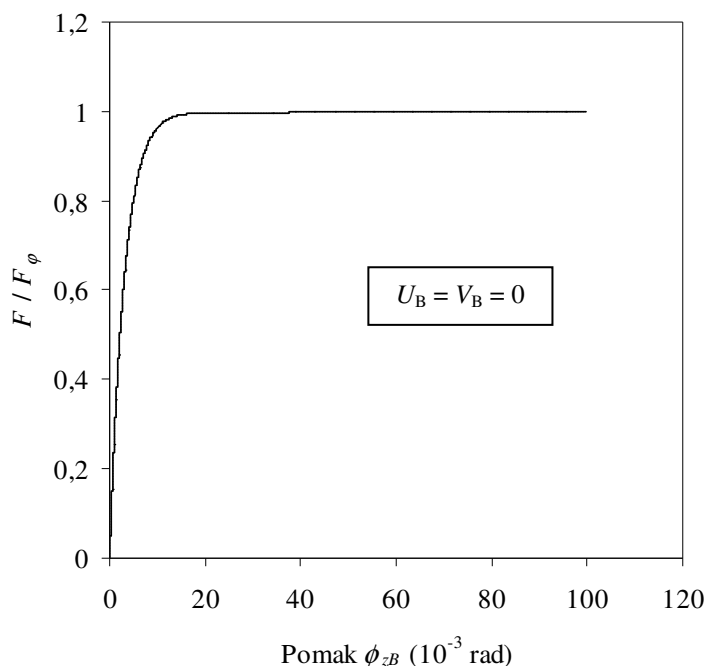
Br. elem.	THINWALL		Teorijska vrijednost izraz (2.122)	MSC/NASTRAN [98] ( <i>shell</i> model)
	$I_{\omega} = 0$	$I_{\omega} \neq 0$		
1	435,391	435,391	432,141	428,280
2	432,362	432,362		
4	432,155	432,155		
8	432,142	432,142		

Na osnovi vrijednosti iz tabl. 4.1 i tabl. 4.2 vidimo da je kritična sila pri čistom torzijskom izvijanju ( $F_{kr} = F_{\varphi}$ ) manja od kritične sile za čisto fleksijsko izvijanje ( $F_{kr} = F_y$ ), te da je u oba slučaja postignuta vrlo visoka točnost i pri diskretizaciji konzole samo s jednim konačnim elementom. Također, kod čistog se torzijskog izvijanja rješenja dobivena za slučajeve  $I_{\omega} = 0$  i  $I_{\omega} \neq 0$  razlikuju približno 1 %, stim da su u prvom slučaju dobivena rješenja vrlo bliska teorijskoj vrijednosti, dok se u potonjem rješenja odlično poklapaju s vrijednošću dobivenom primjenom *shell* modela. Kao što je bilo i za očekivati, kod čistog fleksijskog izvijanja vrijednost sektorskog momenta inercije nije imala utjecaja na rezultat.

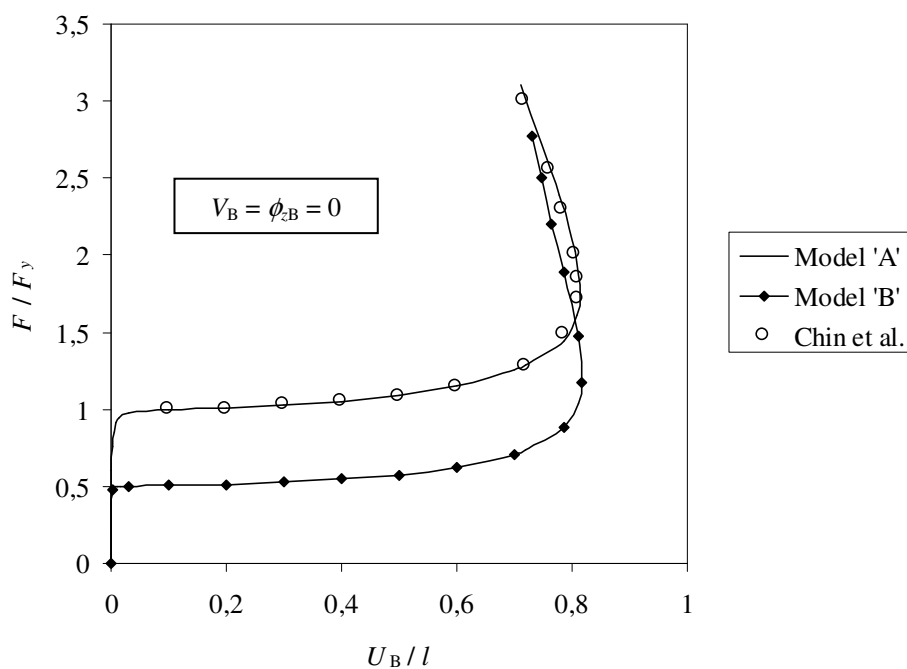
Kod nelinearne je analize stabilnosti konzola diskretizirana s četiri tankostijena gredna konačna elementa, stim da je za iniciranje čistog torzijskog izvijanja konzola u presjeku B dodatno opterećena torzijskim spregom momenta  $M_z = 0,001F$ , sl. 4.5a, dok je za iniciranje čistog fleksijskog izvijanja konzola u presjeku B, a na pravcu osi X, dodatno opterećena silom  $F_x = 0,001F$ , sl. 4.5b. Dobivena su rješenja prikazana u obliku dijagrama *sila – pomak*, sl. 4.6 i sl. 4.7. Također, kod čistog je fleksijskog izvijanja analiziran i utjecaj eksterne matrice krutosti konačnog elementa iz izraza (3.117) i to tako da su formirana dva modela: model ‘A’, koji u korektor fazi rabi eksternu matricu krutosti, izraz (3.139), i model ‘B’, koji u korektor fazi ne rabi eksternu matricu krutosti, tj. vektor se čvornih sila konačnog elementa za novu konfiguraciju određivao prema izrazu (3.83). Dobivena su rješenja uspoređena s poznatim rješenjem kojeg su dobili Chin *et al.* [87] primjenom specijalnih *plate* elemenata, UL formulacije i NDA pristupa.



**Sl. 4.5.** Opterećenje konzole iz primjera 4.3.1. za nelinearnu analizu: a) čistog torzijskog izvijanja; b) čistog fleksijskog izvijanja



Sl. 4.6. Dijagram  $[(F/F_\phi) - \phi_{zB}]$  konzole iz primjera 4.3.1 za čisto torzijsko izvijanje ( $F_\phi = 288,88$  kN)



Sl. 4.7. Dijagram  $[(F/F_y) - (U_B/l)]$  konzole iz primjera 4.3.1. za čisto fleksijsko izvijanje ( $F_y = 437,141$  kN)

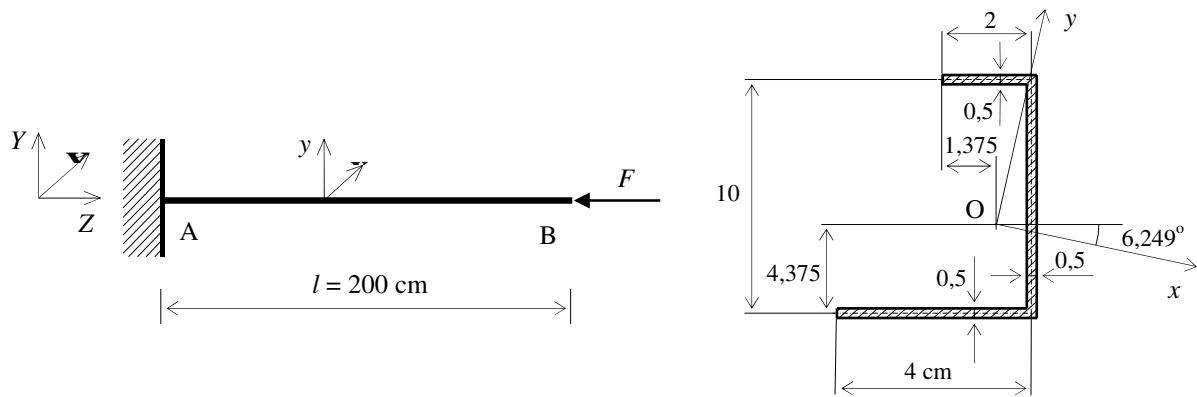
Sa sl. 4.6 vidimo da se čisto torzijsko izvijanje konzole manifestira u obliku naglog povećanja vrijednosti rotacijskog pomaka  $\phi_{zB}$  s približavanjem vrijednosti sile  $F$  kritičnoj vrijednosti  $F_{kr} = F_\phi$ , što zajedno s vrijednostima iz tabl. 4.1, dokazuje da program THINWALL prepoznaje torzijski oblik gubitka stabilne ravnotežne forme nosača. Ova je mogućnost u programu ostvarena iz razloga što je rotacijski pomak  $\phi_z$  u polju konačnog elementa aproksimiran polinomom trećeg stupnja, izraz (3.56). Naime, ukoliko se za pomak  $\phi_z$  uporabi standardna linearna aproksimacija, tada torzijski oblik izvijanja nije moguće modelirati [49].

U slučaju čistog fleksijskog izvijanja, sl. 4.7, vidimo da se vrijednost translacijskog pomaka  $U_B$  naglo povećava s približavanjem vrijednosti sile  $F$  kritičnoj vrijednosti  $F_{kr} = F_y$ , te da se rješenje dobiveno modelom 'A' odlično poklapa s onim dobivenim primjenom *plate* modela, dok je kod modela 'B' dobivena približno 50 % manja vrijednost kritične sile.

Također je potrebno primijetiti da kod nelinearne analize čistog fleksijskog izvijanja, kritična sila  $F_\phi$  nije imala nikakva utjecaja na odziv konstrukcije iako je  $F_\phi < F_y$ . Razlog je tome taj što kod nelinearne analize odziv konstrukcije ovisi o obliku narinuta poremećaja pa, tako, eventualni niži oblici gubitka stabilnosti mogu ostati *neotkriveni*. Stoga je kod analize stabilnosti nužno poznavati rješenja dobivena i linearnom i nelinearnom analizom.

### Primjer 4.3.2. Torzijsko-fleksijsko izvijanje

Konzola nesimetričnog poprečnog presjeka opterećena je na slobodnome kraju centričnom tlačnom silom intenziteta  $F$ , sl. 4.8. Koordinate su centra smicanja:  $x_s = 1,5884$  cm,  $y_s = -2,5723$  cm. Modul elastičnosti materijala iznosi  $E = 30000$  Ncm<sup>-2</sup>, dok je modul smicanja  $G = 11500$  Ncm<sup>-2</sup>. Pošto poprečni presjek konzole nema niti jednu os simetrije, tada je pri tlačnom opterećenju jedino moguć torzijsko-fleksijski oblik izvijanja. U nelinearnoj je analizi konzola diskretizirana s četiri gredna konačna elementa, a za iniciranje je torzijsko-fleksijskog izvijanja, u presjeku B pridodana sila  $F_x = 0,001F$ , sl. 4.9. Rezultati dobiveni linearnom analizom prikazani su i uspoređeni u tabl. 4.3, dok su oni dobiveni nelinearnom analizom prikazani na sl. 4.10.



Sl. 4.8. Tlačno opterećena konzola nesimetričnog poprečnog presjeka iz primjera 4.3.2

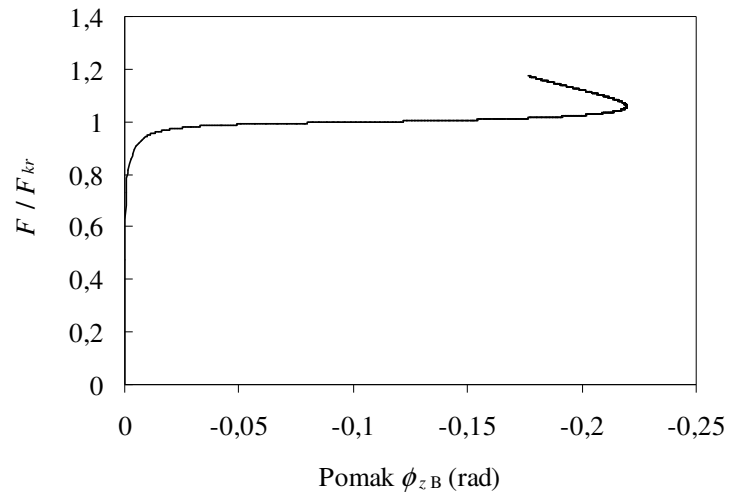
Tab. 4.3. Vrijednosti kritične sile  $F = F_{kr}$  (N) za torzijsko-fleksijsko izvijanja konzole iz primjera 4.3.2

Br. elem.	THINWALL	Teorijska vrijednost izraz (2.110)	MSC/NASTRAN [98] (shell model)
1	14,0048	13,9016	14,0294
2	13,9086		
4	13,9020		
8	13,9016		

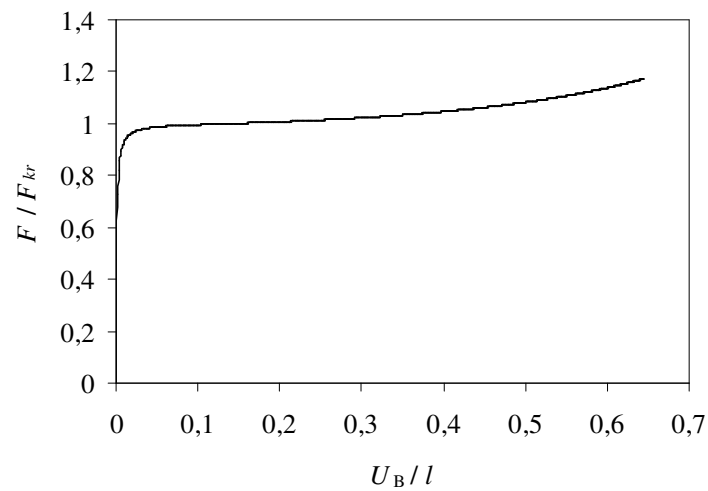


Sl. 4.9. Opterećenje konzole iz primjera 4.3.2. za nelinearnu analizu torzijsko-fleksijskog izvijanja

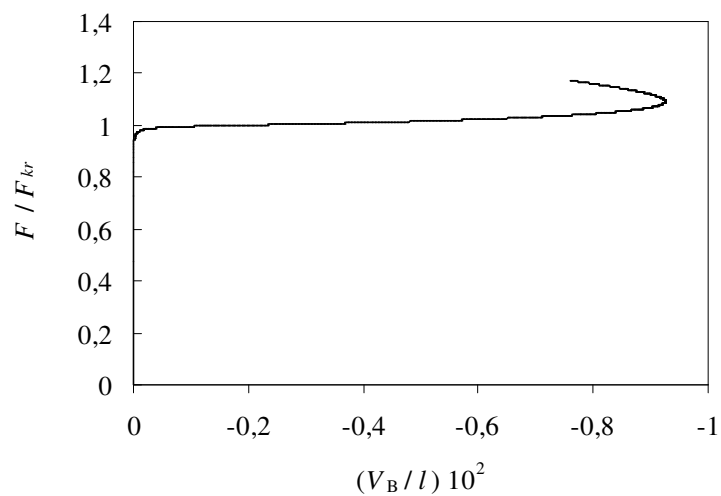




a)



b)

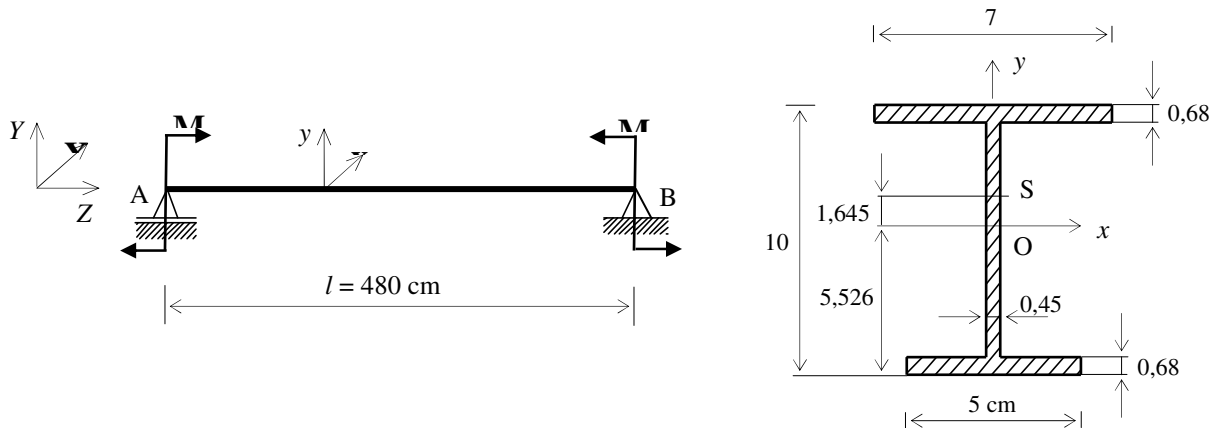


c)

**Sl. 4.10.** Dijagrami: a)  $[(F/F_{kr}) - \phi_{zB}]$ ; b)  $[(F/F_{kr}) - (U_B/l)]$ ; c)  $[(F/F_y) - (V_B/l)]$ , konzole iz primjera 4.3.2 za torzijsko-fleksijsko izvijanje ( $F_{kr} = 14,023 \text{ N}$ )

**Primjer 4.3.3. Lateralno izvijanje**

Greda AB jednoosno simetričnog I-profila opterećena je na krajevima kvazitangencijalnim momentima intenziteta  $M$ , sl. 4.11. Krajevi zu grede zglobno oslonjeni, stim da je njihova rotacija oko uzdužne osi nosača spriječena, dok je vitoperenje slobodno. Položaj je centra smicanja poprečnoga presjeka definiran koordinatom  $y_s = 1,645$  cm. Modul je elastičnosti materijala  $E = 210 \cdot 10^5 \text{ Ncm}^{-2}$  i modulom smicanja  $G = 80,77 \cdot 10^5 \text{ Ncm}^{-2}$ . Kako greda nije bočno pridržavana, tada se zbog savijanja grede u glavnoj centralnoj ravnini inercije ( $Z, Y$ ), može pojaviti lateralno ili bočno izvijanje grede, pri čemu se greda dodatno uvija i savija u ravnini ( $Z, X$ ). Vrijednosti su kritičnog momenta izvijanja  $M = M_{kr}$ , dobivene linearnom analizom stabilnosti za razne stupnjeve diskretizacije, dane tabl. 4.4 i uspoređene s teorijskom vrijednošću dobivenom iz izraza (2.161).



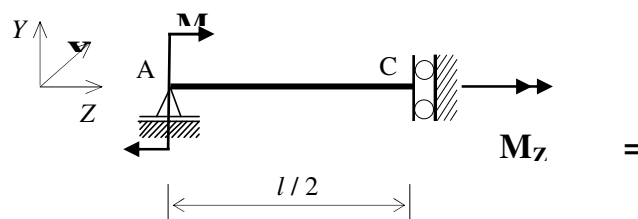
Sl. 4.11. Greda iz primjera 4.3.3. opterećena protusmjernim spregovima intenziteta  $M$

Tab. 4.4. Vrijednosti kritičnog momenta  $M = M_{kr}$  (kNcm) za lateralno izvijanja grede iz primjera 4.3.3

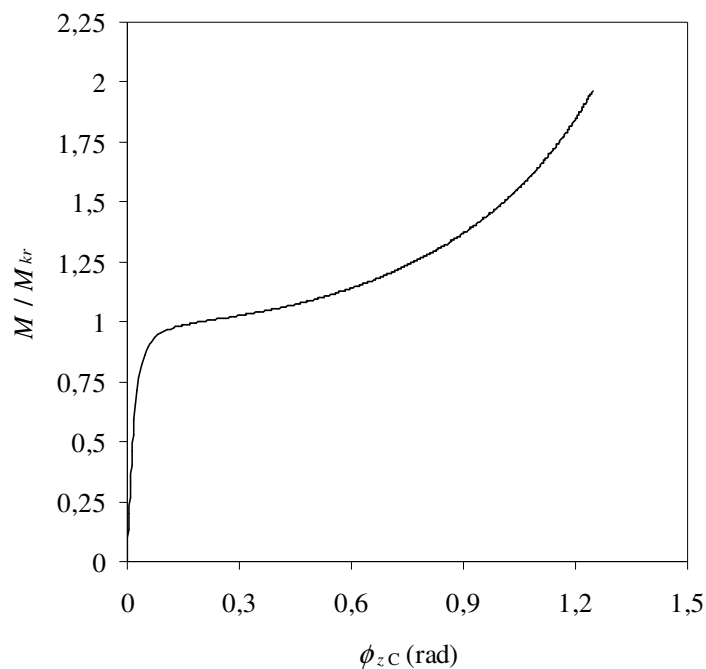
Broj elemenata	THINWALL	Teorijska vrijednost izraz (2.161)
1	669,362	601,586
2	602,758	
4	600,429	
8	600,270	

Ovdje je potrebno napomenuti da se zbog spriječene rotacije oko osi  $Z$  u presjecima gdje momenti djeluju, pri inkrementalnim rotacijama ne pojavljuju inducirani momenti te, stoga, geometrijskoj matrici krutosti konstrukcije nije potrebno dodavati korektivnu matricu krutosti iz izraza (3.234).

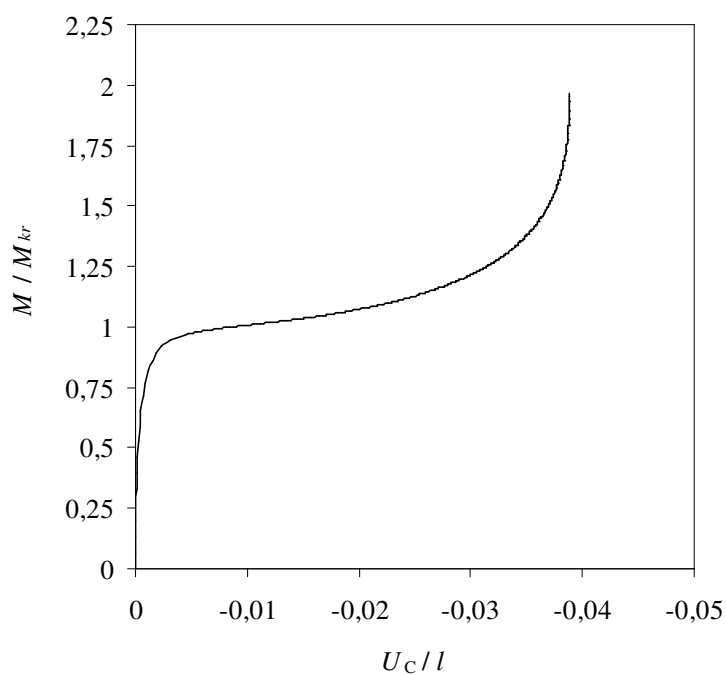
Kod nelinearne je analize stabilnost razmatrana samo polovina grede, a da bi se uzrokovalo lateralno izvijanje pridodan je u presjeku C torzijski moment intenziteta  $M_z = 0,005M$ , sl. 4.12. Pritom je polovina grede diskretizirana s četiri gredna konačna elementa, a dobiveni su rezultati prikazani na sl. 4.13.



Sl. 4.12. Opterećenje grede iz primjera 4.3.3. za nelinearnu analizu lateralnog izvijanja



a)



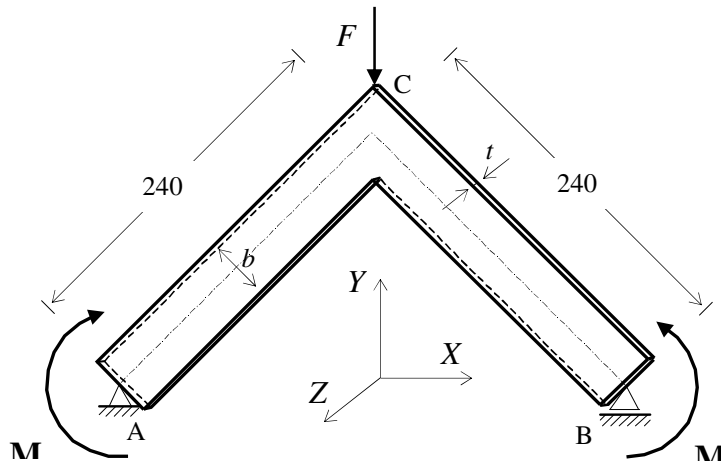
b)

**Sl. 4.13.** Dijagrami: a)  $[(M / M_{kr}) - \phi_{zC}]$ ; b)  $[(M / M_{kr}) - (U_C / l)]$ , grede iz primjera 4.3.3 za lateralno izvijanje ( $M_{kr} = 601,586 \text{ kNcm}$ )

#### Primjer 4.3.4. Velike rotacije vs. male rotacije

Utjecaj efekta velikih prostornih rotacija na vrijednost kritičnog opterećenja pri kojem jedna okvirna konstrukcija gubi stabilnu ravnotežnu formu, prikazan je u slučaju lateralnog izvijanja okvira sa sl. 4.14 i to za dva slučaja opterećenja: u prvom je slučaju okvir u presjecima A i B opterećen protusmjernim momentima intenziteta  $M$ , dok je u drugom slučaju okvir u presjeku C opterećen vertikalnom silom  $F$ . Poprečni je presjek okvira pravokutnik starnica  $b \times t = 30 \times 0,6 \text{ mm}$ . Krajevi su okvira zglobno oslonjeni,

stim da su u osloncima dodatno spriječene i rotacije oko osi  $X$  i  $Y$ . Materijal je okvira aluminij s modulom elastičnosti  $E = 71240 \text{ Nmm}^{-2}$  i modulom smicanja  $G = 27191 \text{ Nmm}^{-2}$ . Okvir je u oba slučaja opterećenja diskretiziran s osam grednih konačnih elementata, a vrijednosti su kritičnog opterećenja dobivene programom THINWALL za slučaj linearne analize stabilnosti, dane su u tabl. 4.4. Za usporedbu su u toj tablici dane i vrijednosti dobivene programom TRUMP primjenom *shell* modela, kao i vrijednosti dobivene primjenom *beam* modela, a kod kojeg utjecaj velikih rotacija nije uzet u obzir, tj. pri izvođenju je geometrijske matrice krutosti konačnog elementa uporabljeno linearno polje pomaka iz izraza (2.23), umjesto nelinearnog polja pomaka iz izraza (2.71). Oba su ova rezultata preuzeta iz ref. [50].

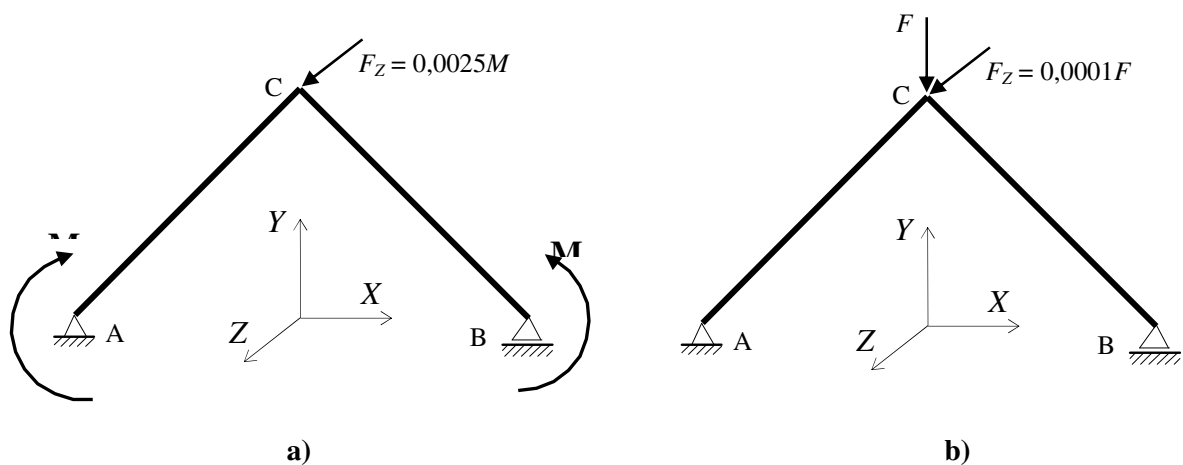


Sl. 4.14. Okvir iz primjera 4.3.4 opterećen protusmjernim spregovima intenziteta  $M$  i vertikalnom silom  $F$

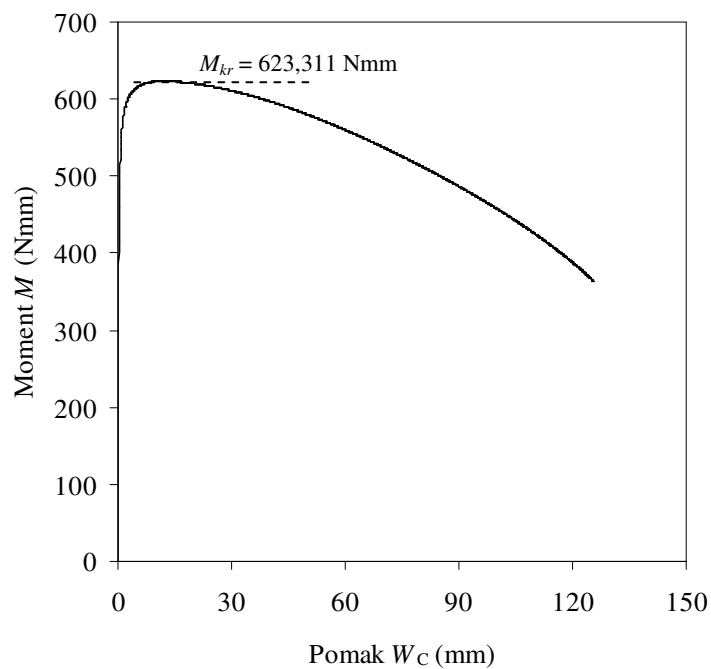
Tab. 4.5. Vrijednosti kritičnog momenta  $M = M_{kr}$  (Nmm) i kritične sile  $F = F_{kr}$  (N) za lateralno izvijanja okvira iz primjera 4.3.4

Opterećenje	THINWALL	Male rotacije [50] (beam model)	TRUMP [50] (shell model)
$M$	634,53	316,17	632,50
$F$	3,9899	2,4267	3,9459

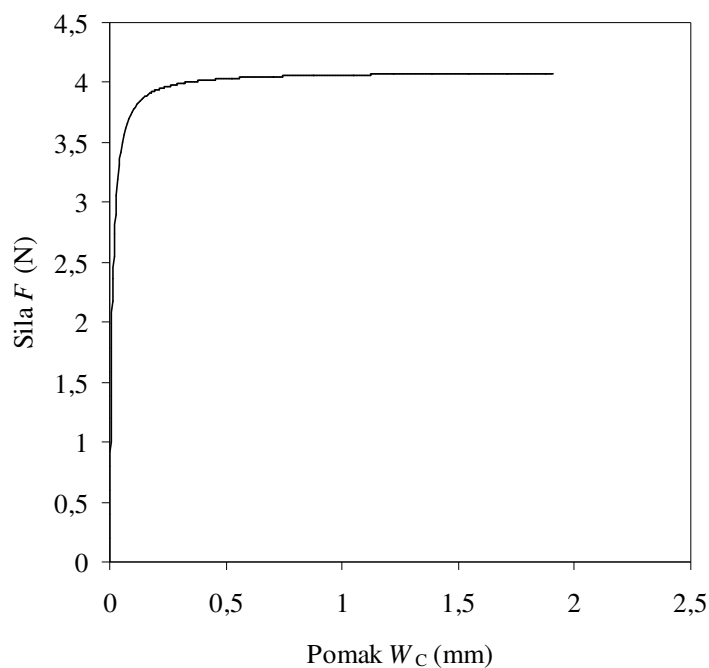
Za oba su slučaja opterećenja okvira dana i rješenja dobivena nelinearnom analizom, sl. 4.16, pri čemu je za iniciranje lateralnog izvijanja kod opterećenja okvira spregovima, u presjeku C pridodana horizontalna sila intenziteta  $F_z = 0,0025M$ , sl. 4.15a, dok je u slučaju opterećenja okvira vertikalnom silom, u presjeku C pridodana horizontalna sila intenziteta  $F_z = 0,0001F$ , sl. 4.15b.



Sl. 4.15. Ukupno opterećenje okvira iz primjera 4.3.4 kod nelinearne analize stabilnosti, a za slučaj kada se primarno opterećenje sastoji od: a) protusmjernih momenta intenziteta  $M$ ; b) vertikalne sile  $F$



a)



b)

**Sl. 4.16.** Dijagrami: a) ( $M - W_c$ ); b) ( $F - W_c$ ), za lateralno izvijanje okvira iz primjera 4.3.4

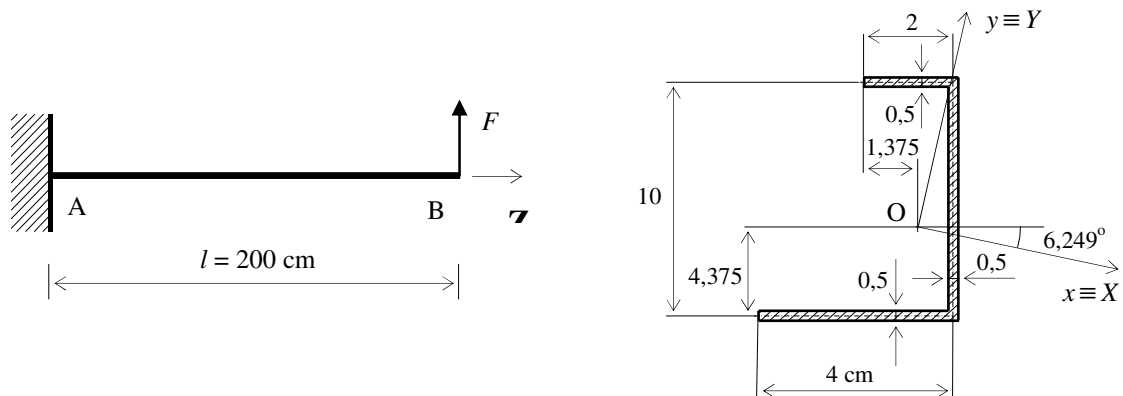
Na osnovi rezultata prikazanih u tabl. 4.5, vidimo da se vrijednosti kritičnog opterećenja okvira dobivene programom THINWALL, za oba slučaja opterećenja dobro poklapaju s kritičnim vrijednostima dobivenim primjenom *shell* modela, dok vrijednosti dobivene primjenom *beam* modela, a kod kojeg efekt velikih rotacija nije uzet u obzir, znatno odstupaju. Uzrok je tog odstupanja nekompatibilnost unutarnjih momenata, tj. kod primjene se linearnog polja pomaka momenti savijanja u geometrijskoj matrici krutosti konačnih elemenata dobivaju kao kvazitangencijalni, dok se torzijski moment dobiva kao polutangencijalni.

Također, sa sl. 4.16 vidimo da su rezultati dobiveni nelinearnom analizom stabilnosti i prikazani u obliku dijagrama ( $M - W_C$ ), sukladni rezultatima dobivenim linearnom analizom stabilnosti, a kod kojih je efekt velikih rotacija uzet u obzir. Pri tome u prvom slučaju opterećenja krivulja ( $M - W_C$ ) ima izražen maksimum kod vrijednosti momenta  $M = 623,311$  Nmm, nakon čega okvir gubi moć nošenja, tj. dolazi do pojave *rasterećenja*, dok se u drugom slučaju opterećenja krivulja ( $F - W_C$ ) asimptotski približava vrijednosti sile  $F \cong 4$  N.

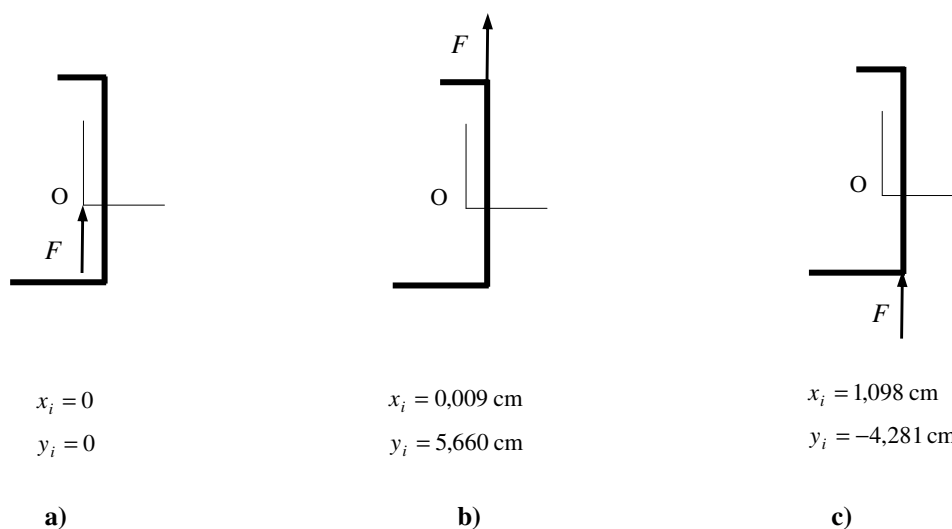
#### Primjer 4.3.5. Off-axis opterećenje

Utjecaj je *off-axis* djelovanja vanjskog opterećenja na vrijednost kritične sile izvijanja prikazan na slučaju lateralnog izvijanja konzole nesimetričnog tankostijenog poprečnog presjeka, opterećene na slobodnome kraju vertikalnom silom  $F$ , sl. 4.17. Koordinate centra smicanja poprečnoga presjeka iznose:  $x_s = 1,5884$  cm,  $y_s = -2,5723$  cm. Modul elastičnosti materijala iznosi  $E = 30000$  Ncm<sup>-2</sup>, dok je modul smicanja  $G = 11500$  Ncm<sup>-2</sup>.

Razmatrana su tri slučaja *off-axis* djelovanja vertikalne sile  $F$  i to kada se hvatište sile nalazi u: težištu poprečnoga presjeka, sl. 4.18a, sjecištu struka i gornjeg pojasa, sl. 4.18b, te sjecištu struka i donjeg pojasa, sl. 4.18c. Kako primijenjena inkrementalno-iterativna procedura ne dopušta da se komponente vektora referentnog opterećenja iz izraza (3.182) mijenjaju, to je u ovom slučaju sprovedena samo linearna analiza stabilnosti. Pritom su rabljena dva stupnja diskretizacije: kod prvog je konzola diskretizirana s četiri gredna konačna elementa, dok je kod drugog diskretizirana s osam konačnih elemenata. Kako se hvatište sile  $F$  niti u jednom od slučaja opterećenja ne nalazi i centru smicanja poprečnoga presjeka, tada je geometrijskoj matrici krutosti konstrukcije dodavana korektivna matrica krutosti iz izraza (3.204). Dobiveni se rezultati dani i uspoređeni u tabl. 4.6.



Sl. 4.17. Konzola iz primjera 4.3.5, nesimetričnog poprečnog presjeka, opterećena vertikalnom silom  $F$



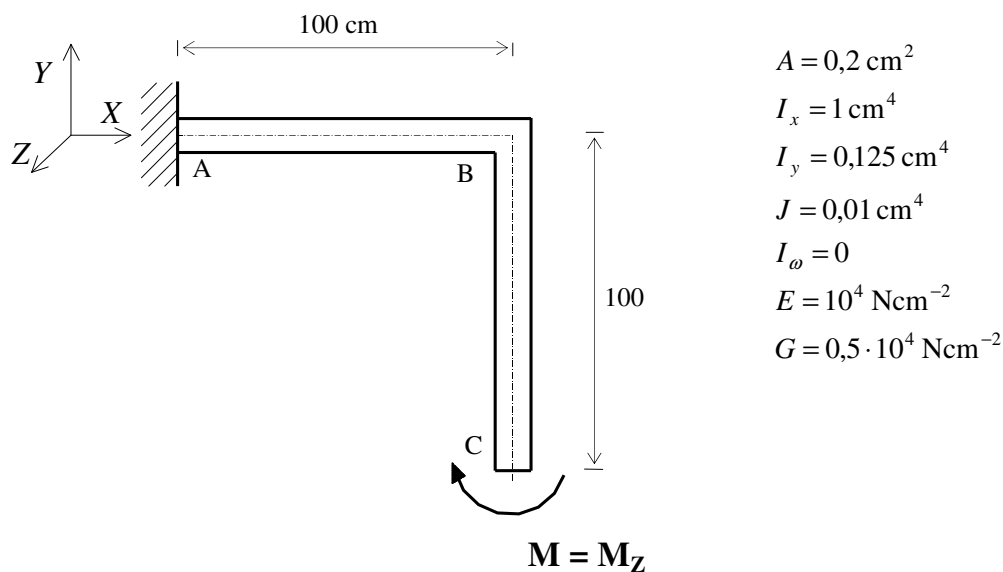
Sl. 4.18. 'Off-axis' djelovanje sile  $F$  sa sl. 4.17, sa hvatištem u: a) težištu poprečnog presjeka; b) sjecištu struka i gornjeg pojasa; c) sjecištu struka i donjeg pojasa

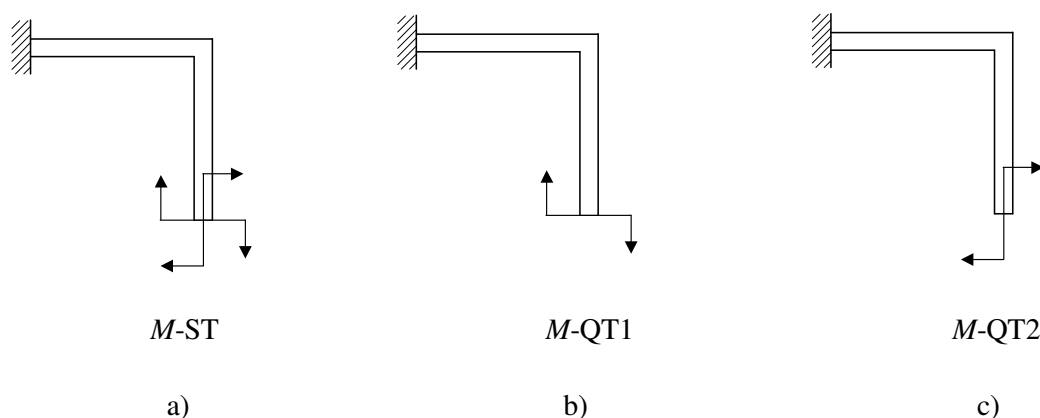
**Tab. 4.6.** Vrijednosti kritične sile  $F = F_{kr}$  (N) za lateralno izvijanje konzole iz primjera 4.3.5

Off-axis opterećenje prema slici	Broj elemenata	THINWALL	Kim et al. [51] (beam model)	ABAQUS [51] (shell model)
4.18a	4	4,1577 -6,0442	4,1582 -6,0432	4,1086 -5,8933
	8	4,1461 -5,9902	4,1468 -5,9889	
4.18b	4	4,5586 -4,3935	4,5589 -4,3932	4,5127 -4,2500
	8	4,5456 -4,3653	4,5460 -4,3649	
4.18c	4	3,6614 -7,0450	3,6639 -7,0258	3,6001 -6,8629
	8	3,6541 -6,9548	3,6543 -6,9539	

**Primjer 4.3.6.** Efekt različite definicije momenta

Utjecaj je različite definicije vanjskog momenta prikazan u slučaju izvijanja L-okvira, uklještenog u presjeku A i opterećenog u presjeku C momentom  $M = M_Z$ , sl. 4.19. Razmatrana su tri oblika toga momenta: polutangencijalni ( $M$ -ST), sl. 4.20a, kvazitangencijalni prve vrste ( $M$ -QT1), sl. 4.20b, i kvazitangencijalni druge vrste ( $M$ -QT2), sl. 4.20c. Okvir je diskretiziran s osam grednih konačnih elemenata, pri čemu ravnina inercije ( $z$ ,  $y$ ) svakog konačnog elementa leži u globalnoj ravnini ( $X$ ,  $Y$ ). Kod sva su tri oblika momenta izrađena dva modela. Prvi je model 'A', kod kojeg je u presjeku C zadan koncentrirani moment  $M = M_Z$ , stim da su kod kvazitangencijalnih momenata rabljene korektivne matrice krutosti iz izraza (3.234) i (3.235). Drugi je model 'B', kod kojeg je polutangencijalni moment modeliran s dva sprega sila, a kvazitangencijalni momenti s po jednim spregom, analogno prikazu na sl. 4.20. Pri tome se svaki spreg sastoji od po dva *kruta* konačna elementa sa zajedničkim spojem u presjeku C i dvije konzervativne sile koje djeluju na slobodnim krajevima tih elemenata. Rezultati dobiveni linearnom analizom stabilnosti za oba modela prikazani su i uspoređeni u tabl. 4.7. U istoj su tablici dane i vrijednosti dobivene od drugih autora, a koji su diskretizaciju okvira, također, izvodili s pomoću grednih konačnih elemenata.

**Sl. 4.19.** L-okvir iz primjera 4.3.6, opterećen momentom  $M = M_Z$



**Sl. 4.20.** Različiti oblici momenta  $M$  sa sl. 4.19: a) polutangencijalni ( $M$ -ST); b) kvazitangencijalni prve vrste ( $M$ -QT1); c) kvazitangencijalni druge vrste ( $M$ -QT2)

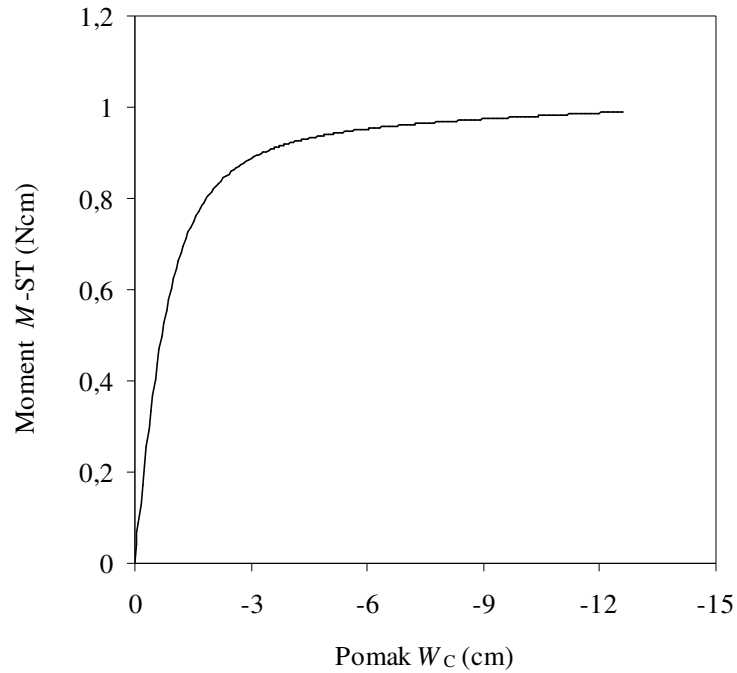
**Tab. 4.7.** Vrijednosti kritičnog momenta  $M = M_{kr}$  (Ncm) za lateralno izvijanje okvira iz primjera 4.3.6, a za različite definicije definicije tog momenta

Definicija momenta	THINWALL		Chang <i>et al.</i> [52]	Saleeb <i>et al.</i> [50]
	Model 'A'	Model 'B'		
$M$ -ST	0,9867	0,9949	0,9870	0,9878
$M$ -QT1	0,4973	0,4975	0,4935	0,4936
$M$ -QT2	3,4460	3,4448	3,4335	3,4670

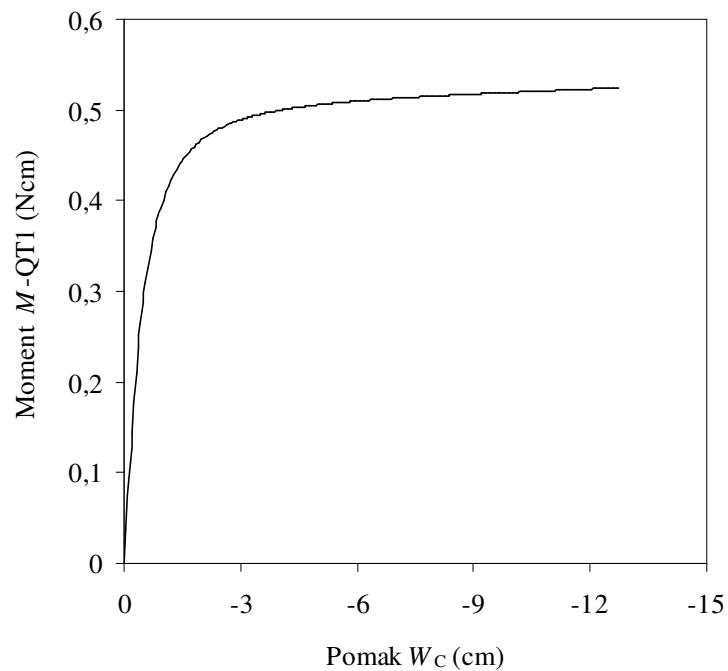
Na osnovi rezultata prikazanih u tabl. 4.7, vidimo da se vrijednosti kritičnog momenta  $M = M_{kr}$  dobivene primjenom oba modela, za sve tri definicije momenta dobro poklapaju s vrijednostima drugih autora te da je približan odnos kritičnih vrijednosti momenta  $ST : QT1 : QT2 = 2 : 1 : 7$ .

Kako primijenjena inkrementalno-iterativna procedura zahtijeva da se vrijednosti članova vektora referentnog opterećenja u izrazu (3.182) ne mijenjaju tijekom odvijanja proračuna, to je nelinearna analiza stabilnosti sprovedena samo primjenom modela 'B', stim da je za iniciranje lateralnog izvijanja okvira u presjeku C, a u negativnom smjeru osi Z, pridodana horizontalna sila intenziteta  $F_Z = 0,0001M$ . Rezultati dobiveni u obliku dijagrama ( $M - W_C$ ), a prikazani na sl. 4.21 – sl. 4.23, potvrđuju rotacijsku ovisnost konzervativnih momenata, odnosno da se jedan te isti konzervativni moment u prisustvu velikih prostornih rotacija može ponašati vrlo različito, a što je, vrlo često, bilo zanemarivano.

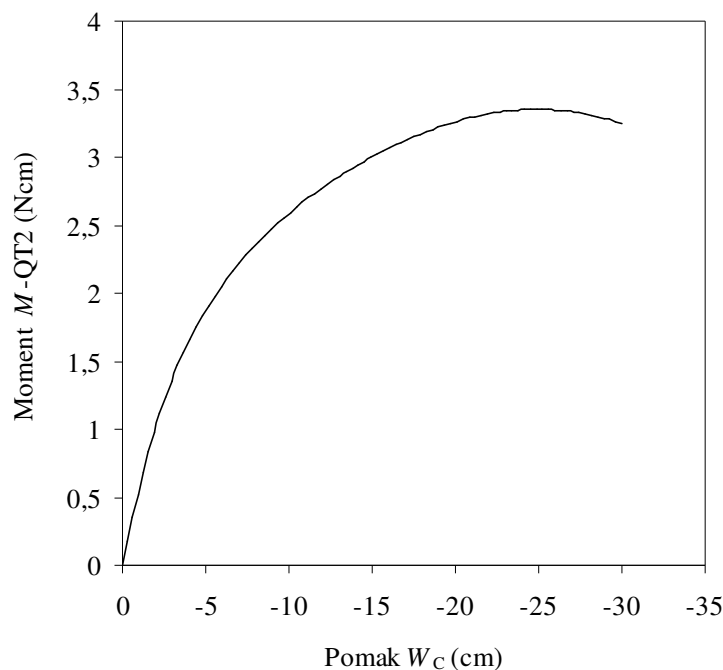




**Sl. 4.21.** Dijagram ( $M - W_C$ ) za lateralno izvijanje okvira iz primjera 4.3.6, a za slučaj kada se moment ponaša kao polutangencijalni ( $M-ST$ )



**Sl. 4.22.** Dijagram ( $M - W_C$ ) za lateralno izvijanje okvira iz primjera 4.3.6, a za slučaj kada se moment ponaša kao kvazitangencijalni prve vrste ( $M-QT1$ )



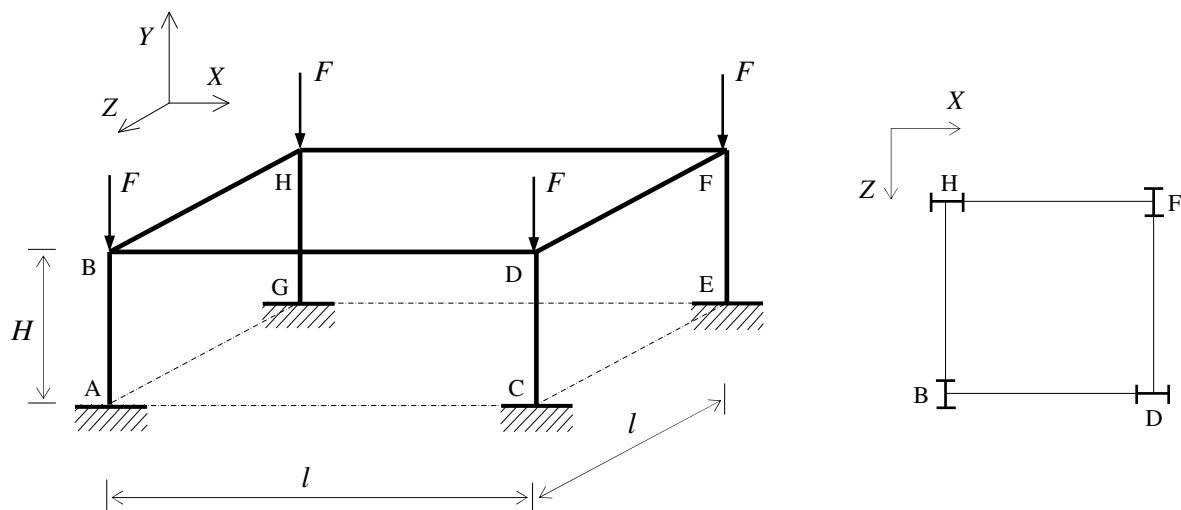
**Sl. 4.23.** Dijagram ( $M - W_c$ ) za lateralno izvijanje okvira iz primjera 4.3.6, a za slučaj kada se moment ponaša kao kvazitangencijalni druge vrste ( $M-QT2$ )

#### Primjer 4.3.7. Izvijanje Rajasekaranovog prostornog okvira

Na sl. 4.24 prikazan je *Rajasekaranov* prostorni okvir [76] opterećen vertikalnim silama istoga intenziteta  $F$ . Okvir je izrađen od I-profila W10×49 (AISC standard), a čije su dimenzije poprečnoga presjeka u skladu sa sl. 4.2, sljedeće:  $h = 25,40$  cm;  $b = 25,40$  cm;  $t_s = 0,864$  cm;  $t_p = 1,417$  cm. Pri tome je visina stupova  $H = 130$  cm, dok je duljina horizontalnih greda  $l = 390$  cm. Materijal je okvira čelik s modulom elastičnosti  $E = 210 \cdot 10^5$  Ncm<sup>-2</sup> i modulom smicanja  $G = 80 \cdot 10^5$  Ncm<sup>-2</sup>. Osim u osloncima, vitoperenje je spriječeno i u presjecima: B, D, F i H.

Izrađena su tri numerička modela koja se međusobno razlikuju jedino u stupnju diskretizacije okvira, pri čemu su i stupovi i horizontalne grede diskretizirane s jednakim brojem grednih konačnih elemenata i to: kod modela 'A' s jednom elementom, kod modela 'B' s dva elementa i kod modela 'C' s četiri elementa.

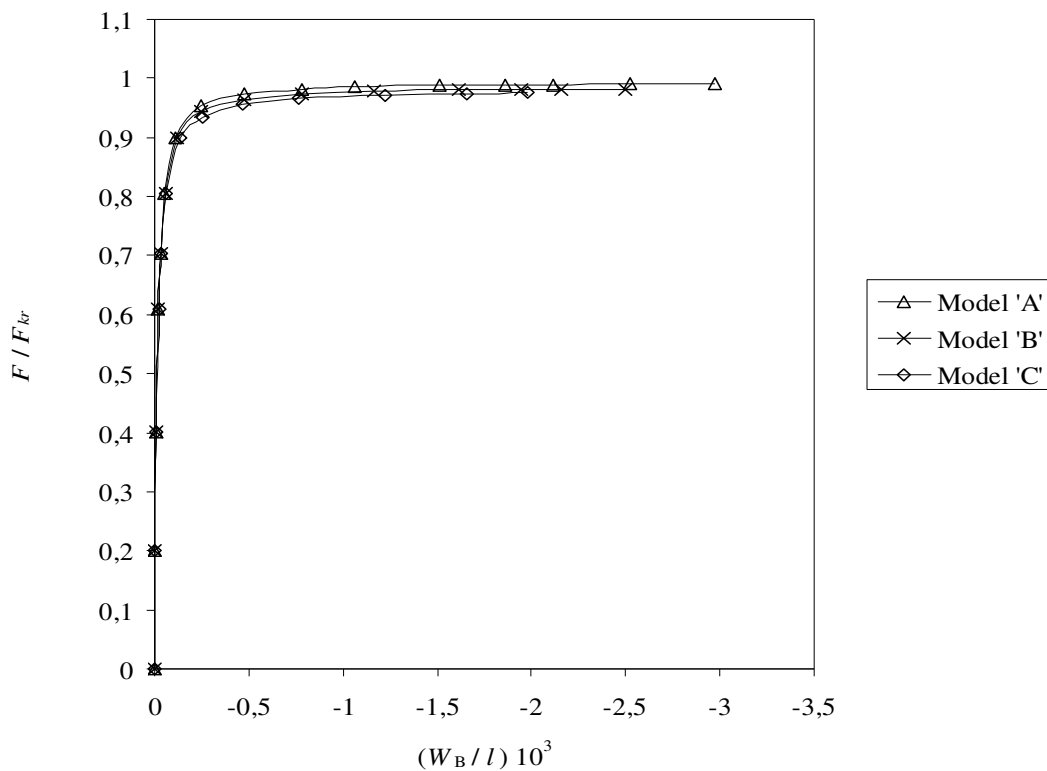
Gubitak se stabilne deformacijske forme okvira manifestira u tzv. *sway* obliku, tj. kada vertikalne sile dostignu vrijednost kritične sile  $F = F_{kr}$  nastupa takovo izvijanje stupova okvira, da se gornja etaža horizontalno pomiče ili po pravcu osi Z ili po pravcu osi X, a bez rotacije oko osi Y. Usporedba je rezultata za kritičnu silu izvijanja  $F = F_{kr}$  dobivena primjenom sva tri modela dana u tabl. 4.8 za slučaj linearne analize stabilnosti, odnosno na sl. 4.25 za slučaj nelinearne analize stabilnosti. Pri tome su za iniciranje *sway* oblika gubitka stabilnosti okvira kod nelinearne analize stabilnosti, u presjecima B i D, u negativnom smjeru osi Z, pridodane horizontalne sile intenziteta  $F_Z = 0,0001F$ .



Sl. 4.24. Prostorni okvir iz primjera 4.3.7. opterećen vertikalnim silama intenziteta  $F$

Tab. 4.8. Vrijednosti kritične sile  $F = F_{kr}$  (kN) za prostorno izvijanje okvira iz primjera 4.3.7

Model	THINWALL	Chen & Atsuta [76] (beam model)
'A'	53101	52175
'B'	52738	
'C'	52579	



Sl. 4.25. Dijagram  $[(F/F_y) - (W_B/l)]$  kod izvijanja okvira iz primjera 4.3.7 ( $F_{kr} = 52175$  kN)

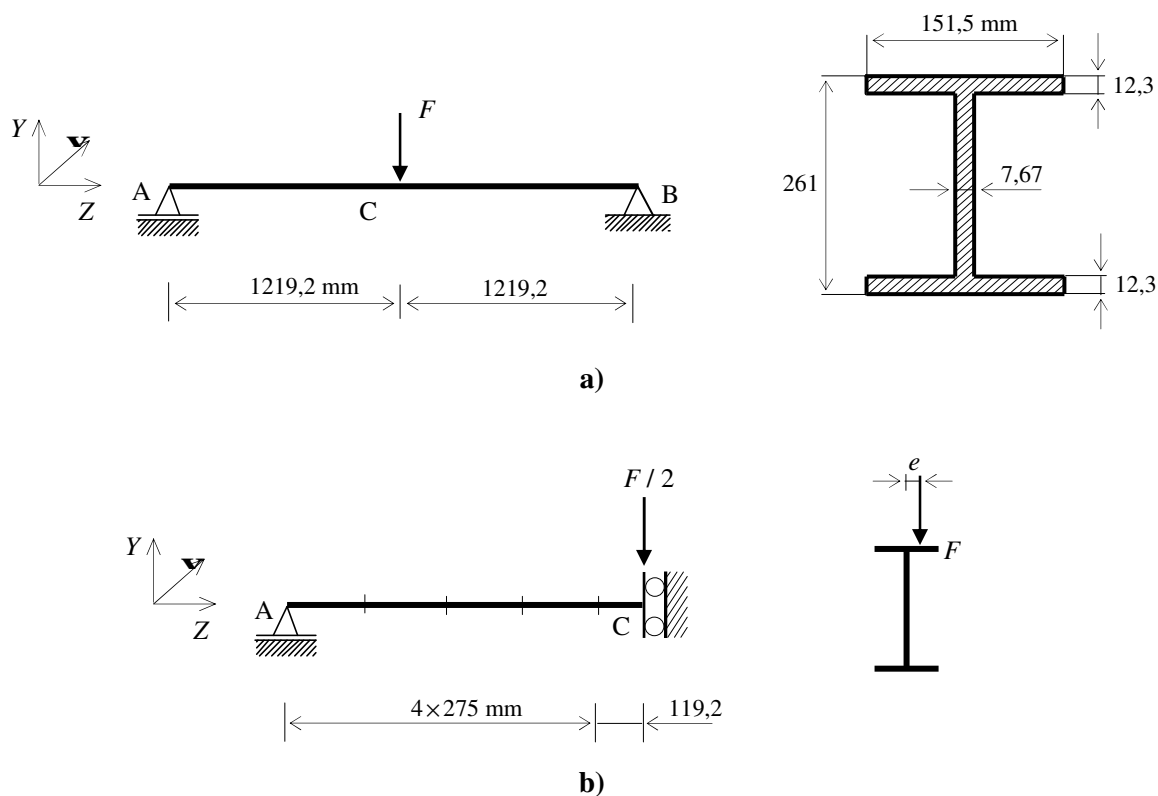
Na osnovi rezultata prikazanih u tabl. 4.8 i na sl. 4.25, vidimo da se vrijednost kritičnog opterećenja okvira  $F = F_{kr}$  i kod vrlo grube diskretizacije (model 'A') dobro poklapa s vrijednošću preuzetom iz ref. [76] dobivenom, također, primjenom grednih elemenata. Pri tome je odstupanje vrijednosti kritičnog opterećenja kod modela s najgrubljom diskretizacijom (model 'A'), u odnosu na onu dobivenu najfinijom diskretizacijom (model 'C'), oko 1 %.

#### Primjer 4.3.8. Elasto-plastično lateralno izvijanje obične grede

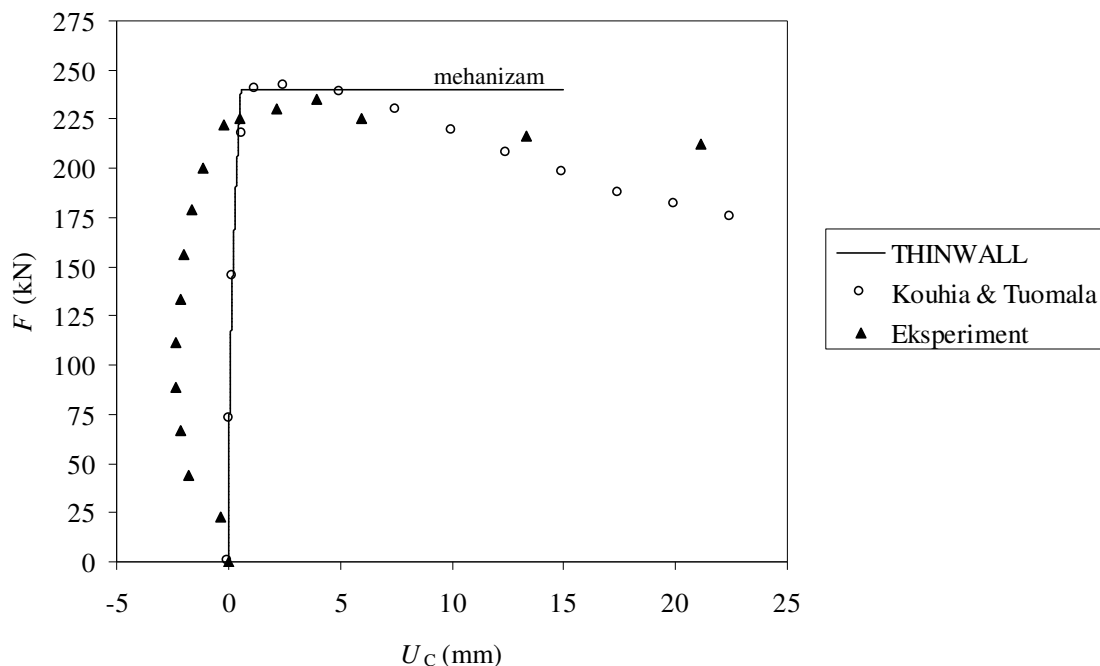
Na sl. 4.26a prikazana je obična greda poprečnog presjeka I-profila, opterećena na sredini raspona vertikalnom silom  $F$ . Uvijanje je krajnjih presjeka spriječeno, dok je njihovo vitoperenje slobodno. Materijal je grede čelik s modulom elastičnosti  $E = 203$  GPa, Poissonovim koeficijentom  $\nu = 0,3$  i naprežanjem na granici tečenja  $\sigma_v = 320$  MPa. Zaostalih naprežanja nema. Za ovaj su primjer Kitipornchai i Trahair [99] izveli eksperimentalno određivanje kritične sile izvijanja u slučaju elasto-plastičnog lateralnog izvijanja grede. Pri tome je za iniciranje lateralnog izvijanja, pravac sile  $F$  paralelno pomaknut u odnosu na težište poprečnoga presjeka za  $e = 4$  mm, zbog čega je greda bila opterećena i na savijanje i na torziju. Isti su primjer numerički analizirali Kouhia i Tuomala [63] primjenom tzv. *Timoshenkovih* grednih konačnih elemenata, UL inkrementalne formulacije i von Misesova kriterija tečenja. Njihov je numerički model omogućavao postepenu plastifikaciju, a materijal je pretpostavljen kao linearno-elastičan idealno-plastičan.

U cilju verifikacije funkcije tečenja iz izraza (4.2), ovaj je primjer analiziran i programom THINWALL, pri čemu je zbog simetrije modelirano samo pola grede. Diskretizacija je grede izvedena na isti način kao i u [63], sl. 4.26a, stim da je ekscentrično djelovanje sile modelirano na način da je sila  $F$  djelovala na gredu preko *krutog* horizontalnog konačnog elementa duljine 4 mm, spojenog s gredom u presjeku C. Dobiveni je rezultat dan i uspoređen u dijagramu ( $F - U_C$ ), prikazanog na sl. 4.27. Pritom su vrijednosti kritične sile izvijanja  $F = F_{kr}$ , dobivene u sva tri slučaja, sljedeće:

- eksperiment:  $F = F_{kr} = 235$  kN
- Kouhia i Tuomala:  $F = F_{kr} = 241,8$  kN
- THINWALL:  $F = F_{kr} = 240,3$  kN.



Sl. 4.26. Uz primjer 4.3.8: a) obična greda poprečnog presjeka I-profila opterećen vertikalnom silom  $F$  na sredini; b) numerički model grede



Sl. 4.27. Dijagram ( $F - U_C$ ) grede iz primjera 4.3.8

S obzirom na rezultate prikazane na sl. 4.27, vidimo da su vrijednosti kritične sile  $F = F_{kr}$  u sva tri slučaja približno jednake, čime se potvrđuje ispravnost uporabe funkcije tečenja iz izraza (4.2). Kako je u presjeku C moment savijanja najveći, to se kod programa THINWALL prvi plastični zglob pojavio u tom presjeku. Pošto je greda statički određena, tada pojavom tog plastičnog zgloba ona prelazi u mehanizam te gubi moć nošenja vanjskog opterećenja, što je u dijagramu sa sl. 4.27 prikazano horizontalnom linijom kod vrijednosti sile  $F = 240,3$  kN. U tom slučaju tangentna matrica krutosti konstrukcije iz izraza (3.260) postaje singularna te proračun prestaje. Također se može primijetiti da se odziv grede dobiven programom THINWALL u predkritičnom dijelu, tj. prije pojave plastičnog zgloba, odlično poklapa s onim dobivenim u ref. [63], dok eksperimentalne vrijednosti djelomično odstupaju iz razloga nesavršenosti ispitivanog modela.

Kako primijenjena metoda plastičnih zglobova kod statički određenih nosača ne dopušta određivanje odziva konstrukcije nakon formiranja prvog plastičnog zgloba, to je njena uporaba opravdana kod višestruko statički neodređenih konstrukcija, a što je ilustrirano u narednim primjerima.

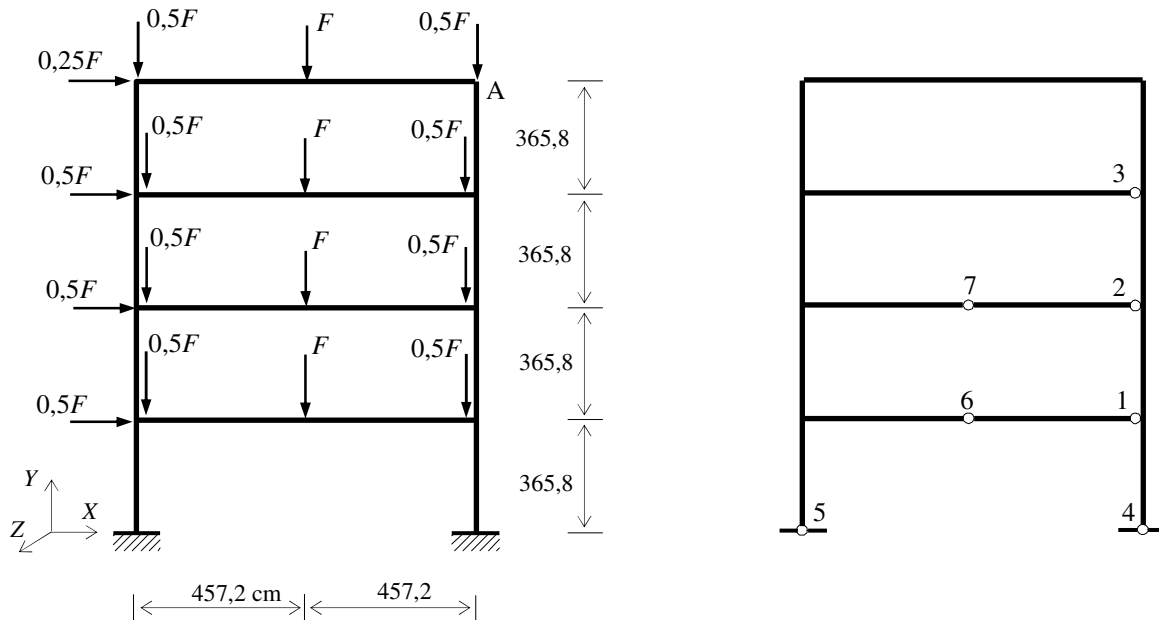
#### Primjer 4.3.9. Elasto-plastično izvijanje ravninskog okvira

Na sl. 4.28a prikazan je četveroetažni ravninski okvir. Stupovi prve etaže izrađeni od I-profila W12×79 ( $h = 31,45$  cm;  $b = 30,68$  cm;  $t_s = 1,19$  cm;  $t_p = 1,87$  cm), dok su stupovi na preostale tri etaže izrađeni od I-profila W10×60 ( $h = 26,04$  cm;  $b = 25,59$  cm;  $t_s = 1,05$  cm;  $t_p = 1,73$  cm). Horizontalne su grede izrađene od I-profila W16×40 ( $h = 40,64$  cm;  $b = 17,78$  cm;  $t_s = 0,78$  cm;  $t_p = 1,28$  cm). Profili su, pritom, postavljeni tako da struk svakog profila leži u ravnini samog okvira. Materijal je okvira čelik s modulom elastičnosti  $E = 200 \cdot 10^5$  Ncm<sup>-2</sup> i modulom smicanja  $G = 80 \cdot 10^5$  Ncm<sup>-2</sup>. Vrijednost je napreznja na granici tečenja za stupove  $\sigma_v = 24000$  Ncm<sup>-2</sup>, dok je za grede  $\sigma_v = 30000$  Ncm<sup>-2</sup>. Diskretizacija je okvira izvedena na isti način da je svaki stup diskretiziran samo s jednim konačnim elementom, dok su horizontalne grede diskretizirane s dva konačna elementa. Pošto bočno opterećenje djeluje u ravnini okvira, to će se i njegovo deformiranje pri izvijanju odvijati u toj istoj ravnini, odnosno od unutarnjih će se sila u poprečnim presjecima pojavljivati samo aksijalna sila  $F_z$ , smična sila  $F_y$  i moment savijanja  $M_x$ . Redoslijed pojave plastičnih zglobova prikazan je na sl. 4.28b, dok je izvijanje okvira prikazano u obliku dijagrama ( $F - U_A$ ), sl. 4.29. Usporedba je izvršena s rezultatom kojeg su dobili Haldar i Nee [93] i koji su za plastifikaciju poprečnoga presjeka rabili sljedeću funkciju tečenja:

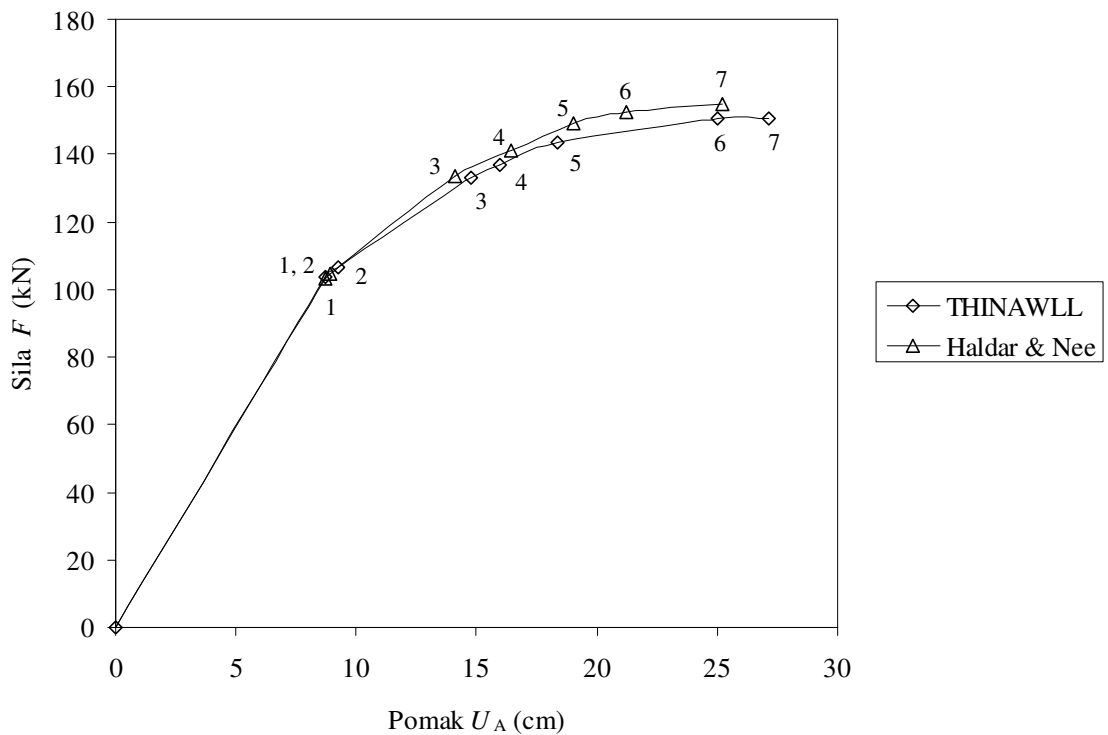
$$\Phi = \left( \frac{F_z}{F_{z,gr}} \right)^2 + \left| \frac{M_x}{M_{x,gr}} \right|. \quad (4.16)$$

Dobivene su vrijednosti kritičnog opterećenja okvira  $F = F_{kr}$ , pritom:

- THINWALL:  $F = F_{kr} \cong 151 \text{ kN}$
- Haldar & Nee:  $F = F_{kr} \cong 155 \text{ kN}$ .



Sl. 4.28. Uz primjer 4.3.9: a) četveroetažni ravninski okvir; b) redoslijed formiranja plastičnih zglobova



Sl. 4.29. Dijagram ( $F - U_A$ ) okvira iz primjera 4.3.9

**Primjer 4.3.10. Hodgeov prostorni okvir**

Na sl. 4.30a prikazan je tzv. *Hodgeov* prostorni okvir opterećen vertikalnom silom  $F$  u presjeku C. Okvir se nalazi globalnoj ravnini  $(Z, X)$ , stim da su gredni elementi okvira u presjeku B spojeni pod pravim kutom. Diskretizacija je okvira izvedena na način da je svaki segment okvira zamijenjen samo jednim konačnim elementom.

Isti su slučaj obradili Shi i Alturi [95], koji su diskretizaciju okvira izveli s pomoću standardnih prostornih grednih konačnih elemenata, tj. s pomoću elemenata kod kojih je utjecaj ograničenog vitoperenja zanemaren. Pritom su za plastifikaciju poprečnoga presjeka rabili funkciju tečenja sljedećeg oblika:

$$\Phi = \left( \frac{M_z}{M_{z,gr}} \right)^2 + \left( \frac{M_x}{M_{x,gr}} \right)^2 + \left( \frac{M_y}{M_{y,gr}} \right)^2. \quad (4.17)$$

Ulazni su podatci:

$$A = 625 \text{ cm}^2, \quad I_x = I_y = 32552 \text{ cm}^2, \quad J = 55078 \text{ cm}^4, \quad I_\omega = 0, \quad l = 1000 \text{ cm},$$

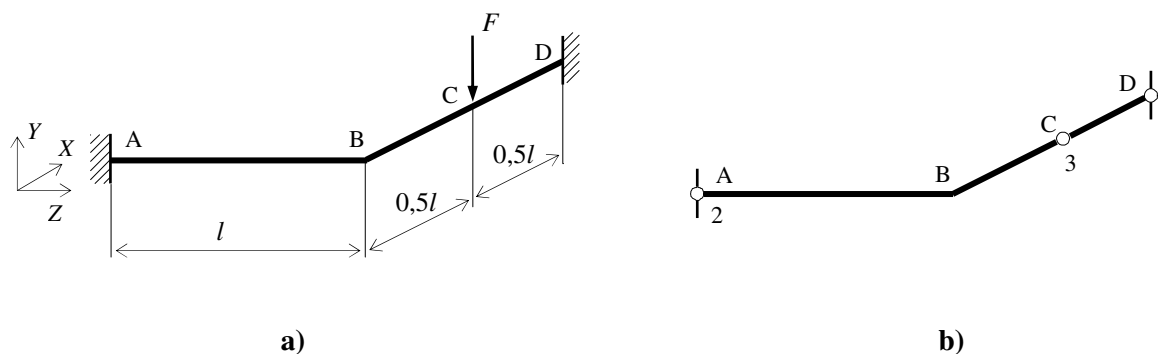
$$E = 210 \cdot 10^5 \text{ Ncm}^{-2}, \quad G = 80 \cdot 10^5 \text{ Ncm}^{-2}, \quad F_{z,gr} = 15625 \text{ kN}, \quad M_{z,gr} = 75175,812 \text{ kNcm},$$

$$M_{x,gr} = M_{y,gr} = 97656,25 \text{ kNcm}, \quad M_{\omega,gr} = \infty.$$

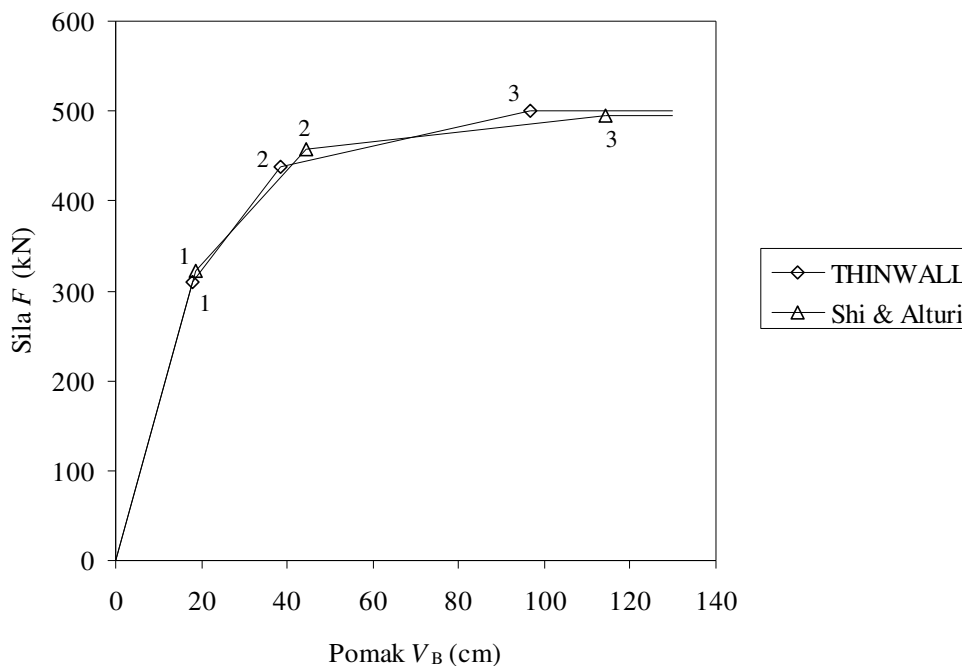
Dobiveni su rezultati prikazani na sl. 4.31 u obliku dijagrama  $(F - V_B)$ , dok je redosljed nastanka plastičnih zglobova prikazan na sl. 4.30b. U oba se slučaja prikazana sl. 4.31, plastični zglobovi javljaju kod približno jednakih vrijednosti sile i pomaka, a dobivene se razlike javljaju kao posljedica uporabe različitih funkcija tečenja.

Maksimalna se nosivost okvira postiže s formiranjem trećeg plastičnog zgloba, a vrijednosti su sile  $F$ , pritom:

- THINWALL:  $F = F_{\max} = 500,06 \text{ kN}$
- Shi & Alturi:  $F = F_{\max} = 494,14 \text{ kN}$ .



**Sl. 4.30.** Uz primjer 4.3.10: a) *Hodgeov* prostorni okvir; b) redosljed formiranja plastičnih zglobova



Sl. 4.31. Dijagram ( $F - V_B$ ) okvira iz primjera 4.3.10

**Primjer 4.3.11.** *Elasto-plastično izvijanje dvoetažnog prostornog okvira*

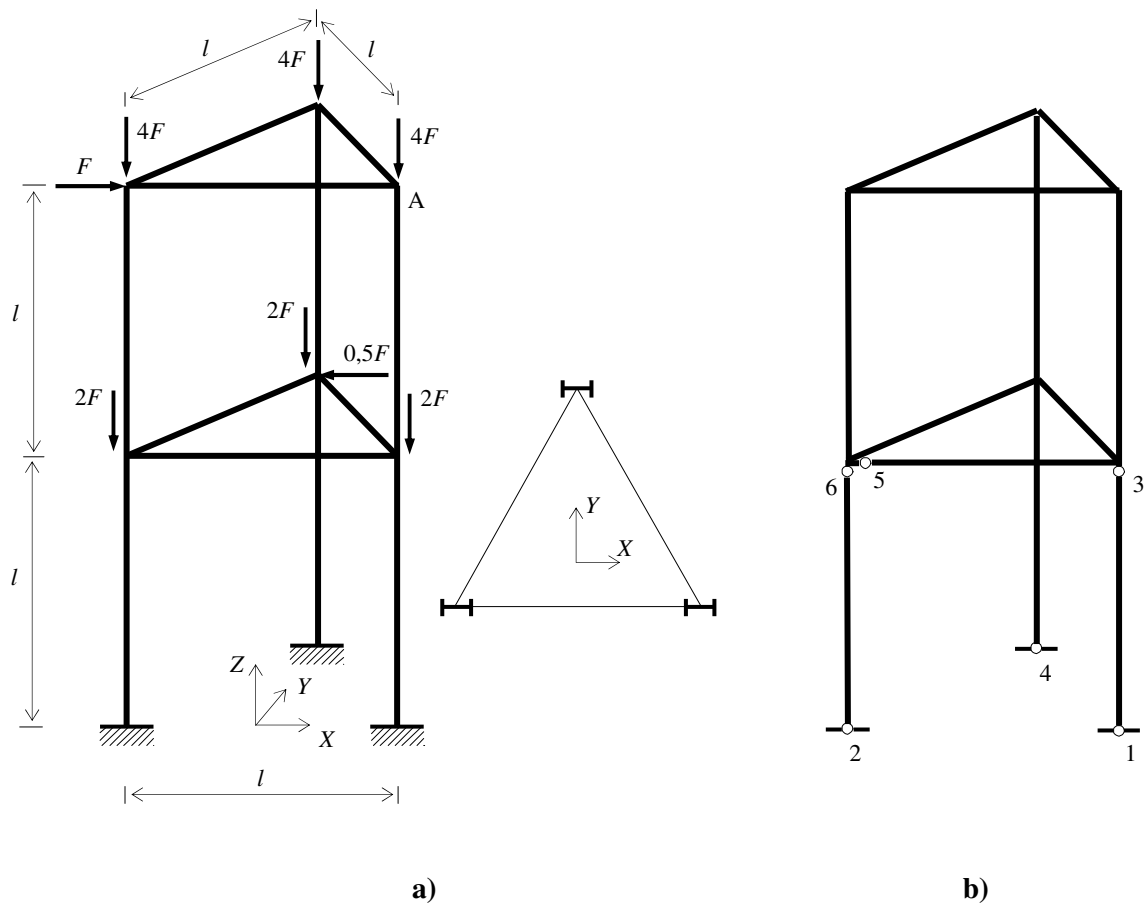
Na sl. 4.32a prikazan je dvoetažni prostorni okvir, grede i stupovi kojeg su izrađeni od I-profila W14×43 ( $h = 34,75$  cm;  $b = 20,32$  cm;  $t_s = 0,78$  cm;  $t_p = 1,34$  cm). Duljina  $l = 287,76$  cm. Materijal je okvira čelik s modulom elastičnosti  $E = 210 \cdot 10^5$  Ncm<sup>-2</sup>, modulom smicanja  $G = 80 \cdot 10^5$  Ncm<sup>-2</sup> te naprežanjem na granici tečenja  $\sigma_v = 24830$  Ncm<sup>-2</sup>. Sve su grede i stupovi diskretizirani samo s jednim grednim konačnim elementom. Elasto-plastično je izvijanje okvira prikazano u obliku dijagrama ( $F - U_A$ ) na sl. 4.33. Dobiveno se rješenje vrlo dobro podudara s onim kojeg je dobio Gebbeken primjenom istog diskretiziranog modela, teorije plastičnih zglobova i Rubinovih funkcija tečenja [68], kao i s rješenjem kojeg su dobili Vogel i Maier [100] primjenom tzv. teorije plastičnih zona (*yield-zone theory*), a što je zahtijevalo dodatnu subdiskretizaciju svih grednih konačnih elemenata diskretizirane konstrukcije. Takav je numerički model, sastavljen od konačnih elemenata i subelemenata, omogućavao pojavu plastifikacije poprečnoga presjeka ne samo u čvorovima konačnih elemenata, već i u čvorovima subelemenata, a također je bilo moguće i praćenje širenja tzv. plastične zone (*yield-zone*) od čvora konačnog elementa ili subelemenata u kojem su se plastične deformacije pojavile. Dobivene su vrijednosti kritične sile izvijanja  $F = F_{kr}$  kod sva tri modela, pritom:

- THINWALL:  $F = F_{kr} = 185,6$  kN
- Gebbeken:  $F = F_{kr} \cong 190$  kN
- Vogel i Maier:  $F = F_{kr} = 192,6$  kN,

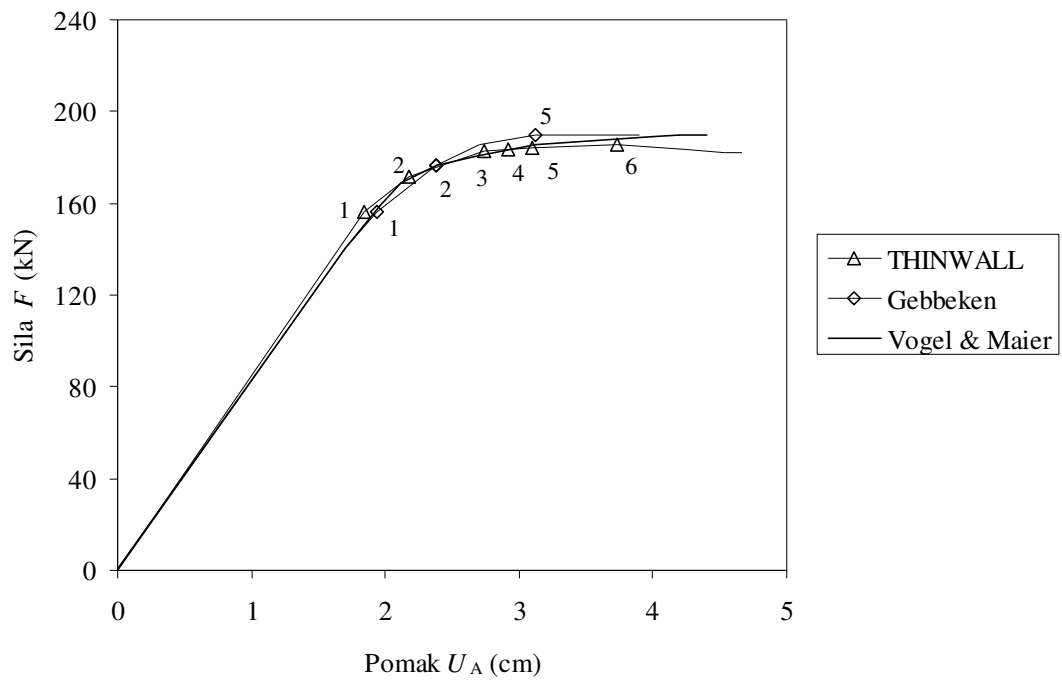
dok je redosljed pojave plastičnih zglobova prikazan na sl. 4.32b.

Ovdje je potrebno naglasiti da iako Vogelov i Mairov numerički model omogućava mnogo veću slobodu pri diskretizaciji razmatrane konstrukcije, jer na mjestu očekivane plastifikacije ne zahtijeva i postojanje čvora konačnog elementa, to se uvođenjem subelemenata višestruko uvećava ukupan broj stupnjeva slobode s kojim se ulazi u proračun. Stoga primjena ovakova numeričkog modela nije naročito pogodna u analizama elasto-plastične stabilnosti tankostijenih okvirnih konstrukcija sastavljenih od većeg broja grednih elemenata, poput one prikazane u narednom primjeru.





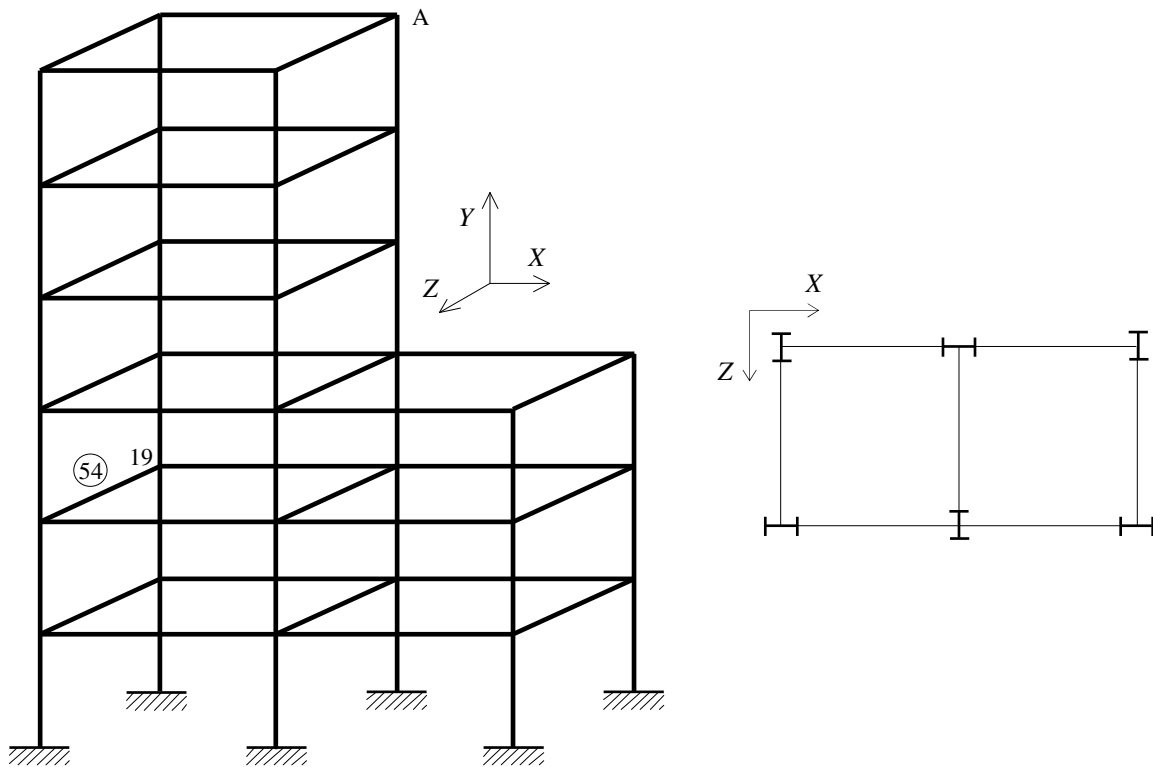
Sl. 4.32. Prostorni okvir iz primjera 4.3.11: a) položaj okvira; b) redoslijed nastanka plastičnih zglobova



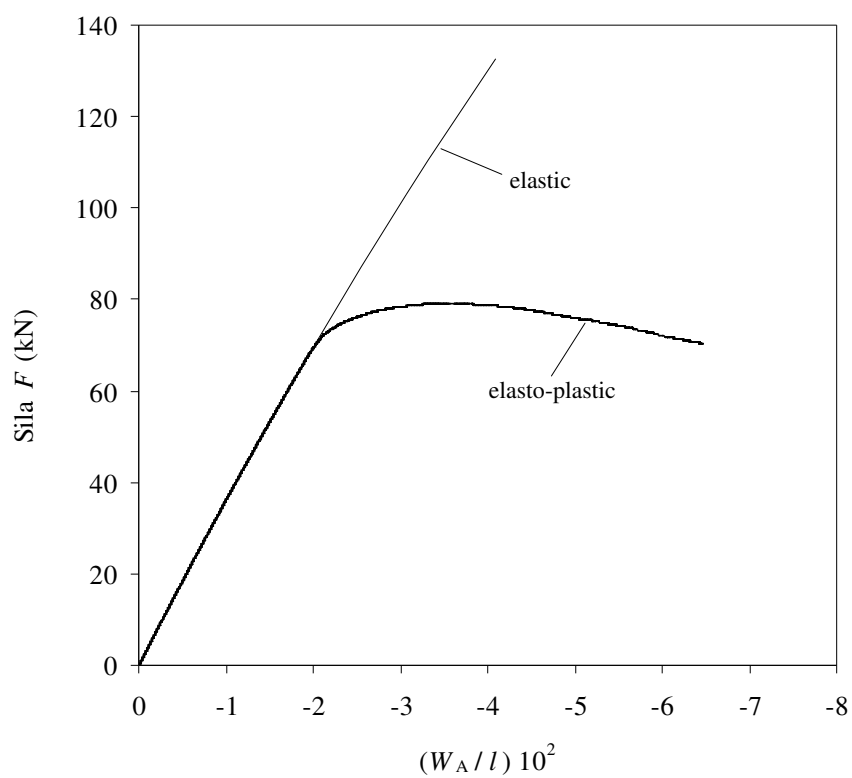
Sl. 4.33. Dijagram  $(F - U_A)$  prostornog okvira iz primjera 4.3.11

**Primjer 4.3.12.** *Elasto-plastično izvijanje šesteroetažnog prostornog okvira*

Na sl. 4.34 prikazan je šesteroetažni prostorni okvir, visine stupova  $h = 10$  m i duljine horizontalnih greda  $l = 20$  m. Stupovi su donjih triju etaža izrađeni od I-profila W12×120 ( $h = 33,32$  cm;  $b = 31,29$  cm;  $t_s = 1,80$  cm;  $t_p = 2,81$  cm), a gornjih triju etaža od I-profila W12×79 ( $h = 31,45$  cm;  $b = 30,68$  cm;  $t_s = 1,19$  cm;  $t_p = 1,87$  cm). Sve su horizontalne grede izrađene od I-profila W12×53 ( $h = 30,63$  cm;  $b = 25,4$  cm;  $t_s = 0,88$  cm;  $t_p = 1,46$  cm). Materijal je okvira čelik s modulom elastičnosti  $E = 210 \cdot 10^5$  Ncm<sup>-2</sup>, modulom smicanja  $G = 80 \cdot 10^5$  Ncm<sup>-2</sup> te naprežanjem na granici tečenja  $\sigma_v = 25000$  Ncm<sup>-2</sup>. Diskretizacija je okvira izvedena na način da je svaki stup i svaka greda modelirana samo s jednim grednim konačnim elementom. U svim čvorovima konstrukcije djeluje gravitacijska sila intenziteta  $F$ , stim da je u srednjim čvorovima donjih triju etaža njen intenzitet  $2F$ . Također, svaki čvor s prednje strane okvira opterećen je u negativnom smjeru osi Z i silom intenziteta  $F_Z = 0,4F$ . Dobiveni je rezultat prikazan u obliku dijagrama [ $F - (W_A / l)$ ] na sl. 4.35 i to za elastičan i elasto-plastičan odgovor konstrukcije. Kod elasto-plastičnog odgovora prvi je plastični zglob formiran u čvoru 19 konačnog elementa 54, sl. 4.32 i to pri pomaku  $W_A = 38,7$  cm i sili  $F = 67,59$  kN. Linearnom je analizom stabilnosti dobivena vrijednost kritičnog opterećenja  $F = F_{kr} = 760,84$  kN.



**Sl. 4.34.** *Prostorni okvir iz primjera 4.3.12*



Sl. 4.35. Dijagram  $[F - (W_A/l)]$  prostornog okvira iz primjera 4.3.12

## 5. ZAKLJUČAK

Poznato je da se u modernom dizajnu puno pažnje posvećuje optimizaciji posebice tankostijenih struktura. U tome smislu i analiza stabilnosti takovih struktura igra vrlo važnu ulogu. S obzirom na kompleksnost strukturne analize i ograničenosti teorijske obrade u slučajevima složenih konstrukcija, numerička se analiza stabilnosti nameće kao povoljno rješenje.

Problematika obrađivana u ovome radu, a sukladno tome i dobiveni rezultati, od interesa su, kako u teorijskom, tako i u praktičnom smislu. Primjenom su nelinearnog polja pomaka nesimetričnog tankostijenog poprečnog presjeka i lineariziranog principa virtualnih radova, najprije izvedene ravnotežne jednadžbe izvijenog prostornog tankostijenog grednog nosača, a oblik kojih se očitovao u formi sustava linearnih diferencijalnih jednadžbi četvrtoga reda uz pripadajuće rubne uvjete. Pri tome su zanemareni pomaci i deformacije nosača prije izvijanja, a pretpostavljeno je da početne unutarnje i vanjske sile čine jedan uravnoteženi sustav sila te da se materijal ponaša kao izotropan i linearno-elastičan. Pošto je iznalaženje egzaktnog rješenja takova sustava diferencijalnih jednadžbi ograničeno samo na slučajeve jednostavne geometrije nosača, oblike opterećenja i vrste oslanjanja nosača, ukazano je na nužnost uporabe neke od aproksimativnih metoda, pri čemu je istaknuta metoda konačnih elemenata.

U okviru su ove numeričke metode, a primjenom *updated Lagrangian* inkrementalne formulacije, nelinearnog polja pomaka nesimetričnog poprečnog presjeka i pretpostavke o linearno-elastičnom ponašanju materijala dobivene potpuno nove linearizirane inkrementalne ravnotežne jednadžbe prostornog tankostijenog grednog konačnog elementa, čvorovi kojeg se nalaze u krajnjim poprečnim presjecima. Kako je u analizu uključen i efekt ograničenog vitoperenja, to je u svakom čvoru standardnim stupnjevima slobode gibanja (tri translacije i tri rotacije) bilo nužno pridodati po jedan novi stupanj slobode u obliku tzv. *parametra vitoperenja* poprečnoga presjeka. Na taj je način dobiven prostorni gredni konačni element s 14 stupnjeva slobode gibanja, umjesto uobičajenog konačnog elementa s 12 stupnjeva slobode. Na osnovi su inkrementalnih ravnotežnih jednadžbi, potom, izvedene standardna elastična matrica krutosti konačnog elementa te potpuno nova geometrijska matrica krutosti konačnog elementa. Kako je primjenom *rigid body* testa dokazana nemogućnost primjene uobičajenog NDA (*natural deformation approach*) pristupa u *force recovery* fazi kod *updated Lagrangian* inkrementalne formulacije, to je bilo nužno primijeniti ESA (*eksternal stiffness approach*) pristup pa je, stoga, izvedena i potpuno nova eksterna matrica krutosti konačnog elementa. Za aksijalni je pomak u polju konačnog elementa, pritom, uporabljena linearna aproksimacija, dok je za transverzalne pomake i kut uvijanja uporabljena kubična aproksimacija. Uporaba je kubične aproksimacije kod torzije omogućila modeliranje *Wagnerova* efekta, a koji biva uzrokom čistog torzijskog izvijanja kod grednih nosača kod kojih se težište i centar smicanja poprečnoga presjeka poklapaju, što kod primjene standardne linearne aproksimacije nije bilo moguće.

Uključenje je nelinearnog polja pomaka tankostijenog poprečnog presjeka u cijelu formulaciju rezultiralo polutangencijalnom definicijom svih unutarnjih momenata, čime je ostvarena njihova kompatibilnost s velikih prostornim rotacijama, kao i međusobna kompatibilnost unutarnjih momenata te je, stoga, u ovoj formulaciji izbjegnuta potreba za uvođenjem čvornih momentnih matrica. Naime, ukoliko se pri izvođenju inkrementalnih ravnotežnih jednadžbi koristi linearno polje pomaka poprečnoga presjeka, tada se unutarnji momenti savijanja dobivaju kao kvazitangencijalni, dok se unutarnji torzijski moment dobiva kao polutangencijalni. Ako se, pak, u nekom čvoru konstrukcije spajaju dva ili više konačnih elemenata koji ne leže na istom pravcu, tada se međusobno zbrajaju dijelovi kvazitangencijalnih momenata savijanja i dijelovi polutangencijalnih momenata torzije. Kako se ti momenti pri velikim prostornim rotacijama ne ponašaju jednako, tada na kraju inkrementa neće biti uspostavljena ravnoteža, a dobivena će rješenja znatno odstupati od točnog. Za slučajeve je opterećenja konstrukcije momentima koji se pri velikim prostornim rotacijama ne ponašaju kao polutangencijalni, kao i za slučaj *off-axis* djelovanja vanjske sile, dokazana nužnost uvođenja odgovarajućih korektivnih matrice krutosti radi ostvarenja ravnoteže na kraju inkrementa. Također je prikazan i način izvođenja korekcije geometrije diskretizirane konstrukcije i konačnog elementa na kraju svakog inkrementa, a zbog nekomutativnosti je velikih prostornih rotacija, za korekciju referentnih osi čvorova primijenjena *Rodriguezova* formula velikih rotacija.

Materijalna je nelinearnost u analizu stabilnosti uvedena kroz pretpostavku da je materijal konačnog elementa linearno-elastičan idealno-plastičan te da su svi plastični efekti koncentrirani u plastičnim zglobovima nulte duljine. Pri tome je, također, pretpostavljeno da se plastični zglobovi mogu pojaviti samo u čvorovima konačnog elementa, dok se u polju konačnog elementa materijal uvijek ponaša kao

elastičan. Za razliku od standardnih elasto-plastičnih formulacija koje se temelje na metodi plastičnih zglobova i koje ne predviđaju interakciju čvornih sila u procesu plastifikacije poprečnoga presjeka, u ovom je numeričkom algoritmu takva interakcija predviđena kroz uvođenje odgovarajuće funkcije tečenja, a koja u analitičkom obliku predstavlja plohu tečenja poprečnoga presjeka. Primjenom je *Prandtl*ova kriterija tečenja i pretpostavke da je ta funkcija tečenja kontinuirana, izvedena nova plastična redukcijska matrica tankostijenog grednog konačnog elementa, a funkcija koje je održavanje inkrementalne promjene komponenata vektora čvornih sila onog čvora u kojem je plastični zglob prethodno formiran, u tangencijalnoj ravnini plohe tečenja. Kako se ova inkrementalna promjena odvija u tangencijalnoj ravnini, to na kraju inkrementa neće biti zadovoljena funkcija tečenja, pa je vektor čvornih sila potrebno vratiti na plohu tečenja. Korekcija je vrijednosti odgovarajućih komponenata vektora čvornih sila, pritom, izvedena analogno *radial return* metodi. Također, primjena ovakve elasto-plastične formulacije omogućava i modeliranje pojave elastičnog rasterećenja plastičnih zglobova tijekom inkrementalnog opterećenja konstrukcije, a što se manifestira pojavom negativnog člana u vektoru pozitivnih skalarnih funkcija.

Na osnovi je spomenutog numeričkog algoritma, temeljnog na metodi konačnih elemenata, izrađen izvorni kompjutorski program THINWALL, a pomoću kojeg je moguće izvoditi i linearnu i nelinearnu analizu stabilnosti proizvoljnih tankostijenih grednih struktura. Pri tome se linearna analiza temelji na pretpostavci da je za svaki nivo vanjskog opterećenja konstrukcije odnos unutarnjih sila kvalitativno uvijek isti te je, stoga, pri formiranju geometrijske matrice krutosti konstrukcije bilo moguće izlučiti tzv. faktor proporcionalnosti, nakon čega je preostali dio geometrijske matrice krutosti postao linearan. Na taj je način dobiven standardni matricni problem vlastitih vrijednosti, u kojem vlastita vrijednost predstavljala faktor kritičnog opterećenja kod kojeg konstrukcija gubi stabilnost, dok je odgovarajući vlastiti vektor imao značenje deformacijske forme pri kojoj konstrukcija gubi stabilnost. Nelinearna se analiza stabilnosti temeljila na inkrementalno-iterativnoj proceduri rješavanja s automatskim podešavanjem koraka opterećenja. Automatsko je podešavanje koraka opterećenja, pritom, izvedeno u skladu s *generalized displacement control* shemom. Da bi se nelinearna analiza stabilnosti mogla izvoditi, bilo je potrebno *idealne* ili *savršene* konstrukcije, a koje se razmatraju kod linearne analize stabilnosti, pretvoriti u *realne* ili *nesavršene* konstrukcije uvođenjem odgovarajućeg *poremećaja*, kojim se inicirao nastanak željene deformacijske forme pri kojoj razmatrana konstrukcija gubi stabilnost. Na taj je način bilo moguće praćenje deformacijske forme tijekom cijelog procesa opterećivanja konstrukcije i to, kako u pretkritičnoj (*prebuckling*) fazi, tako i u postkritičnoj (*postbuckling*) fazi. Za slučaj je materijalno nelinearnog ponašanja materijala kao ogledni primjer usvojena funkcija tečenja lakog I-profila W12×31 (AISC standard). Nakon toga program je testiran kroz 12 primjera, a dobiveni su rezultati i pri vrlo grubim diskretizacijama pokazali odličnu podudarnost s poznatim teorijskim, numeričkim ili eksperimentalnim vrijednostima, čime je očekivani znanstveni doprinos ostvaren.

Ovaj se algoritam može nadopuniti i za slučajeve postojanja unutarnjih zglobova u konstrukciji, za slučajeve tzv. ekscentričnih spojeva dvaju susjednih grednih elemenata, tj. kada su uzdužne osi susjednih elemenata međusobno paralelno pomaknute, kao i za slučajeve viskoelastičnog i viskoplastičnog odziva konstrukcije, a što će biti predmet daljnjeg istraživanja.

## REFERENCE

- [1] Gjelsvik, A.: *The theory of thin walled bars*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [2] Ojalvo, M.: *Thin-walled bars with open profiles*, The Olive Press, 1024 Fairway Ln., Estes Park, Colorado 80517, 1991.
- [3] Alfrević, I.: *Nauka o čvrstoći I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [4] Alfrević, I.: *Nauka o čvrstoći II*, Golden marketing, Zagreb, 1999.
- [5] Brnić, J.: *Nauka o čvrstoći*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
- [6] Brnić, J.: *Mehanika i elementi konstrukcija*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.
- [7] Englekirk, R.: *Steel structures: controlling behavior through design*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [8] Murray, N. W.: *Introduction to the theory of thin-walled structures*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [9] Uršić, J.: *Čvrstoća broda III*, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1992.
- [10] Armenakas, A. E.: *Modern structural analysis: the matrix method approach*, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [11] Uršić, J.: *Čvrstoća broda II*, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1991.
- [12] Brnić, J.: 'Optimization of the cross-sectional dimensions of structures using warping method', The 11<sup>th</sup> International Conference on Engineering Design, *Proceedings*, Tampere, Finland, 1997.
- [13] Schramm, U., Pilkey, W. D.: 'Optimal shape design for thin-walled beam cross-sections', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**(1994), pp. 4039-4058.
- [14] Bažant, Z. P., Cedolin, L.: *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*, Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [15] Galambos, T. V.: *Guide to stability design criteria for metal structures*, John Wiley and Sons, New York, 1988.
- [16] Kumar, A.: *Stability theory of structures*, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1985.
- [17] Mihanović, A.: *Stabilnost konstrukcija*, Društvo hrvatskih građevinskih konstruktora, Zagreb, 1993.
- [18] Paavola, J., Salonen, S.: 'Flexural-torsional stability of thin-walled columns', *Journal of Engineering Mechanics*, **118**(1992)12, pp. 2384-2400.
- [19] Timoshenko, S. P., Gere, J. M.: *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, London, 1961.
- [20] Brnić, J., Turkalj, G.: 'Wrinkling and Euler buckling', *Bulletins for Applied & Computer Mathematics*, **LXXXI-A**(1997), pp. 11-20.
- [21] Brnić, J., Turkalj, G.: 'Load capacity determination of thin-walled beam-type structures based on numerical prediction of structure stability', The VII<sup>th</sup> International Conference on *Numerical Methods in Continuum Mechanics NMCM '98, Proceedings*, High Tatras, Slovak Republic, 1998.
- [22] Lanzo, A. D., Garcea, G.: 'Koiter's analysis of thin-walled structures by a finite element approach', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**(1996), pp. 3007-3031.
- [23] Boresi, A. P., Schmidt, R. J., Sidebottom, O. M.: *Advanced mechanics of materials*, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [24] Brnić, J.: *Elastomehanika i plastomehanika*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.
- [25] Brnić, J.: *Elastoplasticity and elastoviscoplasticity*, PAMM-Centre, Budapest, 1998.
- [26] Crisfield, M. A.: *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [27] Lloyd Smith, D.: *Mathematical programming methods in structural plasticity*, Springer Verlag, Vienna, 1990.
- [28] Owen, D. R. J., Hinton, E.: *Finite element in plasticity*, Pineridge Press Limited, Swansea, 1986.
- [29] Cook, R. D.: *Finite element modeling for stress analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [30] Lucquin, B., Pironneau, O.: *Introduction to scientific computing*, John Wiley & Sons, Chichester, 1998.
- [31] Smith, I. M., Griffiths, D. V.: *Programming the finite element method*, John Wiley & Sons, Chichester, 1998.
- [32] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: *The Finite Element Method*, Vol.1, McGraw-Hill, London, 1994.

- [33] Hinton, E., Owen, D. R. J.: *Finite element software for plates and shells*, Pineridge Press, Swansea, 1984.
- [34] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: *The Finite Element Method*, Vol.2, McGraw-Hill, London, 1991.
- [35] Bleich, F.: *Buckling strength of metal structures*, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [36] Barsoum, R. S., Gallagher, R. H.: 'Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **2**(1970), pp. 335-352.
- [37] Bažant, Z. P., El Nimeiri, M.: 'Large-deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames', *Journal of the Engineering Mechanical Division*, **99**(1973)EM6, pp. 1259-1281.
- [38] Trahair, N. S., Kitipornchai, S.: 'Buckling of inelastic I-beams under uniform moment', *Journal of Structural Division*, ASCE, **98**(1972)11, pp. 2551-2566.
- [39] Nethercot, D. A.: 'Inelastic buckling of steel beams under non-uniform moment', *The Structural Engineering*, **53**(1975)2, pp. 73-78.
- [40] Bathe, K. J., Bolourchi, S.: 'Large displacement analysis of three-dimensional beam structures', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **14**(1979), pp. 961-986.
- [41] Yang, Y. B., McGuire, W.: 'Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis', *Journal of Structural Engineering*, **112**(1986)4, pp. 853-877.
- [42] Gattass, M., Abel, J. F.: 'Equilibrium considerations of the updated Lagrangian formulation of beam with natural concept', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**(1987), pp. 2119-2143.
- [43] Chan, S. L., Kitipornchai, S.: 'Geometric nonlinear analysis of asymmetric thin-walled beam-column', *Engineering Structures*, **9**(1987), pp. 243-254.
- [44] Conci, A., Gattas, M.: 'Natural approach for geometric non-linear analysis of thin-walled frames', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**(1990), pp. 207-231.
- [45] Conci, A.: 'Stiffness matrix for nonlinear analysis of thin-walled frames', *Journal of Engineering Mechanics*, **118**(1991)9, pp. 1859-1975.
- [46] Chen, H., Blandford, G. E.: 'Thin-walled space frames. I: large deformation analysis theory', *Journal of Structural Engineering*, **117**(1991)8, pp. 2499-2520.
- [47] Chen, H., Blandford, G. E.: 'Thin-walled space frames. II: algorithmic details and applications', *Journal of Structural Engineering*, **117**(1991)8, pp. 2521-2539.
- [48] Gendy, A. S., Saleeb, A. F.: 'Generalized mixed finite element model for pre- and post-quasistatic response of thin-walled framed structures', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**(1994), pp. 297-322.
- [49] Izzudin, B. A.: 'An Eulerian approach to the large displacement analysis of thin-walled frames', *Proceedings of the Institute of Civil Engineering Structures and Buildings*, **110**(1995)1, pp. 50-65.
- [50] Saleeb, A. F., Chang, T. Y. P., Gendy, A. S.: 'Effective modelling of spatial buckling of beam assemblages accounting for warping constraints and rotation-dependency of moments', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**(1992), 469-502.
- [51] Kim, M. Y., Chang, S. P., Kim, S. B.: 'Spatial stability analysis of thin-walled space frames', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**(1996), pp. 499-525.
- [52] Chang, S. P., Kim, S. B., Kim, M. Y.: 'Stability of shear deformable thin-walled space frames and circular arches', *Journal of Engineering Mechanics*, **122**(1996)9, pp. 844-854.
- [53] Crisfield, M. A.: *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1997.
- [54] Rhim, J., Lee, S. W.: 'A vectorial approach to computational modelling of beams undergoing finite rotations', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**(1998), 527-540.
- [55] Turkalj, G., Brnić, J.: 'Computational non-linear analysis of structural stability', *Bulletins for Applied & Computer Mathematics*, **LXXXVIII**(1999), pp. 15-24.
- [56] Turkalj, G., Brnić, J.: 'Geometric non-linear analysis of thin-walled beams', The 4<sup>th</sup> International Scientific Colloquium "CAx Techniques", *Proceedings*, Bielefeld, Germany, 1999.
- [57] Yang, Y. B., Kuo, S. R.: *Theory & analysis of nonlinear framed structures*, Prentice Hall, New York, 1994.
- [58] Karamanlidis, D., Gesch-Karamanlidis, H.: 'Geometrically and materially nonlinear finite element analysis of thin-walled frames: numerical studies', *Thin-Walled Structures*, **4**(1986), pp. 247-267.
- [59] Wunderlich, W., Obrecht, H., Schrödter, V.: 'Nonlinear analysis and elasto-plastic load-carrying behaviour of thin-walled spatial beam structures with warping constraints', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **22**(1986), pp. 671-695.

- [60] Conci, A., Gattas, M.: 'Natural approach for thin-walled beam-columns with elastic-plasticity', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**(1990), pp. 207-231.
- [61] Meek, J. L., Loganathan, S.: 'Geometric and material non-linear behaviour of beam-columns', *Computers & Structures*, **34**(1990)1, pp. 87-100.
- [62] Meek, J. L., Lin, W. J.: 'Geometric and material nonlinear analysis of thin-walled beam-columns', *Journal of Structural Engineering*, **116**(1990)6, pp. 1473-1490.
- [63] Kouhia, R., Tuomala, M.: 'Static and dynamic analysis of space frames using simple Timoshenko type elements', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**(1993), pp. 1189-1221.
- [64] Pi, Y. L., Trahair, N. S.: 'Nonlinear inelastic analysis of steel beam-column. I: theory', *Journal of Structural Engineering*, **120**(1994)7, pp. 2041-2061.
- [65] Pi, Y. L., Trahair, N. S.: 'Nonlinear inelastic analysis of steel beam-column. II: applications', *Journal of Structural Engineering*, **120**(1994)7, pp. 2062-2085.
- [66] Izzuddin, B. A., Lloyd Smith, D.: 'Large-displacement analysis of elastoplastic thin-walled frames. I: formulation and implementation', *Journal of Structural Engineering*, **122**(1995)8, pp. 905-914.
- [67] Izzuddin, B. A., Lloyd Smith, D.: 'Large-displacement analysis of elastoplastic thin-walled frames. II: verification and application', *Journal of Structural Engineering*, **122**(1995)8, pp. 915-925.
- [68] Gebbeken, N.: 'A refined numerical approach for the ultimate-load analysis of 3-D steel rod structures', *Engineering Computations*, **15**(1998)3, pp. 312-344.
- [69] Alfirević, I.: *Linearna analiza konstrukcija*, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, 1999.
- [70] Back, S. Y., Kenneth, M. W.: 'A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **43**(1998), 1173-1191.
- [71] Brown, E. H., Burgoyne, C. J.: 'Nonuniform elastic torsion and flexure of members with asymmetric cross-section', *International Journal for Mechanical Sciences*, **36**(1994)1, pp. 39-48.
- [72] Burgoyne, C. J., Brown, E. H.: 'Nonuniform elastic torsion', *International Journal for Mechanical Sciences*, **36**(1994)1, pp. 23-38.
- [73] Musat, S., Epureanu, B. I.: 'Study of warping torsion of thin-walled beams with open cross-section using macro-elements', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **44**(1999), 853-868.
- [74] Šimić, V.: *Otpornost materijala II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [75] Uršić, J.: *Čvrstoća broda I*, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1991.
- [76] Chen, W. F., Atsuta, T.: *Theory of beam column*, Vol. 2, McGraw-Hill, New York, 1977.
- [77] Goto, Y., Chen, W. F.: 'On the validity of Wagner hypothesis', *International Journal of Solids and Structures*, **25**(1989)6, pp. 621-634.
- [78] Kim, M. Y., Chang, S. P., Kim, S. B.: 'Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams. I: analytical approach', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**(1994), 4097-4115.
- [79] Kim, M. Y., Chang, S. P., Kim, S. B.: 'Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams. II: numerical approach', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**(1994), 4117-4140.
- [80] Turkalj, G., Brnić, J.: 'Torsional buckling analysis of special thin-walled opened cross-section columns used in vehicle design', The Fifth International Scientific-Technical Conference on *Internal Combustion Engines and Motor Vehicles MOTAUTO '98, Proceedings*, Vol. IV, Sophia - Vitosha, Bulgaria, October 14-16, 1998, pp. 187-192.
- [81] Bronštejn, I. N., Semendjajev, K. A.: *Matematički priručnik* (prijevod s ruskog), Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.
- [82] Noël, A. T., Szabo, B. A.: 'Formulation of geometrically non-linear problems in the spatial reference frame', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**(1997), 1263-1280.
- [83] Turkalj, G., Brnić, J.: 'Thin-walled beam element for analysis of large displacement problems', *Bulletins for Applied & Computer Mathematics*, **LXXXIX**(1999), pp. 15-24.
- [84] Bathe, K. J.: *Finite element procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [85] Petrangeli, M., Ciampi, V.: 'Equilibrium based iterative solutions for the non-linear beam problems', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**(1997), 423-437.
- [86] Landau, L. D., Lifshitz, E. M.: *Theory of elasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1986.



- [87] Chin, C. K., Al-Bermani, F. G. A., Kitipornchai, S.: 'Non-linear analysis of thin-walled structures using plate elements', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**(1994), pp. 1697-1711.
- [88] Yang, Y. B., McGuire, W.: 'Joint rotation and geometric nonlinear analysis', *Journal of Structural Engineering*, **112**(1986)4, pp. 879-905.
- [89] Brown, D. K.: *An introduction to the finite element method using BASIC programs*, Surrey University Press, Glasgow, 1990.
- [90] MSC/NASTRAN: *Handbook for nonlinear analysis*, The MacNeal-Schwendler Corporation, Los Angeles, 1992.
- [91] Yang, Y. B., Kuo, S. R.: 'Frame buckling analysis with full consideration of joint compatibilities', *Journal of Engineering Mechanics*, **118**(1992)5, pp. 871-889.
- [92] Simo, J. C., Hughes, T. J. R.: *Computational inelasticity*, Springer, New York, 1998.
- [93] Haldar, A., Nee, K. M.: 'Elasto-plastic large deformation analysis of PR steel frames for LRFD', *Computers & Structures*, **31**(1989)5, pp. 811-823.
- [94] Orbison, J. G., McGuire, W., Abel, J. F.: 'Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **33**(1982), pp. 557-573.
- [95] Shi, G., Alturi, S. N.: 'Elasto-plastic large deformation analysis of space-frames: a plastic-hinge and stress-based explicit derivation of tangent stiffnesses', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**(1988), 589-615.
- [96] Ueda, Y., Yao, T.: 'The plastic node method: a new method of plastic analysis', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **34**(1982), pp. 1089-1104.
- [97] Chapra, S. C., Canale R. P.: *Numerical methods for engineers*, McGraw-Hill, New York, 1988.
- [98] MSC/NASTRAN: *Quick reference manual: version 70.5*, The MacNeal-Schwendler Corporation, Los Angeles, 1997.
- [99] Kitipornchai, S., Trahair, N. S.: 'Inelastic buckling of simply supported steel I-beams', *Journal of Structural Division, ASCE*, **101**(1975), pp. 1333-1347.
- [100] Vogel, U., Maier, D. H.: 'Einfluß der Schubweichheit bei der Traglastberechnung räumlicher Systeme', *Der Stahlbau*, **9**(1987), pp. 271-277.

## POPIS UPORABLJENIH OZNAKA

$A$	površina poprečnog presjeka ( $m^2$ )
$\mathbf{a}$	matrica polja konačnog elementa ili matrica polinoma
$C_i$	$i$ -ta ravnotežna konfiguracija konačnog elementa
$C_{ijkl}$	tenzor elastičnih konstanti (Pa)
$d$	diferencijal
$E$	Youngov modul (Pa)
$e_{ij}$	dio Green-Lagrangeova tenzora deformacije linearan u pomacima $u$ , $v$ i $w$ , Almansijev tenzor deformacije
$\tilde{e}_{ij}$	dio Green-Lagrangeova tenzora deformacije linearan u pomacima $\tilde{u}$ , $\tilde{v}$ i $\tilde{w}$
$\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$	jedinični vektori
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$	vektori srednih vrijednosti
$\bar{\mathbf{e}}_x, \bar{\mathbf{e}}_y$	jedinični vektori srednih vrijednosti
$\mathbf{F}$	vektor unutarnjih sila konstrukcije
$F$	sila (N)
$\mathbf{f}^e, \bar{\mathbf{f}}^e$	vektor čvornih sila $e$ -tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$f_i$	volumenske sile ( $Nm^{-3}$ )
$\mathbf{f}_u$	vektor čvornih sila pri savijanju konačnog elementa u ravnini ( $z, x$ )
$\mathbf{f}_v$	vektor čvornih sila pri savijanju konačnog elementa u ravnini ( $z, y$ )
$\mathbf{f}_w$	vektor čvornih sila pri aksijalnom opterećenju konačnog elementa
$\mathbf{f}_\varphi$	vektor čvornih sila pri torziji konačnog elementa
$F_{kr}$	kritična sila izvijanja (N)
$F_{nx}, F_{ny}$	Eulerove kritične sile pri čistom fleksijskom izvijanju oko osi $x$ i $y$ (N)
$F_{n\varphi}$	kritična sila pri čistom torzijskom izvijanju (N)
$F_x, F_y$	smične sile (N)
$F_x, F_y$	Eulerove kritične sile pri čistom fleksijskom izvijanju oko osi $x$ i $y$ (N)
$F_z$	aksijalna sila (N)
$F_\varphi$	kritična sila pri čistom torzijskom izvijanju (N)
$\mathbf{G}$	gradijentna matrica plohe tečenja
$G$	modul smicanja (N)
GSP	generalizirani parametar krutosti
$H$	generalizirani pomak
$i$	$i$ -ti inkrement
$\mathbf{I}_2$	jedinična matrica drugog reda
$\mathbf{I}_3$	jedinična matrica trećega reda
$\mathbf{I}_{14}$	jedinična matrica četrnaestog reda
$I_p$	polarni moment inercije poprečnoga presjeka za težište ( $m^4$ )
$I_{ps}$	polarni moment inercije poprečnoga presjeka za centar smicanja ( $m^4$ )
$i_p$	polumjer inercije (m)
$I_x, I_y$	aksijalni momenti inercije poprečnoga presjeka ( $m^4$ )
$I_{xy}$	centrifugalni momenti inercije poprečnoga presjeka ( $m^4$ )
$I_{x\omega}, I_{y\omega}$	sektorski centrifugalni momenti inercije ( $m^5$ )
$I_\omega$	sektorski moment inercije ( $m^6$ )
$J$	torzijski moment inercije ( $m^4$ )
$j$	$j$ -ta iteracija
$\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$	jedinični vektori
$\bar{K}$	Wagnerov koeficijent ( $Nm^2$ )
$\mathbf{K}_E$	elastična matrica krutosti konstrukcije
$\mathbf{K}_G$	geometrijska matrica krutosti konstrukcije
$\hat{\mathbf{K}}_G$	linearizirana geometrijska matrica krutosti konstrukcije

$\mathbf{k}_G^e, \bar{\mathbf{k}}_G^e$	geometrijska matrica krutosti $e$ -tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$\mathbf{k}_E^e, \bar{\mathbf{k}}_E^e$	elastična matrica krutosti $e$ -tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$\mathbf{k}_{Ext}^e$	eksterna matrica krutosti $e$ -tog konačnog elementa
$\mathbf{k}_m^{Ax}$	korektivna matrica krutosti za aksijalni moment
$\mathbf{k}_m^{off}$	korektivna matrica krutosti za <i>off-axis</i> opterećenje
$\mathbf{k}_m^{QT1}$	korektivna matrica krutosti za kvazitangencijalni moment prve vrste
$\mathbf{k}_m^{QT2}$	korektivna matrica krutosti za kvazitangencijalni moment druge vrste
$\mathbf{k}_m^{Tan}$	korektivna matrica krutosti za tangencijalni moment
$\mathbf{K}_P$	plastična redukcijska matrica konstrukcije
$\mathbf{k}_p^e, \bar{\mathbf{k}}_p^e$	redukcijska matrica krutosti konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$\mathbf{K}_T$	tangentna matrica krutosti konstrukcije
$\mathbf{k}_T^e, \bar{\mathbf{k}}_T^e$	tangentna matrica krutosti $e$ -tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$l$	duljina (m)
$l_0$	slobodna duljina izvijanja (m)
$M$	moment (Nm)
$M_{kr}$	kritični moment izvijanja (Nm)
$M_x, M_y$	momenti savijanja (Nm)
$M_{x,gr}, M_{y,gr}$	granične vrijednosti momenata savijanja (Nm)
$M_z$	torzijski moment (Nm)
$M_{z,gr}$	granična vrijednost torzijskog momenta (Nm)
$M_\omega$	bimoment (Nm <sup>2</sup> )
$M_{\omega,gr}$	granična vrijednost bimomenta (Nm <sup>2</sup> )
$\hat{\mathbf{M}}_{QT1}$	momentna matrica kvazitangencijalnog momenta prve vrste
$\hat{\mathbf{M}}_{QT2}$	momentna matrica kvazitangencijalnog momenta druge vrste
$\hat{\mathbf{M}}_{ST}$	momentna matrica polutangencijalnog momenta
$\Delta \mathbf{M}$	vektor induciranih momenata
$\Delta M_x, \Delta M_y$	inducirani momenti savijanja (Nm)
$\Delta M_z$	inducirani torzijski moment (Nm)
$n$	normala
$\mathbf{n}_A$	jedinični vektor rotacijskog inkrementa
$\mathbf{N}_1$	matrica interpolacijskih funkcija
$\mathbf{N}_u$	matrica interpolacijskih funkcija pomaka $u_s$
$\mathbf{N}_v$	matrica interpolacijskih funkcija pomaka $v_s$
$\mathbf{N}_w$	matrica interpolacijskih funkcija pomaka $w_o$
$\mathbf{N}_\varphi$	matrica interpolacijskih funkcija pomaka $\varphi_z$
$O$	težište poprečnoga presjeka
$\mathbf{0}$	nul-vektor, nul-matrica
$\mathbf{P}$	vektor opterećenja konstrukcije
$\mathbf{r}$	vektor položaja
$\mathbf{R}$	vektor neuravnoteženog opterećenja konstrukcije
$\mathbf{R}_A$	rotacijska matrica čvora A konstrukcije
$S$	centar smicanja poprečnog presjeka
$\mathbf{s}$	vektor položaja centra smicanja
$s$	krivocrtna koordinata uzduž konture s ishodištem u točki D (m)
$S_{ij}$	Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja druge vrste (Pa)

$S_x, S_y$	statički momenti površine za os $x$ i $y$ ( $m^3$ )
$S_\omega$	sektorski statički moment ( $m^4$ )
$\mathbf{t}$	transformacijska matrica
$\mathbf{t}_0$	osnovna transformacijska matrica
${}^n \mathbf{t}^e$	transformacijska matrica $e$ -tog konačnog elementa u konfiguraciji $C_n$
${}^n \mathbf{t}_0^e$	osnovna transformacijska matrica $e$ -tog konačnog elementa u konfiguraciji $C_n$
$t$	tangenta
$t_i$	površinska sila ( $Nm^{-2}$ )
$T_{sv}$	St. Venantov torzijski moment (Nm)
$T_{sv,gr}$	granična vrijednost St. Venantova torzijskog momenta (Nm)
$T_\omega$	torzijski moment vitoperenja (Nm)
$T_{\omega,gr}$	granična vrijednost torzijskog momenta vitoperenja (Nm)
$\mathbf{U}$	vektor čvornih pomaka konstrukcije, vlastiti vektor
$U$	potencijal unutarnjih sila (J)
$\mathbf{u}$	vektor čvornih pomaka pri savijanju konačnog elementa u ravnini ( $z, x$ )
$\mathbf{u}^e, \bar{\mathbf{u}}^e$	vektor čvornih pomaka $e$ -tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$\mathbf{U}_0$	vektor pomaka poprečnog presjeka kao kruto tijelo
$u_s, v_s$	translatorni pomaci centra smicanja S poprečnoga presjeka po pravcima osi $x_s$ i $y_s$ (m)
$\mathbf{U}_{uk}$	ukupno polje pomaka
$\Delta \mathbf{U}, \Delta \hat{\mathbf{U}}, \Delta \bar{\mathbf{U}}$	vektori inkrementalnih čvornih pomaka konstrukcije
$\Delta \mathbf{U}_A$	translacijski inkrement
$V$	volumen ( $m^3$ )
$\mathbf{v}$	vektor čvornih pomaka pri savijanju konačnog elementa u ravnini ( $z, y$ )
$W$	potencijal vanjskih sila (J)
$\mathbf{w}$	vektor čvornih pomaka pri aksijalnom opterećenju konačnog elementa
$w_o$	translatorni pomak težišta O po pravcu osi $z$ (m)
$W, U, V$	translacijski pomaci po pravcu globalnih osi $Z, X$ i $Y$ (m)
$w, u, v$	linearne komponente pomaka po pravcu lokalnih osi $z, x$ i $y$ (m)
$\tilde{w}, \tilde{u}, \tilde{v}$	nelinearne komponente pomaka po pravcu osi $z, x$ i $y$ (m)
$\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}$	nelinearne komponente pomaka po pravcu osi $\bar{z}, \bar{x}$ i $\bar{y}$ (m)
$x, y$	glavne centralne osi inercije poprečnoga presjeka, koordinate (m)
$x_s, y_s$	koordinate centra smicanja S poprečnoga presjeka (m)
$x_s, y_s, z_s$	koordinatne osi s ishodištem u S, a paralelne s koordinatnim osima $z, x$ i $y$
$\mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s$	jedinični vektori osi konačnog elementa
$z$	uzdužna (težišna) os, koordinata (m)
$\bar{z}, \bar{x}, \bar{y}$	koordinatni sustav s ishodištem u točki N konture
$z_s, x_s, y_s$	koordinatne osi s ishodištem u S, a paralelne s koordinatnim osima $z, x$ i $y$
$\mathbf{z}_s, \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s$	jedinični vektori osi konačnog elementa
$\alpha$	vektor konstanti ili generaliziranih koordinata
$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$	jedinični vektori čvornih osi
$\alpha_x, \alpha_y$	koeficijenti (m)
$\alpha_z$	koeficijent ( $m^2$ )
$\alpha_\omega$	koeficijent (-)
$\Delta$	inkrementalna veličina
$\delta$	varijacija
$\delta(x, y)$	Dirachova delta-funkcija
$\varepsilon_D, \varepsilon_F, \varepsilon_E$	dopuštena odstupanja ili tolerancije
$\varepsilon_{ij}$	Green-Lagrangeov tenzor deformacije (-)
$\zeta, \xi, \eta$	jedinični vektori
$\eta_{ij}$	dio Green-Lagrangeova tenzora deformacije nelinearan u pomacima $u, v$ i $w$
$\theta$	parametar vitoperenja u globalnom koordinatnom sustavu (rad/m)
$\theta$	parametar vitoperenja poprečnoga presjeka definiran za centar smicanja (rad/m)

$\Lambda$	faktor inkrementalnog opterećenja
$\lambda$	vlastita vrijednost
$d\lambda$	vektor proizvoljnih pozitivnih skalarnih funkcija ili plastičnih multiplikatora
$d\lambda$	proizvoljna pozitivna skalarna funkcija ili plastični multiplikator
$\nu$	Poissonov koeficijent
$\Pi$	ukupni ili totalni potencijal (J)
${}^1\Pi$	ravninu okomita na os ${}^1z_s$ ,
$\rho$	udaljenost točke poprečnog presjeka od centra smicanja (m)
$\sigma, \sigma_z$	normalno naprezanje (Pa)
$\sigma_\nu$	normalno naprezanja na granici tečenja (Pa)
$\tau, \tau_{zx}, \tau_{zy}$	tangencijalno naprezanje (Pa)
$\tau_{ij}$	Cauchyjev tenzor naprezanja (Pa)
$\tau_\nu$	tangencijalno naprezanja na granici tečenja (Pa)
$\Phi$	funkcija tečenja
$\Phi_A$	transformacijska matrica čvora A
$\phi_x, \phi_y, \phi_z$	rotacijski pomaci oko globalnih osi X, Y i Z (rad)
$\Delta\phi_A$	rotacijski inkrement
$\Delta\phi_A$	intenzitet rotacijskog inkrementa
$\phi$	vektor čvornih pomaka pri torziji konačnog elementa
$\tilde{\phi}_n$	transformacijska matrica
$\hat{\phi}_i$	vektor rotacijskih pomaka $i$ -tog čvora diskretizirane konstrukcije
$\phi_z, \phi_x, \phi_y$	vektori rotacijskih pomaka konačnog elementa
$\varphi_z, \varphi_x, \varphi_y$	rotacijski pomaci poprečnoga presjeka kao krutog tijela oko osi $z_s, x_s$ i $y_s$ (rad)
$\Psi$	potencijalna ili <i>Prandtlova</i> funkcija naprezanja
$\omega$	sektorska koordinata ili funkcija vitoperenja u odnosu na centar smicanja (m <sup>2</sup> )
$\bar{\omega}$	sektorska koordinata ili funkcija vitoperenja za točke konture (m <sup>2</sup> )
$\overline{\omega}$	sektorska koordinata ili funkcija vitoperenja točaka izvan konture (m <sup>2</sup> )
$\tilde{\omega}_n$	transformacijska matrica
$\partial/\partial x$	parcijalna derivacija po $x$ -u
$\partial/\partial y$	parcijalna derivacija po $y$ -u
$\partial/\partial z$	parcijalna derivacija po $z$ -u

## POPIS SLIKA

<b>Sl. 2.1.</b>	<i>Tankostijeni gredni nosač otvorena poprečnog presjeka</i> .....	3
<b>Sl. 2.2.</b>	<i>Pomaci poprečnog presjeka kao krutog tijela</i> .....	4
<b>Sl. 2.3.</b>	<i>Promjena položaja točke konture uslijed torzije</i> .....	5
<b>Sl. 2.4.</b>	<i>Aksijalni pomaci točaka poprečnog presjeka zbog savijanja u ravnini:</i> <i>a) (z, y); b) (z, x)</i> .....	7
<b>Sl. 2.5.</b>	<i>Unutarnje sile</i> .....	9
<b>Sl. 2.6.</b>	<i>Wagnerov efekt</i> .....	11
<b>Sl. 2.7.</b>	<i>Ravnoteža segmenta nosača pri savijanju: a) u ravnini (y, z); b) u ravnini (x, z)</i> .....	14
<b>Sl. 2.8.</b>	<i>Tlačno opterećeni tankostijeni gredni nosač</i> .....	24
<b>Sl. 2.9.</b>	<i>Tankostijeni gredni nosač opterećen spregovima M na osloncima</i> .....	30
<b>Sl. 2.10.</b>	<i>Konzola opterećena vertikalnom silom F na slobodnome kraju</i> .....	33
<b>Sl. 3.1.</b>	<i>Tankostijeni gredni konačni element: a) komponente čvornih pomaka;</i> <i>b) komponente čvornih sila</i> .....	36
<b>Sl. 3.2.</b>	<i>Inkrementalni pomaci konačnog elementa</i> .....	37
<b>Sl. 3.3.</b>	<i>Aksijalno opterećenje konačnog elementa: komponente pomaka i komponente sila</i> .....	40
<b>Sl. 3.4.</b>	<i>Savijanje konačnog elementa u ravnini (z, y): komponente pomaka i komponente sila</i> ....	41
<b>Sl. 3.5.</b>	<i>Savijanje konačnog elementa u ravnini (z, x): komponente pomaka i komponente sila</i> ....	42
<b>Sl. 3.6.</b>	<i>Torzija konačnog elementa: komponente pomaka i komponente sila</i> .....	44
<b>Sl. 3.7.</b>	<i>Rotacija koordinatnih osi za kut <math>\varphi_z</math></i> .....	52
<b>Sl. 3.8.</b>	<i>Virtualni pomaci konačnog elementa: a) kao krutog tijela; b) zbog</i> <i>ukupne deformacije</i> .....	53
<b>Sl. 3.9.</b>	<i>Lokalni i globalni koordinatni sustav</i> .....	58
<b>Sl. 3.10.</b>	<i>Krivulja 'opterećenje – pomak'</i> .....	60
<b>Sl. 3.11.</b>	<i>Referentne osi</i> .....	62
<b>Sl. 3.12.</b>	<i>Čvrne osi i osi konačnog elementa: a) u konfiguraciji <math>C_0</math>; b) u konfiguraciji <math>C_1</math></i> .....	64
<b>Sl. 3.13.</b>	<i>Određivanje položaja osi <math>^1x_s</math> i <math>^1y_s</math>: a) projekcije čvornih osi u ravninu <math>^1\Pi</math>;</i> <i>b) jedinični vektori srednjih vrijednosti; c) konačni položaj osi <math>^1x_s</math> i <math>^1y_s</math></i> .....	65
<b>Sl. 3.14.</b>	<i>Čista inkrementalna procedura</i> .....	67
<b>Sl. 3.15.</b>	<i>'Off-axis' opterećenje u i-tom čvoru konstrukcije</i> .....	70
<b>Sl. 3.16.</b>	<i>Vrste torzijskog momenta <math>^1M_z</math> s obzirom na ponašanje pri velikim prostornim</i> <i>rotacijama: a) aksijalni moment; b) tangencijalni moment; c) polutangencijalni</i> <i>moment; d) kvazitangencijalni moment prve vrste; e) kvazitangencijalni</i> <i>moment druge vrste</i> .....	72
<b>Sl. 3.17.</b>	<i>Momenti savijanja: a) inkrementalna rotacija normalnog naprezanja oko osi <math>^1z</math></i> <i>za kut <math>\varphi_z</math>; b) kvazitangencijalni moment <math>^1M_x</math>; c) kvazitangencijalni moment <math>^1M_y</math></i> .....	73
<b>Sl. 3.18.</b>	<i>Moment torzije: a) inkrementalna rotacija tangencijalnog naprezanja oko osi <math>^1x</math></i> <i>za kut <math>\varphi_x</math>; b) inkrementalna rotacija tangencijalnog naprezanja oko osi <math>^1y</math> za kut <math>\varphi_y</math>;</i> <i>c) polutangencijalni moment <math>^1M_z</math></i> .....	74
<b>Sl. 3.19.</b>	<i>Inkrementalne rotacije momenta <math>^1M_{z_i}</math> oko koordinatnih osi: a) rotacija momenta</i> <i><math>^1M_{z_i-QT1}</math> oko osi <math>^1y</math>; b) rotacija momenta <math>^1M_{z_i-QT2}</math> oko osi <math>^1x</math>; c) rotacija momenta</i> <i><math>^1M_{z_i-ST}</math> oko osi <math>^1y</math>; d) rotacija momenta <math>^1M_{z_i-ST}</math> oko osi <math>^1x</math></i> .....	76
<b>Sl. 3.20.</b>	<i>Inkrementalne rotacije momenta <math>^1M_{x_i}</math> oko koordinatnih osi: a) rotacija momenta</i> <i><math>^1M_{x_i-QT1}</math> oko osi <math>^1z</math>; b) rotacija momenta <math>^1M_{x_i-QT2}</math> oko osi <math>^1y</math>; c) rotacija momenta</i> <i><math>^1M_{x_i-ST}</math> oko osi <math>^1z</math>; d) rotacija momenta <math>^1M_{x_i-ST}</math> oko osi <math>^1y</math></i> .....	77
<b>Sl. 3.21.</b>	<i>Inkrementalne rotacije momenta <math>^1M_{y_i}</math> oko koordinatnih osi: a) rotacija momenta</i> <i><math>^1M_{y_i-QT1}</math> oko osi <math>^1z</math>; b) rotacija momenta <math>^1M_{y_i-QT2}</math> oko osi <math>^1x</math>; c) rotacija momenta</i> <i><math>^1M_{y_i-ST}</math> oko osi <math>^1z</math>; d) rotacija momenta <math>^1M_{y_i-ST}</math> oko osi <math>^1x</math></i> .....	78
<b>Sl. 3.22.</b>	<i>Krivulja <math>\sigma - \varepsilon</math> za: a) linearno-elastičan materijal; b) linearno-elastičan</i> <i>idealno-plastičan materijal</i> .....	81
<b>Sl. 3.23.</b>	<i>Korekcija vrijednosti čvornih sila</i> .....	83
<b>Sl. 4.1.</b>	<i>Položaj imaginarnog čvora C prostornog grednog konačnog elementa</i> .....	86
<b>Sl. 4.2.</b>	<i>I-profil</i> .....	87
<b>Sl. 4.3.</b>	<i>Dijagram tijeka programa THINWALL</i> .....	89

<b>Sl. 4.4.</b>	<i>Tlačno opterećena konzola dvoosno simetričnog križnog poprečnog presjeka iz primjera 4.3.1</i> .....	92
<b>Sl. 4.5.</b>	<i>Opterećenje konzole iz primjera 4.3.1. za nelinearnu analizu: a) čistog torzijskog izvijanja; b) čistog fleksijskog izvijanja</i> .....	93
<b>Sl. 4.6.</b>	<i>Dijagram <math>[(F / F_\varphi) - \phi_{zB}]</math> konzole iz primjera 4.3.1 za čisto torzijsko izvijanje (<math>F_\varphi = 288,88</math> kN)</i> .....	94
<b>Sl. 4.7.</b>	<i>Dijagram <math>[(F / F_y) - (U_B / l)]</math> konzole iz primjera 4.3.1. za čisto fleksijsko izvijanje (<math>F_y = 437,141</math> kN)</i> .....	94
<b>Sl. 4.8.</b>	<i>Tlačno opterećena konzola nesimetričnog poprečnog presjeka iz primjera 4.3.2</i> .....	95
<b>Sl. 4.9.</b>	<i>Opterećenje konzole iz primjera 4.3.2. za nelinearnu analizu torzijsko-fleksijskog izvijanja</i> .....	95
<b>Sl. 4.10.</b>	<i>Dijagrami: a) <math>[(F / F_{kr}) - \phi_{zB}]</math>; b) <math>[(F / F_{kr}) - (U_B / l)]</math>; c) <math>[(F / F_y) - (V_B / l)]</math>, konzole iz primjera 4.3.2 za torzijsko-fleksijsko izvijanje (<math>F_{kr} = 14,023</math> N)</i> .....	96
<b>Sl. 4.11.</b>	<i>Greda iz primjera 4.3.3. opterećena protusmjernim spregovima intenziteta <math>M</math></i> .....	97
<b>Sl. 4.12.</b>	<i>Opterećenje grede iz primjera 4.3.3. za nelinearnu analizu lateralnog izvijanja</i> .....	97
<b>Sl. 4.13.</b>	<i>Dijagrami: a) <math>[(M / M_{kr}) - \phi_{zC}]</math>; b) <math>[(M / M_{kr}) - (U_C / l)]</math>, grede iz primjera 4.3.3 za lateralno izvijanje (<math>M_{kr} = 601,586</math> kNcm)</i> .....	98
<b>Sl. 4.14.</b>	<i>Okvir iz primjera 4.3.4. opterećen protusmjernim spregovima intenziteta <math>M</math> i vertikalnom silom <math>F</math></i> .....	99
<b>Sl. 4.15.</b>	<i>Ukupno opterećenje okvira iz primjera 4.3.4 kod nelinearne analize stabilnosti, a za slučaj kada se primarno opterećenje sastoji od: a) protusmjernih momenata intenziteta <math>M</math>; b) vertikalne sile <math>F</math></i> .....	99
<b>Sl. 4.16.</b>	<i>Dijagrami: a) <math>(M - W_C)</math>; b) <math>(F - W_C)</math>, za lateralno izvijanje okvira iz primjera 4.3.4</i> .....	100
<b>Sl. 4.17.</b>	<i>Konzola iz primjera 4.3.5, nesimetričnog poprečnog presjeka, opterećena vertikalnom silom <math>F</math></i> .....	101
<b>Sl. 4.18.</b>	<i>'Off-axis' djelovanje sile <math>F</math> sa sl. 4.17, sa hvatištem u: a) težištu poprečnog presjeka; b) sjecištu struka i gornjeg pojasa; c) sjecištu struka i donjeg pojasa</i> .....	101
<b>Sl. 4.19.</b>	<i>L-okvir iz primjera 4.3.6. opterećen momentom <math>M = M_z</math></i> .....	102
<b>Sl. 4.20.</b>	<i>Različiti oblici momenta <math>M</math> sa sl. 4.19: a) polutangencijalni (<math>M</math>-ST); b) kvazitangencijalni prve vrste (<math>M</math>-QT1); c) kvazitangencijalni druge vrste (<math>M</math>-QT2)</i> ....	103
<b>Sl. 4.21.</b>	<i>Dijagram <math>(M - W_C)</math> za lateralno izvijanje okvira iz primjera 4.3.6, a za slučaj kada se moment ponaša kao polutangencijalni (<math>M</math>-ST)</i> .....	104
<b>Sl. 4.22.</b>	<i>Dijagram <math>(M - W_C)</math> za lateralno izvijanje okvira iz primjera 4.3.6, a za slučaj kada se moment ponaša kao kvazitangencijalni prve vrste (<math>M</math>-QT1)</i> .....	104
<b>Sl. 4.23.</b>	<i>Dijagram <math>(M - W_C)</math> za lateralno izvijanje okvira iz primjera 4.3.6, a za slučaj kada se moment ponaša kao kvazitangencijalni druge vrste (<math>M</math>-QT2)</i> .....	105
<b>Sl. 4.24.</b>	<i>Prostorni okvir iz primjera 4.3.7. opterećen vertikalnim silama intenziteta <math>F</math></i> .....	106
<b>Sl. 4.25.</b>	<i>Dijagram <math>[(F / F_y) - (W_B / l)]</math> kod izvijanja okvira iz primjera 4.3.7 (<math>F_{kr} = 52175</math> kN)</i> ...	106
<b>Sl. 4.26.</b>	<i>Uz primjer 4.3.8: a) obična greda poprečnog presjeka I-profila opterećen vertikalnom silom <math>F</math> na sredini; b) numerički model grede</i> .....	107
<b>Sl. 4.27.</b>	<i>Dijagram <math>(F - U_C)</math> grede iz primjera 4.3.8</i> .....	108
<b>Sl. 4.28.</b>	<i>Uz primjer 4.3.9: a) četveroetažni ravninski okvir; b) redoslijed formiranja plastičnih zglobova</i> .....	109
<b>Sl. 4.29.</b>	<i>Dijagram <math>(F - U_A)</math> okvira iz primjera 4.3.9</i> .....	109
<b>Sl. 4.30.</b>	<i>Uz primjer 4.3.10: a) Hodgeov prostorni okvir; b) redoslijed formiranja plastičnih zglobova</i> .....	110
<b>Sl. 4.31.</b>	<i>Dijagram <math>(F - V_B)</math> okvira iz primjera 4.3.10</i> .....	111
<b>Sl. 4.32.</b>	<i>Prostorni okvir iz primjera 4.3.11</i> .....	112
<b>Sl. 4.33.</b>	<i>Dijagram <math>(F - U_A)</math> prostornog okvira iz primjera 4.3.11</i> .....	112
<b>Sl. 4.34.</b>	<i>Prostorni okvir iz primjera 4.3.12</i> .....	113
<b>Sl. 4.35.</b>	<i>Dijagram <math>[F - (W_A / l)]</math> prostornog okvira iz primjera 4.3.12</i> .....	114

## POPIS TABLICA

<b>Tab. 2.1.</b>	<i>Vrijednosti slobodne duljine izvijanja <math>l_0</math> kod čistog torzijskog izvijanja</i> .....	29
<b>Tab. 4.1.</b>	<i>Vrijednosti kritične sile <math>F = F_{kr} = F_{\varphi}</math> (kN) kod čistog torzijskog izvijanja konzole iz primjera 4.3.1</i> .....	93
<b>Tab. 4.2.</b>	<i>Vrijednosti kritične sile <math>F = F_{kr} = F_y</math> (kN) kod čistog fleksijskog izvijanja konzole iz primjera 4.3.1</i> .....	93
<b>Tab. 4.3.</b>	<i>Vrijednosti kritične sile <math>F = F_{kr}</math> (N) za torzijsko-fleksijsko izvijanja konzole iz primjera 4.3.2</i> .....	95
<b>Tab. 4.4.</b>	<i>Vrijednosti kritičnog momenta <math>M = M_{kr}</math> (kNcm) za lateralno izvijanja grede iz primjera 4.3.3</i> .....	97
<b>Tab. 4.5.</b>	<i>Vrijednosti kritičnog momenta <math>M = M_{kr}</math> (Nmm) i kritične sile <math>F = F_{kr}</math> (N) za lateralno izvijanja okvira iz primjera 4.3.3</i> .....	99
<b>Tab. 4.6.</b>	<i>Vrijednosti kritične sile <math>F = F_{kr}</math> (N) za lateralno izvijanje konzole iz primjera 4.3.5</i> .....	102
<b>Tab. 4.7.</b>	<i>Vrijednosti kritičnog momenta <math>M = M_{kr}</math> (Ncm) za lateralno izvijanje okvira iz primjera 4.3.6, a za različite definicije definicije tog momenta</i> .....	103
<b>Tab. 4.8.</b>	<i>Vrijednosti kritične sile <math>F = F_{kr}</math> (kN) za prostorno izvijanje okvira iz primjera 4.3.7</i> .....	106



## ŽIVOTOPIS

Goran Turkalj rođen je 5. svibnja 1965. u Rijeci, Republika Hrvatska. Osnovnu i srednju školu završava u Rijeci, a 1985. upisuje se na sveučilišni studij strojarstva Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, gdje je i diplomirao 1990. godine. Odmah se po završetku studija zapošljava u R.O. *Torpedo*, a iste godine prelazi na HŽ – Hrvatske željeznice, u *Radionicu za održavanje vučnih vozila*, gdje radi kao voditelj održavanja.

Krajem 1992. godine upisuje se na poslijediplomski studij *Mehanika strojeva i konstrukcija*, modul *Strukturalna analiza konstrukcija*, na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, a od 1. siječnja 1993. godine radi u stalnom radnom odnosu na Zavodu za tehničku mehaniku istoga fakulteta kao asistent iz sljedećih predmeta: *Nauka o čvrstoći I i II* sveučilišnog studija strojarstva i brodogradnje, *Čvrstoća* veleučilišnog studija strojarstva i brodogradnje te *Mehanika i elementi konstrukcija* veleučilišnog studija elektrotehnike.

Magistarski je rad pod naslovom *Numerička analiza stabilnosti ravninskih okvira* uspješno obranio 10. svibnja 1996. pred Povjerenstvom u sastavu: red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing. (TF, Rijeka), red. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing. (mentor, TF, Rijeka), red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, dipl. ing. (FSB, Zagreb).

Bio je polaznik međunarodne ljetne škole mehanike IUTAM, s temom *Engineering Mechanics of Fibre Reinforced Polymers and Composite Structures*, 5. – 9. srpnja 1993. u Udinama te ljetne škole Hrvatskog društva za mehaniku, s temom *Computational Mechanics of Nonlinear Solids*, 16. i 17. rujna 1994. u Puli. Kao dobitnik županijske stipendije za znanstveno usavršavanje boravio je na Technical University of Brno, Faculty of Mechanical Engineering, u periodu lipanj – srpanj, 1996. U periodu 1993. – 1996. bio je član istraživačkog tima na znanstveno-istraživačkom projektu *Strukturalne analize objekata za optimalnu iskoristivost*, br. 2-08-011, glavnog istraživača red. prof. dr. sc. Josipa Brnića, dipl. ing., a od 1996. uključen je na znanstveno-istraživačkom projektu *Numerička optimizacija u projektiranju i proizvodnji*, br. 069-001, istog glavnog istraživača. Također, od 1998. voditelj je poticajnog projekta za mlade znanstvenike *Numerička analiza stabilnosti i optimizacija tankostijenih grednih struktura*, br. 069-101. Sudjelovao je na više od 35 domaćih i inozemnih znanstvenih skupova, a kao autor i koautor objavio je 47 znanstvenih radova u domaćim i inozemnim publikacijama.

U Domovinskom je ratu učestvovao kao dragovoljac u periodu veljača – svibanj 1992., a Predsjednik Republike Hrvatske odlikovao ga je medaljom *Oluja* za učestvovanje u istoimenoj vojno-redarstvenoj akciji u kolovozu 1995.

Govori i piše engleski. Oženjen je i otac jednog djeteta.

## PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

### 1. AUTOR:

Ime i prezime: Goran Turkalj

Datum i mjesto rođenja: 5. svibnja 1965., Rijeka

Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, strojarstvo, 1990.

Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, mehanika strojeva i konstrukcija, 1996.

Sadšnje zaposlenje: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

### 2. DOKTORSKA DISERTACIJA:

Naslov: Nelinearna analiza stabilnosti tankostijenih grednih struktura

Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka: IV + 120 stranica, 69 slika, 9 tablica, 100 bibliografskih podataka

Znanstveno polje i grana: Strojarsstvo, opće strojarsstvo (konstrukcije); Druge temeljne tehničke znanosti, tehnička mehanika i mehanika fluida

Voditelj rada: Red. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing.

Fakultet na kojem je rad obranjen: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

### 3. OBRANA I OCJENA:

Datum prijave teme: 6. prosinca 1996.

Datum predaje rada: 15. ožujka 2000.

Datum prihvaćanja ocjene rada: 28. travnja 2000.

Sastav povjerenstva za ocjenu: red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing. - predsjednik  
red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, dipl. ing.  
red. prof. dr. sc. Ivan Kamenarović, dipl. ing.  
izv. prof. dr. sc. Iztok Potrč, dipl. ing.

Datum obrane: 18. svibnja 2000.

Sastav Povjerenstva za obranu: red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing. - predsjednik  
red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, dipl. ing.  
red. prof. dr. sc. Ivan Kamenarović, dipl. ing.  
izv. prof. dr. sc. Iztok Potrč, dipl. ing.

Datum promocije: 27. studenog 2000.

# NELINEARNA ANALIZA STABILNOSTI TANKOSTIJNIH GREDNIH STRUKTURA

Goran Turkalj

Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
Hrvatska

Ključne riječi: stabilnost  
tankostijene gredne strukture  
velike rotacije  
metoda konačnih elemenata  
kompjutor

## Sažetak:

U radu su prikazani analitički i numerički pristup u rješavanju problema stabilnosti tankostijenih grednih struktura proizvoljnih poprečnih presjeka. U analitičkom su pristupu primjenom nelinearnog polja pomaka tankostijenog poprečnog presjeka, a koje uključuje efekt velikih rotacija, te lineariziranog principa virtualnih radova, izvedene ravnotežne jednadžbe izvijenog prostornog tankostijenog grednog nosača. Materijal je, pritom, pretpostavljen kao izotropan i linearno-elastičan. U numeričkom je dijelu rada prikazana metoda konačnih elemenata. Primjenom su *updated Lagrangian* formulacije i nelinearnog polja pomaka poprečnog presjeka izvedene linearizirane inkrementalne ravnotežne jednadžbe tankostijenog grednog konačnog elementa. Na osnovi su njih, potom, izvedene elastična, geometrijska i eksterna matrica krutosti konačnog elementa. Pritom su unutarnji momenti dobiveni kao polutangencijalni. Za vanjske momente aksijalnog, tangencijalnog i kvazitangencijalnog tipa, izvedene su odgovarajuće korektivne matrice krutosti, kao i za slučaj *off-axis* djelovanja vanjske sile. Korekcija geometrije diskretizirane konstrukcije izvedena je u skladu s *Rodriguezovom* formulom velikih rotacija. Elasto-plastična se analiza stabilnosti temelji na teoriji plastičnih zglobova, a primjenom je *Prandtl*ova kriterija tečenja i pretpostavke da postoji kontinuirana funkcija tečenja, izvedena plastična redukcijska matrica konačnog elementa. Na osnovi je spomenutog numeričkog algoritma izrađen kompjutorski program THINWALL, a s kojim je moguće rješavati probleme i linearne i nelinearne stabilnosti tankostijenih grednih struktura. U slučaju je nelinearne stabilnosti kao inkrementalno-iterativna shema uporabljena *generalized displacement control* procedura. Točnost je prezentiranog numeričkog algoritma provjerena kroz test primjere.

Rad nije objavljen.

Mentor: red. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing.

Povjerenstvo za ocjenu: red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing. - predsjednik  
red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, dipl. ing.  
red. prof. dr. sc. Ivan Kamenarović, dipl. ing.  
izv. prof. dr. sc. Iztok Potrč, dipl. ing.

Povjerenstvo za obranu: red. prof. dr. sc. Mirko Butković, dipl. ing. - predsjednik  
red. prof. dr. sc. Ivo Alfirević, dipl. ing.  
red. prof. dr. sc. Ivan Kamenarović, dipl. ing.  
izv. prof. dr. sc. Iztok Potrč, dipl. ing.

Datum obrane: 18. svibnja 2000.

Datum promocije:

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.  
(IV + 127 stranica, 68 slika, 9 tablica, 100 bibliografskih podataka, hrvatski)

DD

1. Nelinearna analiza stabilnosti tankostijenih  
grednih struktura

I Turkalj, G.

II Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
HRVATSKA

Code: DD No.

UDK: 624.072.33:624.014.4:517.962.2

Ključne riječi:

stabilnost  
tankostijene gredne strukture  
velike rotacije  
metoda konačnih elemenata  
kompjutor

UDC: 624.072.33:624.014.4:517.962.2

# NON-LINEAR STABILITY ANALYSIS OF THIN-WALLED BEAM-TYPE STRUCTURES

Goran Turkalj

University of Rijeka  
Faculty of Engineering  
Croatia

Key words: stability  
thin-walled beam-type structures  
large rotations  
finite element methods  
computer

## Summary:

In the work analytical and numerical approaches in dealing with the stability problem of thin-walled beam-type structures with arbitrary cross-sectional shapes are presented. In the analytical approach equilibrium equations of buckled space thin-walled beam member are derived using the non-linear displacement field of asymmetric thin-walled cross-section, due to large rotation effect, as well as linearized principle of virtual works. Material is assumed to be isotropic and linear-elastic. In the numerical part of this work the finite element method is presented. Using an *updated Lagrangian* formulation and above mentioned non-linear displacement field the linearized incremental equilibrium equations of a thin-walled beam finite element are carried out. Afterwards elastic, geometric and external stiffness matrices of the element are derived. In this, internal moments are obtained as semitangential ones. In cases of axial, tangential and qusitangential external moments, respectively, corresponding correction stiffness matrices are given as well as in the case of *off-axis* external force. The updating of structural geometry is performed according to *Rodriguez'* large rotation formula. The elasto-plastic stability analysis is based on the plastic hinge theory and using *Prandtl's* flow rule as well as assuming the existing of a continuous yield function, the plastic reduction matrix of the thin-walled beam finite element is derived. On the basis of aforementioned numerical algorithm the computer programme THINWALL is developed, the purpose of which is the linear and non-linear stability analysis of thin-walled beam-type structure. In the non-linear case the *generalized displacement control* procedure is used as a incremental-iterative scheme. The validation of the program is performed through test problems.

This thesis has not been published.

Mentor: Full Prof. Josip Brnić, Ph.D.

Reviewers: Full Prof. Mirko Butković, Ph.D.  
Full Prof. Ivo Alfirević, Ph.D.  
Full Prof. Ivan Kamenarović, Ph.D.  
Assoc. Prof. Iztok Potrč, Ph.D.

Examiners: Full Prof. Mirko Butković, Ph.D.  
Full Prof. Ivo Alfirević, Ph.D.  
Full Prof. Ivan Kamenarović, Ph.D.  
Assoc. Prof. Iztok Potrč, Ph.D.

Oral examination: 18<sup>th</sup> May 2000.

Degree conferred:

This thesis is deposited at Faculty of Engineering of the University of Rijeka.  
(IV + 127 pages, 68 figures, 9 tables, 100 references, Croatian)

DD

2. Non-linear stability analysis of thin-walled  
beam-type structure

I Turkalj, G.

II University of Rijeka  
Faculty of Engineering  
CROATIA

UDC: 624.072.33:624.014.4:517.962.2

Key words:

stability  
thin-walled beam-type structures  
large rotations  
finite element method  
computer