

# Prilog optimalnom izboru faktora pomaka profila za parove evolventnih zupčanika

---

Jelaska, Damir

Doctoral thesis / Disertacija

1982

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:188:609975>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-06**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka Library - SVKRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

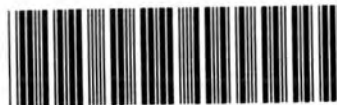
Tehnički fakultet Rijeka

Mr Damir Jelaska, dipl. ing. strojarstva

PRILOG OPTIMALNOM IZBORU  
FAKTORA POMAKA PROFILA ZA  
PAROVE EVOLVENTNIH ZUPČANIKA

(Doktorska disertacija)

SVEUČILIŠNA KNJIŽNICA  
RIJEKA



930036844

Rijeka, 1982.

S V E U Č I L I Š T E U R I J E C I

Tehnički fakultet Rijeka

Voditelj rada: prof. dr JOSIP OBSIEGER, dipl. ing.

Zahvaljujem se voditelju rada prof. dr Josipu Obsiegeru i ostalim članovima Komisije koji su mi davali korisne savjete i usmjeravali na oblikovanje pojedinih dijelova disertacije i tako doprinijeli njenoj kvaliteti.

Kolektiv Centra za elektronsku obradu podataka Splitske banke omogućio mi je korištenje svog računala i time mi pružio veliku i izuzetno kvalitetnu pomoć. Ja im se najtoplije zahvaljujem.

Zahvaljujem se takodjer svima onima koji su doprinijeli primjernoj tehničkoj opremi ovog rada.

D. Jelaska

Temu ove disertacije pod navedenim naslovom prihvatilo je  
Znanstveno-nastavno vijeće Tehničkog fakulteta Rijeka Odlukom donese-  
noj na svojoj 39/34 sjednici održanoj 02. 07. 1980. godine.

Za mentora je istom odlukom odredjen prof. dr Josip Obsieger,  
dipl. ing.

# S A D R Ž A J

		Strana
P R E D G O V O R		4
U P O T R I J E B L J E N E O Z N A K E		8
1 U V O D		14
1.1 Geometrija reznog zupčanika		14
1.2 Glavne dimenzije para zupčanika izradjenog odvalnim dubljenjem reznim zupčanicom		20
2 IZBOR FAKTORA POMAKA PROFILA S OBZIROM NA SMETNJE U ZAHVATU I PRI IZRADI PAROVA EVOLVENTNIH ZUPČANIK A		24
2.1 U v o d		24
2.2 Kut pritiska u proizvoljnoj točki evolventnog boka zuba		25
2.3 Analiza smetnji pri izradi zupčanika odvalnim dublje- njem reznim zupčanicom		28
2.31 Oštri prijelaz u korijenu zuba		28
2.32 Podrezivanje korijena zuba		30
2.33 Podrezivanje glave zuba(interferencija prvog reda)		33
2.34 Odrezivanje glave zuba (interferencija drugog reda)		33
2.35 Radijalna interferencija (interferencija trećeg reda)		36

	Strana
2.4 Interferencije u zahvatu para zupčanika .....	38
2.41 Interferencija u korijenu zupčanika .....	38
2.42 Interferencija glava zupčanika .....	39
2.43 Radijalna interferencija .....	40
2.5 Ostale izolinije .....	40
3 IZOLINIJE EFEKTIVNIH FAKTORA OBLIKA ZUBA ZA PAROVE EVOL- VENTNIH ZUPČANIKA .....	43
3.1 U v o d .....	43
3.2 Definicija i način određivanja efektivnog faktora oblika zuba .....	47
3.3 Polumjer zakrivljenosti u proizvoljnoj točki prije- lazne krivulje .....	54
3.4 Algoritam za određivanje koordinata izolinija efek- tivnog faktora oblika zuba .....	62
4 PRIKAZ I ANALIZA REZULTATA .....	74
5 Z A K L J U Č A K .....	112
L I T E R A T U R A .....	117

## P R E D G O V O R

Primjena zupčanika s pomakom profila omogućuje konstruiranje prijenosa sa zadanim razmakom osi i time olakšava rješavanje niza problema geometrijske i kinematske sinteze. Od faktora pomaka profila ovisi oblik i položaj prijelazne krivulje korijena zuba, prisustvo ili odsustvo raznih vrsti podrezivanja i smetnji u zahvatu, debljina zuba u korijenu, faktor oblika zuba, faktor koncentracije naprezanja - dakle čitav niz faktora koji utječu na veličinu naprezanja u korijenu zuba. Povećanjem pomaka profila aktivni profil (boka zuba) pomiče se na dio evolvente s većim polumjerima zakrivljenosti, smanjuju se i specifična klizanja bokova zubi, te povećava nosivost zuba s obzirom na kontakna naprezanja, ali se istovremeno smanjuje stupanj prekrivanja i debljina glave zuba. Smanjenjem pomaka profila smanjuju se naprezanja u korijenu zuba, ali se povećava opasnost nastajanja raznih vrsta interferencija.

Ova protivrječnost utjecaja pomaka profila na geometrijska i mehanička svojstva zahvata vodi zaključku da je nemoguće odabrati faktore pomaka profila optimalne sa svih točaka gledišta. Za neki zupčani par treba odabrati faktore pomaka profila vodeći računa o uvjetima rada tog zupčanog para i specifičnim zahtjevima koji se prema njemu postavljaju.

Pogodnim izborom faktora pomaka profila moguće je bitno poboljšati određena svojstva zahvata koja su za dati par najvažnija, a na ostala utjecati putem prihvatljivog kompromisa. Zato racionalni izbor faktora pomaka profila predstavlja odlučni i najodgovorniji momenat u konstruiranju zupčanog prijenosa.

Do nedavno je postojala praksa da se problematika izbora faktora pomaka profila rješavala tzv. "sistemima korekcije", najčešće s obzirom na samo jedan zahtjev koji se postavljao na prijenosnik. Često se intuitivno biralo nekoliko vrijednosti faktora pomaka profila, pa bi se proračun vršio za svaku od njih, a konstruktor bi onda izabrao onu vrijednost za koju bi dobio najbolje rezultate. To je bilo dugotrajno i naporan, a konstruktor nikada nije mogao biti siguran da se bar približio optimalnom rješenju.

Kvalitativno nov prilaz problematici optimalnog izbora faktora pomaka profila omogućen je uvodjenjem u praksu dijagrama graničnih linija, što se naročito razvilo u posljednjih deset do petnaest godina. Unosjenjem u ove dijagrame linija koje dijele ravninu dijagrama na polje u kojem postoji određena smetnja, i na polje u kojem ona ne postoji, dobije se zatvoreno polje omeđeno ovakvim graničnim linijama. Faktori pomaka profila za par zupčanika u zahvatu mogu se birati samo unutar ovog polja, jer bi u protivnom došlo do podrezivanja prilikom izrade zupčanika, odnosno do smetnji u zahvatu zupčanika, koje se očituju zadiranjem profila jednog u profil drugog zupčanika. U istim koordinatama moguće je konstruirati i izolinije najrazličitijih geometrijskih i mehaničkih svojstava zahvata određenog zupčanog para. Izborom točke koja leži na određenoj izoliniji, a unutar polja u kojem je dozvoljen izbor faktora pomaka profila, može se ostvariti ispravan rad para u zahvatu sa željenim svojstvom. Neka od ovih svojstava utječu na veličinu naprezanja u korijenu zuba, a neka na veličinu kontaktnih naprezanja na bokovima.

Još od vremena kada su dijagrami graničnih linija tek počeli



ulaziti u konstruktorsku praksu, osjećala se potreba za uvodjenjem u njih i izolinija (jediničnih) naprezanja u korijenu zuba (efektivnih faktora oblika zuba). Zato konstrukcija ovih izolinija za oba zupčanika u zahvatu obuhvaća najveći i najznačajniji dio ovog rada. Ovaj postupak predstavlja autorov originalni prilog, a detaljno je razradjen u trećem dijelu rada.

Na geometriju ozubljenja, a time i na naprezanja u korijenu, znatno utječu i parametri alata kojim se izradjuju zupčanici. To se posebno odnosi na zupčanike izradjene odvalnim dubljenjem alatom u obliku zupčanika (reznim zupčanicom). Na oblik takvih zupčanika, pored kuta profila normiranog ozubljenja (koji je najčešće standardan i iznosi  $\pi/9$  rad) i zaobljenja vrha alata, utječe još broj zubi i faktor pomaka profila reznog zupčanika.

Zupčanici s unutrašnjim ozubljenjem se u pravilu izradjuju odvalnim dubljenjem reznim zupčanicom, a ovim postupkom se često izradjuju i zupčanici s vanjskim ozubljenjem. Budući da zupčasta letva - alat kojim se najčešće izradjuju zupčanici s vanjskim ozubljenjem - nije ništa drugo nego rezni zupčanik s beskonačnim brojem zubi, to je u svrhu univerzalnosti rezultata ovog rada i svih formula potrebnih za proračun zupčanika, pretpostavljena izrada zupčanika postupkom odvalnog dubljenja reznim zupčanicom. Iako to u praksi nije čest slučaj, u ovom radu je također pretpostavljeno da se oba zupčanika u zahvatu izradjuju istim reznim zupčanicom. Geometrija reznog zupčanika obradjena je u uvodnom dijelu ovog rada. Tu su date i osnovne formule za proračun zupčanika izradje-

nih odvalnim dubljenjem.

Geometrija ozubljenja izradjenog odvalnim dubljenjem reznim zupčanikom slabo je obradjena u literaturi, izuzev nepotpunih i nesistematskih prikaza u manje dostupnoj specijalnoj literaturi, npr. [1], [12]. Radi toga je u drugom dijelu ovog rada dat pregled najvažnijih geometrijskih osobitosti vanjskog i unutrašnjeg evolventnog ozubljenja izradjenog odvalnim dubljenjem reznim zupčanikom i ukazano je na bitne razlike u odnosu na izradu odvalnim postupkom s nazubljenom letvom. Ovo poglavlje sadrži najvažnija rješenja iz [11], koja su prezentirana u sažetom obliku, da bi se dobila zaokružena cjelina sa svim potrebnim podacima koji su upotrijebljeni u ovom radu. Koristeći se ovim rezultatima i uputama, konstruirane su granične izolinije za 25 pari evolventnih zupčanika s vanjskim i unutrašnjim ozubljenjem, izradjenih reznim zupčanicima različitih parametara, uključivši i  $z_R = \infty$  (ravni zupčasti alat). Osim toga, konstruirane su i izolinije jednakih i ujedno (za određenu  $\Sigma x$ ) najmanjih relativnih klizanja u podnožjima jednog i drugog zupčanika u zahvatu.

U četvrtom dijelu rada prikazani su i komentirani svi dobiveni rezultati, tj. 25 dijagrama graničnih izolinija s ucrtanim izolinijama efektivnih faktora oblika zuba za oba zupčanika u zahvatu.

U petom je dijelu dat sažeti zaključak i ukazano je na moguće pravce istraživanja u problematici optimalnog izbora faktora pomaka profila kod parova evolventnih zupčanika.

Na kraju je navedena samo ona literatura koja je neposredno služila kao izvor podataka za ovaj rad, ili je citiranje bilo potrebno radi potpunosti prikaza.

UPOTRIJEBLJENE OZNAKE

- a - razmak osi zupčanika u zahvatu,
- $a_0$  - teoretski razmak osi,
- $a_{ST}$  - razmak osi na stroju kod izrade,
- b - širina zupčanika,
- $c_R$  - faktor radijalne zračnosti,
- d - promjeri (s odgovarajućim indeksom),
- $e_K$  - krak sile koja napreže zub na savijanje,
- $F_N$  - opterećenje zupčanika u smjeru zahvatne linije  
(obodna sila na evolventnom krugu),
- $F_o$  - obodna sila (na diobenom krugu),
- $M_s$  - moment savijanja (na zubu),
- $h_g$  - visina glave zuba,
- i - prijenosni odnos,
- k - standardna relativna visina korijena,
- $k_c$  - faktor koncentracije naprezanja u korijenu zuba,
- l - udaljenost središta zakrivljenosti prijelazne krivulje boka zuba zupčanika od odvalne točke pri izradi zupčanika na stroju,
- $l_R$  - udaljenost centra zaobljenja glave zuba reznog zupčanika od odvalne točke pri izradi zupčanika na stroju,
- m - modul,
- r - polumjeri zupčanika (bez indeksa odnosi se na krug odvaljivanja izratka),

- $r_R$  - polumjer odvaljivanja reznog zupčanika,
- $r_F$  - polumjer zaobljenja glave reznog zupčanika,
- $s$  - debljina zuba,
- $s_K$  - debljina zuba u pojedinoj točki korijena,
- $t_e$  - korak na evolventnom krugu,
- $x$  - faktor pomaka profila zupčanika,
- $x_R$  - faktor pomaka profila reznog zupčanika,
- $x_T$  - faktor pomaka profila pri kojem nastaje oštri prijelaz u korijenu,
- $y_E$  - efektivni faktor oblika zuba,
- $y_N$  - nominalni faktor oblika zuba,
- $z$  - broj zubi zupčanika,
- $z_R$  - broj zubi reznog zupčanika,
- $\alpha$  - kut pritiska na krugu odgovarajućeg indeksa,
- $\alpha_0$  - kut pritiska na diobenom krugu (ujedno kut nagiba boka zuba normiranog profila),
- $\alpha_p$  - zahvatni kut u zahvatu zupčanika (ujedno kut pritiska na krugovima odvaljivanja),
- $\alpha_{ST}$  - zahvatni kut pri rezanju evolventnog boka zuba na stroju,
- $\alpha'$  - kut između sile  $F_N$  i njene komponente okomite na simetralu zuba,
- $\gamma_K$  - kut pritiska u proizvoljnoj točki prijelazne krivulje zupčanika pri rezanju zupčanika na stroju,
- $\gamma_{KR}$  - kut pritiska na bok zuba reznog zupčanika pri rezanju zupčanika na stroju,

- $\gamma_{ST}$  - zahvatni kut u proizvoljnoj točki prijelazne krivulje zupčanika pri rezanju zupčanika na stroju,
- $\delta_K$  - kut između ishodišta evolventnog boka zuba i polumjer - vektora proizvoljne točke na zubu,
- $\delta_{KR}$  - kut između ishodišta evolventnog boka zuba reznog zupčanika i polumjer - vektora proizvoljne točke na njegovom zubu,
- $\delta_{SR}$  - kut između ishodišta evolventnog boka zuba reznog zupčanika i polumjer - vektora središta zaobljenja vrha njegove glave,
- $\varepsilon$  - stupanj prekrivanja,
- $\psi$  - kut polovine debljine zuba na određenom krugu (uz odgovarajući indeks),
- $\rho$  - polumjer zakrivljenosti u proizvoljnoj točki prijelazne krivulje profila zuba zupčanika,
- $\sigma_E$  - stvarno (efektivno) naprezanje u korijenu zuba,
- $\sigma_N$  - nominalno naprezanje u korijenu zuba,
- $\tau$  - kut pritiska u točki  $S_R$ .

I N D E K S I

- e - evolventni krug,
- g - krug preko glave zuba,
- k - krug preko korijena zuba,
- o - diobeni krug,
- R - rezni zupčanik\*
- ST - zahvat pri izradi (na stroju),
- 1 - manji zupčanik,
- 2 - veći zupčanik.

OZNAKE TOČAKA NA PROFILU\*\*

- A - kraj aktivnog dijela profila u korijenu zuba,
- B - prijelaz evolvente u zaobljenje na glavi zuba reznog zupčanika,
- C - odvalna točka,
- E - trenutni kinematski pol fiktivnog štapa  $\overline{S_R C S}$  pri rezanju prijelazne krivulje,
- F - granična točka između evolvente i krivulje korijena,\*\*\*
- G - vrh zuba zupčanika,

---

\* ne odnosi se na indeks u znaku  $c_R$

\*\* ujedno i indeksi odgovarajućih promjera i kuteva pritiska

\*\*\* ne odnosi se na indeks u znaku  $r_F$

- $G_R$  - prijelaz zaobljenja glave na krug preko glave reznog zupčanika (za  $r_F = 0$  - vrh glave reznog zupčanika),
- $K$  - proizvoljna točka na prijelaznoj krivulji boka zuba zupčanika,
- $M$  - ishodište evolvente na osnovnom krugu,
- $N$  - diralište normale na profil i osnovnog kruga,
- $O$  - os rotacije,
- $P$  - točka boka zuba na krugu odvaljivanja,
- $Q$  - kraj evolvente na glavi zuba kod odrezivanja,
- $S$  - središte zakrivljenosti u točki  $K$ ,
- $S_R$  - središte zakrivljenosti glave zuba reznog zupčanika,
- $H$  - točka  $x_1 - x_2$  dijagrama u kojoj su efektivni faktori oblika zuba oba zupčanika isti i najmanji.

#### K R A T I C E

- EPS - granica  $\epsilon = 1,2$
- IK1 - granica interferencije u korijenu zupčanika 1,
- IK2 - granica interferencije u korijenu zupčanika 2,
- JRK - linija jednakih relativnih klizanja,
- PG1 - granica podrezivanja glave zupčanika 1,
- PG2 - granica podrezivanja glave zupčanika 2,
- PK1 - granica podrezivanja korijena zupčanika 1,
- PK2 - granica podrezivanja korijena zupčanika 2,
- SG1 - granica  $s_{g1} = 0,25$  m,
- SG2 - granica  $s_{g2} = 0,25$  m,

- RI - granica radijalne interferencije pri izradi zupčanika,
- D1 - determinantna krivulja familije krivulja  $y_{E1} = \text{konst.}$ ,
- D2 - determinantna krivulja familije krivulja  $y_{E2} = \text{konst.}$
- OPK - izolinija ( $x_T = \text{konst}$ ) na kojoj nastaje oštri prijelaz  
u korijenu



## 1 U V O D

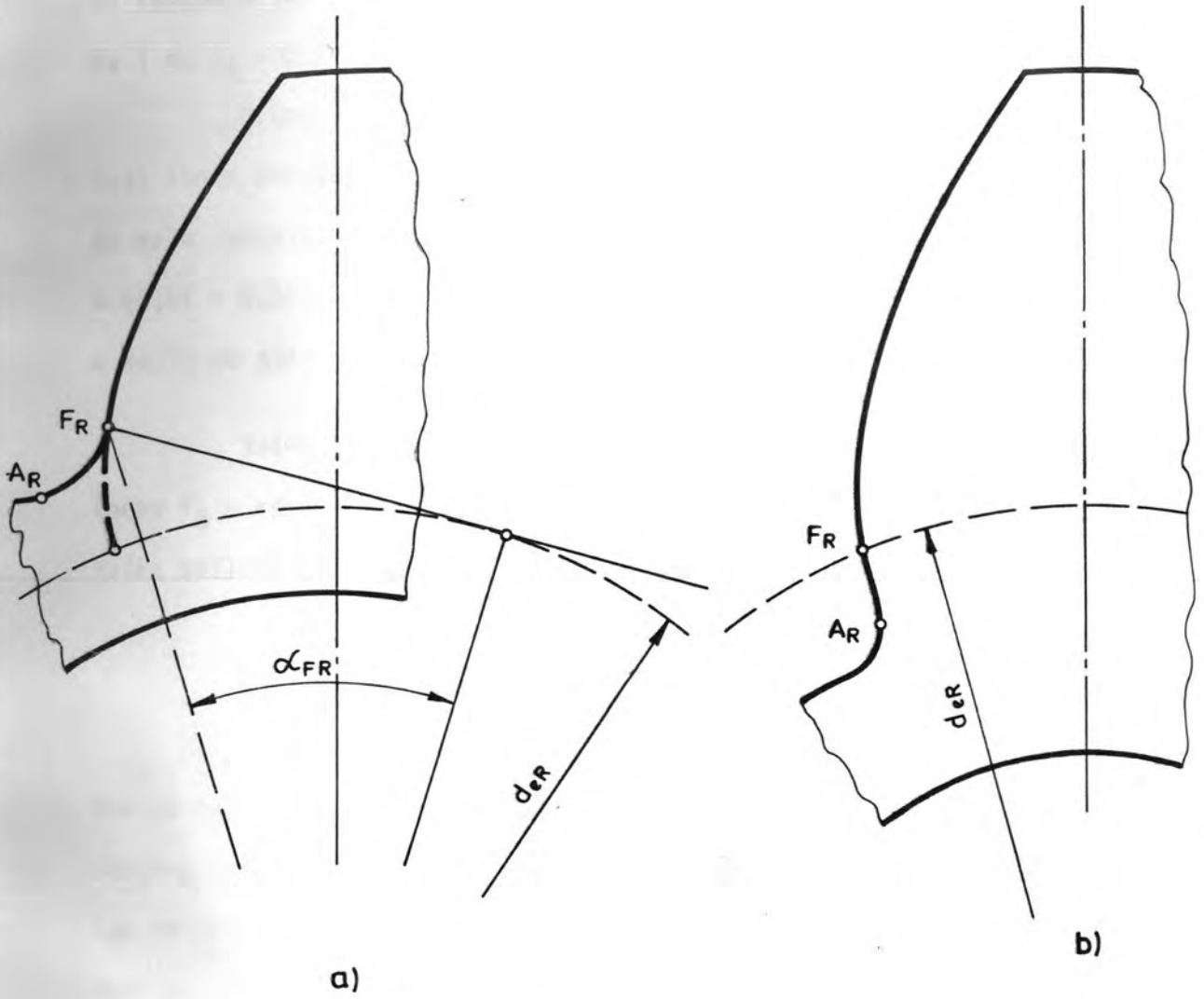
### 1.1 Geometrija reznog zupčanika

Rezni zupčanik je odvalni alat, čija projekcija u ravnini rezanja predstavlja zupčanik s evolventnim bokom zuba.

Rezni zupčanici nisu obuhvaćeni JUS-om, a njihov profil ne odgovara u potpunosti standardima za osnovni profil evolventnog ozubljenja, prema kojima se izradjuju ravni zupčasti alati (zupčaste letve) i odvalna glodala. Razlike se prvenstveno odnose na oblik glave i korijena zuba, koji bitno odstupaju od oblika koji bi se dobio izradom standardnom ravnom ozubnicom.

Pored toga, radni profil reznog zupčanika, a time i geometrijske karakteristike zupčanika koji se režu, ovisi i o broju zubi i faktoru pomaka profila reznog zupčanika. Ovo je bitna razlika u odnosu na zupčanike izradjene ravnim zupčastim alatom.

Za svaki modul pojedini (nacionalni i tvornički) standardi predviđaju nekoliko vrijednosti za broj zubi  $z_R$  reznog zupčanika, a time i više nazivnih diobenih promjera. Za svaki pak  $z_R$  predviđena je vrijednost faktora pomaka profila novog i granično istrošenog reznog zupčanika. Naime, nakon svakog brušenja vanjski promjer reznog zupčanika i njegova debljina na diobenom promjeru se smanjuju, a time i pomak profila. Faktor pomaka profila u novoizradjenih reznih zupčanika kreće se



Sl. 1. Oblici prijelazne krivulje reznog zupčanika

od  $x_R = 0$  (za male  $z_R$ ) do  $x_R = 1$  (za velike  $z_R$ ). Granično istrošeni rezní zupčaník íma negativne vrijednosti faktora pomaka profila koje se kreću i do  $x_R = -0,7$ .

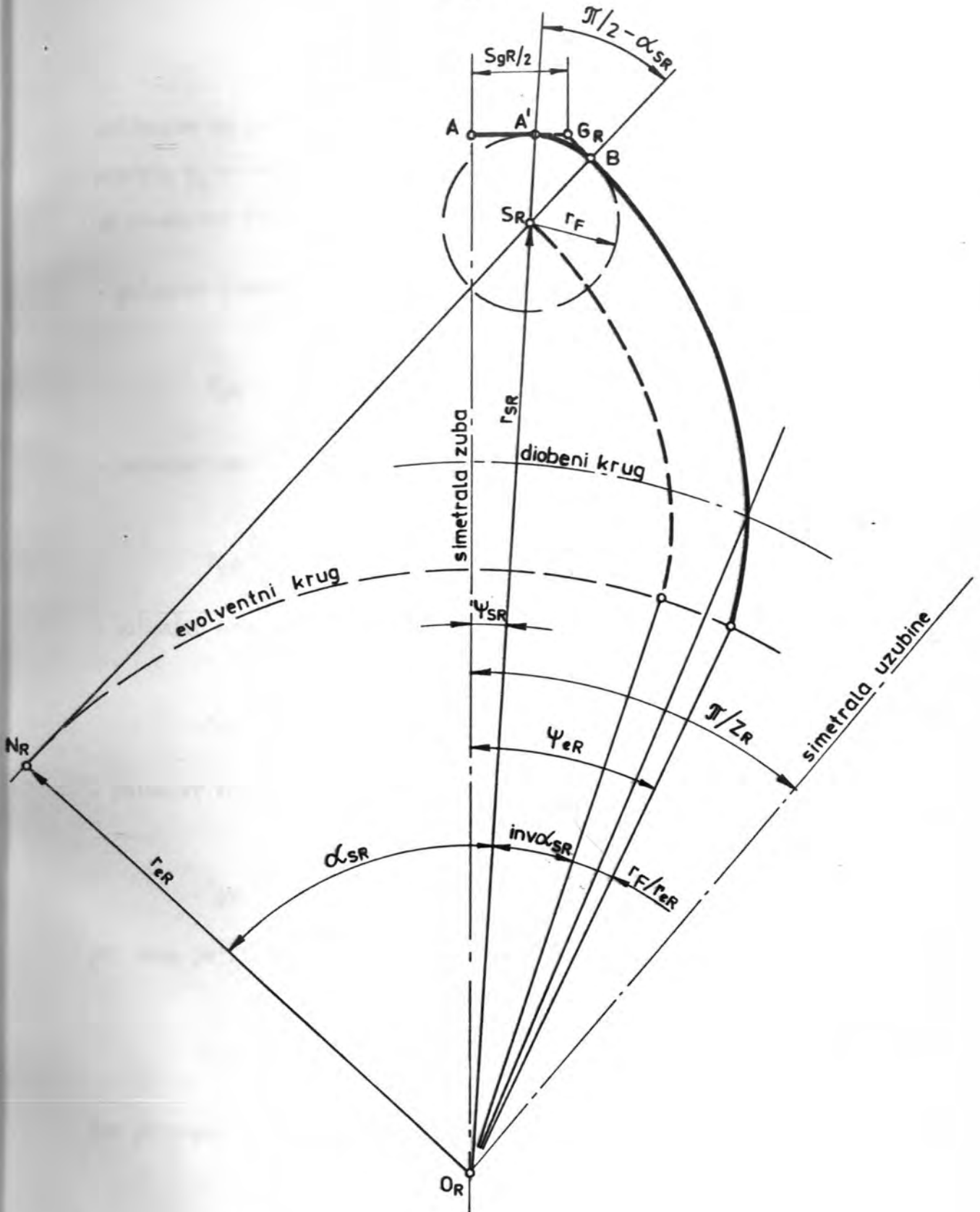
Glava zuba reznog zupčanika obično je izvedena oštrim bridom koji tvore evolventa i krug preko glave zuba. Ovaj se oštri brid najčešće malo skošuje, a rjedje zaobljuje malim kružnim lukom polumjera  $r_F = (0,01 - 0,03)$  m. Medjutim, postoje specijalne izvedbe reznih zupčanika u kojih se glava potpuno zaobljuje.

Važna karakteristika geometrije reznog zupčanika jest položaj točke  $F_R$  u kojoj evolventni bok zuba prelazi u krivulju korijena. Ova točka infleksije određena je kutem pritiska koji se računa iz

$$\tan \alpha_{FR} = \tan \alpha_0 - 4 \frac{1 + c_R - x_R}{z_R \sin 2 \alpha_0} \quad (1)$$

Ako je  $\tan \alpha_{FR} > 0$ , evolventa prelazi u krivulju korijena iznad evolventnog kruga i zubi će biti izvedeni prema slici 1a. Prijelazna krivulja je skraćena evolventa. Rezni zupčanici s brojem zubi  $z_R \geq 28$  izvedeni su na ovaj način bez obzira na stupanj istrošenost. Ako je  $\tan \alpha_{FR} \leq 0$ , evolventa ide do evolventnog kruga, a ispod toga se rezní profil nastavlja obično kao radijalni pravac (sl. 1b), ili može biti modifikiran na drugi način. Zbog toga se u proračunima uzima da je kut  $\alpha_{FR} = 0$  kad god se dobije vrijednost njegovog tangensa prema (1) negativna.

Glava zuba i njegov evolventni bok mogu se u općem slučaju definirati prema slici 2. [17], na kojoj je prikazan rezní zupčaník sa za-



Sl. 2. Opći izgled vrha glave i evolventnog boka zuba reznog zupčanika

obljenjem na glavi zuba. Vrijednosti za kut nagiba boka zuba normiranog profila  $\alpha_0 = \pi/9$  i za faktor radijalne zračnosti  $c_R = 0,25$  uzete su prema preporuci ISO - R 253. Najvažniji parametri reznog zupčanika su:

- polumjer diobenog kruga

$$r_{oR} = \frac{1}{2} m z_R , \quad (2)$$

- polumjer evolventnog kruga

$$r_{eR} = r_{oR} \cos \alpha_0 , \quad (3)$$

- polumjer kruga na kojemu se nalazi središte zakrivljenosti glave zuba

$$r_{SR} = r_{gR} - r_F , \quad (4)$$

- polumjer kruga preko glave

$$r_{gR} = r_{oR} + h_{gR} + m x_R , \quad (5)$$

pri čemu je visina glave zuba

$$h_{gR} = m (1 + c_R) = 1,25 m . \quad (6)$$

Kut pritiska na krugu polumjera  $r_{SR}$  se računa iz

$$\alpha_{SR} = \arccos \frac{r_{eR}}{r_{SR}} , \quad (7)$$

dok je polukut debljine zuba na evolventnom krugu

$$\psi_{eR} = \frac{\pi}{2 z_R} + \frac{2 x_R \tan \alpha_o}{z_R} + \text{inv } \alpha_o \quad . \quad (8)$$

Iz odnosa

$$\frac{\overline{N_R S_R}}{r_{eR}} = \tan \alpha_{SR} \quad \text{i} \quad \frac{\overline{N_R S_R} + r_F}{r_{eR}} = \tan \alpha_B \quad (9)$$

slijedi kut pritiska na krugu na kojem završava evolventa

$$\alpha_B = \arctan \left( \tan \alpha_{SR} + \frac{r_F}{r_{eR}} \right) \quad , \quad (10)$$

odnosno polumjer na kojem završava evolventa

$$r_B = \frac{r_{eR}}{\cos \alpha_B} \quad . \quad (11)$$

Za zub s nezaobljenom glavom, tj. uz  $r_F = 0$ , proizlazi

$$\alpha_{SR} = \alpha_{gR} = \arccos \frac{r_{eR}}{r_{gR}} \quad , \quad (12)$$

a debljina glave zuba

$$s_{gR} = 2 r_{gR} \psi_{gR} \quad , \quad (13)$$

pri čemu je polukut debljine zuba na krugu preko glave

$$\psi_{gR} = \psi_{eR} - \text{inv } \alpha_{gR} \quad . \quad (14)$$

Za potpuno zaobljeni zub s polumjerom zaobljenja  $r_F = r_{F \max}$  je

$$r_{SR} = r_{gR} - r_{F \max} \quad ,$$
$$\psi_{eR} = \text{inv } \alpha_{SR} + \frac{r_{F \max}}{r_{eR}} \quad .$$

Oдавде proizlazi izraz

$$\psi_{eR} - \text{inv arc cos } \frac{r_{eR}}{r_{gR} - r_{F \max}} = \frac{r_{F \max}}{r_{eR}} \quad , \quad (15)$$

iz kojega se  $r_{F \max}$  određuje iterativnim postupkom.

## 1.2 Glavne dimenzije para zupčanika izradjenog odvalnim dubljenjem reznim zupčanikom

Zahvat pri izradi zupčanika s reznim zupčanikom na dubilici računa se za poznate parametre zupčanika  $z$  i  $x$ , odnosno reznog zupčanika  $z_R$  i  $x_R$ , tako da se iz izraza

$$\text{inv } \alpha_{ST} = 2 \frac{x + x_R}{z + z_R} \tan \alpha_0 + \text{inv } \alpha_0 \quad (16)$$

iteracijom odredi zahvatni kut na stroju  $\alpha_{ST}$ . Proizvoljno odabrana vrijednost kuta  $\alpha_i$  vrlo brzo konvergira točnoj vrijednosti ako se primijeni Newtonova metoda tangente, prema kojoj se iduća bliža vrijednost kuta  $\alpha_{i+1}$  računa iz

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{\text{inv } \alpha_i - \text{inv } \alpha_{ST}}{\tan^2 \alpha_i} \quad (17)$$

Razmak osi pri rezanju ozubljenja određuje se iz

$$a_{ST} = m \frac{z + z_R}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_{ST}} \quad (18)$$

a polumjeri odvaljivanja za rezni zupčanik iz

$$r_R = \frac{a_{ST}}{1 + \frac{z}{z_R}} \quad (19)$$

odnosno za izradak iz

$$r = \frac{a_{ST}}{1 + \frac{z_R}{z}} \quad (20)$$

Izrazi (16) do (20), kao i svi naprijed dati izrazi koji se odnose na geometriju zupčanika, odnosno njegovo sparivanje, vrijede bez razlike za vanjsko i za unutrašnje ozubljenje, jer je u radu dosljedno primijenjeno pravilo predznaka prema DIN 3990. Po tom pravilu broj zubi



zupčanika s unutrašnjim ozubljenjem ima negativan predznak, pa svi njegovi promjeri i razmak osi pri zahvatu poprimaju takodjer negativnu vrijednost. Pritom se kao pozitivni pomak profila smatra onaj u kojega se alat (rezni zupčanik) udaljava od izratka. Kod vanjskih zupčanika to je od središta prema vani, a kod unutrašnjih prema središtu zupčanika.

Promjeri preko korijena ovisni su o željenim parametrima izratka i o parametrima reznog zupčanika  $z_R$  i  $x_R$ , tj.

$$d_k = 2 a_{ST} - d_{gR} \quad , \quad (21)$$

i razlikuju se od promjera pri izradi alatom u obliku ravne ozubnice.

Za uobičajeni način proračuna, za koji se traži da za bilo koju visinu zuba bude sačuvan standardni radijalni zazor  $m c_R$  između glave jednog i korijena drugog zupčanika u zahvatu, promjeri preko glave računaju se prema

$$d_{g1} = 2 a - d_{k2} - 2 c_R m \quad (22)$$

$$d_{g2} = 2 a - d_{k1} - 2 c_R m \quad . \quad (23)$$

Pri tome je razmak osi

$$a = m \frac{z_1 + z_2}{2} \frac{\cos \alpha_o}{\cos \alpha_p} \quad , \quad (24)$$

a zahvatni se kut računa iteracijom iz

$$\operatorname{inv} \alpha_p = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \tan \alpha_0 + \operatorname{inv} \alpha_0 \quad . \quad (25)$$

## 2 IZBOR FAKTORA POMAKA PROFILA S OBZIROM NA SMETNJE U ZAHVATU I PRI IZRADI PAROVA EVOLVENTNIH ZUPČANIKA

### 2.1 U v o d

Uvjet za postojanje neke smetnje pri izradi ili u zahvatu parova evolventnih zupčanika može se analitički predstaviti u obliku

$$f(x_1, x_2) \leq 0 \quad . \quad (26)$$

U  $x_1 - x_2$  dijagramu ovo se izražava krivuljom koja ravninu dijagrama dijeli na dio u kojem postoji određena smetnja i dio u kojem ona ne postoji. Unoseći u dijagram krivulje (izolinije), koje predstavljaju odgovarajuće smetnje, dobije se zatvoreno polje omeđeno dijelovima ovih krivulja. Faktori pomaka profila za par zupčanika u zahvatu smiju se birati samo unutar ovog polja graničnih linija (korisno polje), jer bi u protivnom slučaju došlo do nepravilnog rezanja, ili bi u radu tog para nastala jedna od nedozvoljenih smetnji koja bi, zbog nepravilnog zahvata, vodila oštećenju jednog od elemenata prijenosnika.

Uvjeti tipa (26) bit će definirani za sve moguće smetnje pri izradi i u zahvatu para evolventnih zupčanika, te za neke najvažnije pokazatelje kvalitete zahvata: jednaka relativna klizanja u podnožjima zuba obaju zupčanika,  $\varepsilon = \text{konst}$ ,  $s_g = \text{konst}$ , te pomak profila pri kojem nastaje oštri prijelaz u korijenu zuba. Ako se faktori pomaka profila  $x_1$  i  $x_2$  odaberu unutar korisnog polja i na određenoj izolaciji, garan-

tiran je ispravan zahvat uz postizanje željenog svojstva.

Izradjeni su algoritmi za dobivanje koordinata pojedinih izolinija putem digitalnog računala, a rezultati u obliku 25 dijagrama graničnih i drugih izolinija za parove zupčanika s vanjskim i unutrašnjim evolventnim ozubljenjem su na slikama 21. do 45. zajedno s izolinijama efektivnih faktora oblika zuba, čije je dobivanje opisano u slijedećem poglavlju.

## 2.2 Kut pritiska u proizvoljnoj točki evolventnog boka zuba

Za poznati položaj točke  $Y$  na evolventnom boku zuba, tj. za poznati polumjer  $r_y$  na kojem se ona nalazi, kut pritiska se računa prema izrazu

$$\alpha_y = \arccos \frac{r_e}{r_y} \quad (27)$$

Medjutim, često puta nije poznat položaj točke  $Y_2$  (sl. 4), već položaj, odnosno polumjer točke  $Y_1$  na boku zuba spregnutog zupčanika, koji dolazi u dodir s točkom  $Y_2$ . U tom slučaju kut pritiska  $\alpha_{Y_1}$  u točki  $Y_1$  moguće je odrediti prema (27), a traženi kut pritiska u točki  $Y_2$  određuje se sa

$$\tan \alpha_{Y_2} = \frac{\overline{YN_2}}{r_{e2}} = \frac{\overline{N_1N_2} - \overline{N_1Y}}{r_{e2}}$$

Budući da je

$$\overline{N_1 N_2} = (r_{e1} + r_{e2}) \tan \alpha_p \quad , \quad (28)$$

$$\overline{N_1 Y} = r_{e1} \tan \alpha_{\gamma 1} \quad , \quad (29)$$

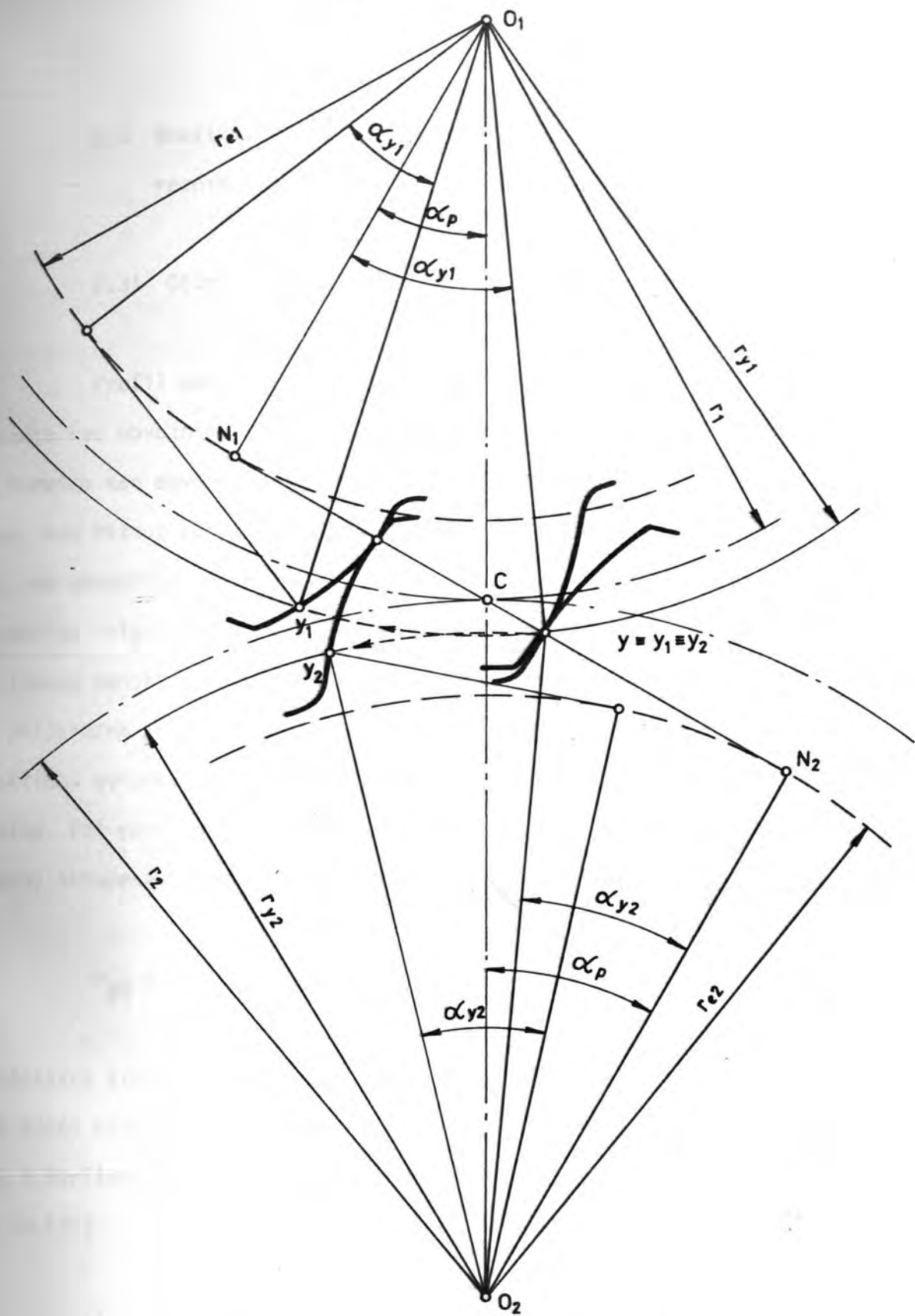
poslije sredjivanja proizlazi

$$\tan \alpha_{\gamma 2} = \tan \alpha_p - \frac{z_1}{z_2} (\tan \alpha_{\gamma 1} - \tan \alpha_p) \quad . \quad (30)$$

Tako su napr. granične točke zahvata para zupčanika (tj. kutevi pritiska u tim točkama) određeni kutevima pritiska na krugu preko glave spregnutog zupčanika

$$\tan \alpha_{A1} = \tan \alpha_p - \frac{z_2}{z_1} (\tan \alpha_{g2} - \tan \alpha_p) \quad (31)$$

$$\tan \alpha_{A2} = \tan \alpha_p - \frac{z_1}{z_2} (\tan \alpha_{g1} - \tan \alpha_p) \quad . \quad (32)$$



Sl. 3. K odredjivanju kuta pritiska  $\alpha_{y2}$

## 2.3 Analiza smetnji pri izradi zupčanika odvalnim dubljenjem reznim zupčanikom

### 2.31 Oštri prijelaz u korijenu zuba

Profil zuba evolventnog zupčanika formira se u procesu odvalnog rezanja kao obvojnica aktivnog profila alata. Pritom se evolventni bok zuba formira kao obvojnica ravnog (kad je alat zupčasta letva) ili evolventnog (kod reznog zupčanika) dijela profila zuba alata, a prijelazna krivulja kao obvojnica zaobljenog vrha zuba alata (za  $r_F > 0$ ), tj. kao trajektorija relativnog gibanja vrha zuba alata (za  $r_F = 0$ ). Pri odvalnom dubljenju vanjskog ozubljenja reznim zupčanikom s nezaobljenom glavom zuba prijelazna krivulja je produžena epicikloida ako je  $r_{gR} > r_R$ , dakle praktički uvijek. Za  $r_{gR} < r_R$  prijelazna krivulja bi bila skraćena epicikloida. Pri rezanju unutrašnjeg ozubljenja prijelazna krivulja je (analogno) skraćena ili produžena hipocikloida. U slučaju da je

$$r_{gR} = r_R \quad , \quad (33)$$

prijelazna krivulja se neće niti formirati, a evolventni bok zuba će oštro sjeći krug preko korijena. Dakle, izraz (33) je uvjet za oštri prijelaz u korijenu, a faktor pomaka profila pri kojem se ovo događa odredi se iz (16):

$$x = x_T = \frac{\operatorname{inv} \alpha_{ST} - \operatorname{inv} \alpha_0}{\tan \alpha_0} \frac{z + z_R}{2} - x_R \quad . \quad (34)$$

Pri tome je

$$\cos \alpha_{ST} = \frac{d_{eR}}{d_{gR}} = \frac{z_R \cos \alpha_0}{z_R + 2(1 + c_R) + 2 x_R} \quad (35)$$

Dakle, nastajanje oštrog prijelaza u korijenu ovisi ne samo o broju zubi izratka nego i o broju zubi i faktoru pomaka profila reznog zupčanika. Kod vanjskog evolventnog ozubljenja, u širokom dijapazonu upotrebljavanih  $z_R$ ,  $x_R$  i  $z$ , pomak profila  $x_T$  (34), koji zadovoljava uvjet (33), uvijek je veći od  $2m$  tj. uvijek je izvan područja primjene, pa kod ovakvog ozubljenja oštri prijelaz u korijenu i nije od nekog naročitog interesa. Kod unutrašnjeg ozubljenja međjutim, ovaj pomak profila je često (naročito kod većih  $z_R$ ) unutar polja graničnih linija, pa treba voditi računa o tome da stvarni (odabrani) faktor pomaka profila ne bude suviše blizu  $x_T$ , jer oštri prijelaz u korijenu uzrokuje vrlo velike koncentracije naprezanja i ne može se dozvoliti kod zupčanika za prijenos snage.

Prilikom odvalnog dubljenja reznim zupčanikom sa zaobljenim vrhom zuba, prijelazna krivulja je ekvidistanta produžene ili skraćene epikloide (pri  $z > 0$ ) ili produžene ili skraćene hipocikloide (pri  $z < 0$ ), koju opisuje središte zaobljenosti glave alata. Minimalni polumjer zakrivljenosti prijelazne krivulje  $\rho_{min} = r_F$  bit će za  $r_{SR} = r_R$ , dok će u svim ostalim slučajevima biti  $\rho_{min} > r_F$ .

U priloženim dijagramima pravac (34) označen je s OPK (oštri prijelaz u korijenu).



### 2.32 Podrezivanje korijena zuba

Smanjivanjem (kod unutrašnjeg ozubljenja povećavanjem) faktora pomaka profila od  $x_T$  na niže, prijelazna krivulja postaje sve veća, pa se i polumjeri zakrivljenosti u njenim točkama povećavaju. Pri tome se granična točka F između evolventnog boka zuba i prijelazne krivulje, koja je prema (30) određena kutom pritiska

$$\tan \alpha_F = \tan \alpha_{ST} - \frac{z_R}{z} (\tan \alpha_{gR} - \tan \alpha_{ST})^* , \quad (36)$$

od odvalnog kruga sve više približava evolventnom krugu (sl. 4a), a kut  $\alpha_F$  pada od  $\alpha_{ST}$  prema nuli, dok je za neki  $x = x_{min}$  konačno ne dostigne (sl. 4b). Ovo nije moguće za unutrašnje ozubljenje, jer je kod njega, zbog  $z < 0$ , uvijek  $\alpha_F > 0$ .

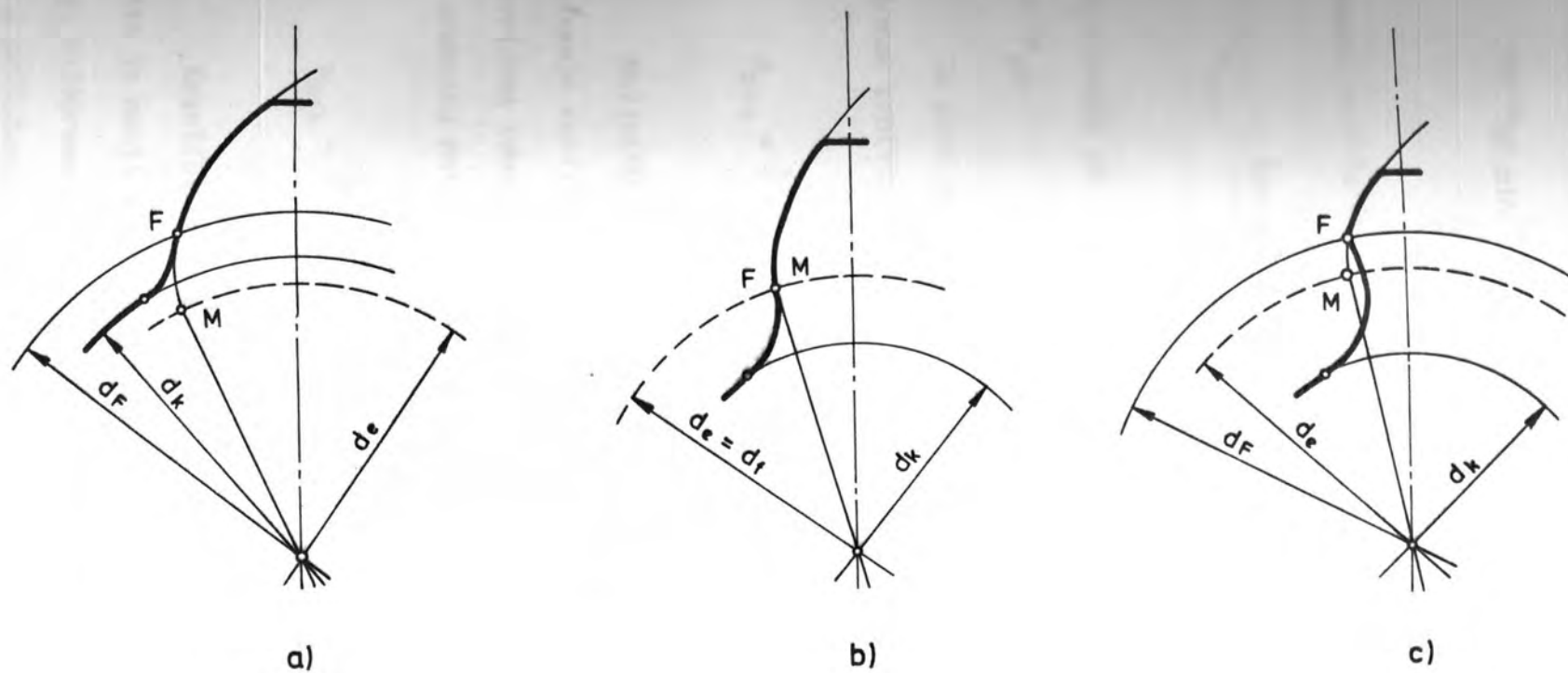
Daljnjim smanjenjem pomaka profila zupčanika s vanjskim ozubljenjem, prijelazna krivulja još više raste i sada siječe evolventni bok zuba (sl. 4c). Kaže se da je zub podrezan. Očigledno je, dakle, da se točka F ponovno udaljava od evolventnog kruga, ali sada s negativnim kutom pritiska  $\alpha_F$ . Prema tome, zub je podrezan ako je  $\alpha_F < 0$ , odnosno uvjet da zub ne bude podrezan je

$$\alpha_F \geq 0 \quad . \quad (37)$$

Prema (36), ovaj uvjet se može izraziti kao

---

\* Pri zaobljenom vrhu glave alata umjesto  $\alpha_{gR}$  treba uvrstiti  $\alpha_B$ .



S1. 4. Položaj granične točke profila

a) pri  $x > x_{\min}$ ; b) pri  $x = x_{\min}$ ; c) pri  $x < x_{\min}$

$$\tan \alpha_{ST \min} = \frac{\tan \alpha_{gR}}{1 + \frac{z}{z_R}} \quad , \quad (38)$$

pa je pomak profila ispod kojeg počinje podrezivanje

$$x_{\min} = \frac{\operatorname{inv} \alpha_{ST \min} - \operatorname{inv} \alpha_0}{\tan \alpha_0} \frac{z + z_R}{2} - x_R \quad . \quad (39)$$

Naravno, i ovdje za alat sa zaobljenim vrhom glave treba uvrstiti  $\alpha_B$  umjesto  $\alpha_{gR}$ .

Za alat sa  $z_R = \infty$  ,  $r_F = 0,38$  (standardna ravna ozubnica) granični pomak profila je

$$x_{\min} = \frac{17 - z}{17} \quad . \quad (40)$$

Medjutim, praktički se može dozvoliti takav  $x_{\min}$ , pri kojemu podrezivanje korijena ne zahvaća aktivni dio profila, uz uvjet da se čvrstoća korijena zuba ne smanjuje ispod dozvoljene granice. Za standardnu ravnu ozubnicu obično je

$$x_{\min} = \frac{14 - z}{17} \quad . \quad (40a)$$

Granični pomak prema (39) i (40a) je to veći (korisno polje manje) što je manji broj zubi izratka  $z$ . Zbog toga odgovarajući pravci u  $x_1 - x_2$  dijagramu predstavljaju graničnu liniju samo pri manjem broju zubi, a u priloženim dijagramima samo za manji zupčanik (PK1).

### 2.33 Podrezivanje glave zuba (interferencija prvog reda)

Podrezivanje glave zuba nastaje ako se zahvat između reznog zupčanika i izratka odvija u području prijelazne krivulje reznog zupčanika. U tom slučaju prijelazna krivulja reznog zupčanika odrezuje glavu zuba izratka od točke Q.

Dakle, uvjet da ne dodje do ove smetnje je

$$\alpha_Q > \alpha_g \quad (41)$$

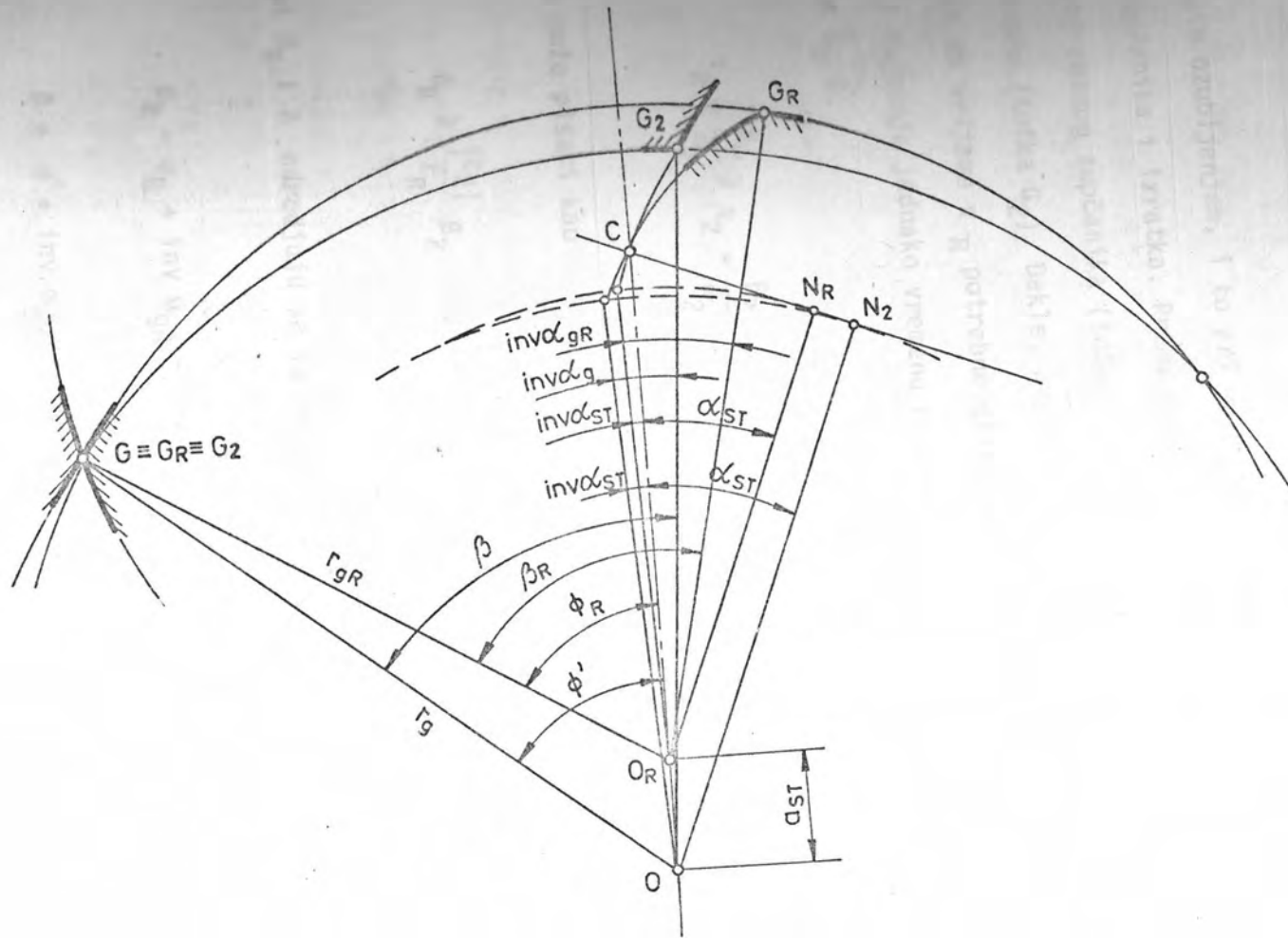
Prema (30),  $\alpha_Q$  se računa iz

$$\tan \alpha_Q = \tan \alpha_{ST} + \frac{z_R}{z} (\tan \alpha_{ST} - \tan \alpha_{FR}) \quad (42)$$

Podrezivanje glave zuba osobito dolazi do izražaja pri malom broju zubi reznog zupčanika, dok pri  $z_R = \infty$  ne može uopće doći do ove smetnje. Smanjenjem promjera kruga preko glave na  $d_g = d_Q$  podrezivanje glave se može izbjeći. Zato ova smetnja (PG) u  $x_1 - x_2$  dijagramu samo uvjetno predstavlja graničnu liniju. Pri tome treba paziti da se stupanj prekrivanja ne snizi ispod dozvoljene granice.

### 2.34 Odrezivanje glave zuba (interferencija drugog reda)

Do ove interferencije može doći samo pri izradi zupčanika s



Sl. 5. Granica odrezivanja glave zuba

unutrašnjim ozubljenjem, i to pri malim razlikama između broja zubi reznog zupčanika i izratka. Prema slici 6. do ove smetnje će doći ako vrh glave zuba reznog zupčanika (točka  $G_R$ ) stigne u točku  $G$  prije vrha glave zuba izratka (točka  $G_2$ ). Dakle, uvjet da ne dodje do odrezivanja glave zuba jest da vrijeme  $\tau_R$  potrebno glavi zuba da napravi put  $\widehat{G_R G}$  bude veće ili najmanje jednako vremenu  $\tau_2$  potrebnom glavi zuba izratka da napravi put  $\widehat{G_2 G}$ .

$$\tau_R = \frac{\beta_R}{\omega_R} \geq \tau_2 = \frac{\beta_2}{\omega_2} \quad (43)$$

Ovo se može pisati kao

$$\beta_R \geq \frac{|z_2|}{z_R} \beta_2 \quad (44)$$

Kutevi  $\beta_R$  i  $\beta$  određuju se iz slike 5:

$$\beta_R = \phi_R + \text{inv } \alpha_{gR} - \text{inv } \alpha_{ST} \quad (45)$$

$$\beta = \phi' + \text{inv } \alpha_{g2} - \text{inv } \alpha_{ST} \quad (46)$$

Pri tome se kutevi  $\phi'$  i  $\phi_R$  dobiju iz kosinusovog poučka:

$$\phi_R = \arccos \left| \frac{d_{g2}^2 - 4 a_{ST}^2 - d_{gR}^2}{4 a_{ST} d_{gR}} \right| \quad (47)$$

$$\phi' = \arccos \left| \frac{d_{g2}^2 + 4 a_{ST}^2 - d_{gR}^2}{4 a_{ST} d_{g2}} \right| \quad (48)$$

Budući da radijalna interferencija pri rezanju zupčanika s unutrašnjim ozubljenjem nastaje pri većim razlikama ( $|z_2| - z_R$ ), to je gotovo uvijek dovoljno provjeriti radijalnu interferenciju, tj. krivulja (44) u  $x_1 - x_2$  dijagramu ne predstavlja graničnu liniju.

### 2.35 Radijalna interferencija (interferencija trećeg reda)

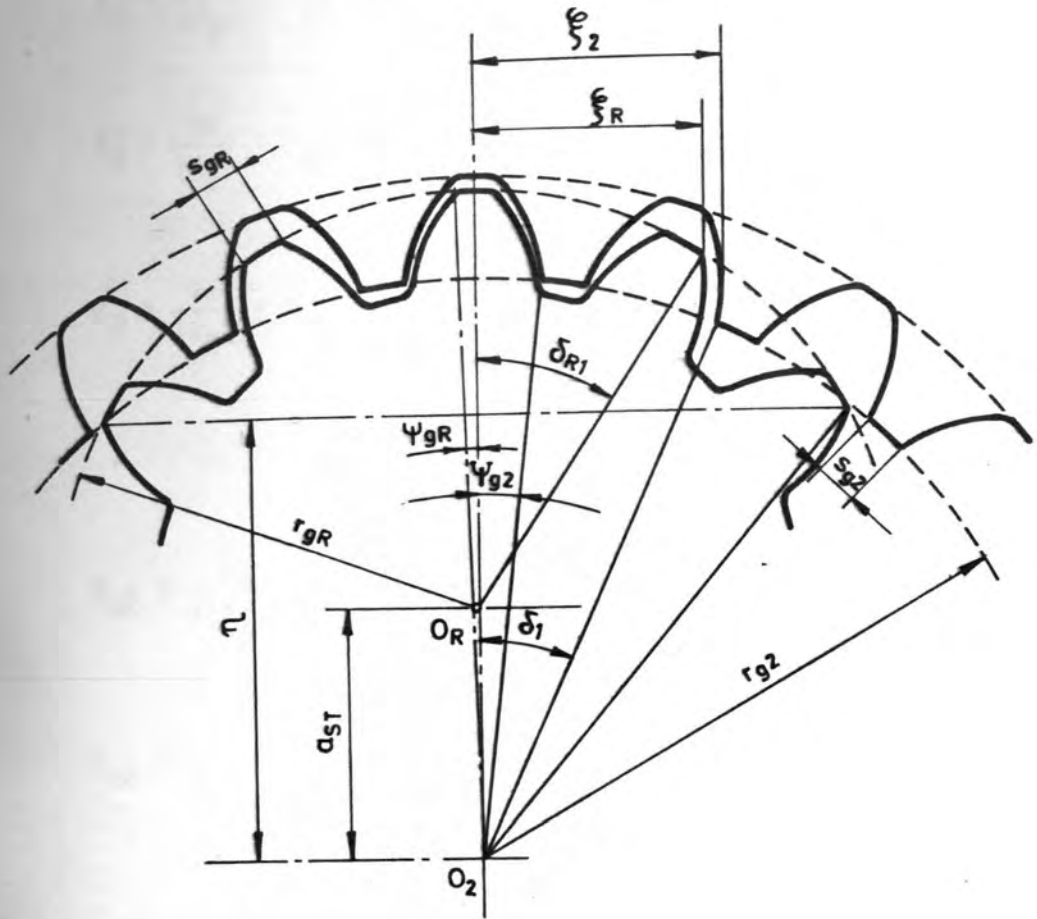
Radijalna interferencija pri izradi zupčanika s unutrašnjim ozubljenjem nastaje kad bok zuba izratka smeta reznom zupčaniku da izvede svoj povratni hod, tj. alat bi prilikom povratnog hoda zadirao u zupčanik što bi izazvalo oštećenje izratka, a moguće je i oštećenje samog reznog zupčanika. Ove smetnje neće se pojaviti ako je prema slici 6.

$\eta < r_{e2}$  i  $\xi_2 > \xi_R$ , tj.

$$\begin{aligned} |d_{g2}| \sin \delta_1 &> d_{gR} \sin \delta_{R1} \\ |d_{g2}| \sin \delta_2 &> d_{gR} \sin \delta_{R2} \\ |d_{g2}| \sin \delta_3 &> d_{gR} \sin \delta_{R3} \end{aligned} \quad (49)$$

...

Ovdje je



Sl. 6. K objašnjenju radijalne interferencije



$$\delta_1 = \frac{2\pi}{|z_2|} - \psi_{g2} \qquad \delta_{R1} = \frac{\pi}{z_R} + \psi_{gR}$$

$$\delta_2 = \frac{3\pi}{|z_2|} - \psi_{g2} \qquad \delta_{R2} = \frac{2\pi}{z_R} + \psi_{gR} \qquad (50)$$

$$\delta_3 = \frac{4\pi}{|z_2|} - \psi_{g2} \qquad \delta_{R3} = \frac{3\pi}{z_R} + \psi_{gR}$$

...

$$\psi_{g2} = \frac{\pi}{2|z_2|} - \frac{2 x_2 \tan \alpha_0}{z_2} - \text{inv } \alpha_0 + \text{inv } \alpha_{g2} \qquad (51)$$

$$\psi_{gR} = \frac{\pi}{2 z_R} + \frac{2 x_R \tan \alpha_0}{z_R} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_{gR} \qquad (52)$$

Radijalna interferencija nastupa samo pri malim vrijednostima razlike ( $|z_2| - z_1$ ) i ( $|z_2| - z_R$ ).

## 2.4 Interferencije u zahvatu para zupčanika

### 2.41 Interferencija u korijenu zupčanika

Ova smetnja nastaje kada se zahvat para zupčanika odvija u području prijelazne krivulje jednog od zupčanika. Uvjet da do ovog ne dodje jeste, da aktivni dio profila nikada ne prelazi evolventni dio profila, tj.

$$\alpha_{A1} \cong \alpha_{F1} \quad \alpha_{A2} \cong \alpha_{F2} \quad , \quad (53)$$

odnosno za par s unutrašnjim ozubljenjem

$$\alpha_{A1} \cong \alpha_{F1} \quad \alpha_{A2} \leq \alpha_{F2} \quad . \quad (54)$$

Pri tome se kutevi  $\alpha_{F1}$  i  $\alpha_{F2}$  računaju prema (30) tako da se umjesto  $\alpha_{\gamma 1}$  uvrsti odgovarajući kut pritiska  $\alpha_{g2}$ , tj.  $\alpha_{g1}$ .

U priloženim  $x_1 - x_2$  dijagramima ove su smetnje označene sa IK1 i IK2 i gotovo uvijek predstavljaju graničnu liniju.

#### 2.42 Interferencija glava zupčanika

Pod interferencijom glava zupčanika razumijeva se zadiranje glave zuba jednog zupčanika u glavu zuba drugog zupčanika, a može se pojaviti samo u paru s unutrašnjim ozubljenjem.

Uvjeti pod kojima nastaje ova smetnja, kao i formule, identični su onima pri odrezivanju glave zuba, ako se umjesto parametara reznog zupčanika uvrste odgovarajući parametri zupčanika s vanjskim ozubljenjem.

Kada je  $z_1 + |z_2| > 23$  do ove interferencije nikada ne dolazi, dok za manje vrijednosti  $z_1 + |z_2|$ , naročito pri zahvatnom kutu bliskom nuli (takvi prijenosi su mogući kod para s unutrašnjim ozubljenjem) i pri

$\Sigma x > 0$ , do ove smetnje može doći.

### 2.43 Radijalna interferencija

Ova se smetnja sastoji u tome što pri odredjenim uvjetima nije moguća radijalna montaža zupčanika s vanjskim ozubljenjem u zahvat sa zupčanicom s unutrašnjim ozubljenjem. Kod parova vanjskih zupčanika do ove interferencije ne može doći.

Do radijalne interferencije u zahvatu para s unutrašnjim ozubljenjem dolazi pod istim uvjetima kao i pri radijalnoj interferenciji prilikom izrade zupčanika s unutrašnjim ozubljenjem (sl. 6). Važe i iste formule (49) ... (52), ako se umjesto veličina reznog zupčanika uvrste odgovarajuće veličine malog zupčanika.

Za razliku od ostalih, ova interferencija ne predstavlja smetnju koja bezuvjetno eliminira upotrebu dotičnog zupčanog para, jer je aksijalnu montažu najčešće ipak moguće osigurati. Zato se radijalna interferencija ne smatra graničnom linijom u  $x_1 - x_2$  dijagramu.

### 2.5 Ostale izolinije

Za pravilan zahvat para zupčanika potreban uvjet je da stupanj prekrivanja  $\epsilon$  bude veći od jedinice. Medjutim, najčešće se kao uvjet pra-

vilnog zahvata uzima

$$\epsilon \geq 1,2. \quad (55)$$

Stupanj prekrivanja jednak je zbroju parcijalnih stupnjeva prekrivanja

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad (56)$$

pri čemu je

$$\epsilon_1 = \frac{z_1}{2\pi} (\tan \alpha_{g1} - \tan \alpha_p) \quad (57)$$

$$\epsilon_2 = \frac{z_2}{2\pi} (\tan \alpha_{g2} - \tan \alpha_p). \quad (58)$$

Isto tako, zbog čvrstoće glave zuba, kao i zbog pravilnog zahvata, ne smije se dozvoliti tzv. šiljasti zub, tj. mora biti debljina zuba na krugu preko glave u svakom slučaju  $s_g > 0$ . Najčešće se uzima

$$s_g \geq 0,25 m, \quad (59)$$

pri čemu je

$$s_g = \psi_g d_g. \quad (60)$$

Za zupčanik s unutrašnjim ozubljenjem polukut debljine zuba  $\psi_g$  računa se

prema (51), a za zupčanik s vanjskim ozubljenjem prema (52), ali tako da se umjesto indeksa R postave odgovarajući indeksi zupčanika.

Uvjeti (55) i (59) redovito predstavljaju granične izolinije u  $x_1 - x_2$  dijagramu, koje su obilježene sa EPS, tj. SG1 i SG2.

U rijetkim slučajevima, pri većim  $z_R$ ,  $z_1$  i  $z_2$ , mogu kod parova s unutrašnjim ozubljenjem graničnima postati izolinije  $\alpha_{ST2} = 0$  (pravac paralelan s osi  $x_1$ ) i  $\alpha_p = 0$ . To znači da je kod ovakvih parova moguće konstruirati zupčani prijenos sa zahvatnim kutem jednakim nuli!

U priloženim dijagramima ucrtane su još izolinije jednakih specifičnih klizanja\* (pri zadanoj  $\Sigma x$  ujedno i najmanjih) u podnožjima\*\* zuba oba zupčanika u zahvatu. Izbor faktora pomaka profila na ovoj izoliniji (JRK) osigurava minimalno trošenje boka zuba. Analitički oblik izolinije je prema [1]

$$\left( \frac{z_1}{z_2} + 1 \right) \left( \frac{\tan \alpha_p}{\tan \alpha_{A1}} - 1 \right) = \left( \frac{z_2}{z_1} + 1 \right) \left( \frac{\tan \alpha_p}{\tan \alpha_{A2}} - 1 \right). \quad (61)$$

---

\* specifično klizanje definira se kao odnos klizanja u pojedinoj točki boka zuba i komponente apsolutne brzine te točke u smjeru tangente na profil u toj točki.

\*\* u točkama  $A_1$  i  $A_2$

### 3 IZOLINIJE EFEKTIVNIH FAKTORA OBLIKA ZUBA ZA PAROVE EVOLVENTNIH ZUPČANIKA

#### 3.1 U v o d

U prethodnom poglavlju je pokazano da je u  $x_1 - x_2$  koordinatama moguće konstruirati izolinije najrazličitijih geometrijskih i mehaničkih svojstava određenog zupčanog para. Neka od ovih svojstava mogu povoljno utjecati na nosivost zupčanika s obzirom na kontaktna naprezanja boka zuba ili s obzirom na naprezanja u korijenu zuba (najčešće ne na oboje istovremeno!). Medjutim, jedna opća metoda za određivanje izolinja ovih naprezanja do danas nije pronadjena. Dapače, u literaturi se ne mogu naći izolinije ovih naprezanja (jediničnih) niti za sasvim ograničeni broj parametara.

Brojni radovi, npr. [1], [3], [20], napisani su na temu optimalnog izbora faktora pomaka profila. Medjutim, o ozbiljnijoj optimizaciji ne može biti govora, ako su izostavljena dva osnovna pokazatelja nosivosti zupčanog para, a to su naprezanja u korijenu zuba i kontaktna naprezanja boka zuba.

Što se tiče jediničnih nominalnih naprezanja u korijenu zuba, tj. faktora oblika zuba definiranih prema ISO [4] ili prema [13], osim izrade složenog algoritma, veće prepreke za računanje koordinata ovih izolinja na računskom stroju ne postoje. Ovakove izolinije, medjutim, ne bi mogle biti relevantni pokazatelji stvarnih (efektivnih) naprezanja, jer se prema navedenim definicijama ne uzima u obzir značajna koncentra-

cija naprezanja u korijenu zuba, pa je to osnovni razlog zbog kojeg se one ne mogu naći u stručnoj literaturi. Za dobivanje izolinija efek-  
t i v n i h faktora oblika zuba kao mjerila s t v a r n i h napre-  
zanja u korijenu zuba, postoje pak znatne poteškoće vezane uz egzaktno  
odredjivanje polumjera zakrivljenosti u proizvoljnoj točki prijelazne kri-  
vulje. Naime, stvarna naprezanja u korijenu zuba su, za razliku od nomi-  
nalnih, ovisna i o navedenom polumjeru zakrivljenosti.

Stvarna naprezanja se direktno mjere (ako se radi o eksperimen-  
tu) ili računaju (numerički ili teoretski postupak) u odgovarajućoj točki  
prijelazne krivulje. Ovdje spadaju eksperimentalne metode fotoelastici-  
metrija i tenzometrija (vidi npr. [6], [18]), teoretske metode teorije  
elastičnosti [19], konformnog preslikavanja [22], [23] i teorije presjeka  
loma [24], [25], [26], te numeričke metode konačnih ili graničnih eleme-  
nata [27].

Nedostatak ovih metoda je u tome što se odnose na samo neke ti-  
pove i profile ozubljenja i što se zbog nejedinstvenog načina prikaziva-  
nja, te nemogućnosti jednostavne reprodukcije rezultata, teško mogu pri-  
mijeniti u praksi. Podijelivši nadjenu veličinu maksimalnog naprezanja u  
korijenu zuba s nominalnim naprezanjem u istoj točki, dobije se faktor  
koncentracije naprezanja u toj točki. Mijenjajući neke parametre (naj-  
češće  $s_k/\rho$ ), može se pronaći pouzdana ovisnost faktora koncentracije nap-  
rezanja o ovim parametrima, koja se onda može poopćiti na veći broj tipova  
i profila ozubljenja. Dakle, navedene metode odredjivanja stvarnih

naprezanja u korijenu zuba ponajbolje mogu poslužiti za određivanje faktora koncentracije naprezanja.

Stvarna naprezanja u korijenu zuba mogu se i posredno izračunati množenjem nominalne vrijednosti naprezanja u određenoj točki, koja se lako dobije prema poznatim izrazima Nauke o čvrstoći, s faktorom koncentracije naprezanja u toj točki.

Bitno pitanje je, međutim, koju točku uzeti kao mjerodavnu, tj. u kojoj točki prijelazne krivulje vlada najveće naprezanje. U ISO - preporuci prema [20], zatim prema DIN 3990, te prema Niemannu [13], ova kritična točka definirana je diralištem tangente na prijelaznu krivulju, koja sa simetralom zuba zatvara kut  $\phi = \pi/6$ . Neki drugi autori definiraju kritičnu točku pomoću dirališta parabole upisane u profil zuba (Lewisova parabola).

U ovom je radu prihvaćen postupak iz [14], odnosno [23], gdje je kritična točka definirana kao ona, u kojoj je umnožak nominalnog naprezanja i faktora koncentracije naprezanja najveći! Pronalaženje kritične točke prema ovom postupku podrazumijeva iteraciju primjenom digitalnog računala, a ima univerzalni karakter, tj. ovim se postupkom mogu pronaći točke najvećeg naprezanja za sve tipove i profile ozubljenja, pa tako i za unutrašnje evolventno ozubljenje, što ni u kojem slučaju ne vrijedi za gore spomenute metode.

Pored izrade složenog algoritma i njegove realizacije na računalu, glavnu prepreku na putu konstruiranja izolinijskog faktora oblika zuba u  $x_1 - x_2$  koordinatama predstavlja iznalaženje funkcionalne



ovisnosti polumjera zakrivljenosti u proizvoljnoj točki prijelazne krivulje o parametrima alata i izratka. Već u radu [4] nadjeno je rješenje ovog problema, ali samo za vanjsko evolventno ozubljenje bez pomaka profila.

Interesantan je pokušaj u radovima [7] i [8], gdje je pronađeno opće rješenje za  $\rho$  za proizvoljni oblik alata. Medjutim, rješenje nije eksplicitno i dato je kroz sistem matričkih diferencijalnih jednadžbi, u kojima se izmedju ostalog pojavljuju i prijelazne matrice od nepokretnog k pokretnom sistemu koordinata, kao i njihove derivacije, tako da je reprodukcija ovih rezultata u konstruktorskoj praksi izuzetno teško ostvarljiva.

Primjenjivi rezultat dobiven je u radu [16] matematskim razmatranjem, tj. transformacijom koordinata pokretne poloide (alata) na koordinate nepokretne poloide (izratka). Medjutim, ovaj rezultat vrijedi samo za zupčanike izradjene ravnom ozubnicom, pa se ne može primijeniti na unutrašnje ozubljenje. U radu [10] je istim načinom, tj. primjenom kompleksnih brojeva matematički opisan cjelokupan profil vanjskog i unutrašnjeg ozubljenja, a predloženi postupak je pogodan prvenstveno za primjenu na računalu.

U ovom radu će se čisto kinematskom analizom tražiti eksplicitan i neposredno primjenjiv izraz za polumjer zakrivljenosti u proizvoljnoj točki prijelazne krivulje za evolventne zupčanike izradjene odvalnim dubljenjem reznim zupčanicom. Ovaj izraz će biti funkcija samo jedne varijable - zahvatnog kuta pri izradi prijelazne krivulje, te parametara spregnutih zupčanika i reznog zupčanika.

### 3.2 Definicija i način određivanja efektivnog faktora oblika zuba

Efektivni faktor oblika zuba definira se kao maksimum umnožaka (mjesnih) faktora koncentracije naprezanja i (mjesnih) nominalnih faktora oblika zuba duž prijelazne krivulje boka zuba, tj.

$$y_E = (k_c y_N)_{\max} \quad (62)$$

Uvriježeno je da se nominalno naprezanje  $\sigma_N$  u korijenu zuba računa pomoću nominalnog faktora oblika zuba  $y_N$  iz izraza

$$\sigma_N = \frac{F_0 y_N}{b m} \quad (63)$$

Dakle, nominalni faktor oblika zuba predstavlja nominalno naprezanje u određenoj točki prijelazne krivulje boka zuba, koji ima jediničnu širinu i jedinični modul, a opterećen je jediničnom obodnom silom.

U literaturi se susreću razne metode određivanja nominalnog naprezanja u korijenu zuba, počev od najjednostavnijih do vrlo složenih postupaka, te se često nalaze vrlo različiti podaci za vrijednosti faktora oblika zuba.

Neki autori, npr. [14], [20], [22], te DIN 3990 uzimaju u obzir samo naprezanje od savijanja u korijenu zuba, drugi [4], [6], pored toga, uzimaju u obzir još i tlačno naprezanje od vertikalne komponente

normalne sile na zub, dok neki [13] kao mjerodavno uzimaju ekvivalentno naprezanje kao (idealno) rezultatno naprezanje od spomenutih normalnih naprezanja i tangencijalnog (smičnog) naprezanja u korijenu uslijed horizontalne komponente normalne sile.

U ovom radu kao nominalno naprezanje uzeto je samo naprezanje od savijanja u točki K prijelazne krivulje (sl. 7. i 8) i tome odgovarajući faktor koncentracije naprezanja.

Budući da se u ovom radu pretpostavlja idealni (teoretski) zahvat bez bočnog zazora i idealno kruti zub, to cjelokupno opterećenje  $F_N$  djeluje na zub tek od točke jednostrukog zahvata. Tada su ujedno naprezanja u korijenu zuba (nominalna i efektivna) najveća, pa je ovaj položaj opterećenja mjerodavan za određivanje naprezanja i faktora oblika zuba. Kut  $\alpha'$  između sile  $F_N$  i njene komponente okomite na simetralu zuba tada se određuje prema slici 9.

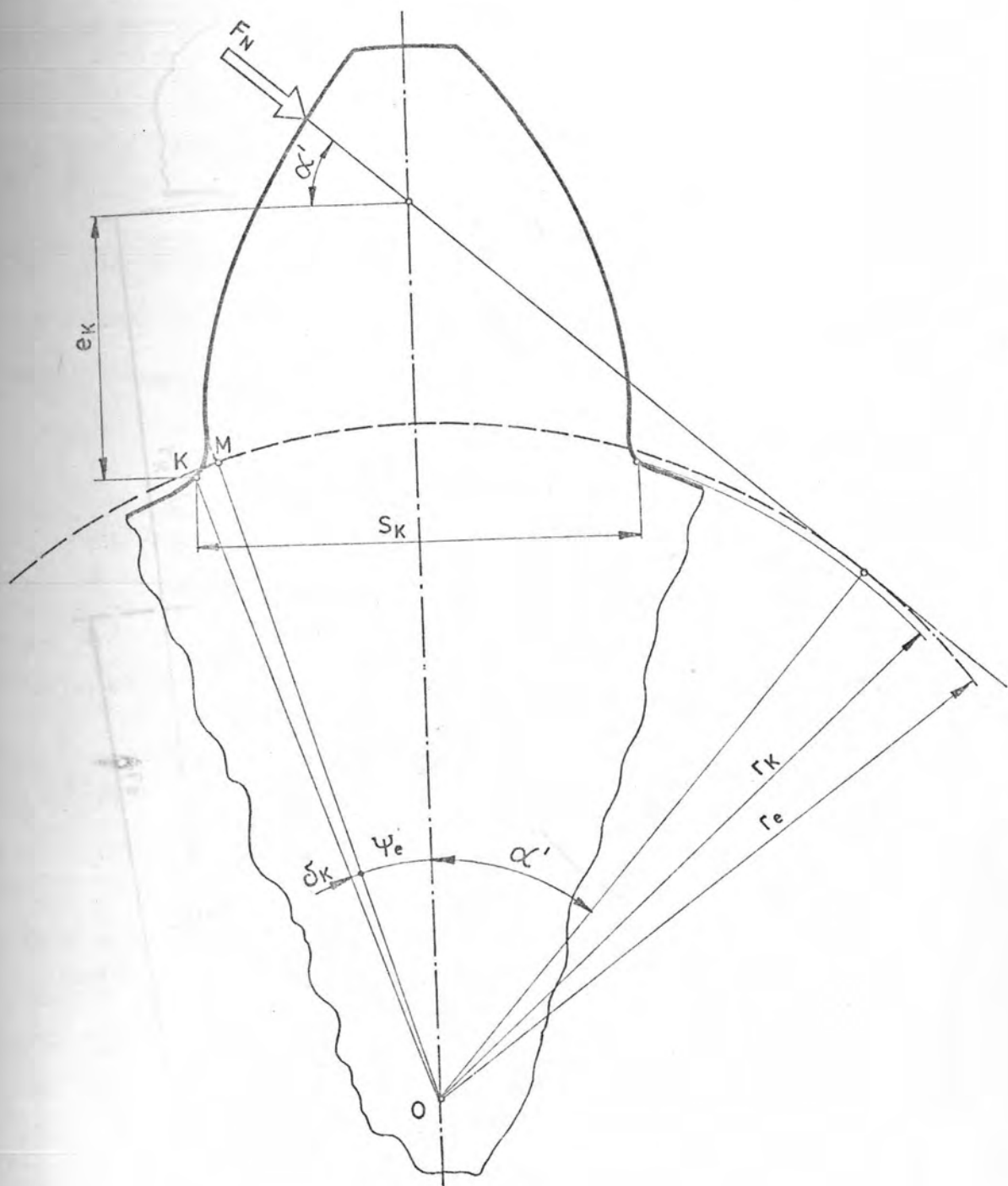
$$\alpha' = \alpha_g + \text{inv } \alpha_g - \psi_e - \phi \quad ;$$

Budući da je

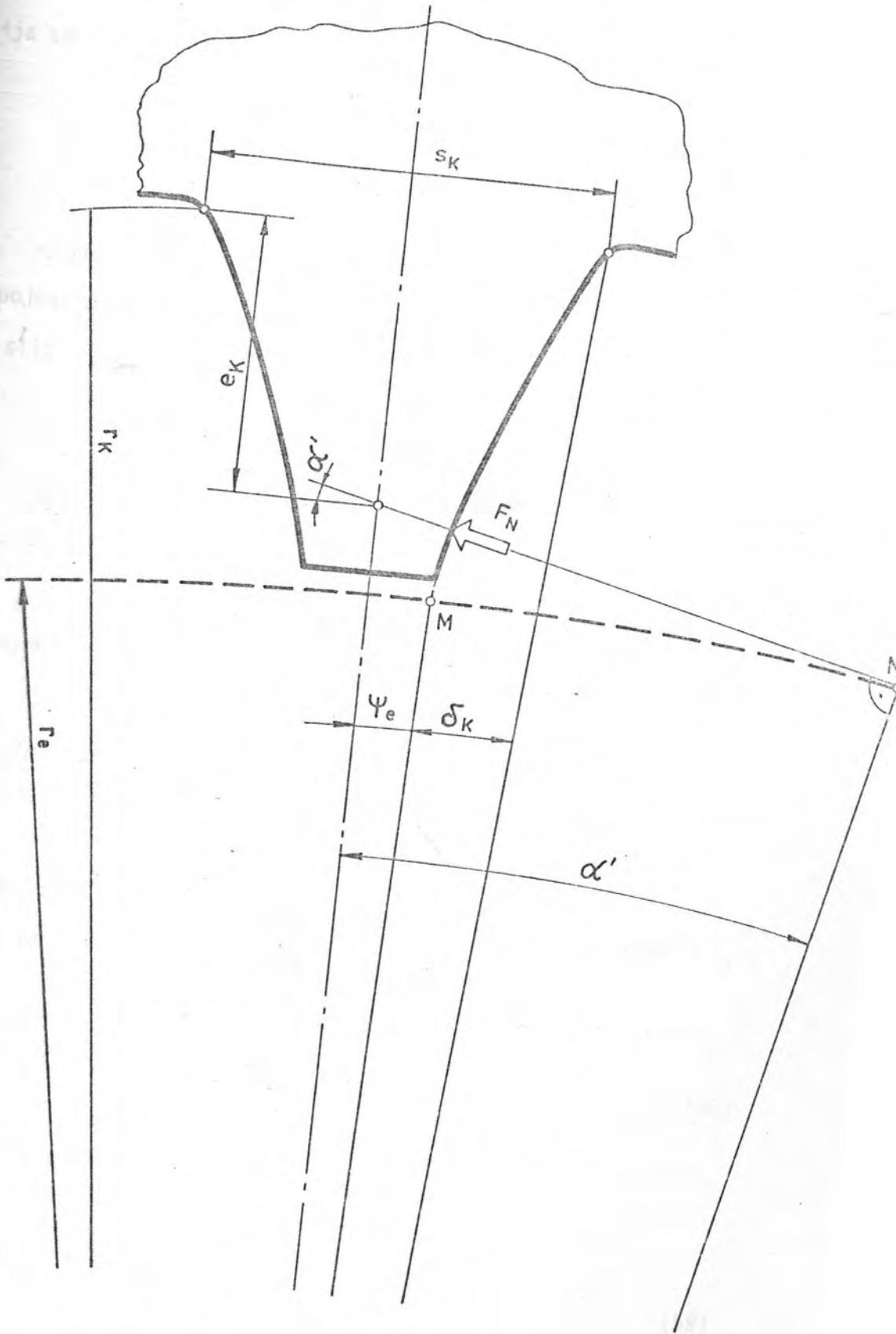
$$\alpha_g + \text{inv } \alpha_g = \tan \alpha_g \quad ,$$

$$\psi_e = \frac{\pi}{2z} + \frac{2x \tan \alpha_o}{z} + \text{inv } \alpha_o \quad (64)$$

$$\phi = \frac{\overline{K_1 L_1}}{r_e} = \frac{\pi m \cos \alpha_o (\epsilon - 1)}{\frac{1}{2} m z \cos \alpha_o} = \frac{2\pi (\epsilon - 1)}{z}$$



Sl. 7. K odredjivanju faktora oblika zuba vanjskog evolventnog ozubljenja



Sl.8. - K odredjivanju faktora oblika zuba unutrašnjeg evolventnog ozubljenja

dobija se opći izraz za određivanje kuta  $\alpha'$ :

$$\alpha' = \tan \alpha_g - \frac{2\pi (\varepsilon - 1)}{z} - \psi_e \quad . \quad (65)$$

Sve veličine potrebne za proračun nominalnog faktora oblika zuba u pojedinoj točki prijelazne krivulje date su na slici 7. za vanjsko, te na slici 8. za unutrašnje ozubljenje. Nominalno naprezanje u točki K je

$$\sigma_N = \frac{M_s}{W} = \frac{F_0 \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha_0} e_K}{\frac{1}{6} b s_K^2} \quad . \quad (66)$$

Uspoređujući ovo s izrazom (63) slijedi (za jedinični modul)

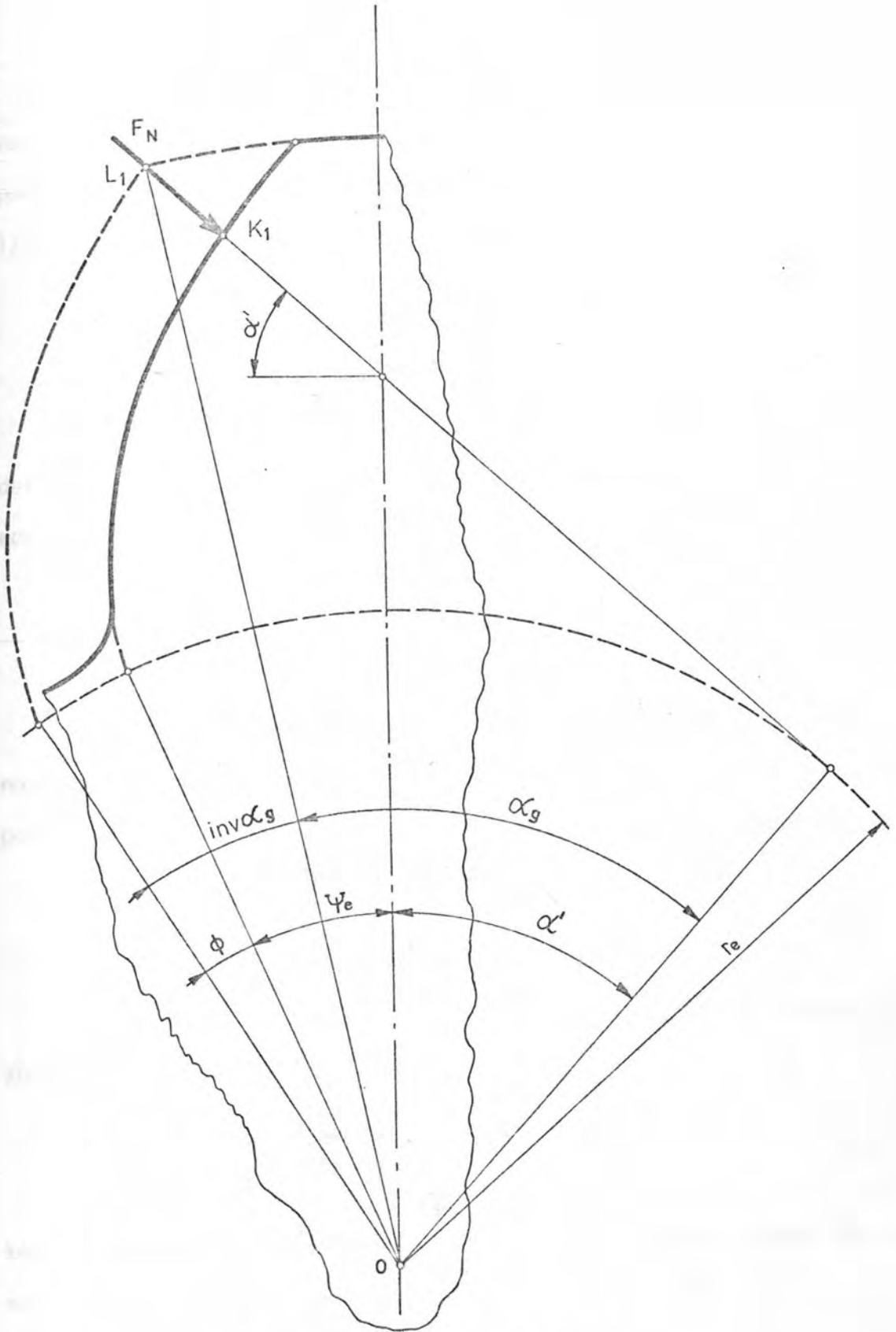
$$y_N = \frac{6 e_K}{s_K^2} \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha_0} \quad . \quad (67)$$

Pri tome se i sve ostale dužinske veličine koje služe za računanje  $e_K$  i  $s_K$  računaju za  $m = 1$ . Tako je prema slici 7. i 8. krak sile

$$e_K = \frac{r_e}{\cos \alpha'} - r_K \cos (\psi_e + \delta_K) \quad , \quad (68)$$

dok je debljina zuba u točki K

$$s_K = 2 r_K \sin (\psi_e + \delta_K) \quad . \quad (69)$$



Sl. 9. K odredjivanju kuta  $\alpha'$

Za određeni zupčani par ( $z_1, z_2$ ), te za poznate parametre reznog zupčanika  $z_R$  i  $x_R$ , svaka dužinska veličina je funkcija samo faktora pomaka profila  $x_1$  i  $x_2$ . Isto vrijedi i za bilo koji kut definiran na ozubljenju, pa je i nominalni faktor oblika zuba

$$y_N = y_N(x_1, x_2) \quad . \quad (70)$$

Faktor koncentracije naprezanja definira se kao odnos stvarnih i nominalnih naprezanja u korijenu idealnog\* zuba

$$k_C = \frac{\sigma_E}{\sigma_N} = \frac{y_E}{y_N} \quad . \quad (71)$$

Većina istraživača, npr. [6], [18], [21], [26], daju ga - ovisnosti o odnosu debljine zuba  $s_K$  u određenoj točki prijelazne krivulje i polumjera zakrivljenosti u toj točki, pa je za određeni zupčani par

$$k_C = k_C(x_1, x_2) \quad . \quad (72)$$

U ovom je radu za faktor koncentracije naprezanja u korijenu zuba preuzet izraz iz [15]

$$k_C = 1 + 0,3203 (s_K/2\rho)^{0,501} \quad , \quad (73)$$

koji je izveden na osnovi regresijske analize rezultata iz [27], dobivenih metodom konačnih elemenata.

---

\* Iz izotropnog i homogenog materijala



Iz izraza (62), (70) i (72) očito je da za određeni zupčani par i poznati alat kojim je on izradjen efektivni faktor oblika zuba takodjer je funkcija samo faktora pomaka profila, tj.

$$y_E = y_E(x_1, x_2) \quad . \quad (74)$$

U  $x_1 - x_2$  dijagramu ovo predstavlja familiju krivulja - izolinija efektivnog faktora oblika zuba, kojima je  $y_E$  parametar.

### 3.3 Polumjer zakrivljenosti u proizvoljnoj točki prijelazne krivulje

Kao što je već istaknuto, prijelazna krivulja profila zupčanika formira se u procesu odvalnog dubljenja kao obvojnica zaobljenog dijela glave reznog zupčanika pri odvaljivanju njegovog kinematskog kruga  $r_R$  (pomične poloide) po kinematskom krugu  $r$  izratka (nepomičnoj poloidi) bez klizanja.

Stvarno gibanje ekvivalentno ovom jest čista rotacija nepomičnih odvalnih krugova  $r$  i  $r_R$  sa zajedničkom brzinom u odvalnoj točki  $C$  (trenutnom kinematskom polu). Pri tome evolventni bok zuba alata rezanjem formira evolventni bok zuba izratka pri neizmjenjenom zahvatnom kutu  $\alpha_{ST}$ , dok zaobljenje vrha glave alata (ili sam vrh) formira prijelaznu krivulju profila izratka pri promjenjivom zahvatnom kutu  $\gamma_{ST}$  (sl. 10, 11. i 12).







Pri izradi prijelazne krivulje zbog  $i_{ST} = \text{konst.}$ , na osnovi glavnog zakona zupčanja, mora normala na profile u trenutnoj točki dodira  $K \equiv K_R$ , prolaziti kroz odvalnu točku C. Položajem ove normale definiran je i zahvatni kut pri izradi prijelazne krivulje  $\gamma_{ST}$ . Pri izradi čitave prijelazne krivulje točka  $K_R$  mijenja položaj od točke  $G_R$  na krugu preko glave do točke B reznog zupčanika, a točka K od kruga preko korijena do granične točke F. Pri tome se zahvatni kut  $\gamma_{ST}$  mijenja u granicama

$$\pi/2 \geq \gamma_{ST} \geq \alpha_{ST} \quad . \quad (75)$$

Izvjescno je takodjer da se središta zakrivljenosti S točke K prijelazne krivulje i  $S_R$  točke  $K_R$  glave reznog zupčanika moraju nalaziti na normali na profil u točki  $K \equiv K_R$ . Pri promjeni  $\gamma_{ST}$  od  $\frac{\pi}{2}$  do  $\alpha_{ST}$ , ova normala ( $K C N N_R$ ) mijenja položaj od spojnice osiju  $\overline{O O_R}$  do tangente na evolventni krug izratka, ali uvijek tako da prolazi kroz točku C. Ako se zamisli da je ova normala štap koji očito ne rotira oko C, jasno je da je brzina ovog štapa u točki C usmjerena uzduž štapa. Trenutni kinematski pol E ovog štapa nalazit će se dakle na okomici štapa kroz točku C. Budući da se on mora nalaziti na polumjer - vektoru  $\overline{O_R S_R}$ , njegov položaj je odredjen, a time i položaj središta zakrivljenosti S točke K prijelazne krivulje. Naime, on se nalazi na presjecištu polumjer - vektora  $\overline{O S}$  i normale na profil. Na taj način odredjen je traženi polumjer zakrivljenosti u točki K prijelazne krivulje  $\rho = \overline{SK}$ .

Iz sličnosti trokuta  $S_R O_R N_R$  i  $S_R E C$  (sl. 10) slijedi

$$\overline{S_R N_R} : \overline{S_R C} = \overline{N_R O_R} : \overline{E C} \quad , \quad (76)$$

a iz sličnosti trokuta  $S O N$  i  $S E C$  (sl. 11. i 12)

$$\overline{S N} : \overline{S C} = \overline{N O} : \overline{E C} \quad . \quad (77)$$

Eliminacijom  $\overline{E C}$  iz ove dvije jednačbe i uvrštavajući

$$\overline{S_R C} = l_R \quad \overline{S C} = l \quad (78)$$

$$\overline{S_R N_R} = r_R \sin \gamma_{ST} + l_R \quad \overline{S N} = r \sin \gamma_{ST} - l \quad (79)$$

$$\overline{N_R O_R} = r_R \cos \gamma_{ST} \quad \overline{N O} = r \cos \gamma_{ST} \quad (80)$$

dobije se

$$\left( \frac{1}{l_R} + \frac{1}{l} \right) \sin \gamma_{ST} = \frac{1}{r_R} + \frac{1}{r} = A \quad * \quad (81)$$

Budući da je očigledno

$$\rho + l = r_F + l_R \quad , \quad (82)$$

proizlazi konačan izraz za polumjer zakrivljenosti u proizvoljnoj točki prijelazne krivulje zupčanika izradjenog odvalnim dubljenjem reznim zupčanikom

\* Ovaj izraz predstavlja poseban oblik Euler - Savaryjeve jednačbe za određivanje zakrivljenosti putanje neke točke pomičnog sistema.

$$\rho = r_F + \frac{A l_R^2}{\sin \gamma_{ST} + A l_R} \quad . \quad (83)$$

Pri tome je

$$l_R = \overline{N_R S_R} - \overline{N_R C} = r_R \cos \gamma_{ST} (\tan \tau - \tan \gamma_{ST}) \quad , \quad (84)$$

$$A = \frac{2}{m} \left( \frac{1}{z_R} + \frac{1}{z} \right) \frac{\cos \alpha_{ST}}{\cos \alpha_0} \quad . \quad (85)$$

$$\cos \tau = \frac{r_R \cos \gamma_{ST}}{r_{SR}} \quad . \quad (86)$$

Potrebno je još definirati položaj točke K, tj. odrediti njene polarne koordinate  $r_K$  i  $\delta_K$ . Prema slikama 11. i 12. je

$$r_K = r \frac{\cos \gamma_{ST}}{\cos \gamma_K} = \frac{m z}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_{ST}} \frac{\cos \gamma_{ST}}{\cos \gamma_K} \quad . \quad (87)$$

Kut  $\gamma_K$  računa se na osnovi jednakosti

$$\overline{N_R K_R} - \overline{C N_R} = \overline{C N} - \overline{N K} \quad ,$$

$$\frac{r_R}{\overline{O_R N_R}} = \frac{r}{\overline{O N}} \quad .$$

Pomnoživši međusobno ove jednadžbe, dobije se poslije sredjivanja

$$\tan \gamma_K = \frac{z + z_R}{z} \tan \gamma_{ST} - \frac{z_R}{z} \tan \gamma_{KR} \quad . \quad (88)$$

Pri tome je

$$\tan \gamma_{KR} = \frac{\overline{N_R S_R} + \overline{S_R K_R}}{\overline{O_R S_R}} = \tan \tau + \frac{r_F}{r_{SR} \cos \tau} \quad (89)$$

Kut  $\delta_K$  određuje se na osnovi jednakosti lukova

$$\widehat{CP} = \widehat{CP_R} \quad , \quad (90)$$

tj.

$$r(\gamma_{ST} - \gamma_K - \delta_K + \text{inv } \alpha_{ST}) = r_R(\gamma_{KR} - \gamma_{ST} + \delta_{KR} - \text{inv } \alpha_{ST}) \quad .$$

Budući da je prema slici 10.

$$\gamma_{KR} + \delta_{KR} = \tau + \delta_{SR} \quad , \quad (91)$$

nakon sredjivanja proizlazi

$$\delta_K = \frac{z + z_R}{z} (\gamma_{ST} + \text{inv } \alpha_{ST}) - \frac{z_R}{z} (\tau + \delta_{SR}) - \gamma_K \quad . \quad (92)$$

Pri tome je

$$\delta_{SR} = \frac{r_F}{r_{eR}} + \text{inv } \alpha_{SR} \quad . \quad (93)$$



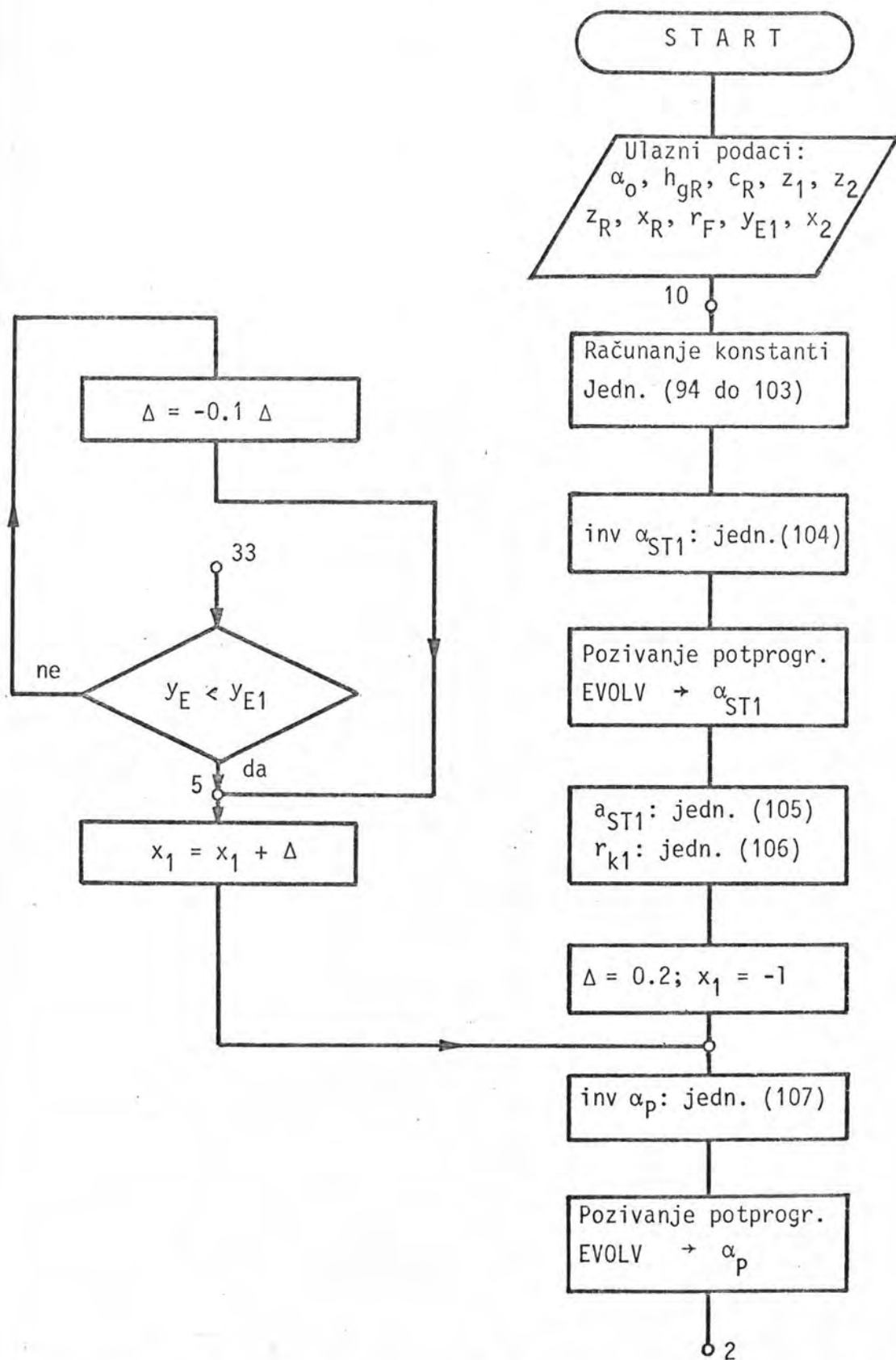
Na osnovi pravila predznaka prema DIN 3990, svi izvedeni izrazi vrijede bez razlike za vanjsko i za unutrašnje ozubljenje.

### 3.4 Algoritam za određivanje koordinata izolinija efektivnog faktora oblika zuba

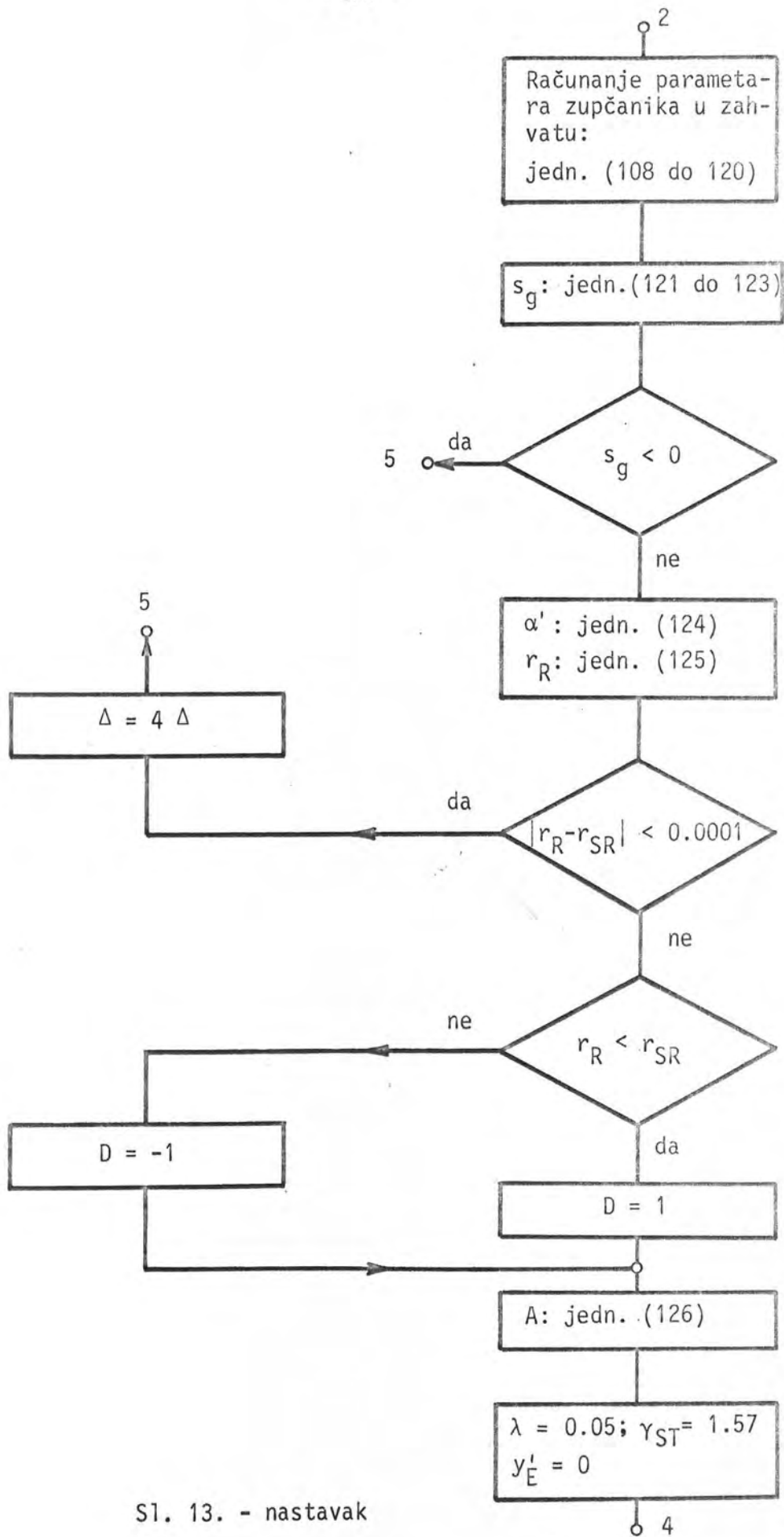
Za ucrtavanje izolinija  $y_E = \text{konst}$  potrebno je za svaku od diskretnih vrijednosti jedne varijable (npr.  $x_2$ ) iz određenog dijapazona (najčešće  $-1,5 \leq x_2 \leq 5$ ) s određenim korakom (0,25) dobiti vrijednosti druge varijable ( $x_1$ ), takve da zadovoljava ovisnost (74) datu kroz sistem jednažbi (94) do (139).

U tu svrhu u program se unose ulazni podaci za  $\alpha_0$ ,  $c_R$ ,  $h_{gR}$ ,  $x_R$  i  $z_R$ , niz odabranih vrijednosti  $1 \leq y_{E1} \leq 6$  s korakom 0,25, brojevi zubi ( $z_1, z_2$ ) svakog zupčaničkog para, te korak s kojim varijabla  $x_2$  treba da ispuni gore navedeni dijapazon.

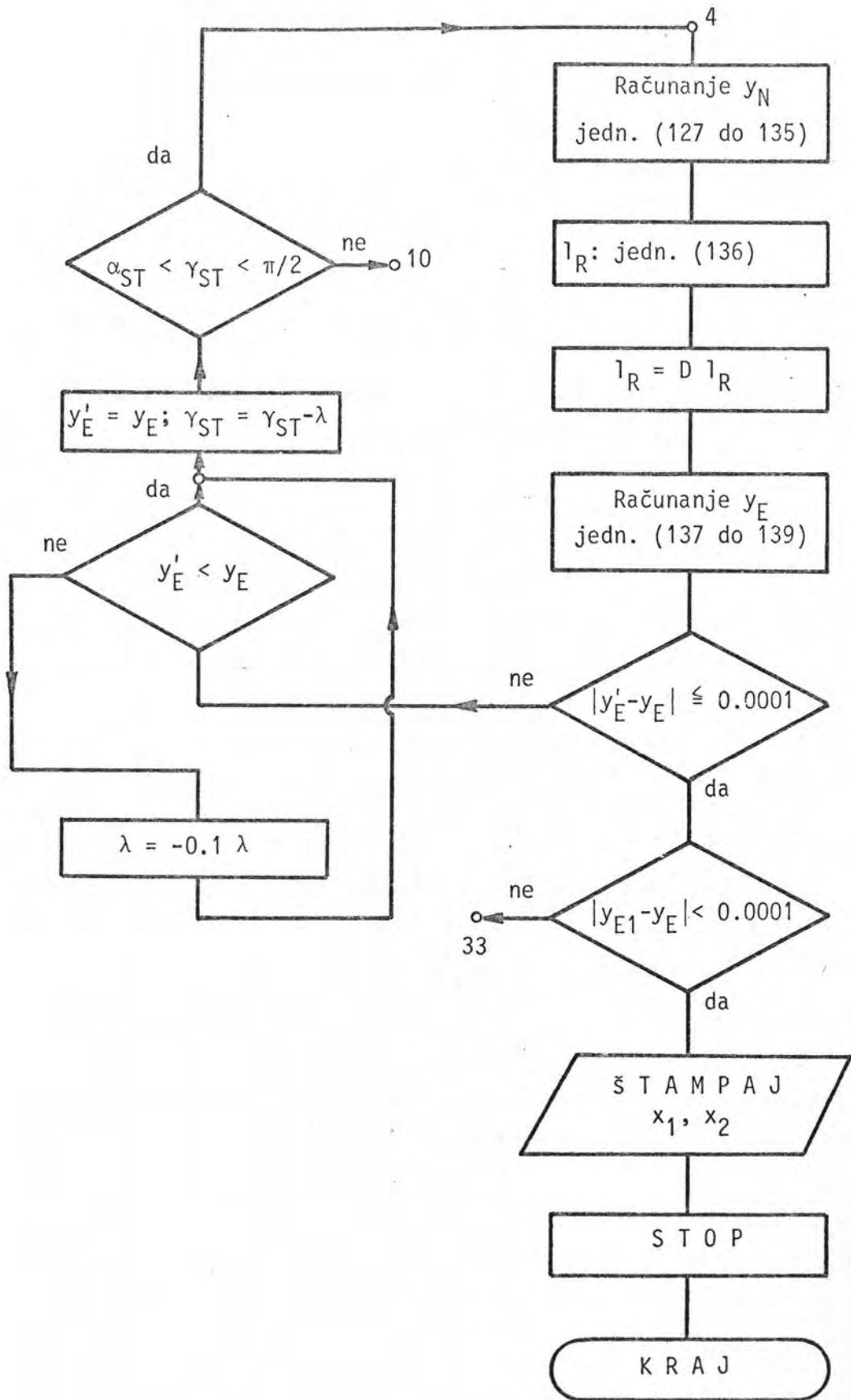
Varijabli  $x_1$  daje se jedna dovoljno niska početna vrijednost i za nju se iteracijom traži  $y_E = (y_N k_C)_{\max}$ . Pri tome se polazi od zahvatnog kuta  $\gamma_{ST} = \alpha_{ST}$ , pa ga se povećava s određenim korakom, a svaki put kad  $(y_E - y_N k_C)$  promijeni predznak,  $\gamma_{ST}$  se naizmjenično smanjuje i povećava, svaki put deset puta manjim korakom, postupno se približava-



S1. 13. Dijagram toka programa za računanje koordinata izolije  $y_E = \text{konst}$



Sl. 13. - nastavak



Sl. 13. - nastavak

jući stvarnoj vrijednosti  $y_E$ , sve dok se ne postigne zadovoljavajuća točnost (na četvrtu decimalu). Ako dobivena vrijednost  $y_E$  nije dovoljno blizu  $y_{E1}$  ide se na slijedeći veći  $x_1$  s korakom 0,25. Za njega se ponovno traži  $y_E$  i tako se  $x_1$  povećava, i kad god  $(y_{E1} - y_E)$  promijeni predznak, naizmjenično smanjuje i povećava, svaki put deset puta manjim korakom, dok se ne nadje traženi  $x_1$  za koji je  $|y_{E1} - y_E| \leq 0,0001$ . Tada se ispišu vrijednosti  $(x_1, x_2)$  koje sa točnošću od  $10^{-4}$  predstavljaju koordinate izolinije  $y_{E1} = \text{konst.}$

Za računanje kuta iz poznate vrijednosti evolventne funkcije, napravljen je poseban potprogram (EVOLV) na osnovi izraza (17).

Dijagram toka za ovaj postupak programiranja prikazan je na slici 13.

U prvom dijelu programa sadržani su oni izrazi za čije su računanje potrebni samo ulazni podaci. To su redom:

- Evolventna funkcija kuta pritiska na diobenom promjeru

$$\text{inv } \alpha_0 = \tan \alpha_0 - \alpha_0 \quad ; \quad (94)$$

- Polumjeri evolventnih krugova

$$r_{e1} = 0,5 z_1 \cos \alpha_0 \quad (95)$$

$$r_{e2} = 0,5 z_2 \cos \alpha_0 \quad (96)$$

$$r_{eR} = 0,5 z_R \cos \alpha_o \quad . \quad (3 - 97)$$

- Polumjer kruga preko glave reznog zupčanika

$$r_{gR} = 0,5 z_R + x_R + 1,25 \quad . \quad (5 - 98)$$

- Polumjer na kojem se nalazi središte zakrivljenosti glave zuba reznog zupčanika

$$r_{SR} = r_{gR} - r_F \quad . \quad (4 - 99)$$

- Kosinus kuta pritiska na krugu  $r_{SR}$

$$\cos \alpha_{SR} = r_{eR}/r_{SR} \quad , \quad (7 - 100)$$

odnosno kut pritiska na krugu  $r_{SR}$

$$\alpha_{SR} = \arccos (r_{eR}/r_{SR}) \quad . \quad (101)$$

- Evolventna funkcija kuta  $\alpha_{SR}$

$$\operatorname{inv} \alpha_{SR} = \tan \alpha_{SR} - \alpha_{SR} \quad . \quad (102)$$

- Kut između ishodišta evolventnog boka zuba reznog zupčanika i polumjer - vektora središta zakrivljenosti vrha njegove glave

$$\delta_{SR} = \text{inv } \alpha_{SR} + r_F/r_{eR} \quad . \quad (93 - 103)$$

- Evolventna funkcija zahvatnog kuta pri rezanju evolventnog boka zuba jednog od zupčanika (ovisno o tome je li u ulaznim podacima  $x_1$  ili  $x_2$ )

$$\text{inv } \alpha_{ST1} = 2 \frac{x_1 + x_R}{z_1 + z_R} \tan \alpha_0 + \text{inv } \alpha_0 \quad . \quad (16 - 104)$$

Nakon pozivanja potprograma EVOLV koji iz evolventne funkcije računa kut, dobije se kut  $\alpha_{ST1}$ , pa se dalje računa razmak osi pri izradi zupčanika 1 na stroju

$$a_{ST1} = \frac{z_1 + z_R}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_{ST1}} \quad , \quad (18 - 105)$$

i polumjer preko korijena zupčanika 1

$$r_{K1} = a_{R1} - r_{gR} \quad . \quad (21 - 106)$$

Na ovom mjestu odredi se početna vrijednost varijable  $x_2$ , koja se poslije iteracijski povećava ili smanjuje za korak DEL.

- Evolventna funkcija zahvatnog kuta u zahvatu zupčanika

$$\text{inv } \alpha_p = \text{inv } \alpha_0 + 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \tan \alpha_0 \quad . \quad (25 - 107)$$

Nakon odredjivanja kuta  $\alpha_p$  pomoću potprograma EVOLV, dalje se računa

- Razmak osi zupčanika u zahvatu

$$a = \frac{z_1 + z_2}{2} \frac{\cos \alpha_o}{\cos \alpha_p} \quad . \quad (14 - 108)$$

- Zahvatni kut pri rezanju evolventnog boka zuba drugog zupčanika dobije se iz njegove evolventne funkcije

$$\text{inv } \alpha_{ST2} = \text{inv } \alpha_o + 2 \frac{x_2 + x_R}{z_2 + z_R} \tan \alpha_o \quad . \quad (16 - 109)$$

- Razmak osi pri izradi zupčanika 2 na stroju

$$a_{ST2} = \frac{z_2 + z_R}{2} \frac{\cos \alpha_o}{\cos \alpha_{ST2}} \quad . \quad (18 - 110)$$

- Polumjer preko korijena zupčanika 2

$$r_{K2} = a_{ST2} - r_{gR} \quad . \quad (21 - 111)$$

- Polumjeri krugova preko glave

$$r_{g1} = a - r_{K2} - 0,25 \quad (22 - 112)$$

$$r_{g2} = a - r_{K1} - 0,25 \quad . \quad (23 - 113)$$

- Kosinusi kuteva pritiska na krugovima preko glave



$$\cos \alpha_{g1} = \frac{r_{e1}}{r_{g1}} \quad (27 - 114)$$

$$\cos \alpha_{g2} = \frac{r_{e2}}{r_{g2}} \quad , \quad (27 - 115)$$

odnosno kutevi pritiska na krugovima preko glave

$$\alpha_{g1} = \arccos (r_{e1}/r_{g1}) \quad (116)$$

$$\alpha_{g2} = \arccos (r_{e2}/r_{g2}) \quad (117)$$

- Parcijalni stupnjevi prekrivanja

$$\epsilon_1 = \frac{z_1}{2} (\tan \alpha_{g1} - \tan \alpha_p) \quad (57 - 118)$$

$$\epsilon_2 = \frac{z_2}{2} (\tan \alpha_{g2} - \tan \alpha_p) \quad (58 - 119)$$

- Stupanj prekrivanja

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (56 - 120)$$

Izrazi u daljnjem tekstu odnose se na onaj zupčanik čije se izolinije traže:

- Evolventna funkcija kuta pritiska na krugu preko glave

$$\text{inv } \alpha_g = \tan \alpha_g - \alpha_g \quad . \quad (121)$$

- Kut polovine debljine zuba na evolventnom krugu

$$\psi_e = \frac{\pi}{2z} + \frac{2x \tan \alpha_0}{z} + \text{inv } \alpha_0 \quad . \quad (64 - 122)$$

- Debljina zuba na krugu preko glave

$$s_g = 2 r_g (\psi_e - \text{inv } \alpha_g) \quad . \quad (60 - 123)$$

Ako je  $s_g < 0$ , treba vrijednost varijable  $x_2$  mijenjati dok se ne dobije  $s_g > 0$ , a tek onda se dalje računaju parametri potrebni za određivanje efektivnog faktora oblika zuba:

- Kut između normalne sile na zub i njene komponente okomite na simetralu zuba

$$\alpha' = \tan \alpha_g - \psi_e - \frac{2\pi (\epsilon - 1)}{z} \quad . \quad (65 - 124)$$

- Polumjer odvajanja reznog zupčanika

$$r_R = \frac{a_{ST}}{1 + \frac{z}{z_R}} \quad . \quad (19 - 125)$$

- Pomoćna veličina

$$A = 2 \left( \frac{1}{z_R} + \frac{1}{z} \right) \frac{\cos \alpha_{ST}}{\cos \alpha_0} \quad . \quad (85 - 126)$$

Nakon davanja početne vrijednosti zahvatnom kutu pri rezanju prijelazne krivulje  $\gamma_{ST} = \pi/2$  i koraka EPS po kojem se smanjuje, dalje se računa

$$\cos \tau = \frac{r_R}{r_{SR}} \cos \gamma_{ST} \quad (86 - 127)$$

$$\tau = \arccos \left( \frac{r_R}{r_{SR}} \cos \gamma_{ST} \right) \quad (128)$$

$$\tan \gamma_{KR} = \tan \tau + \frac{r_F}{r_{SR} \cos \tau} \quad (89 - 129)$$

$$\gamma_K = \arctan \left( \frac{z + z_R}{z} \tan \gamma_{ST} - \frac{z_R}{z} \tan \gamma_{KR} \right) \quad (88 - 130)$$

$$r_K = \frac{r_e}{\cos \alpha_{ST}} \frac{\cos \gamma_{ST}}{\cos \gamma_K} \quad (87 - 131)$$

$$\delta_K = \frac{z + z_R}{z} (\gamma_{ST} + \text{inv } \alpha_{ST}) - \frac{z_R}{z} (\tau + \delta_{SR}) - \gamma_K \quad (92 - 132)$$

Tek sada je moguće izračunati krak sile, debljinu zuba u korijenu i nominalni faktor oblika zuba:

$$e_K = \frac{r_e}{\cos \alpha'} - r_K \cos (\psi_e + \delta_K) \quad (68 - 133)$$

$$s_K = 2 r_K \sin (\psi_e + \delta_K) \quad (69 - 134)$$

$$y_N = 6 \frac{e_K}{s_K} \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha_0} \quad (67 - 135)$$

Nakon računanja pomoćne veličine

$$l_R = r_R \cos \gamma_{ST} (\tan \tau - \tan \gamma_{ST}) \quad , \quad (84 - 136)$$

i polumjera zakrivljenosti u točki prijelazne krivulje

$$\rho = r_F + \frac{A l_R^2}{\sin \gamma_{ST} + A l_R} \quad , \quad (83 - 137)$$

odredi se faktor koncentracije naprezanja

$$k_C = 1 + 0,3203 (s_K/2\rho)^{0,501} \quad (73 - 138)$$

i konačno lokalni faktor oblika zuba (stvarni)

$$y_{EK} = k_C y_{NK} \quad . \quad (62 - 139)$$

#### 4 PRIKAZ I ANALIZA REZULTATA

Na osnovi priloženih formula i izradjenih algoritama, moguće je na računalu provesti programe za dobivanje koordinata graničnih i ostalih izolinija za bilo koji zupčani par ( $z_1, z_2$ ), uz proizvoljne parametre alata.

U ovom radu izradjeno je 14 ovakvih dijagrama za karakteristične parove zupčanika s vanjskim ozubljenjem (sl. 21. do 34) i 11 dijagrama za parove s unutrašnjim ozubljenjem (sl. 35. do 45). Odabrana su tri standardna broja zubi reznog zupčanika  $z_R = 14, 22$  i  $50$  (GOST 9323 - 60), a za tri para zupčanika s vanjskim ozubljenjem takodjer i  $z_R = \infty$  (standardna ravna ozubnica). Pri tome je za rezni zupčanik uzeto standardno  $r_F = 0$ , a za ravnu ozubnicu  $r_F = 0,38$  m.

Većina dijagrama je izradjena sa  $x_R = 0^*$ , a za po jedan par s vanjskim i unutrašnjim ozubljenjem radjeni su dijagrami za  $x_{Rmax} = 0,104$  (novi rezni zupčanik),  $x_{Rmin} = -0,2$  (granično istrošeni rezni zupčanik) i  $x_R = -0,048$  (srednje istrošeni rezni zupčanik).

Analizom dobivenih rezultata moguće je donijeti zaključak o utjecaju parametara zupčanika u zahvatu i alata kojim su izradjeni, na položaj pojedine granične linije i na ukupnu veličinu polja omedjenog graničnim linijama. Površina ovog "korisnog" polja poželjno je da bude što veća, jer se time povećava mogućnost optimalnog izbora faktora pomaka profila.

---

\* U tom slučaju vrijednost  $x_R$  nije upisana u dijagram.

Utjecaj broja zubi zupčanika u zahvatu, te broja zubi i pomaka profila reznog zupčanika, na položaj pojedine granične linije (u smislu da li ona porastom vrijednosti parametra povećava ili ne polje u kojem je dozvoljen izbor  $x_1$  i  $x_2$ ), i na ukupnu površinu korisnog polja ( $x_1, x_2$ ), simbolički je prikazan u tablici 1.

Uočljivo je da površina polja omeđenog graničnim linijama raste s povećanjem  $z_1, z_2$  i  $x_R$ , a naglo pada s povećanjem  $z_R$ . Prema tome, s točke gledišta mogućnosti izbora  $x_1$  i  $x_2$ , poželjno je birati parove s većim brojem zubi, izradjene novim reznim zupčanicom sa što manjim brojem zubi.

Budući da projektant nije u mogućnosti da utječe na  $x_R$ , a  $z_1$  i  $z_2$  se najčešće ne mogu birati u širim granicama, opća preporuka je birati broj zubi reznog zupčanika što manji. Tu leži potencijalna prednost reznog zupčanika pred ravnom ozubnicom ( $z_R = \infty$ ). Pri tome treba imati u vidu da za  $z_R \leq 18$ , naglo postaje aktualna smetnja podrezivanja glava obaju zupčanika u zahvatu, naročito kod para s vanjskim ozubljenjem (sl. 29, 30. i 31). Ove smetnje moguće je izbjeći smanjenjem krugova preko glave na  $d_Q$ , pa se u tom slučaju one i ne smatraju graničnim linijama.

Važno je primijetiti da je kod parova s unutrašnjim ozubljenjem rijetko moguća upotreba nul-ozubljenja. Pri  $z_R = 50$  i  $z_R = 22$  ona je moguća tek od  $z_1 > 30$  i za veće razlike  $|z_2| - z_1$ , dok za  $z_R = 14$  ona nije moguća ni u kojem slučaju, i to najčešće zbog interferencije u korijenu manjeg zupčanika. Kod parova s vanjskim ozubljenjem takodjer ponekad nije moguća primjena nul-ozubljenja pri  $z_R = 14$  (sl. 29. i 30).

Utjecaj parametara zupčanog para na pojedinu graničnu liniju i ukupnu korisnu površinu  $x_1 - x_2$  dijagrama

Tablica 1.

Naziv smetnje	Jednadžba granične linije	Oznaka gran. linije	Korisna površina porastom			
			$z_1$	$z_2$	$z_R$	$x_R$
Podrezivanje korijena zupč. 1	$\alpha_{F1} = 0$	PK1	↗	-	↘	*
Podrezivanje korijena zupč. 2	$\alpha_{F2} = 0$	PK2	-	↗	↘	*
Interferencija u kor. zupč. 1	$\alpha_{A1} = \alpha_{F1}$	IK1	~	~	↗	↘
Interferencija u kor. zupč. 2	$\alpha_{A2} = \alpha_{F2}$	IK2	~	~	↗	↘
Podrezivanje glave zupč. 1	$d_{g1} = d_{Q1}$	PG1	~	~	↗	↗
Podrezivanje glave zupč. 2	$d_{g2} = d_{Q2}$	PG2	~	~	↗	↗
Debljina glave zupč. 1	$s_{g1} = 0,25$	SG1	↗	~	~	~
Debljina glave zupč. 2	$s_{g2} = 0,25$	SG2	~	↗	~	~
Stupanj prekrivanja	$\epsilon = 1,2$	EPS	↗	↗	↘	↗
Radijalna interf. pri izradi	$\xi_2 = \xi_R$	RI	~	↗	↘	↘
Ukupna površina omedjena gr. lin.			↗	↗	↘	↗

Napomena:                      ↗ raste                                      ↘ pada  
    - ne utječe                                      ~ ne utječe bitno  
    \* za male  $z$  raste, za velike  $z$  pada

Kvalitativni raspored izolinija efektivnog faktora oblika zuba prikazan je na slikama 14. i 15. za parove s vanjskim i na slikama 16. i 17. za parove s unutrašnjim evolventnim ozubljenjem. Karakteristično je da ove izolinije imaju tim veću vrijednost što se nalaze bliže pravcu  $x = x_T$ , u dijagramima obilježenom s OPK. Ovaj rezultat se i očekivao, jer za  $x = x_T$  ne postoji prijelazna krivulja, tj.  $\rho = 0$ , pa bi na tom pravcu teoretski efektivni faktor oblika poprimio beskonačnu vrijednost (kada bi izraz (73) vrijedio i za sasvim male  $\rho$ ).

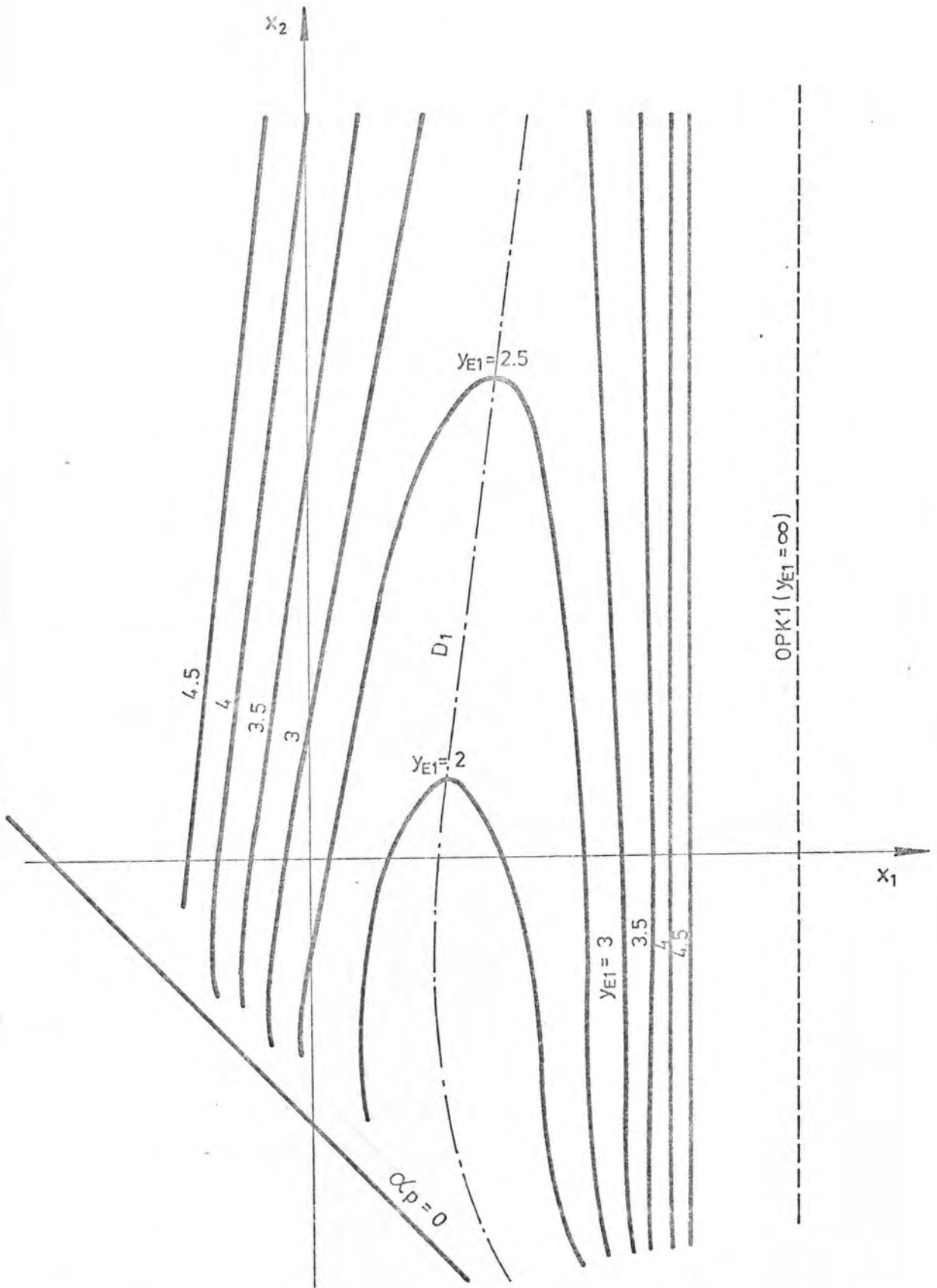
Smanjivanjem (pri  $z < 0$  - povećanjem) pomaka profila (počev od  $x = x_T$ ) vrijednost efektivnog faktora oblika zuba opada sve dok faktor pomaka profila  $x$  ne padne na determinantnu krivulju \* D familije krivulja  $y_E = \text{konst}$ , a zatim ponovno raste. Ova ovisnost prikazana je na slici 20a za zupčanik s vanjskim ozubljenjem sa  $z_1 = 30$  zubi, sparen sa zupčanikom  $z_2 = 90$ ,  $x_2 = 0$ , te na slici 20b za zupčanik s unutrašnjim ozubljenjem sa  $z_2 = -90$  zubi, sparen sa zupčanikom  $z_1 = 30$ ,  $x_1 = 0$ . Ove ovisnosti se kvantitativno ponešto mijenjaju s promjenom faktora pomaka profila spregnutog zupčanika, ali njihov kvalitativni oblik uvijek ostaje isti.

Povećanje, a zatim ponovno smanjivanje efektivnog naprezanja u korijenu zuba s porastom faktora pomaka profila  $x$ , objašnjava se dvojakim utjecajem  $x$  na oblik zuba: s jedne strane, porastom  $x$  zub postaje deblji u korijenu što rezultira manjim nominalnim naprezanjima, dok s druge strane, veći  $x$  producira manju prijelaznu krivulju (time i manje polumjere zakrivljenosti), što je uzrok većim koncentracijama naprezanja.

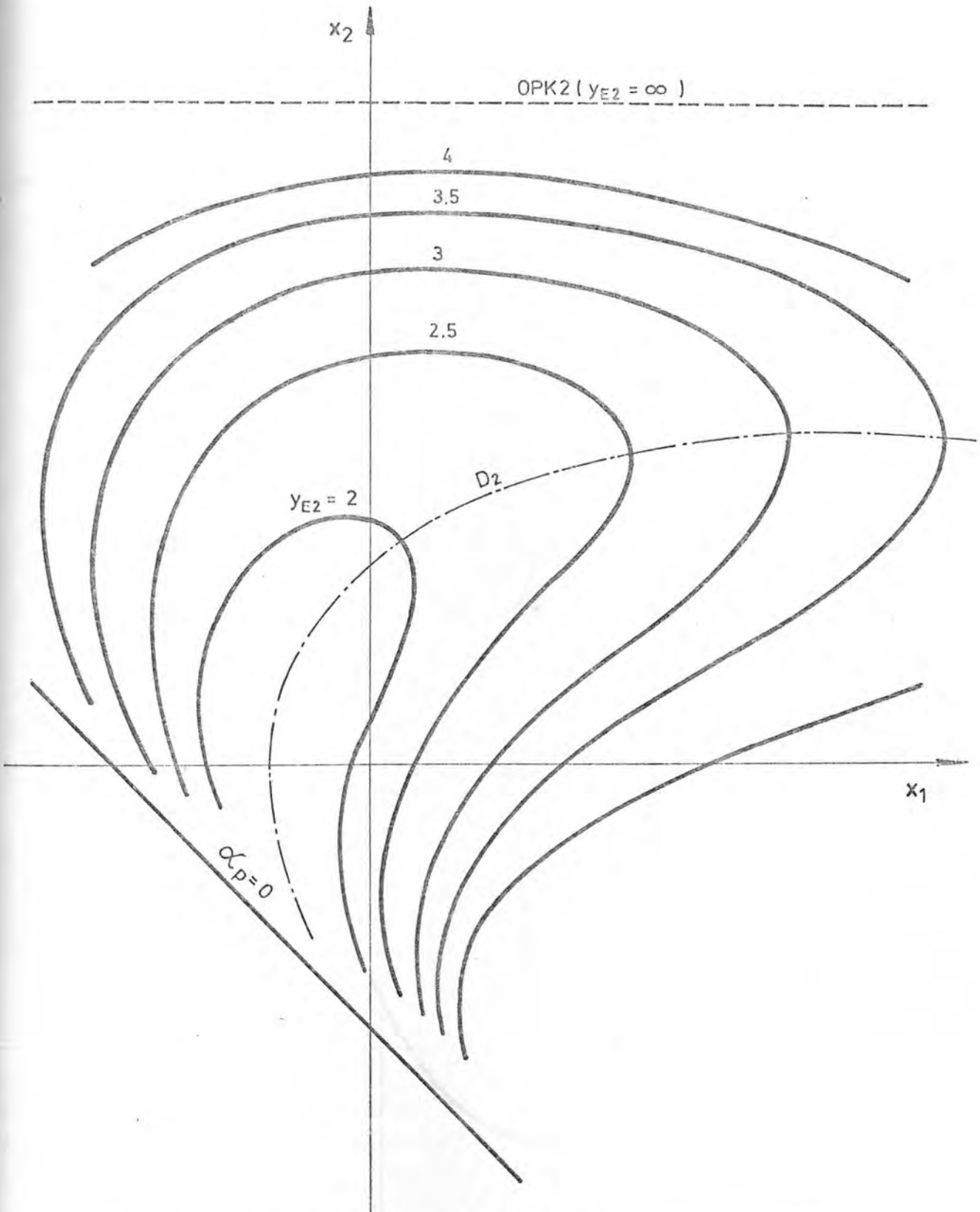
---

\* Krivulja koja spaja karakteristične točke neke familije krivulja - u ovom slučaju točke u kojima krivulje imaju najveću zakrivljenost.

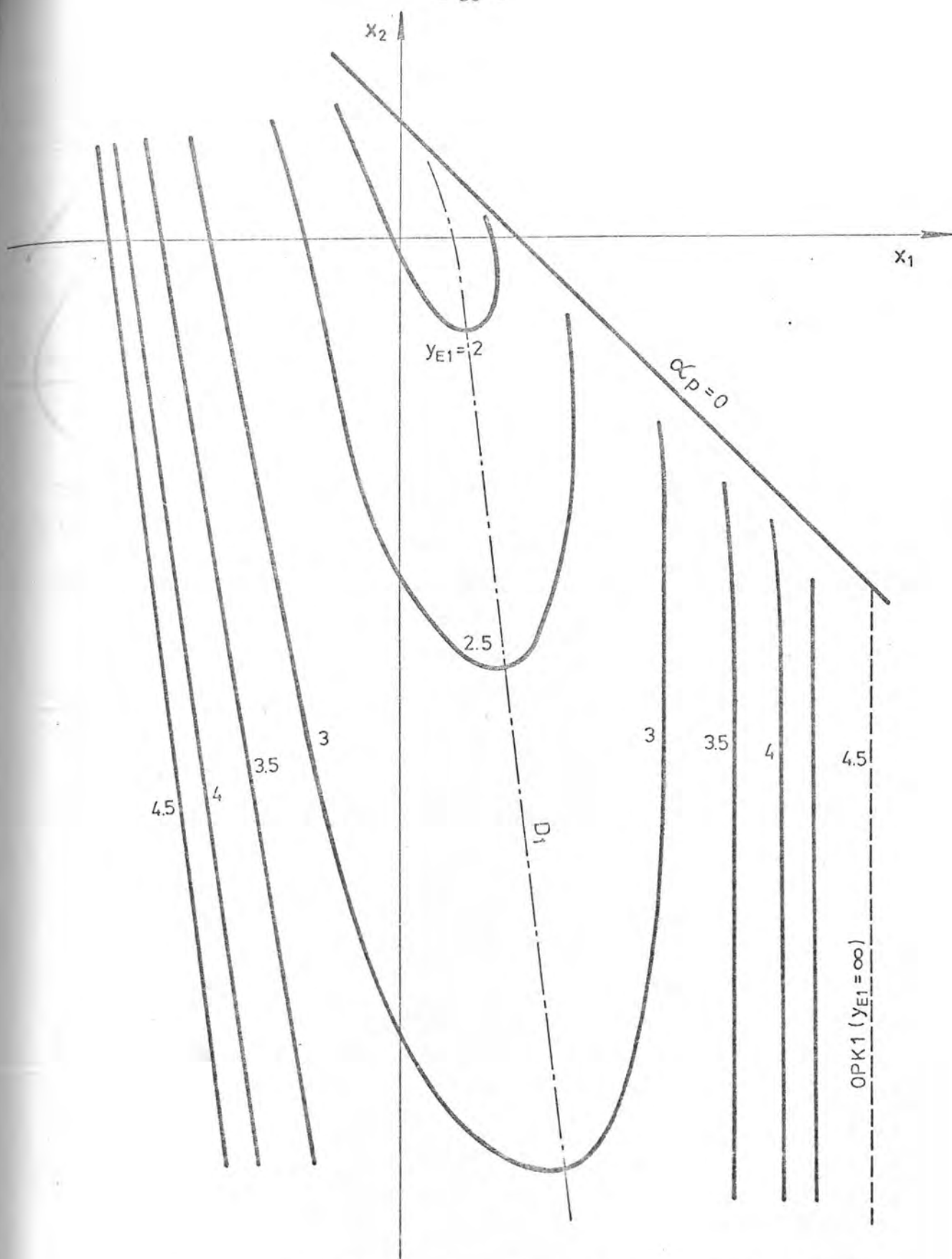




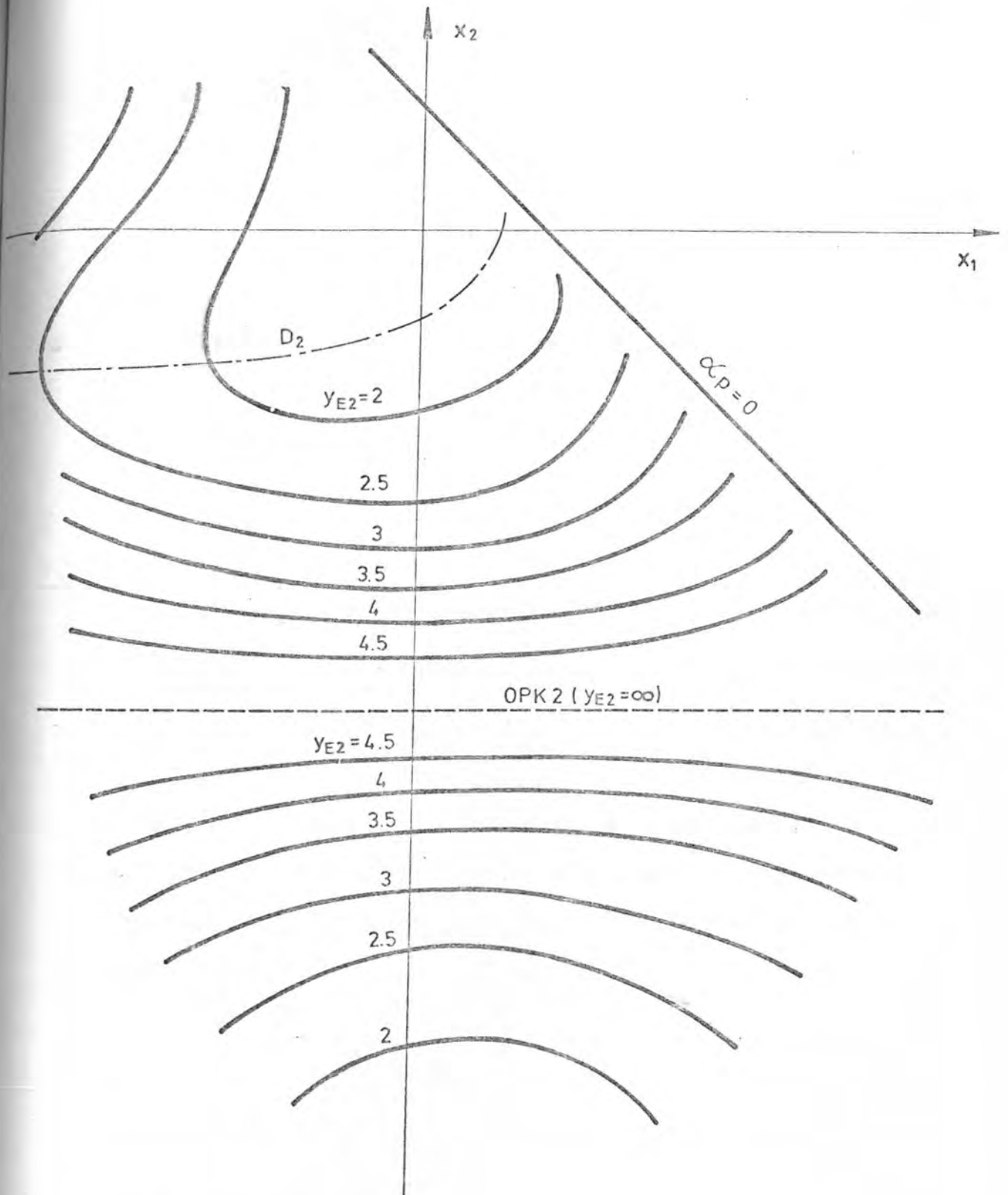
Sl. 14. Kvalitativni raspored izolinije  $y_{E1} = konst$  za parove s vanjskim ozubljenjem



Sl. 15. Kvalitativni raspored izolinija  $y_{E2} = \text{konst}$  za parove s vanjskim ozubljenjem



Sl. 16. Kvalitativni raspored izolinija  $y_{E1} = konst$  za parove s unutrašnjim ozubljenjem



Sl. 17. Kvalitativni raspored izolinija  $y_{E2} = konst$  za parove s unutrašnjim ozubljenjem

Očigledno je nadalje da se u korisnom polju dijagrama efektivni faktori oblika zuba  $y_{E1}$  i  $y_{E2}$  smanjuju porastom  $z_1$ ,  $z_2$  i  $x_R$ , a naročito smanjenjem  $z_R$ . Tako npr. par zupčanika ( $z_1 = 30$ ,  $z_2 = 90$ ,  $x_1 = x_2 = 1$ ) izradjen standardnim ( $r_F = 0$ ), srednje istrošenim ( $x_R = 0$ ) reznim zupčanikom sa  $z_R = 50$  zubi imat će faktore oblika  $y_{E1} = 2,9$ ,  $y_{E2} = 3,2$ , (sl. 23), dok će isti takav par, izradjen takodjer standardnim srednje istrošenim reznim zupčanikom, ali s brojem zubi  $z_R = 14$ , imati za oko 35% manje faktore oblika, tj.  $y_{E1} = 1,9$ ,  $y_{E2} = 2,05$  (sl. 30).

Dakle, i sa stanovišta čvrstoće korijena zuba, poželjno je upotrebljavati rezne zupčanike sa što manjim brojem zubi, vodeći pri tome računa o smetnjama PG1 i PG2, tj. izbjegavajući ih, ako je potrebno, smanjivanjem kruga preko glave na  $d_0$ .

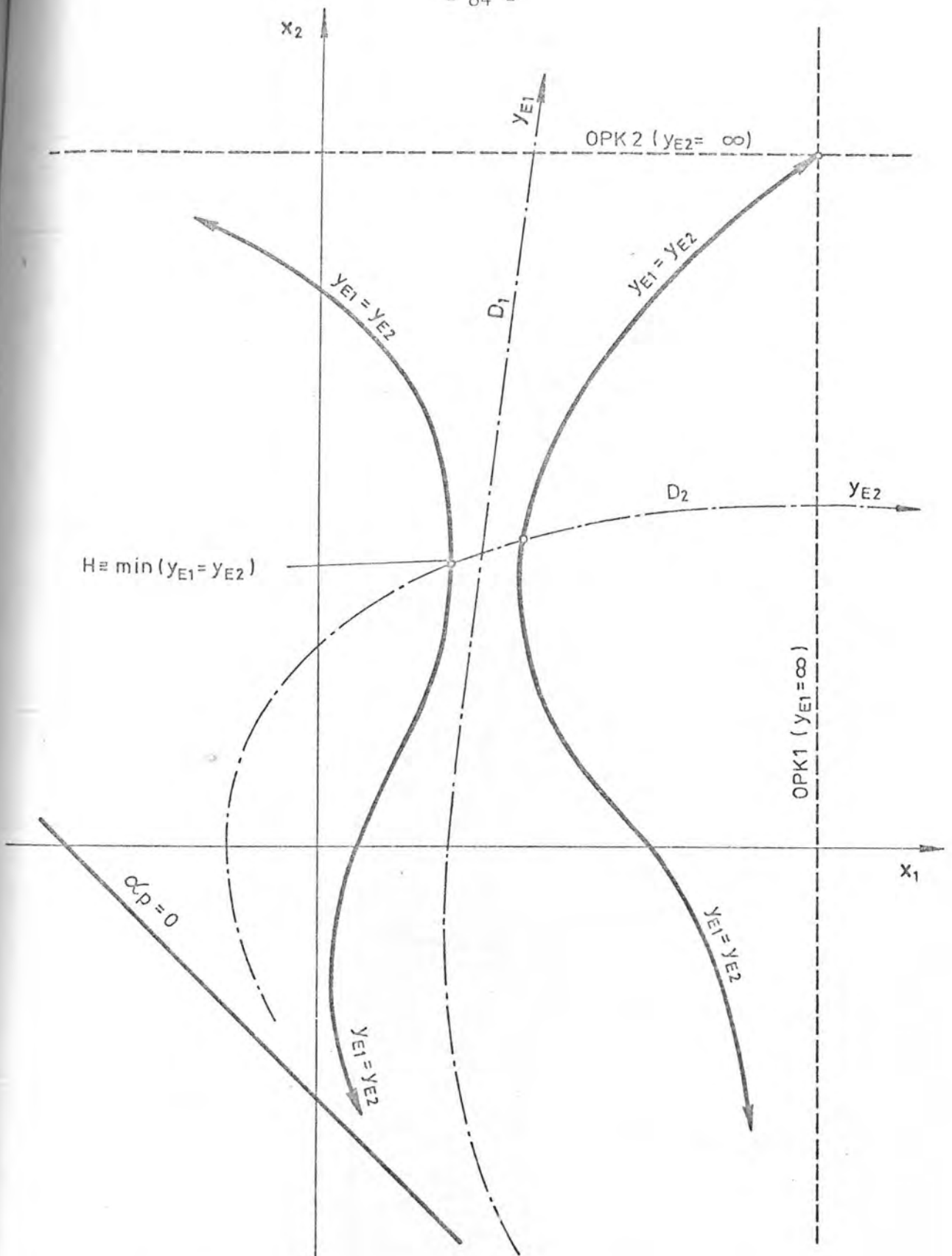
Velika rezerva čvrstoće krije se i u mogućnosti zaobljenja vrha glave alata. Tako su npr. prosječna naprezanja u korijenu kod zupčanika izradjenih standardnom ravnom ozubnicom s  $r_F = 0,38$  m (sl. 34) za približno 40% manja nego kod zupčanika s istim brojem zubi izradjenih standardnim reznim zupčanikom s  $z_R = 50$  i  $r_F = 0$  (sl. 21), usprkos tome što s porastom  $z_R$  rastu naprezanja u korijenu zuba.

Uspoređujući naprezanja u korijenu (efektivne faktore oblika) kod parova s unutrašnjim ozubljenjem, s onima kod parova s vanjskim ozubljenjem, vidljivo je da su za iste parametre ( $z$ ,  $z_R$ ,  $x$ ,  $x_R$ ) ova naprezanja kod manjih zupčanika približno jednaka, dok su naprezanja u korijenu kod zupčanika s unutrašnjim ozubljenjem kudikamo veća nego kod odgovarajućeg zupčanika s vanjskim ozubljenjem. Razlog ovome su umnogome manji

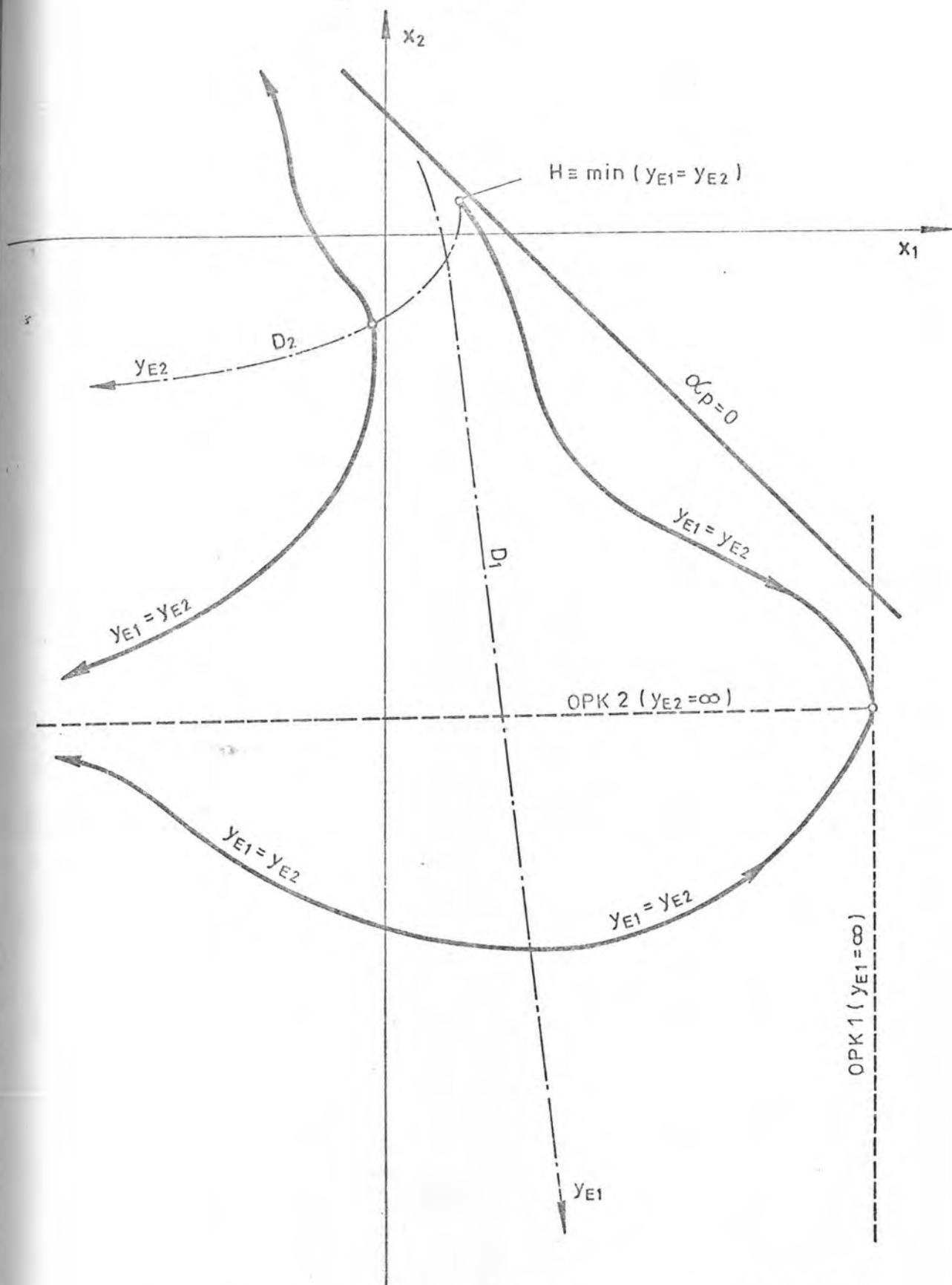
polumjeri zakrivljenosti na prijelaznoj krivulji profila zupčanika s unutrašnjim ozubljenjem, odnosno već opisani nepogodan položaj pravca  $x_2 = x_T$ , pri kojem nastaje oštri prijelaz u korijenu. Ova pojava je naročito izražena pri izradi reznim zupčanicom s većim brojem zubi.

Konstrukcija zupčanog prijenosa u kojem bi oba zupčanika u zahvatu imala jednaku nosivost, odnosno trajnost, dugogodišnja je težnja konstruktora. Budući da su za uobičajeno područje primjene ( $0 \leq x_1 \leq 0,5$ ;  $x_2 \leq 0,3$ ) faktori oblika manjeg zupčanika nešto veći (to je evidentno i iz priloženih dijagrama), da bi se dobili zupčanici jednake nosivosti, praksa je da se manji zupčanik radi iz materijala nešto veće čvrstoće. Ako bi oba zupčanika imala isti faktor oblika, tada bi se jednaka nosivost mogla dobiti i uz isti materijal zupčanika.

Zbog toga su posebno zanimljive izolinije jednakih efektivnih faktora oblika ( $y_{E1} = y_{E2}$ ) koje su ucrtane u svaki dijagram. Ova izolinija kod parova s vanjskim ozubljenjem sastoji se od dvije grane, kojima kao da je determinatna krivulja  $D_1$  neka vrsta simetrane (sl. 18). Minimalna vrijednost efektivnog faktora oblika nalazi se na presjecištu ovih krivulja s determinatnom krivuljom  $D_2$ , a odatle raste prema sjecištu izolinije  $OPK1$  s izolinijom  $OPK2$ , odnosno s izolinijom  $\alpha_p = 0$ , gdje poprima beskonačnu vrijednost. Naročito je važno uočiti točku  $H$  u kojoj lijeva grana izolinije  $y_{E1} = y_{E2}$  siječe determinatnu krivulju  $D_2$ , jer su u toj točki faktori oblika jednaki i ujedno apsolutno najmanji. U svim priloženim dijagramima ova točka se nalazi izvan korisnog polja, pa je zato ucrtana na njegovoj granici. Kvalitativni raspored izolinija  $y_{E1} = y_{E2}$  i točke  $H \equiv \min(y_{E1} = y_{E2})$  za parove s unutrašnjim ozubljenjem prikazan je na slici 19.

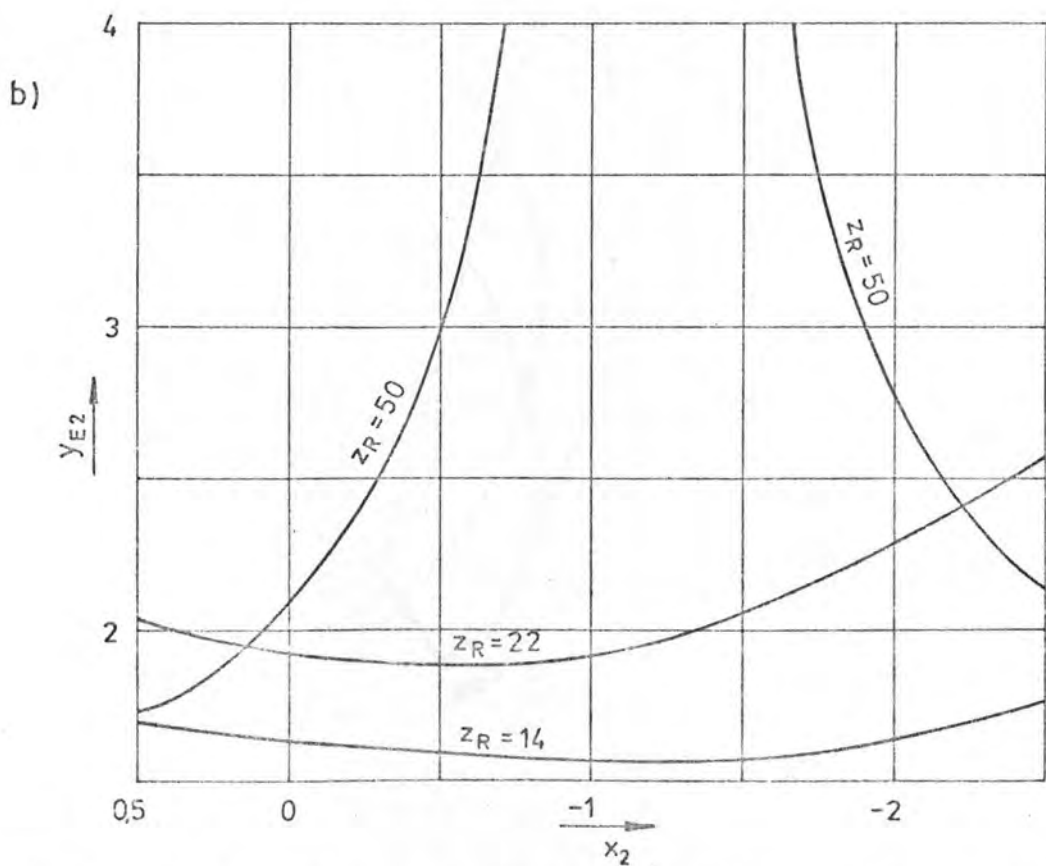
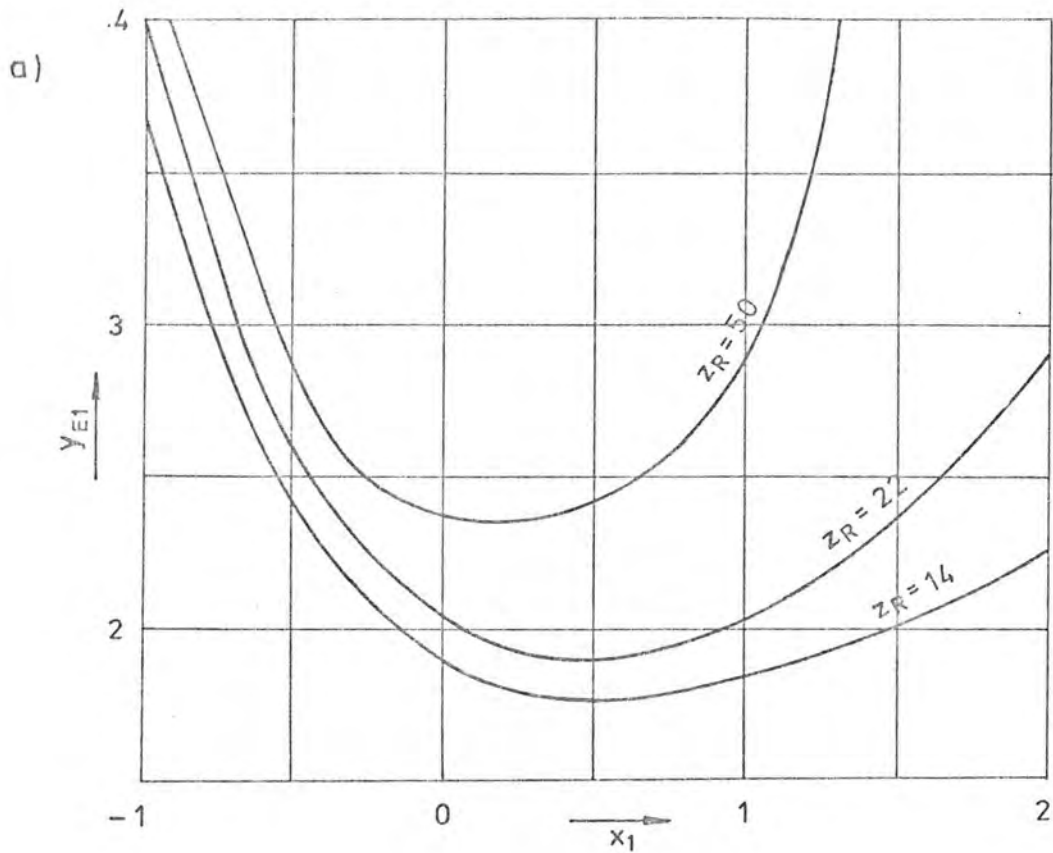


Sl. 18. Kvalitativni raspored izolinija  $y_{E1} = y_{E2}$  za parove s vanjskim ozubljenjem

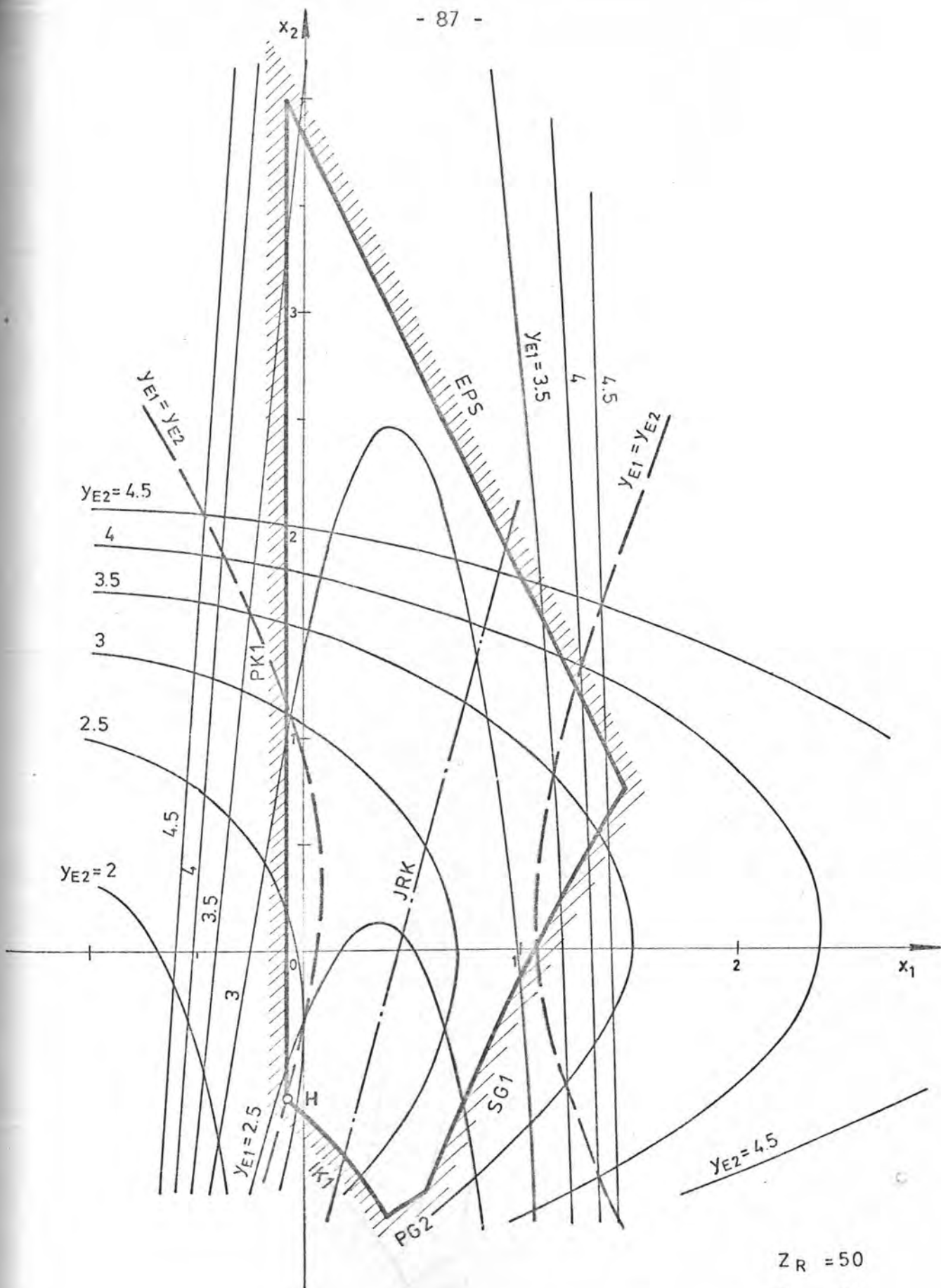


Sl. 19. Kvalitativni raspored izolacija  $y_{E1} = y_{E2}$  za parove s unutrašnjim ozubljenjem





Sl. 20. a) Ovisnost  $y_{E1}$  o  $x_1$  za par ( $z_1 = 30$ ;  $z_2 = 90$ ) pri  $x_2 = 0$ ;  
b) Ovisnost  $y_{E2}$  o  $x_2$  za par ( $z_1 = 30$ ;  $z_2 = -90$ ) pri  $x_1 = 0$

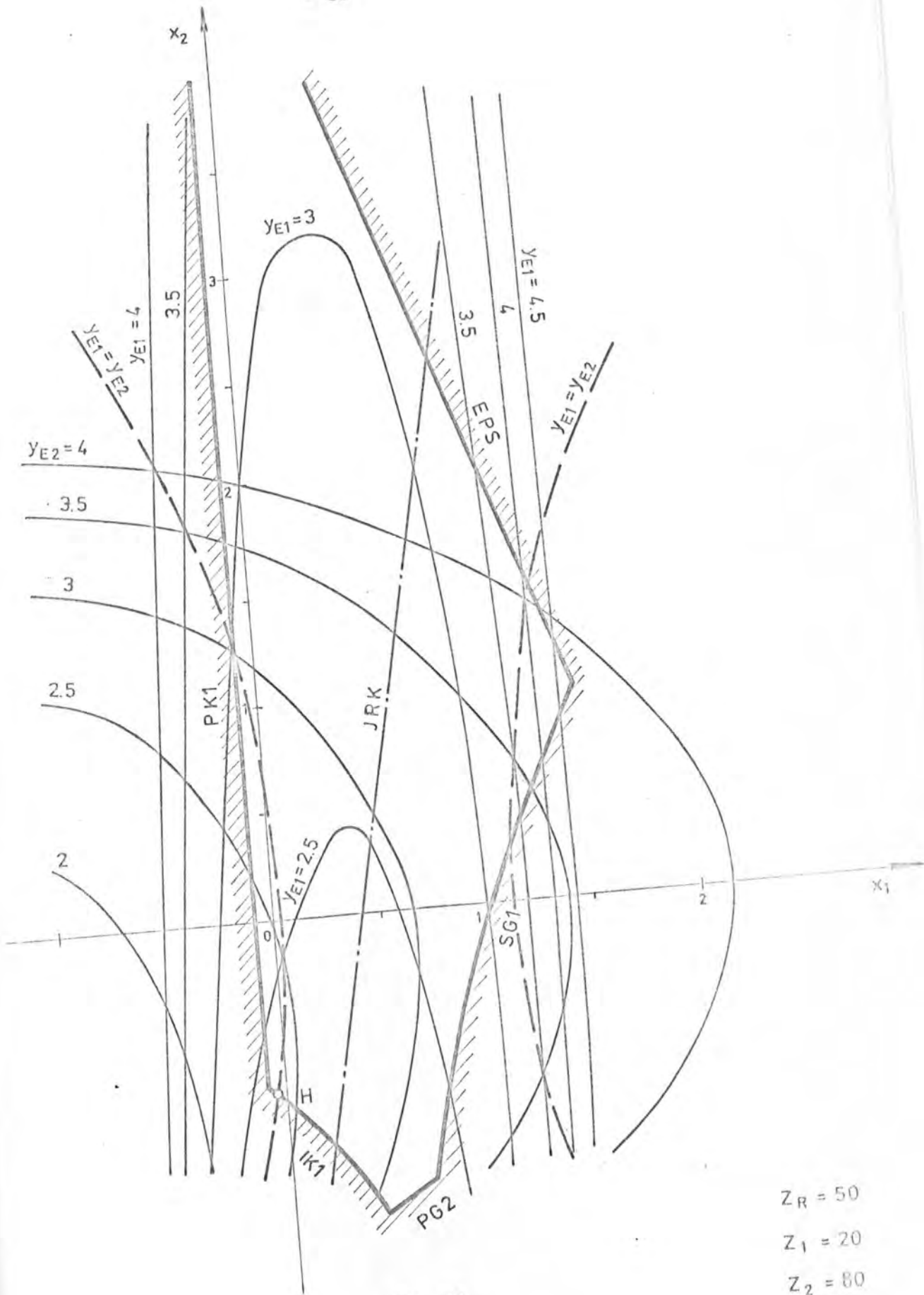


Sl. 21.

$$Z_R = 50$$

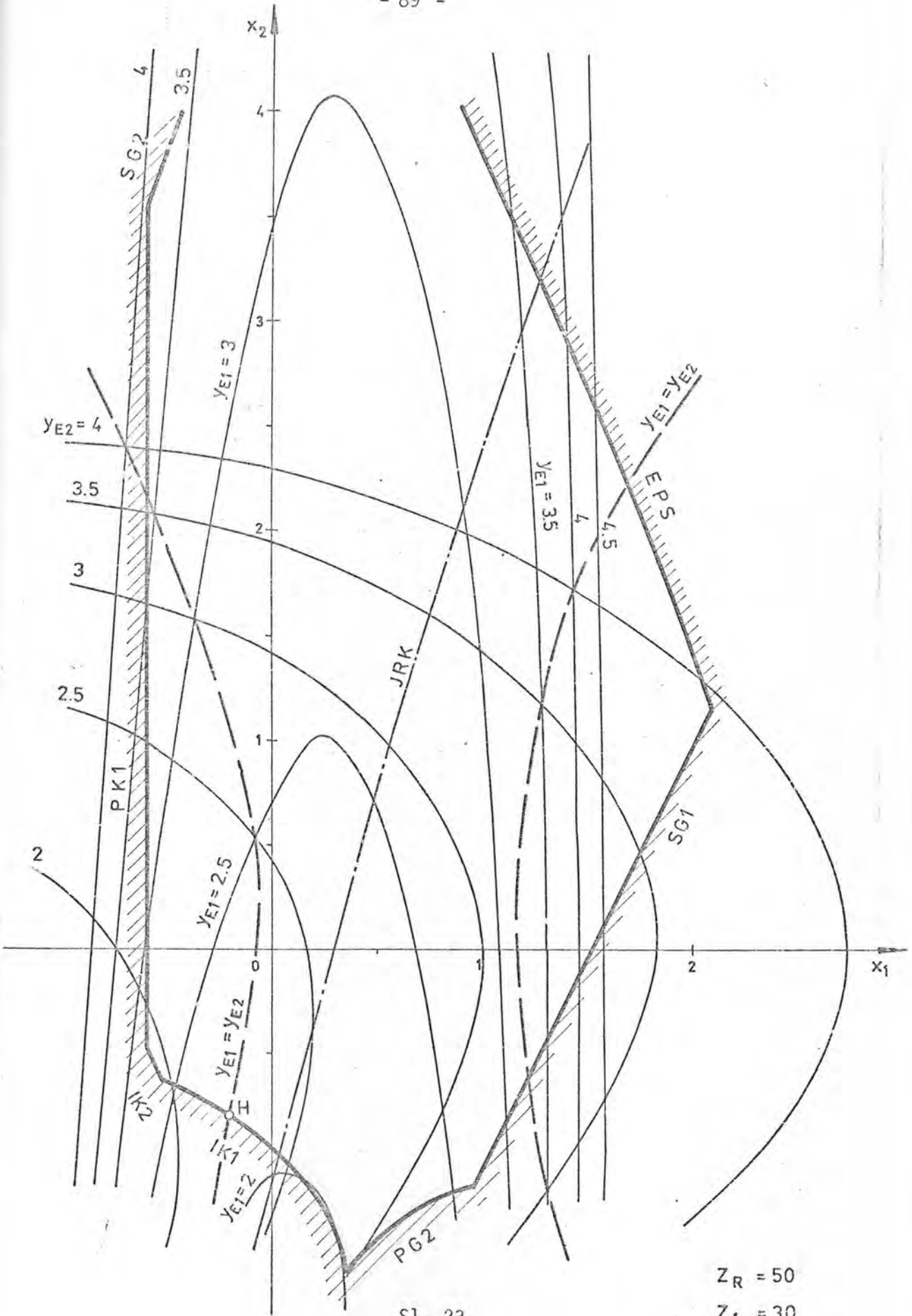
$$Z_1 = 20$$

$$Z_2 = 60$$



Sl. 22.

$Z_R = 50$   
 $Z_1 = 20$   
 $Z_2 = 80$

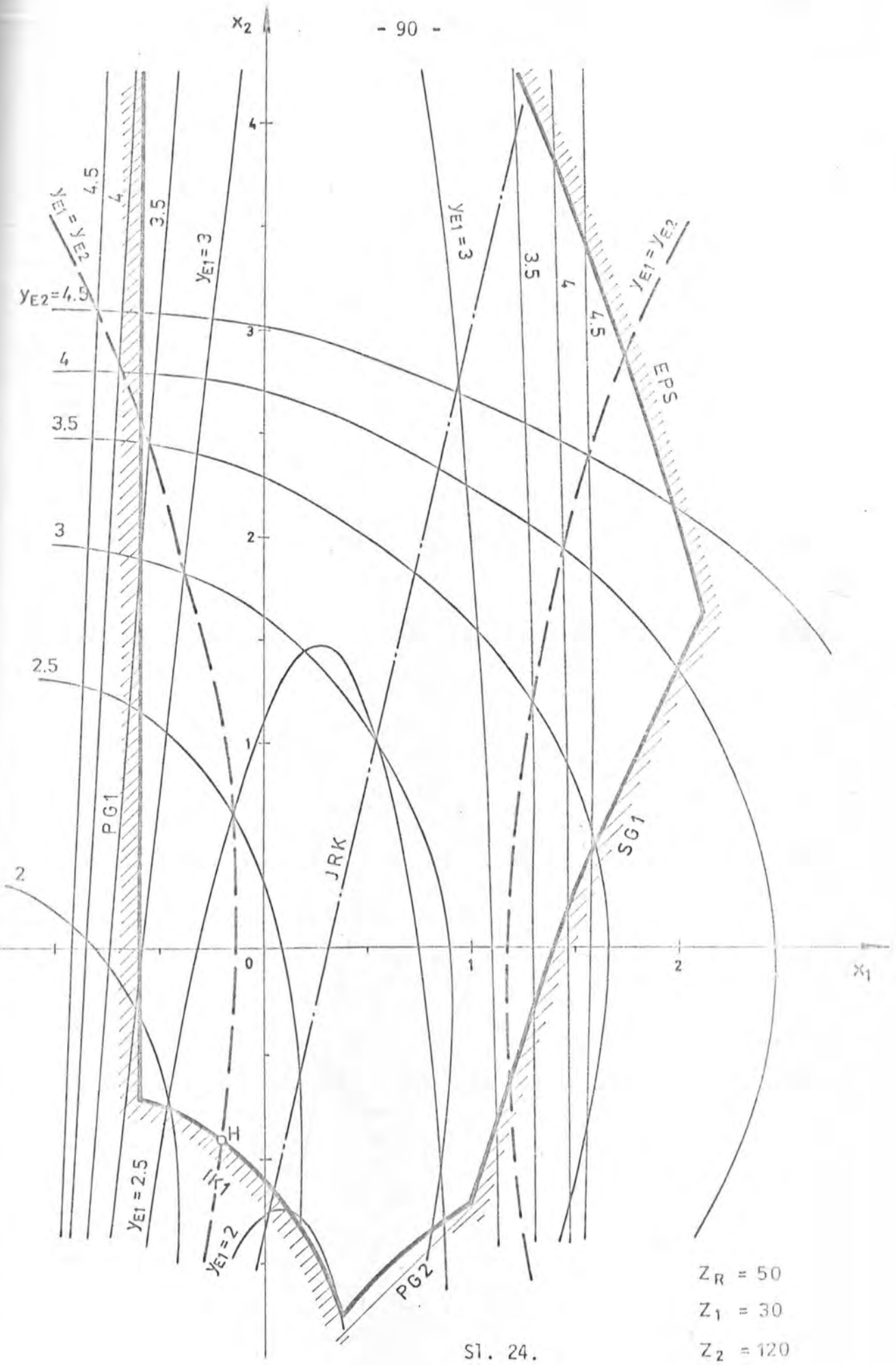


Sl. 23.

$Z_R = 50$

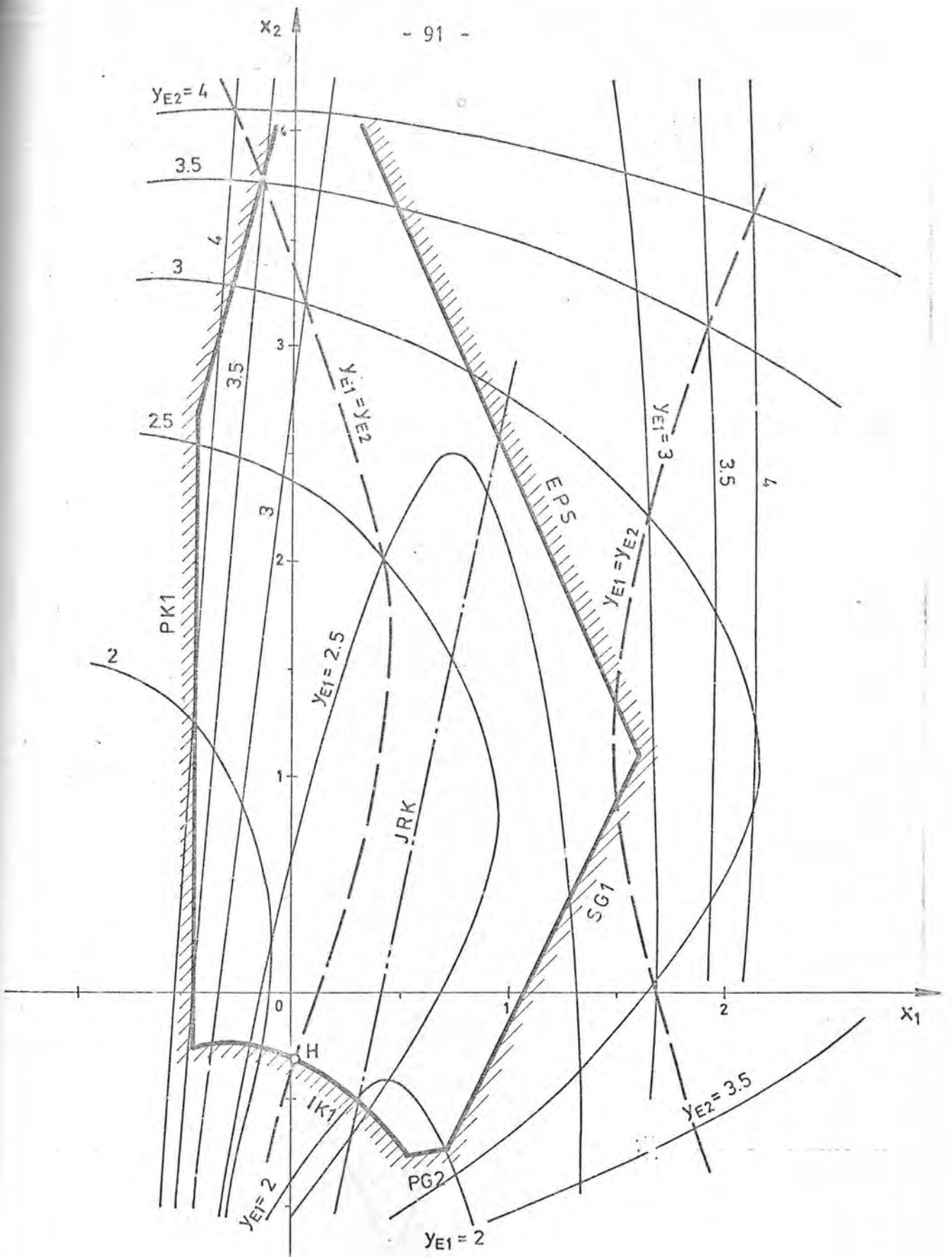
$Z_1 = 30$

$Z_2 = 90$



Sl. 24.

$Z_R = 50$   
 $Z_1 = 30$   
 $Z_2 = 120$

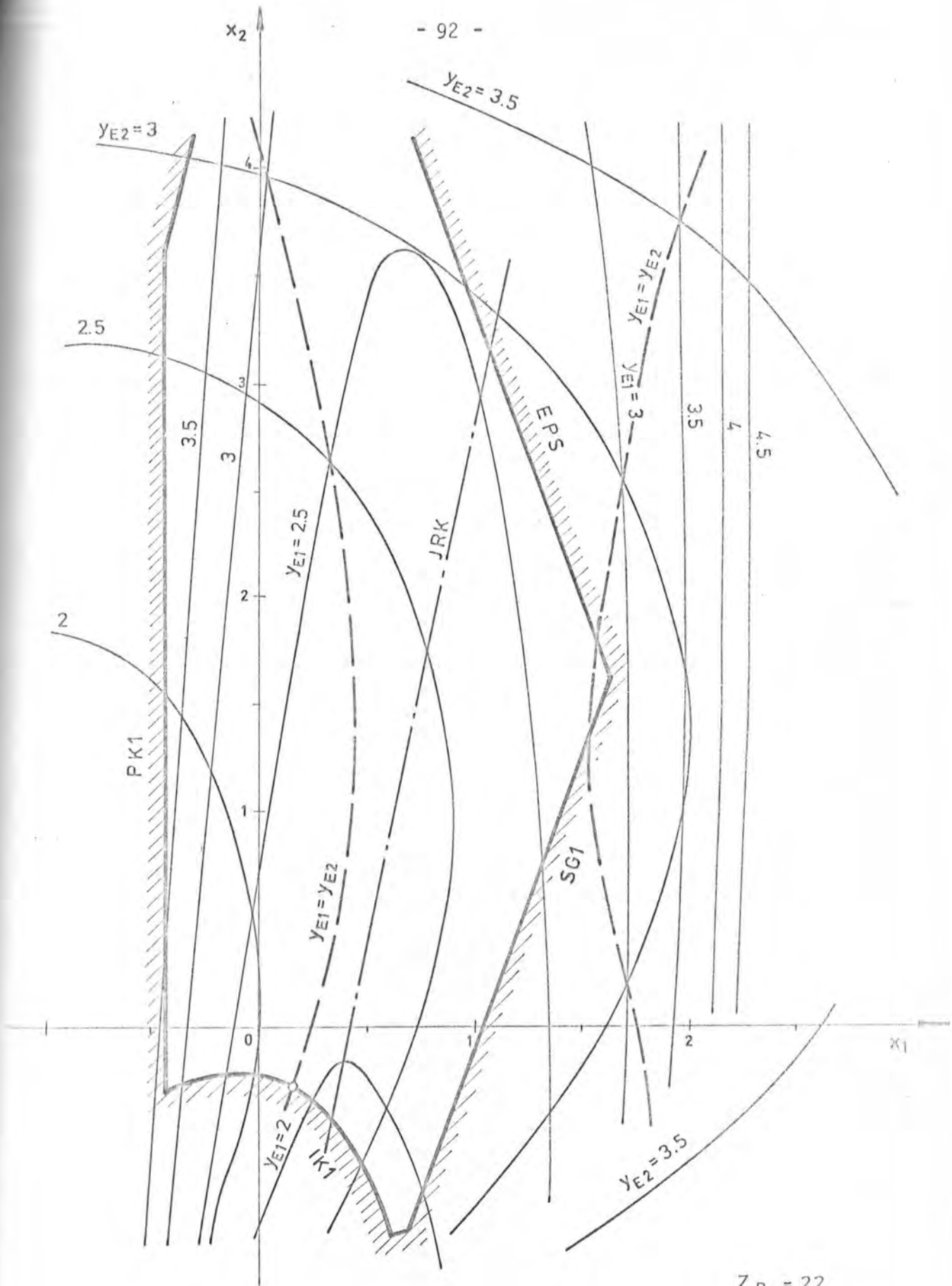


Sl. 25.

$$Z_R = 22$$

$$Z_1 = 20$$

$$Z_2 = 60$$

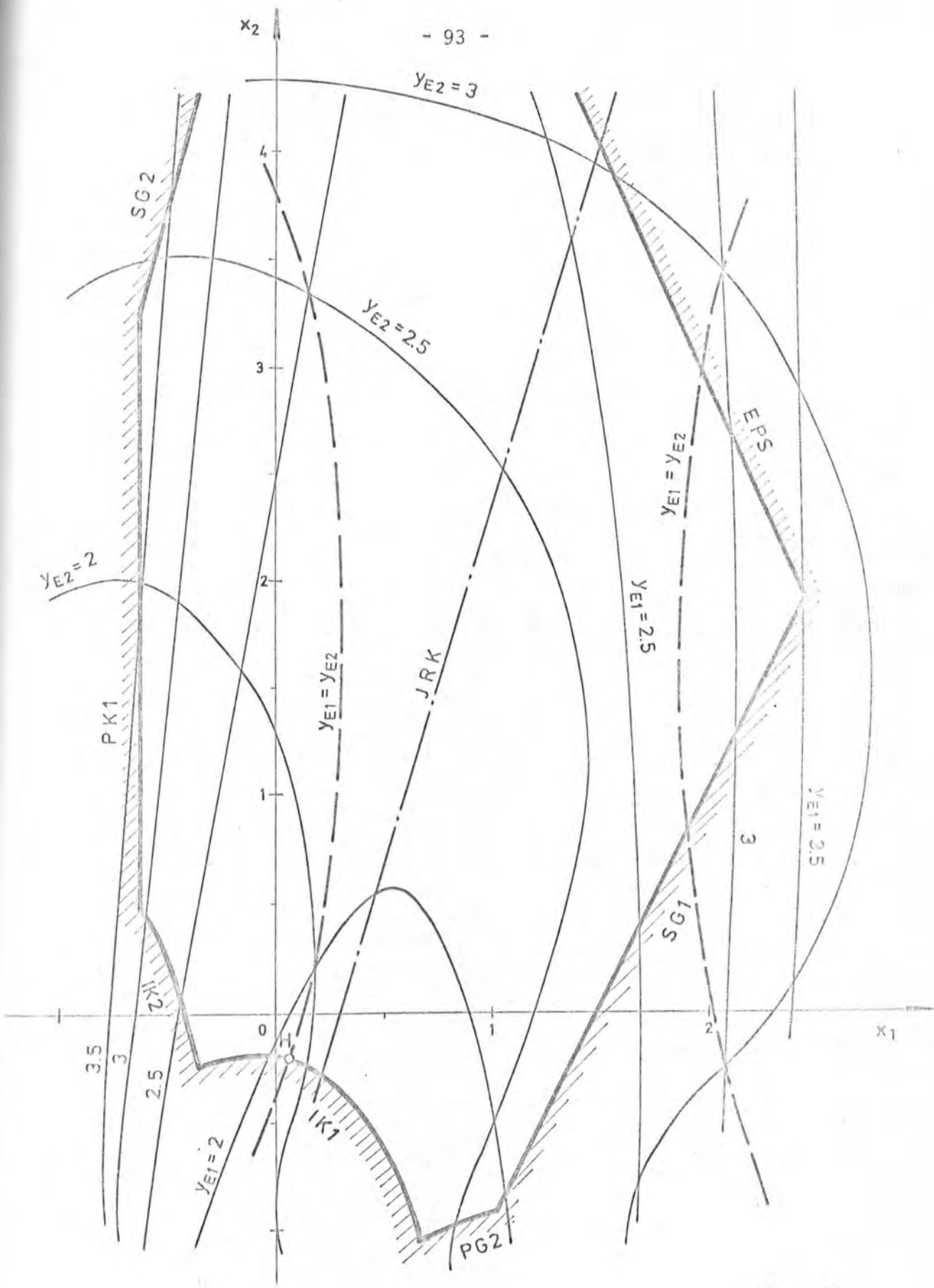


Sl. 26.

$Z_R = 22$

$Z_1 = 20$

$Z_2 = 80$



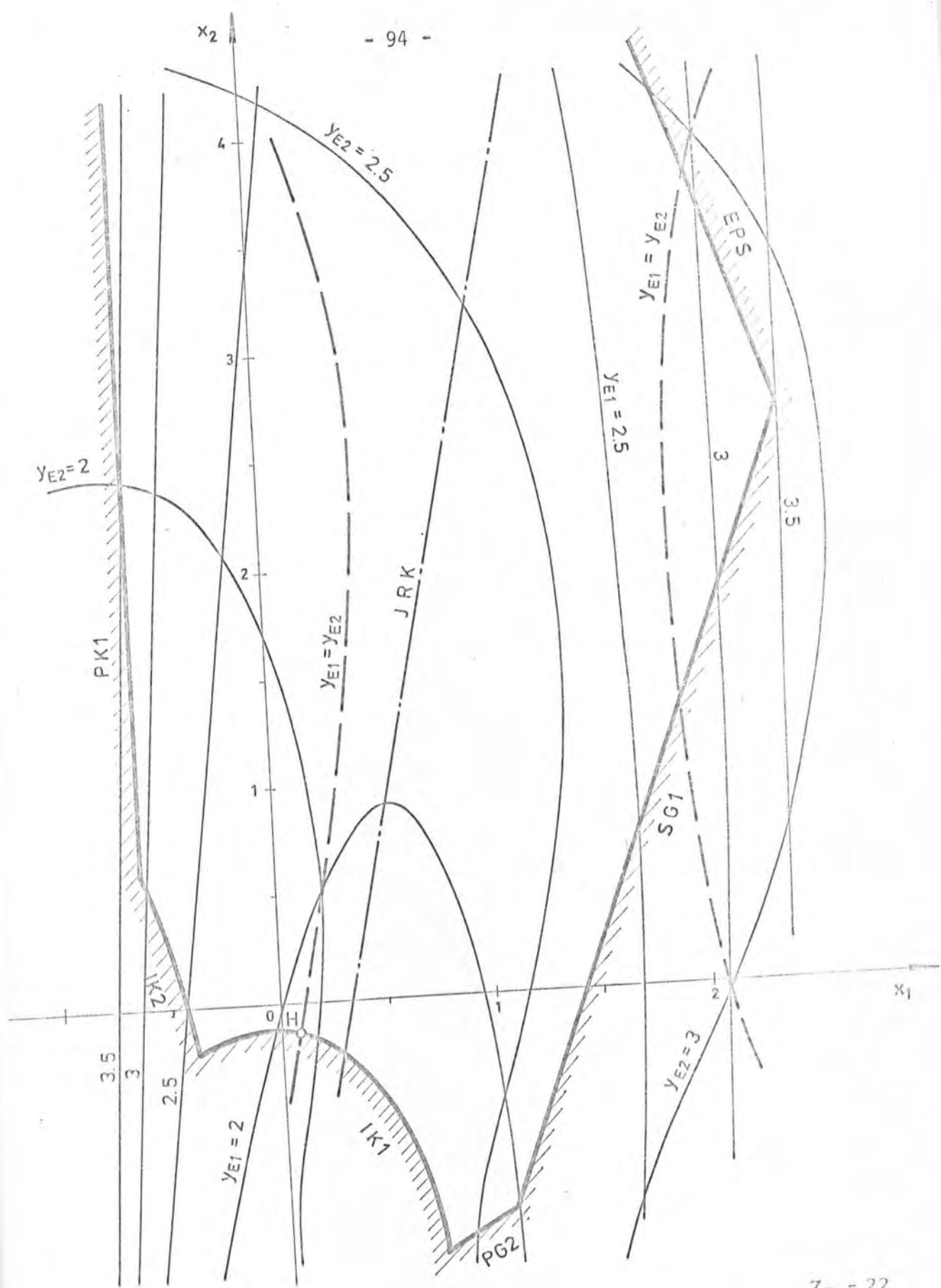
S1. 27.

$Z_R = 22$

$Z_1 = 30$

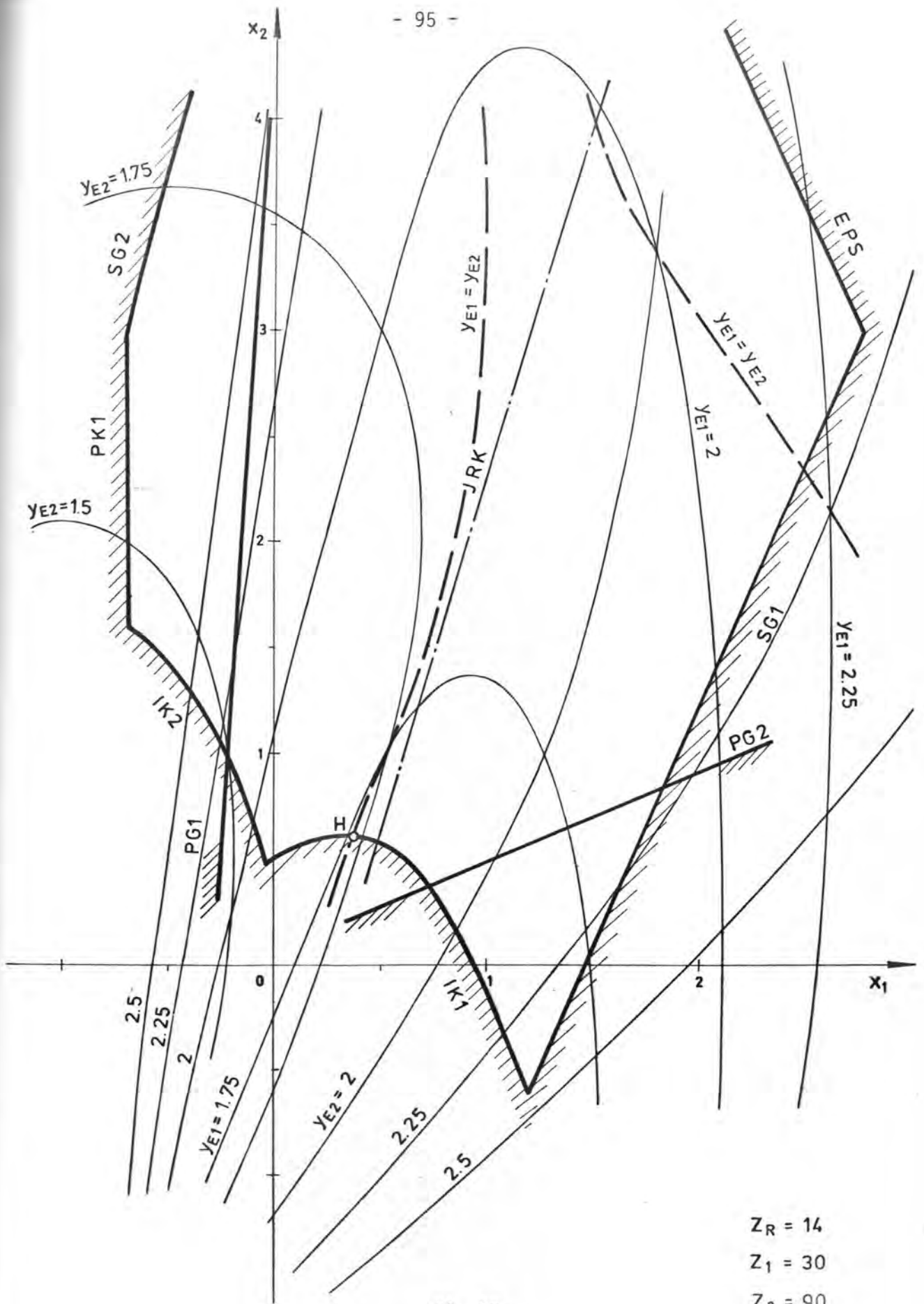
$Z_2 = 90$





Sl. 28.

$Z_R = 22$   
 $Z_1 = 30$   
 $Z_2 = 120$



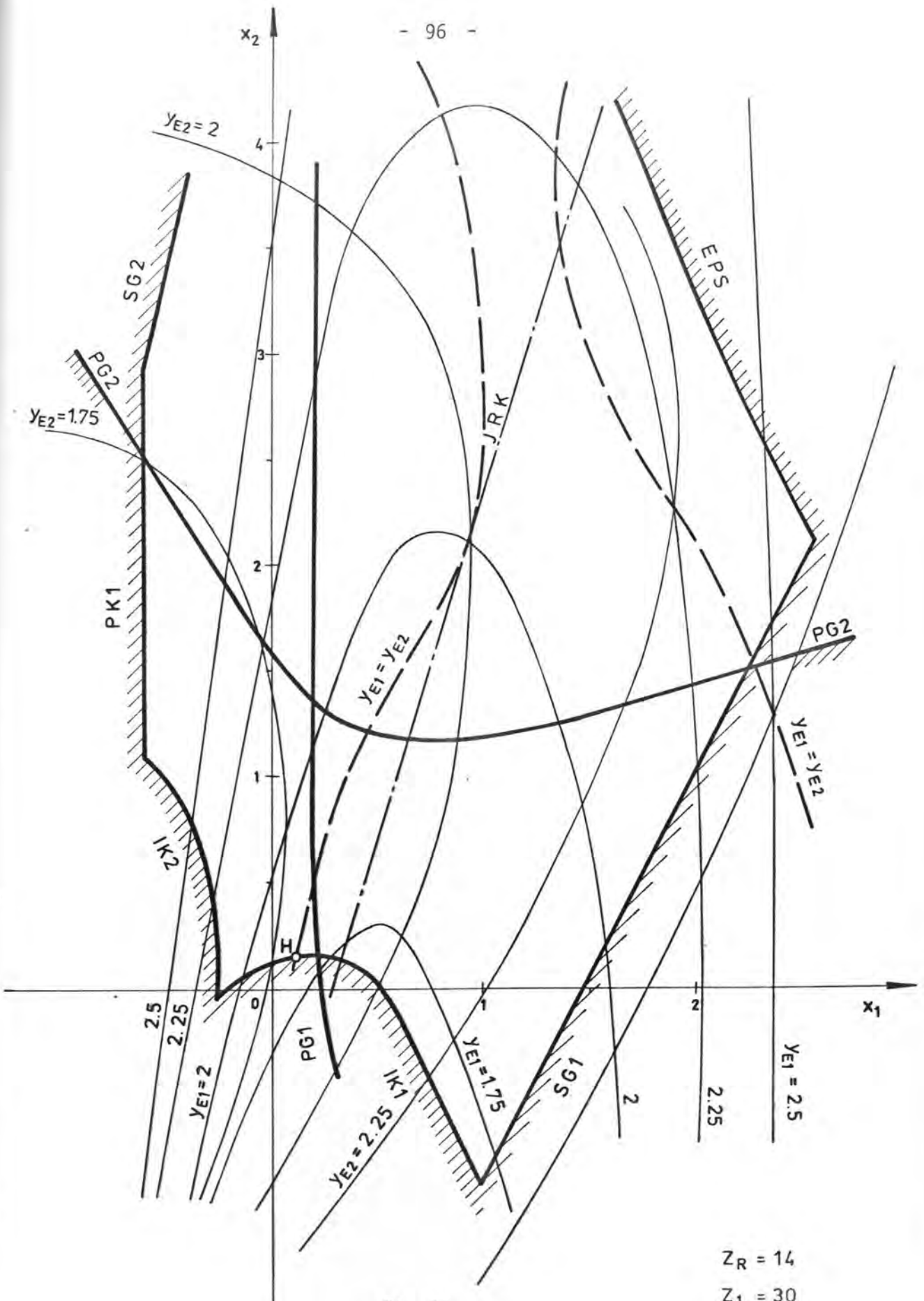
Sl. 29.

$Z_R = 14$

$Z_1 = 30$

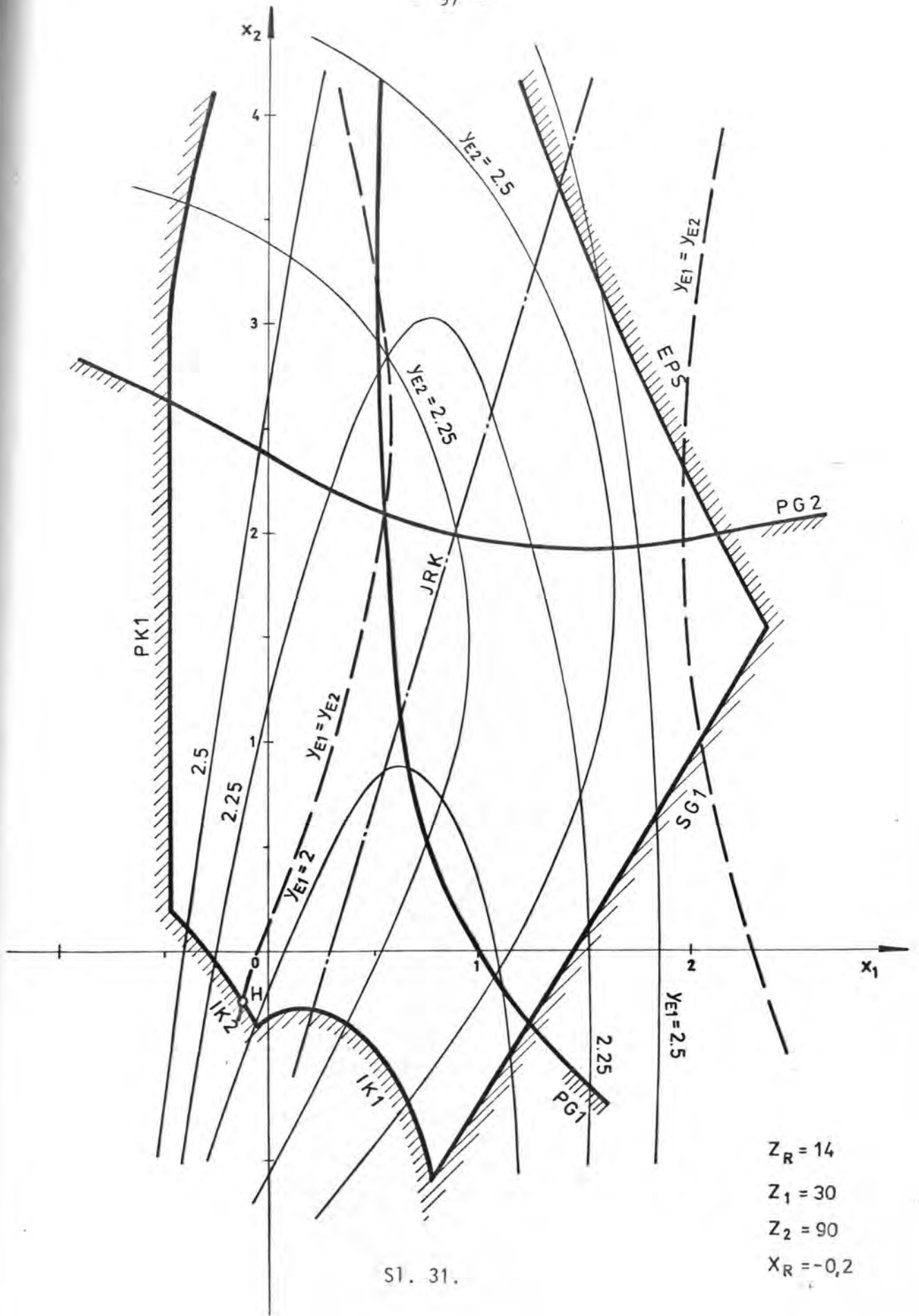
$Z_2 = 90$

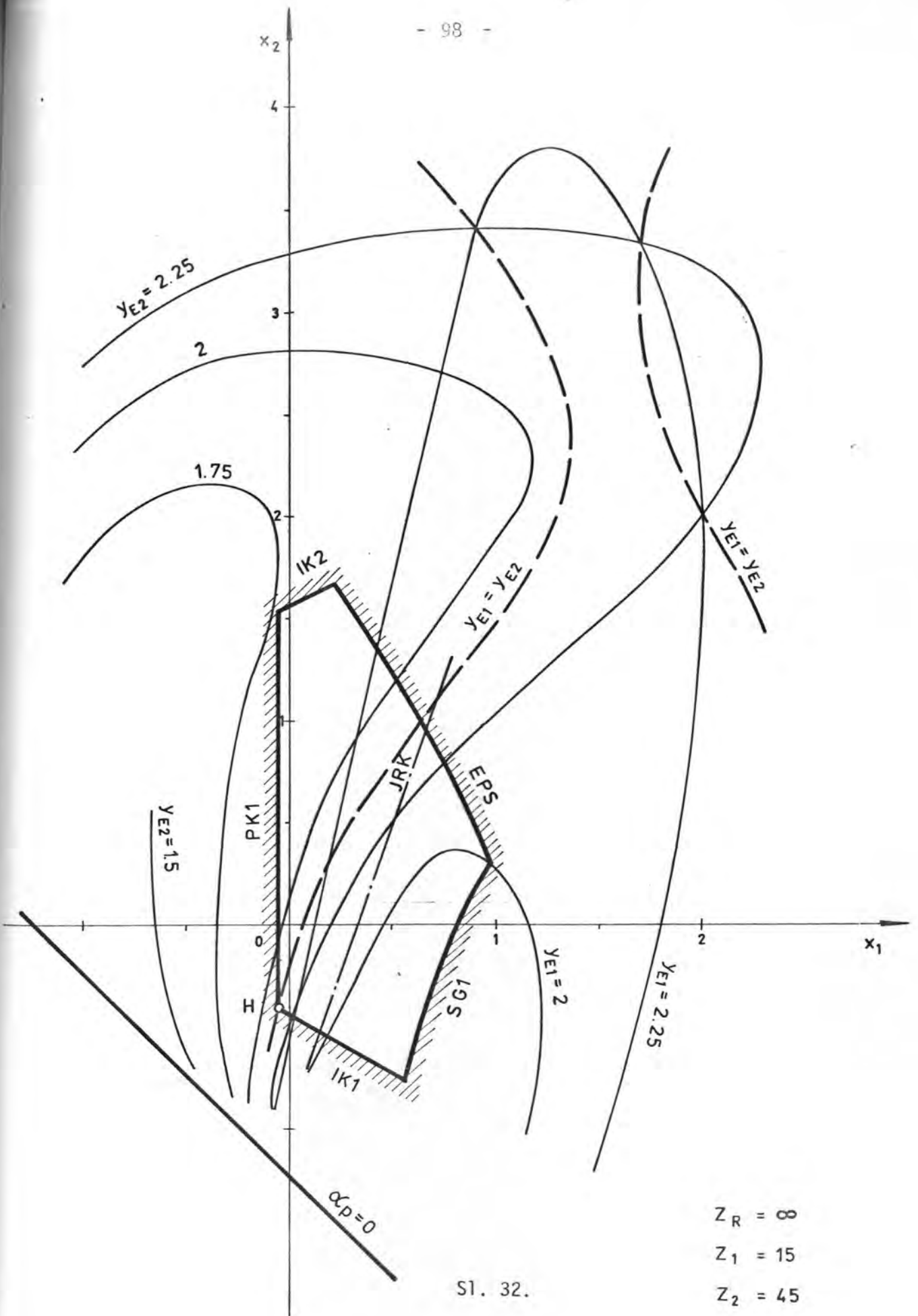
$X_R = 0.104$



Sl. 30,

$Z_R = 14$   
 $Z_1 = 30$   
 $Z_2 = 90$   
 $X_R = -0.048$



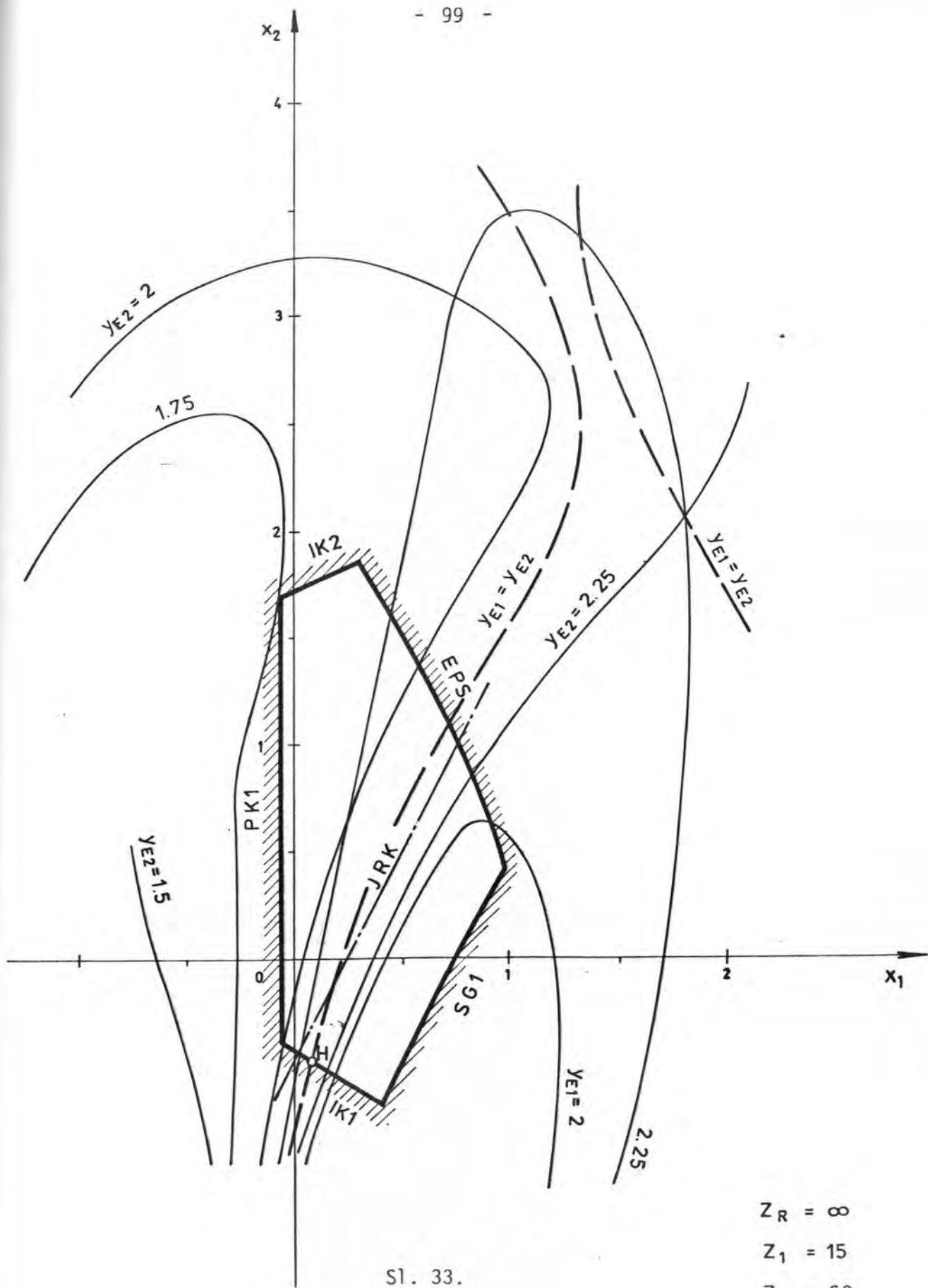


Sl. 32.

$$Z_R = \infty$$

$$Z_1 = 15$$

$$Z_2 = 45$$

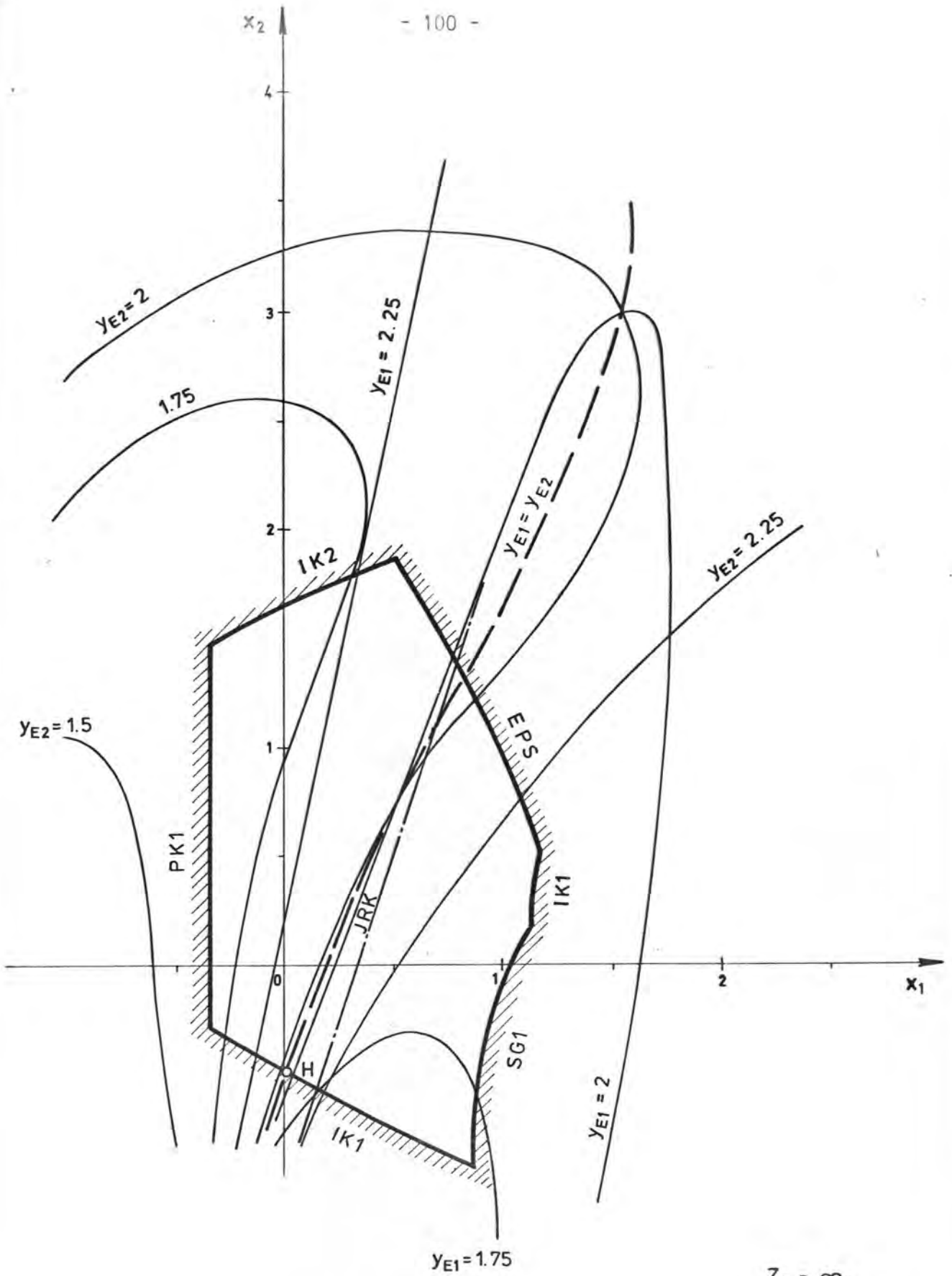


Sl. 33.

$$Z_R = \infty$$

$$Z_1 = 15$$

$$Z_2 = 60$$



$y_{E1} = 1.75$

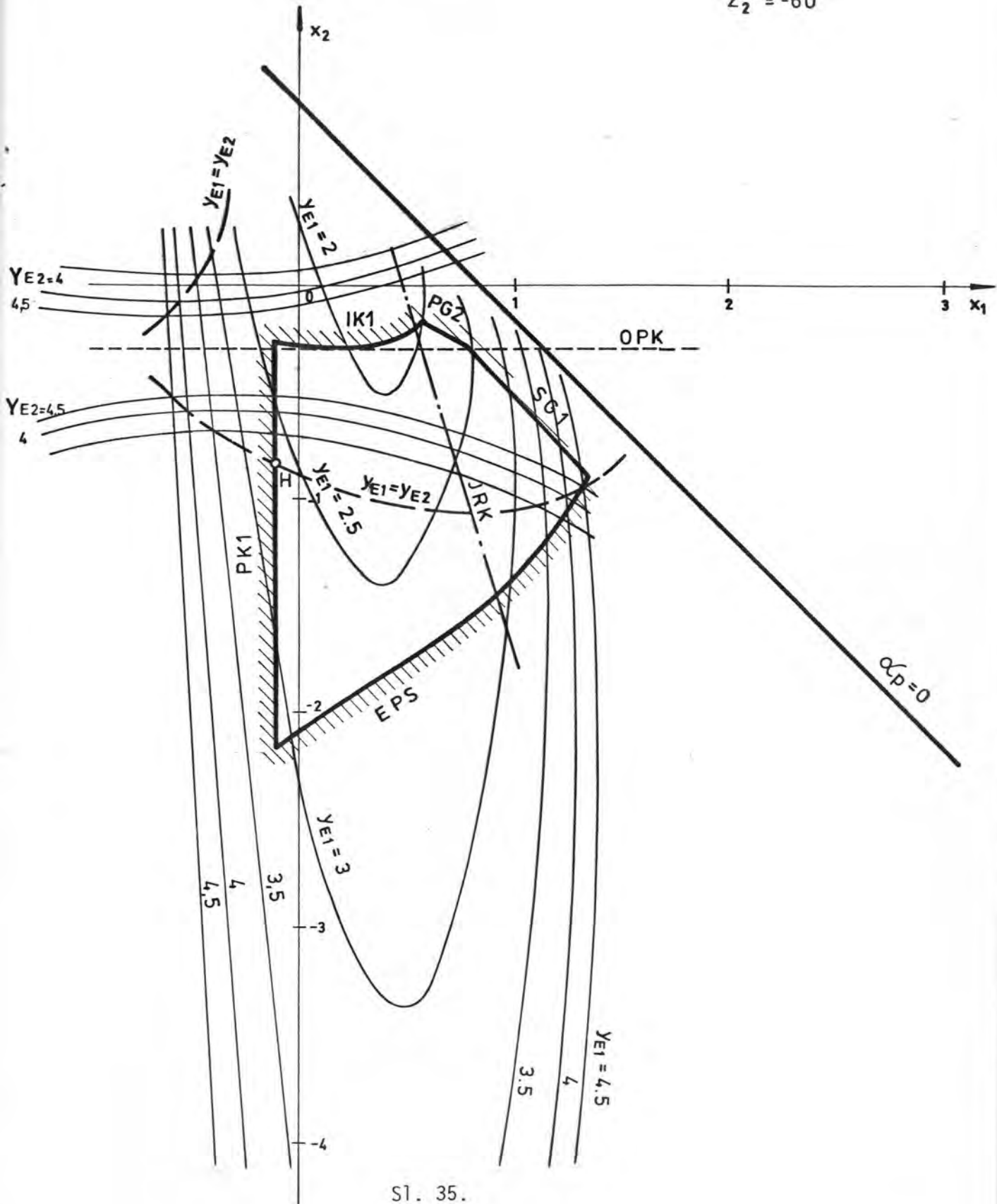
Sl. 34.

$Z_R = \infty$

$Z_1 = 20$

$Z_2 = 60$

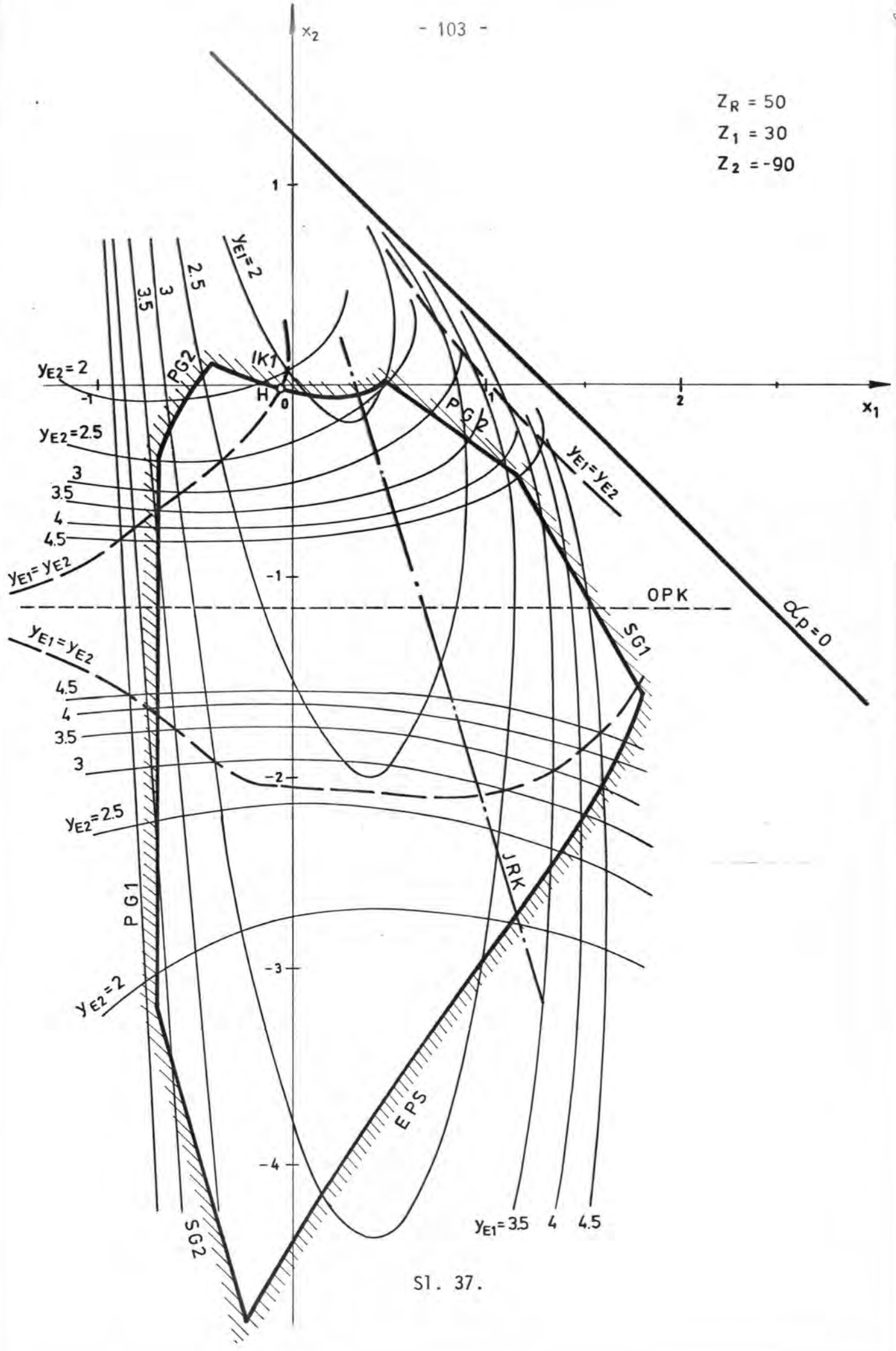
$Z_R = 50$   
 $Z_1 = 20$   
 $Z_2 = -60$





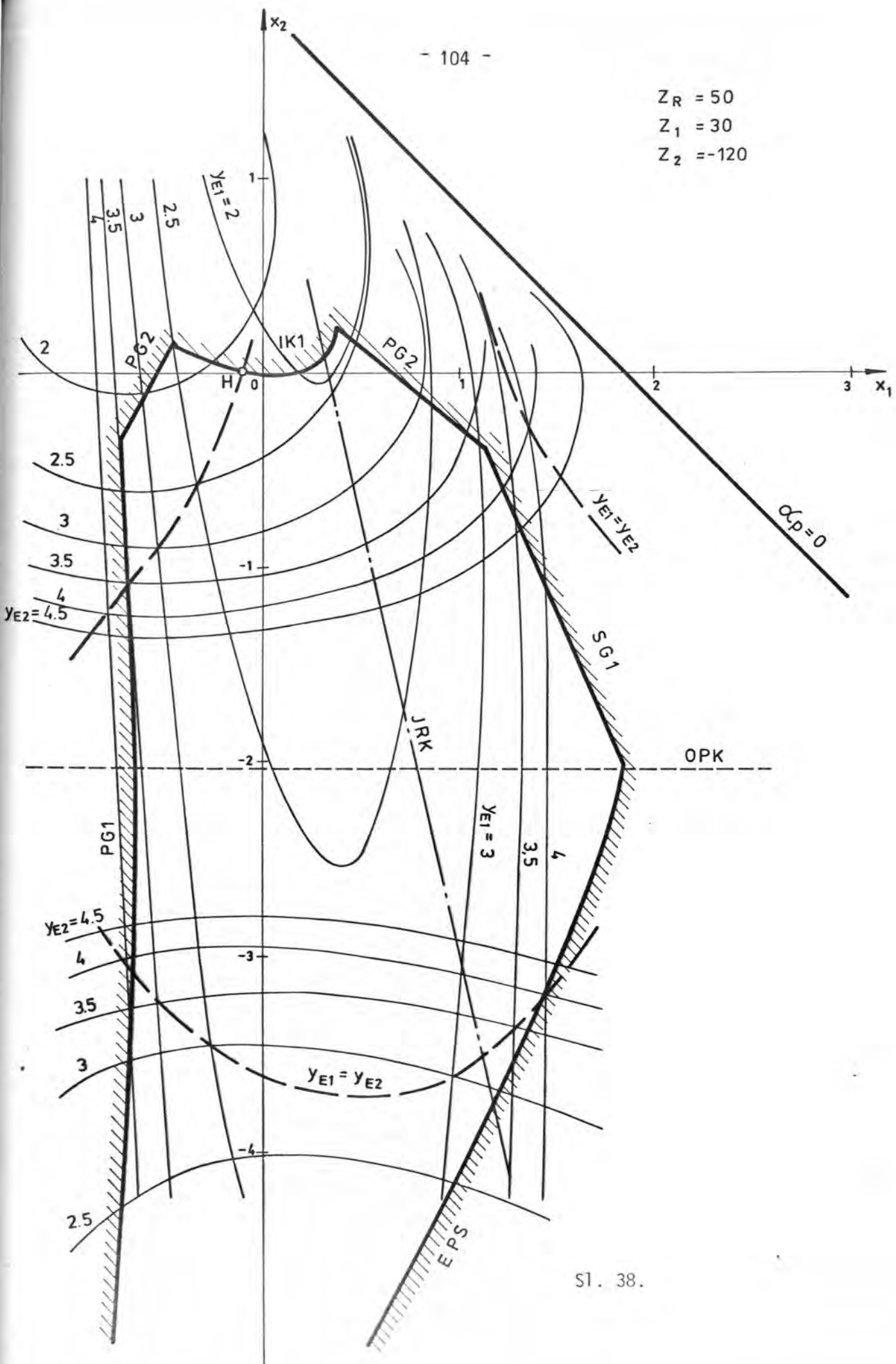


$Z_R = 50$   
 $Z_1 = 30$   
 $Z_2 = -90$

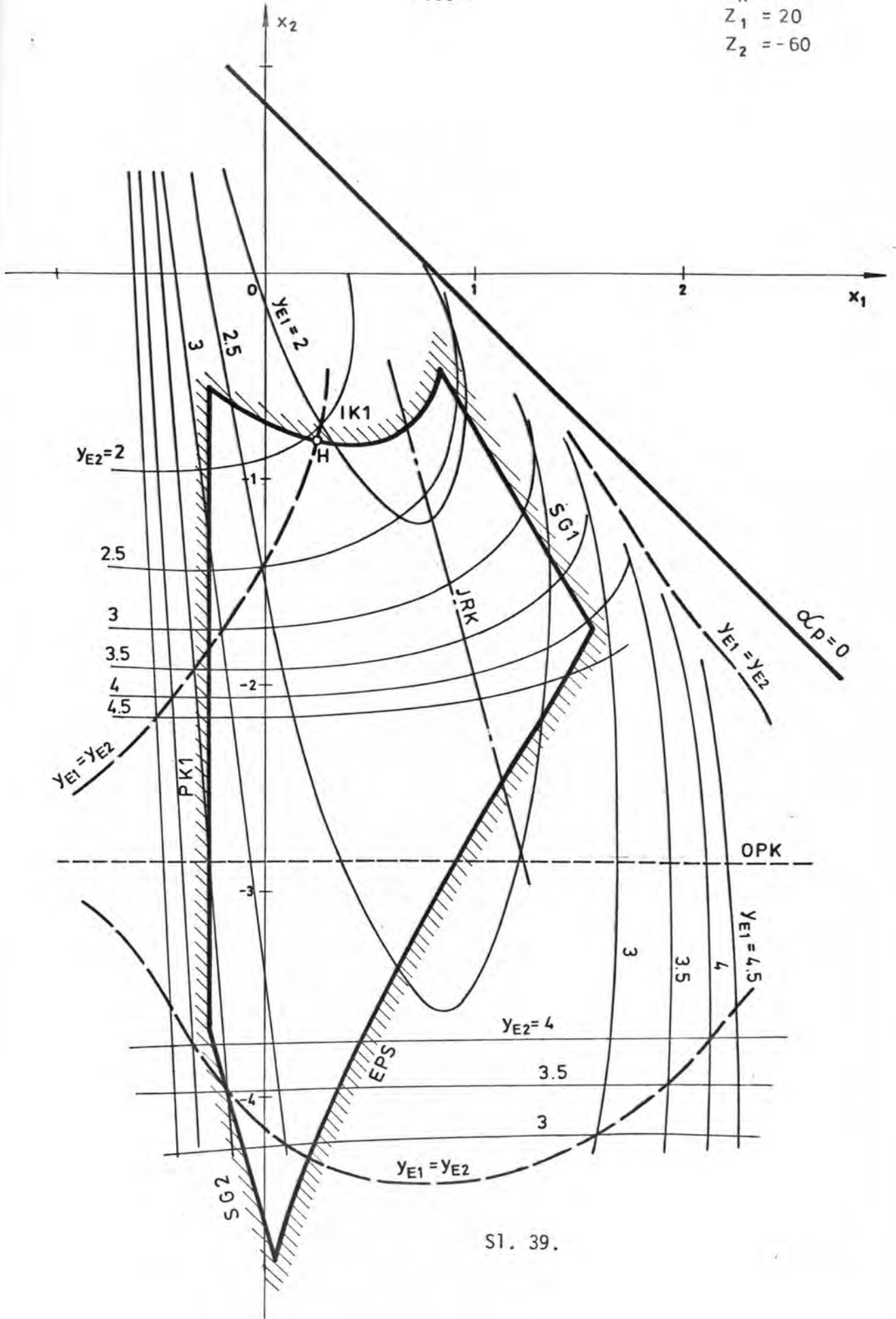


Sl. 37.

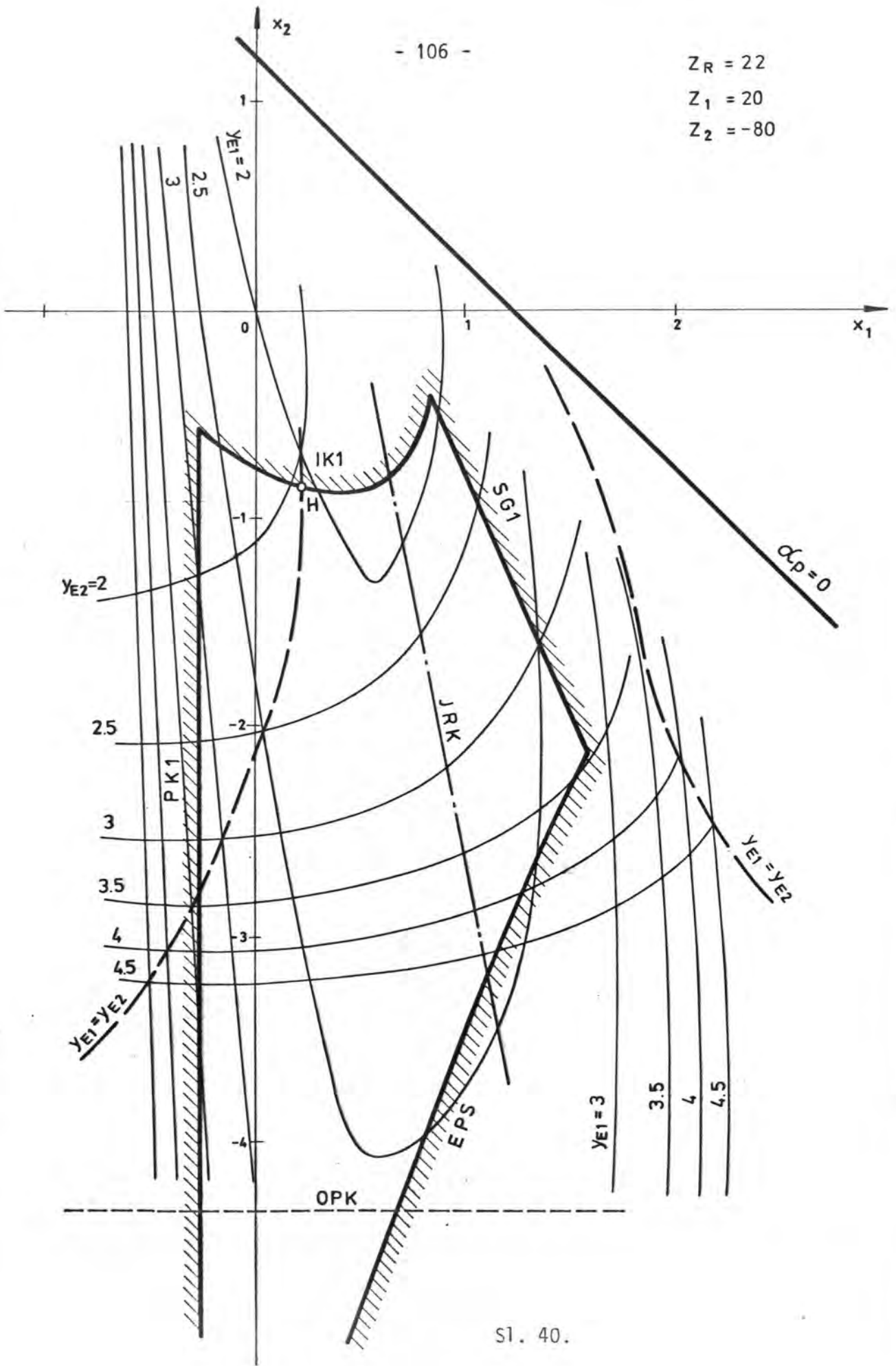
$Z_R = 50$   
 $Z_1 = 30$   
 $Z_2 = -120$



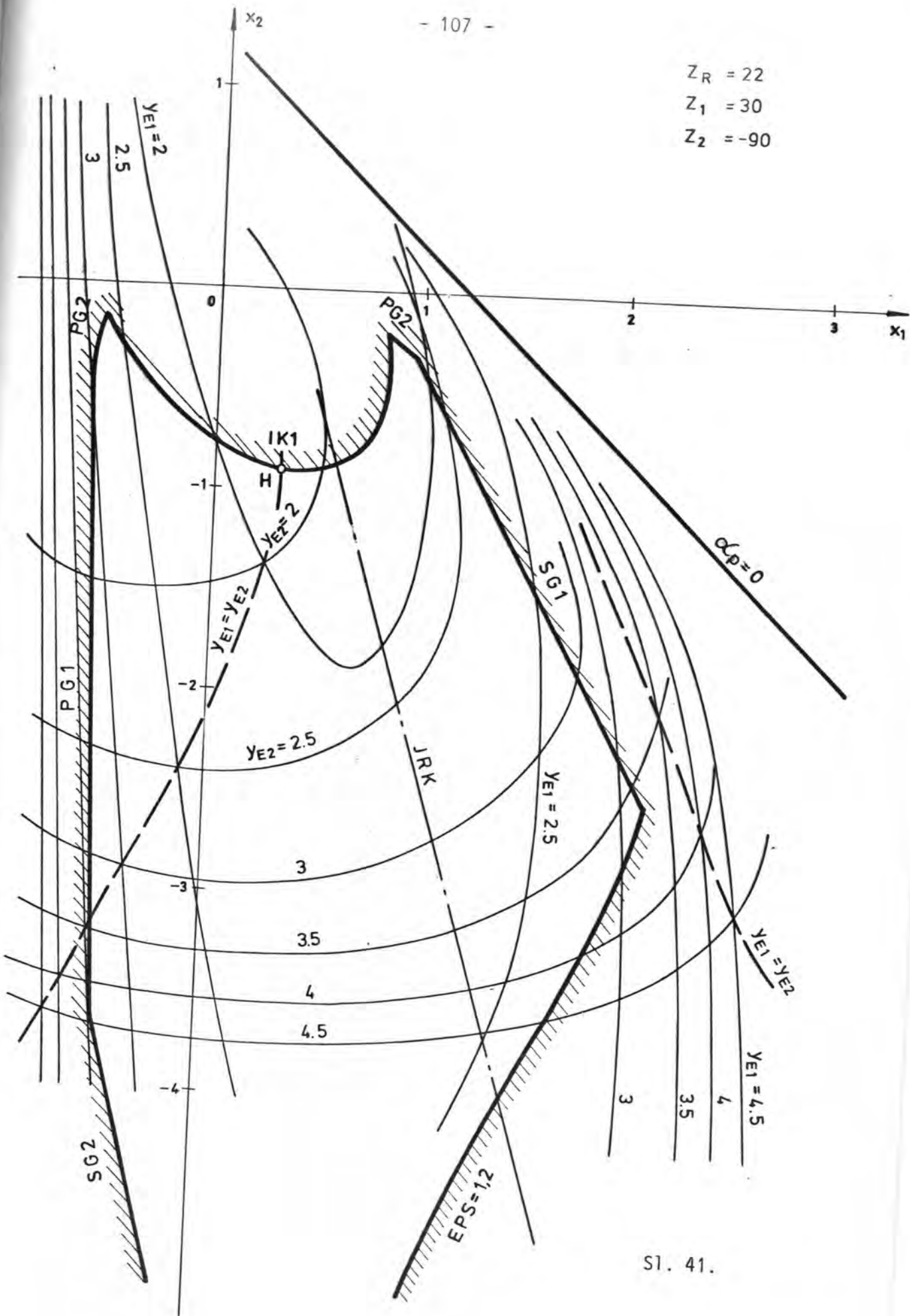
$Z_R = 22$   
 $Z_1 = 20$   
 $Z_2 = -60$



$Z_R = 22$   
 $Z_1 = 20$   
 $Z_2 = -80$

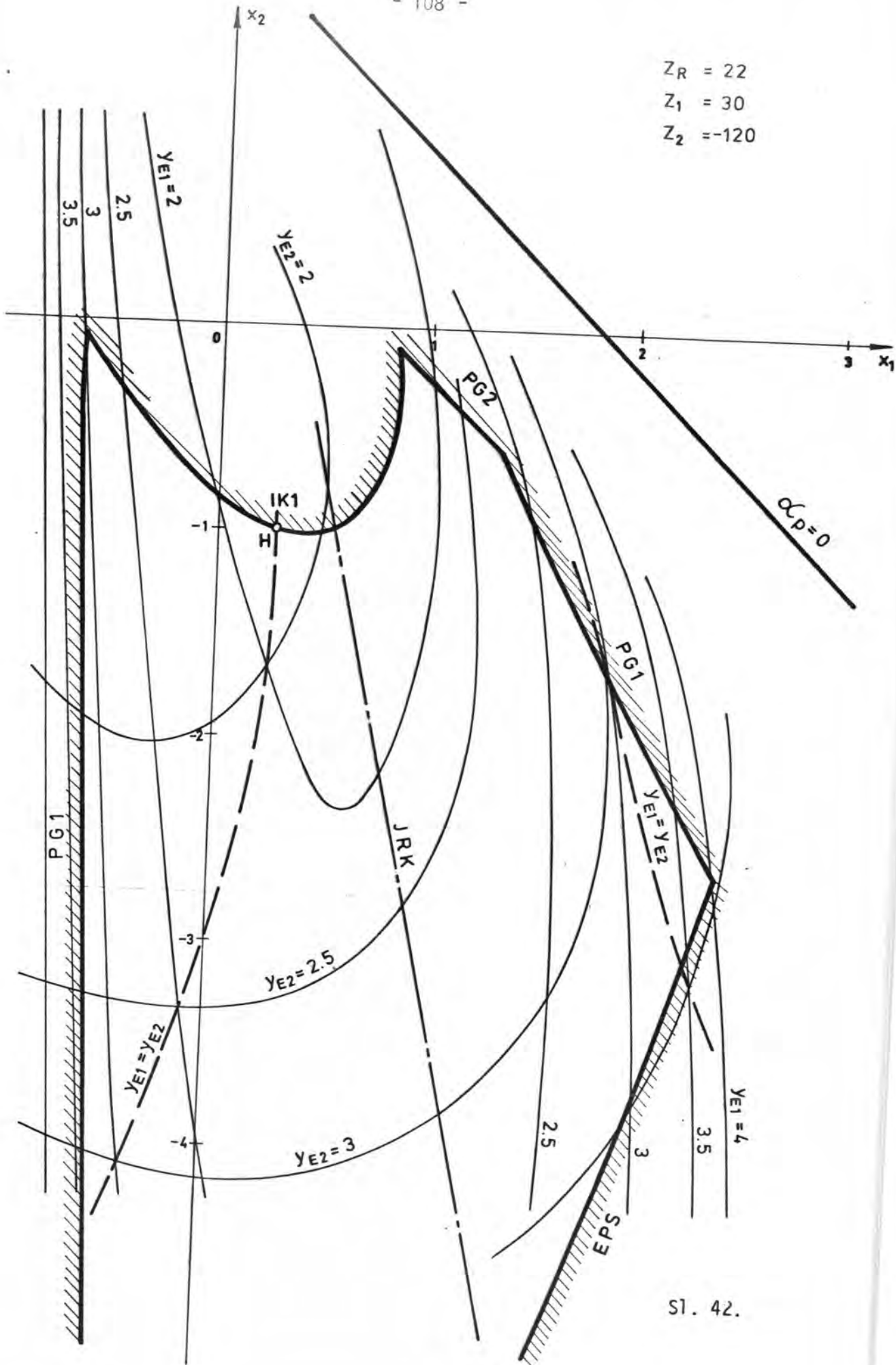


$Z_R = 22$   
 $Z_1 = 30$   
 $Z_2 = -90$



Sl. 41.

$Z_R = 22$   
 $Z_1 = 30$   
 $Z_2 = -120$

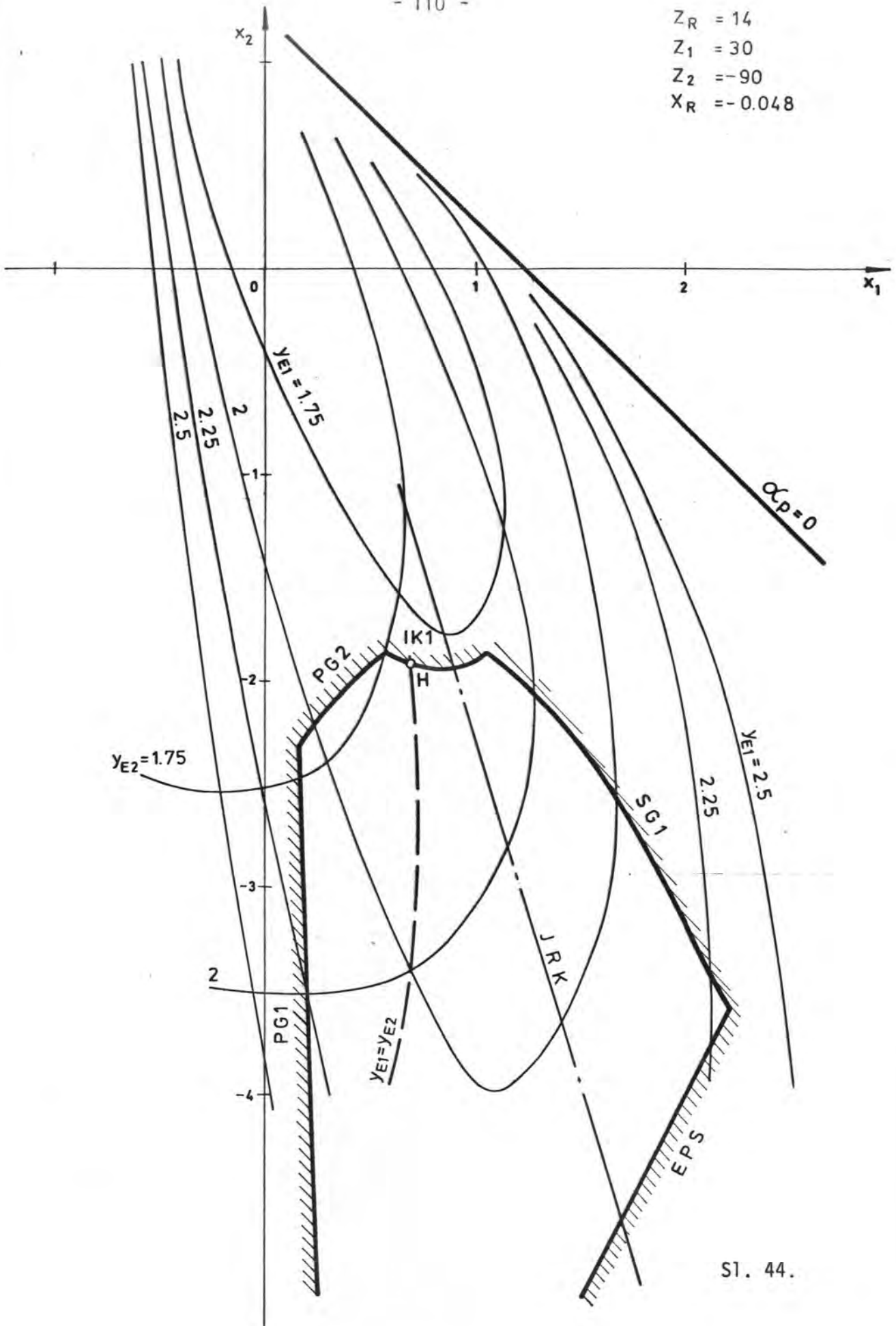


Sl. 42.

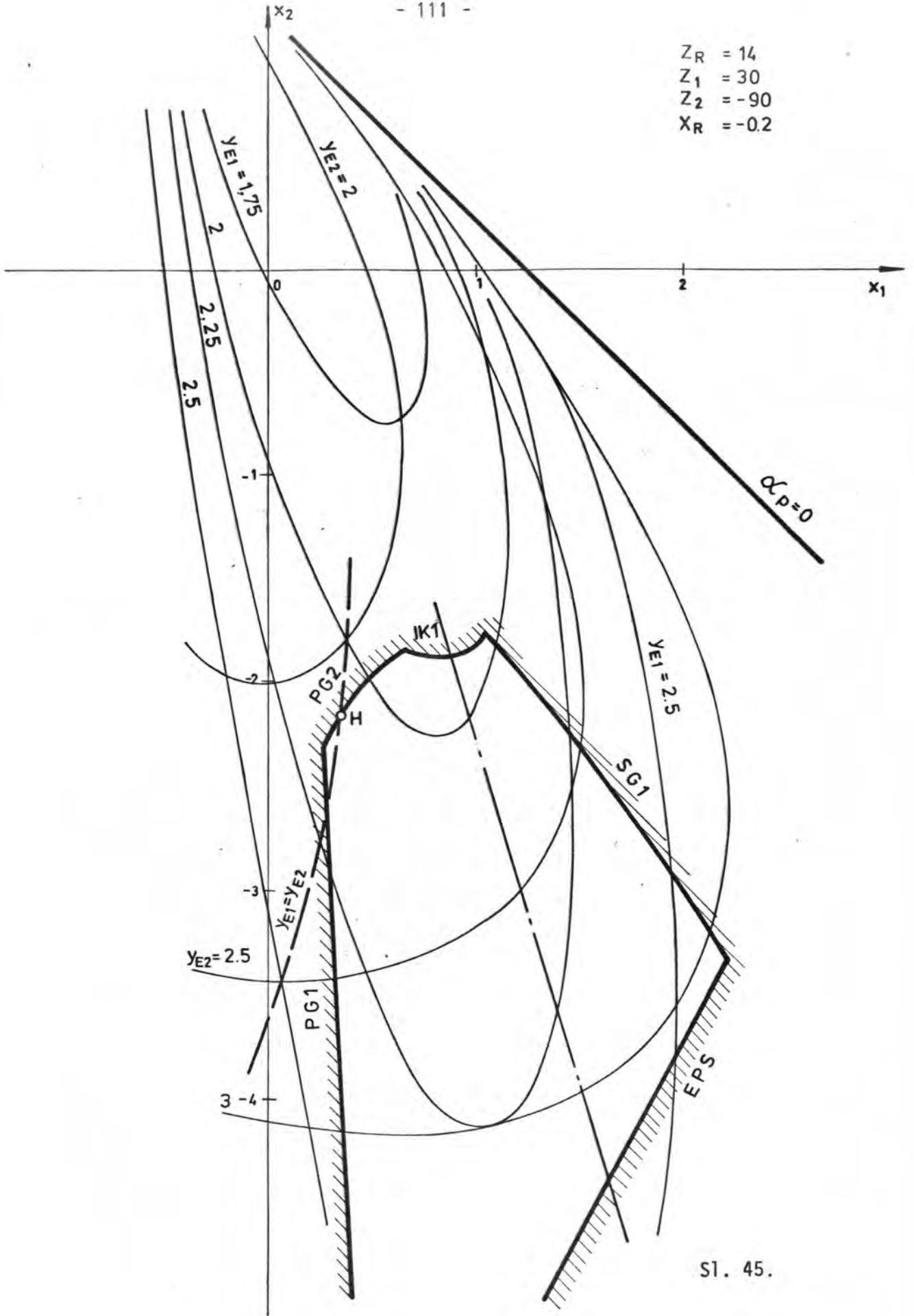




$Z_R = 14$   
 $Z_1 = 30$   
 $Z_2 = -90$   
 $X_R = -0.048$



$Z_R = 14$   
 $Z_1 = 30$   
 $Z_2 = -90$   
 $X_R = -0.2$



## 5 ZAKLJUČAK

Iz rasporeda izolinija  $y_E = \text{konst} \cdot x_1 - x_2$  dijagramima očigledno je da niske vrijednosti efektivnog faktora oblika zuba obaju zupčanika u zahvatu leže u području V - minus ozubljenja ( $x_1 + x_2 < 0$ ), pa se ovo ozubljenje preporuča kad se god kao kriterij optimalnosti uzima nosivost korijena. Ovo je u suprotnosti s uvriježenim stanovištem da veća suma faktora pomaka profila rezultira manjim naprezanjima u korijenu zuba. Uzrok ovoj nepodudarnosti je djelomično u tome što se u većini starijih radova na kojima su bazirana spomenuta stanovišta ne uzima na adekvatan način, ili se uopće ne uzima u obzir koncentracija naprezanja koja raste s povećanjem faktora pomaka profila. Drugi uzrok leži u činjenici da se smanjenjem sume pomaka profila povećava stupanj prekrivanja, Zbog toga opada krak sile koja opterećuje zub na savijanje pa se smanjuje i naprezanja u korijenu zuba. Pored toga, podaci za faktor oblika su redovito dati za standardnu visinu zuba bez obzira na činjenicu da su stvarne visine zuba obaju zupčanika u zahvatu (za uobičajeni način proračuna pri kojem je sačuvan standardni radijalni zazor) uvijek manje od standardnih (osim za  $x_1 + x_2 = 0$ ).

Budući da je s konstruktorskog gledišta poželjno imati istu nosivost obaju zupčanika u zahvatu uz iste materijale, preporuka je birati faktore pomaka profila u navedenom području niskih vrijednosti efektivnih faktora oblika zuba i na izoliniji  $y_{E1} = y_{E2}$ . Zbog toga se optimalnim sa stanovišta nosivosti korijena zuba može smatrati izbor faktora

pomaka profila u neposrednoj blizini točke H u kojoj su efektivni faktori oblika zuba jednaki i ujedno najmanji u okvirima geometrijskih granica izvodjenja zupčanika.

Iako ograničeni broj analiziranih parova ne dopušta pouzdana uopćavanja, uočljivo je da se optimalne veličine sume faktora pomaka profila ne mijenjaju znatno s brojem zubi spregnutih zupčanika i kreću se u većini slučajeva između -1 i 0 uz  $x_1$  između -0,2 i +0,35. Uočljiva je također tendencija porasta optimalne veličine sume faktora pomaka profila sa smanjenjem broja zubi reznog zupčanika, a naročito s povećanjem faktora pomaka profila reznog zupčanika.

Tablica 2 ne može ni u kom slučaju zamijeniti  $x_1 - x_2$  dijagrame s ucrtanim graničnim i ostalim izolinijskim. Ona daje optimalne faktore pomaka profila samo sa stanovišta nosivosti korijena, dok dijagrami omogućavaju optimalan izbor faktora pomaka profila u odnosu na bilo koje svojstvo, ili na bazi kompromisa između pojedinih svojstava. Tako npr. izbor  $x_1$  i  $x_2$  prema točki u kojoj se sijeku izolinijske JRK i IK1, omogućava pored malog trošenja bokova još i relativno vrlo mala naprezanja u korijenu zuba.

Pomoću dobivenih dijagrama moguće je već određenu  $\Sigma x$  (utvrđen razmak osiju) raspodijeliti na  $x_1$  i  $x_2$  tako da naprezanja u korijenu budu što manja i eventualno međusobno jednaka, ili tako da se dobije neko drugo poželjno svojstvo zupčanog para. U tom slučaju optimalna točka je na sjecištu relevantne izolinijske i izolinijske  $x_1 + x_2 = \text{konst.}$  Na taj način, moguće je čak kod već izvedenih reduktora, ugradnjom novih zupčanika (s

Optimalni faktori pomaka profila

s obzirom na nosivost korijena zuba

Tablica 2.

Parametri alata		Zupčani par $z_1/z_2$	Optimalni $x_1$ i $x_2$		$y_{E1} = y_{E2}$
			$x_1$	$x_2$	
$z_R = 50$ $x_R = 0$ $r_F = 0$		20/60	-0,08	-0,6	2,44
		20/80	-0,05	-0,8	2,40
		30/90	-0,2	-0,8	2,22
		30/120	-0,2	-0,8	2,22
		20/-60	-0,1	-0,82	2,20
		20/-80	-0,1	-0,15	2,40
		30/-90	-0,05	-0,025	2,10
		30/-120	-0,1	0	2,20
$z_R = 22$ $x_R = 0$ $r_F = 0$		20/60	0,02	-0,32	2,28
		20/80	0,15	-0,27	2,11
		30/90	0,06	-0,22	1,93
		30/120	0,10	-0,14	1,93
		20/-60	0,25	-0,81	2,05
		20/-80	0,22	-0,83	2,05
		30/-90	0,32	-0,78	1,88
		30/-120	0,28	-0,99	1,86
$z_R = 14; r_F = 0$	$x_R = 0,104$	30/90	0,4	0,62	1,74
		30/-90	1,14	-1,97	1,70
	$x_R = -0,048$	30/90	0,11	0,15	1,85
		30/-90	0,7	-1,9	1,79
	$x_R = -0,2$	30/90	-0,12	-0,21	2,12
		30/-90	0,35	-2,18	2,11
$z_R = \infty$ $r_F = 0,38 \text{ m}$		15/45	-0,05	-0,39	2,31
		15/60	0,08	-0,47	2,13
		20/60	0	-0,48	2,04

optimalnim  $x_1$  i  $x_2$ ), poboljšati njihova svojstva, u prvom redu nosivost.

Na osnovi priloženih dijagrama očigledna je kvalitativna ovisnost efektivnog faktora oblika zuba o svakom od parametara  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_R$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_R$ ,  $r_F$ . Efektivni faktori oblika, tj. stvarna naprezanja u korijenu zuba obaju zupčanika u zahvatu smanjuju se porastom  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $x_R$ ,  $r_F$ , te smanjenjem  $z_R$ . Budući da manji  $z_R$  povoljno utječe i na sva ostala svojstva zupčanog para (osim što za  $z_R < 18$  pogoduje podrezivanju glava), preporuka je upotrebljavati (a u budućem JUS-u i standardizirati) rezne zupčanike samo s manjim brojem zubi, npr. 14, 18 i 22.

Koristeći rezultate ovog rada, moguće je nevelikim dodatnim naporom spomenute ovisnosti i kvantificirati. Medjutim, ako se prikaže ovisnost efektivnog faktora oblika o dva parametra, npr.  $z$  i  $x$ , onda takva ovisnost nema opći značaj, tj. vrijedi samo za diskretne vrijednosti parametara alata i spregnutog zupčanika. Razlog je u tome što parametri zupčanika (u prvom redu promjer kruga preko glave), koji utječu na faktor oblika, ovise o parametrima alata i spregnutog zupčanika.

Iz istog razloga postojeći rezultati koji daju ovisnost faktora oblika o  $z$  i  $x$ , zasnovani na "normalnoj" visini zuba od  $2h_g + mc_R$ , nisu neposredno primjenjivi u svrhu izbora faktora pomaka profila. Prema tome, dijagrami predloženi u disertaciji, pored toga što pružaju mogućnost optimalnog izbora faktora pomaka profila, istovremeno omogućavaju točno (onoliko koliko su guste izolinije) očitavanje pouzdanijih vrijednosti efektivnog faktora oblika zuba za oba zupčanika u zahvatu. Ako se tome doda da upotreba ovih dijagrama isključuje primjenu metoda pokušavanja u prora-

čunu zupčanog prijenosa i da čini suvišnom provjeru geometrijskih svojstava zupčanog para (kontrola  $s_g$ ,  $\epsilon$  i raznih smetnji), onda su očite sve prednosti koje pruža izbor faktora pomaka profila uz pomoć ovih dijagrama.

Stvarna primjena rezultata ovog rada moguća je samo pod uvjetom da konstruktor posjeduje  $x_1 - x_2$  dijagram s ucrtanim svim izolinijama za parametre ( $z_R, z_1, z_2$ ) koji su jednaki parametrima zupčanog para kojeg on treba da konstruira, ili se barem suviše ne razlikuju od njih. Ovo bi zahtijevalo izradu kataloga od više stotina  $x_1 - x_2$  dijagrama, u koje bi za razne kombinacije ( $z_1, z_2, z_R, r_F$ ) bile ucrtane granične i sve ostale izolinije. To svakako prelazi okvire ovog rada, ali izrada jednog ili više ovakvih kataloga nameće se kao nezaobilazan zadatak u bliskoj budućnosti.

Idući znanstveni napor trebao bi biti usmjeren k dobivanju sličnih rezultata za evolventne zupčanike s modificiranim profilom, a isto tako i za zupčanike s podrezanim korijenom zuba. Tek tada bi se mogla dati mjerodavna ocjena o granicama primjene ovakvih zupčanika u konstruktorskoj praksi.

L I T E R A T U R A

- [1] Bolotovskaja, T. P. i dr., Spravočnik po korigirovaniju zupčatih koles II, Mašinstroenie, Moskva 1967.
- [2] Bolotovski, I. A. i dr., Cilindričeskie evolventne zupčate predači vnešnego zacepljenja, Mašinstroenie, Moskva 1974.
- [3] Bureš, V., Izbor parametara korigiranih čelnih zupčanika s ravnim zubima, Zbornik radova naučno-stručnog skupa o zupčanicima i kliznim ležajima, Zagreb 1976.
- [4] Candee, A. H., Geometrical Determination of Tooth Factor, American Gear Manufacturers Assn., Pittsburgh 1941.
- [5] Časovnikov, L. D., Predači zacepljeniem, Mašinstroenie, Moskva 1969.
- [6] Dolan, T. J. and Broghamer, E. L., A Photoelastic Study of Stresses in Gear Tooth Fillets, Experimental Statics Bulletin 335, University of Illinois 1942.
- [7] Dusev, I. I., Opredelenie kriviznji vzaimogibaemih poverhnosti zubljev, Izvestija viših učebnijih zavedenia, AN SSSR, Mašinstroenie 5/68, Moskva 1968.
- [8] Dusev, I. I., Svjazi kriviznami vzaimogibaemih poverhnosti zubljev prostranstvenih zacepljenja, Izvestija VUZ-ov AN SSSR, Mašinstroenie 3/69, Moskva 1969.
- [9] Groman, M. B., O blokirujuščih konturah evolventnogo zacepljenja, Vestnik mašinstroenia 12/52, Moskva 1952.



- [10] Obsieger, B., Analitički prikaz profila evolventnog ozubljenja izradjenog odvalnim dubljenjem reznim zupčanikom, Strojarsstvo 2/81, Zagreb 1981.
- [11] Jelaska, D., Analiza zahvata i naprezanja kod zupčanika s unutrašnjim evolventnim ozubljenjem, Magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1980.
- [12] Lichtenauer, G., Rogg, D., Kallhart, K., Hurth-Zahnradschaben, Carl Hanser Verlag, München 1964.
- [13] Niemann, G., Maschinenelemente, Bd. II, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1965.
- [14] Obsieger, J., Obsieger, B., Analitičko odredjivanje faktora oblika zuba evolventnog ozubljenja, Svjetski simpozij o zupčanicima i zupčastim prijenosnicima, Vol. A str. 273 - 284, Dubrovnik-Kupari 1978.
- [15] Obsieger, B., Obsieger, J., Orlić, Ž., Usporedba analitičkih postupaka odredjivanja faktora oblika zuba vanjskog evolventnog ozubljenja, Strojarsstvo 4/80, Zagreb 1980.
- [16] Obsieger, B., Analitički prikaz profila ozubljenja dobivenih odvaljivanjem proizvoljnog osnovnog profila, Svjetski simpozij o zupčanicima i zupčastim prijenosnicima, Vol. A, Dubrovnik - Kupari 1978.
- [17] Obsieger, B., Obsieger, J., Zahnformfaktoren von Ausen und Innenverzahnungen bei der Herstellung im Abwälzverfahren mit Schneidrädern, Konstruktion 32 (1980).
- [18] Peterson, R. E., Stress Concentration Factors, John Willey and Sons, New York - London - Sydney - Toronto 1974.

- [19] Proskurjakov, V. B., K opredeleniu naprjaženia v osnovanii zubljev, Izvestija AN SSSR, OTN br. 4, Moskva 1959.
- [20] Stamboliev, D., Proračun i konstrukcije cilindričnih zupčanika, Svjetski simpozij o zupčanicima i zupčastim prijenosnicima, Vol. D, Dubrovnik - Kupari 1978.
- [21] Smirnov, V. E., Grafiki dlja ocenki vibranih parametrov zacepljenja prijamozubih koles, Vestnik mašinstroenie 2/60, Moskva 1960.
- [22] Ustinenko, V. L., O račete na izgib zubljev koles s vnutrennim evolventnim zacepljeniem, Vestnik mašinstroenia 7/64, Moskva 1964.
- [23] Ustinenko, V. L., Napraženoje sastojanie zubljev cilindričeskikh prijamozubih koles, Mašinstroenie, Moskva 1972.
- [24] Vulgakov, E. B., Deičman, I. B., Ispoljzovanie hipotezi plosko-cilindričeskikh sečenia pri vibore geometrii podnutrenego osnovania vnutrenih zubljev, Izvestia VUZ-ov, Mašinstroenie 10/69, Moskva 1969.
- [25] Vulgakov, E. B., Podbeljski, N. G., Opredelenie mestnih naprjaženia izgiba v zubljah prijamozubih evolventnih cilindričeskikh koles, Vestnik mašinstroenia 12/77, Moskva 1977.
- [26] Vulgakov, E. B., Visokonaprjaženie zubčatie peredači, Mašinstroenie, Moskva 1969.
- [27] Wilcox, L., Coleman, W., Application of Finite Elements to the Analysis of Gear Tooth Stresses, Journal of Engineering for Industry 11/73, str. 1139 - 1148, 1973.

Prilog optimalnom izboru faktora pomaka profila za parove evolventnih  
zupčanika

D. Jelaska

Tehnički fakultet, Rijeka, Hrvatska, Jugoslavija

U radu je sažeto obradjena cjelokupna geometrija reznog zupčanika, te smetnje koje nastaju pri izradi vanjskih i unutrašnjih evolventnih zupčanika postupkom odvalnog dubljenja reznim zupčanikom. Obradjene su također sve moguće smetnje koje se mogu pojaviti u zahvatu ovih zupčanika. Svaka smetnja je prikazana u koordinatama faktora pomaka profila spregnutih zupčanika. Glavni dio rada predstavlja autorov originalni prilog u kojem su izvedeni svi potrebni izrazi za iznalaženje ovisnosti efektivnog faktora oblika zuba (stvarnog jediničnog naprezanja u korijenu) evolventnog zupčanika o njegovom broju zubi i faktoru pomaka profila, te o broju zubi i faktoru pomaka profila njemu spregnutog zupčanika i reznog zupčanika. Izradom složenog algoritma i njegovom realizacijom na računalu, dobivene su koordinate izolinja efektivnih faktora oblika zuba koje su ucrtane u 25 dijagrama graničnih linija za parove evolventnih zupčanika s vanjskim i unutrašnjim ozubljenjem. Ovaj postupak je detaljno opisan, što omogućava da se slični rezultati dobiju za proizvoljne parove evolventnih zupčanika. Ucrtavanjem izolinja efektivnih faktora oblika zuba u dijagrame graničnih linija omogućeno je konstruktoru da za određeni zupčani par odabere faktore pomaka profila optimalne sa stanovišta čvrstoće korijena zuba.

Rad nije objavljen:

Voditelj: Prof. dr Josip Obsieger

Komisija za ocjenu i obranu rada: Prof. dr Josip Obsieger, prof. dr Eugen Oberšmit, prof. dr Jože Hlebanja.

Obrana:

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, Rijeka.

(120 stranica, 45 slika, 27 bibl. podataka, original na hrvatskosrpskom jeziku)

D. Jelaska

DDTF-

1. Prilog optimalnom izboru faktora pomaka profila za parove evolventnih zupčanika
- I. Jelaska, D
- II. Tehnički fakultet, Rijeka, Hrvatska, Jugoslavija

UDK 621.833.1

Faktor pomaka profila  
Zupčani par  
Rezni zupčanik  
Prijelazna krivulja  
Polumjer zakrivljenosti  
Faktor oblika zuba  
Izolinije

The Contribution to the Optimal Choice of the Overlap Factors  
for the Pairs of Involute Gears

D. Jelaska

Tehnickal Faculty, Rijeka, Croatia, Yugoslavia

In this thesis the author deals concisely with the total geometry of pinion cutter and disturbances arising in the production process of the external and internal involute gearing generated by pinion cutter. All other possible disturbances which could appear in the engagement of these gears are dealt there as well. Each disturbance is represented in the coordinates of the engaged gears overlap factors. The main part of this thesis presents the original contribution of the author where all the terms are derived which are necessary to estimate the dependance of the effective tooth form factor of the involute gear upon the number of its teeth and the overlap factor and number of teeth of its engaged gear and the pinion cutter. Working out the complex algorithm and through its computer realization the author obtained the coordinates of isolines of the effective tooth form factors which are plotted in 25 diagrams of the boundary lines for the pairs of involute gears with the external and internal gearing. This procedure is being detailedly described enabling to obtain similar results for the arbitrary pairs of the involute gears. The isolines of the effective gear form factors plotted in the diagrams of the boundary lines make it possible for the constructor to select, for the definite gear pair, overlap factors which are optimal from the point of the tooth root strength.

The thesis was not published.

Supervisor: J. Obsieger

Examiners: Prof. dr J. Obsieger, prof. dr E. Oberšmit, prof. dr J. Hlebanja

Oral examination:

The thesis deposited at the Tehnickal Faculty of the University of Rijeka.

(120 pages, 45 figures, 27 references, original in Croato-Serbian)

D. Jelaska

DDTF-

1. The Contribution to the Optimal Choice of the Overlap Factors for the Pairs of Involute Gears
- I. Jelaska, D.
- II. Tehnical Faculty, Rijeka, Croatia, Yugoslavia

UDC 621.833.1

Overlap factor  
Pair of gears  
Pinion cutter  
Radii of curvature  
Tooth factor  
Isolines

PODACI O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

I AUTOR

Ime i prezime	Damir Jelaska
Datum i mjesto rođenja	25. ožujka 1947. Split
Naziv fakulteta i datum završene nastave II stupnja	Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 13. prosinca 1971. godine
Naziv fakulteta i datum završene nastave III stupnja	Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 05. veljače 1980. godine
Sadašnje zaposljenje	Mornarički školski centar, Split

II DOKTORSKA DISERTACIJA

Naslov	Prilog optimalnom izboru faktora pomaka profila za parove evolventnih zupčanika
Broj stranica, slika, tablica, bibliografskih podataka	120 stranica 45 slika 2 tablice 27 bibliografskih podataka
Ustanova i mjesto gdje je rad izradjen	Mornarički školski centar, Split
Naučna disciplina iz koje je postignut akademski naslov doktora znanosti	Zupčani prijenosi
Voditelj rada	Prof. dr Josip Obsieger
Fakultet na kojem je rad obranjen	Tehnički fakultet, Rijeka
Oznaka i redni broj rada	

### III OCJENA I OBRANA

Datum prijave teme	28. svibnja 1980. godine
Datum predaje rada	06. listopada 1981. godine
Datum sjednice Vijeća na kojoj je rad prihvaćen	
Sastav komisije koja je rad ocijenila	Prof. dr Josip Obsieger, Tehnički fakultet, Rijeka Prof. dr Eugen Oberšmit, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb Prof. dr Jože Hlebanja, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana
Datum obrane rada	
Sastav komisije pred kojom je rad obranjen	Prof. dr Josip Obsieger Prof. dr Eugen Oberšmit Prof. dr Jože Hlebanja
Datum promocije	

SUCNA KNJIZNICA  
RIJEKA



## PODACI O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

### I Autor

Ime i prezime	Damir Jelaska
Datum i mjesto rođenja	25. ožujka 1947., Split
Ime oca i majke	<b>Tihomir, Marija</b>
Naziv i mjesto završene srednje škole	Srednja Tehnička škola Split
Naziv fakulteta i datum završetka	Fakultet strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, 9.12.1971.

### II Disertacija

Naslov	Prilog optimalnom izboru faktora pomaka profila za parove evolventnih zupčanika
Broj stranica, crteža, slika	120 stranica, 45 slika, 2 tabele 27 biografskih podataka
Šire područje znanosti	tehničke znanosti
Znanstvena oblast iz koje je postignut doktorat	strojarstvo
Fakultet na kojem je obranjena disertacija	Tehnički fakultet Rijeka
Datum predaje disertacije	6.10.1981.
Komisija koja je ocjenila disertaciju	prof.dr J.Obsieger prof.dr Eugen Oberšmit prof.dr Jože Hlebanja
Datum obrane disertacije	17.06.1982.
Komisija pred kojom je izvršena obrana	prof.dr J.Obsieger prof.dr Eugen Oberšmit prof.dr Jože Hlebanja