

# Modeliranje monotono opterećenih ravninskih armiranobetonskih greda s praćenjem razvoja poprečnih pukotina ugrađenih u slojevite gredne konačne elemente

---

Šćulac, Paulo

Doctoral thesis / Disertacija

2014

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:188:389828>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-26**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka Library - SVKRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Paulo Šćulac

**MODELIRANJE MONOTONO OPTEREĆENIH  
RAVNINSKIH ARMIRANOBETONSKIH  
GREDA S PRAĆENJEM RAZVOJA  
POPREČNIH PUKOTINA UGRAĐENIH U  
SLOJEVITE GREDNE KONAČNE  
ELEMENTE**

DOKTORSKI RAD

Rijeka, 2014.



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Paulo Šćulac

**MODELIRANJE MONOTONO OPTEREĆENIH  
RAVNINSKIH ARMIRANOBETONSKIH  
GREDA S PRAĆENJEM RAZVOJA  
POPREČNIH PUKOTINA UGRAĐENIH U  
SLOJEVITE GREDNE KONAČNE  
ELEMENTE**

DOKTORSKI RAD

Mentor: prof. dr. sc. Gordan Jelenić  
Komentor: doc. dr. sc. Davor Grandić

Rijeka, 2014.

UNIVERSITY OF RIJEKA  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Paulo Šćulac

**MODELLING MONOTONICALLY LOADED  
PLANAR REINFORCED-CONCRETE BEAMS  
USING LAYERED BEAM FINITE ELEMENTS  
WITH EMBEDDED TRANSVERSAL  
CRACKING**

DOCTORAL THESIS

Supervisor: prof. dr. sc. Gordan Jelenić  
Co-supervisor: doc. dr. sc. Davor Grandić

Rijeka, 2014

Mentor rada: prof. dr. sc. Gordan Jelenić

Komentor rada: doc. dr. sc. Davor Grandić

Doktorski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ u/na \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_, pred povjerenstvom u sastavu:

1. prof. dr. sc. Nenad Bićanić, predsjednik
2. izv. prof. dr. sc. Adriana Bjelanović, član
3. izv. prof. dr. sc. Sebastjan Bratina, vanjski član (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodeziju)
4. doc. dr. sc. Davor Grandić, član komentor
5. prof. dr. sc. Joško Ožbolt, član

## *Zahvala*

*Zahvaljujem mentoru, prof.dr.sc. Gordanu Jeleniću, na neograničenom strpljenju, razumijevanju i požrtvovnosti prilikom izrade ovog rada.*

*Hvala komentoru, doc.dr.sc. Davoru Grandiću, na pruženoj pomoći, brojnim korisnim prijedlozima i bezrezervnoj podršci.*

*Hvala svim djelatnicima Zavoda za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku na širenju pozitivne energije i stvaranju kreativnog okruženja.*

*Veliko hvala obitelji na nesebičnoj potpori.*

## **Sažetak**

Modeliranje procesa raspucavanja (nastajanja i razvoja pukotina) korištenjem konačnih elemenata vrlo je složeno, vremenski dugotrajno te iziskuje složene nelinearne procedure. Gredni konačni elementi, temeljeni na relativno jednostavnoj grednoj teoriji, imaju znatno smanjen broj stupnjeva slobode u odnosu na ravninske ili prostorne konačne elemente, te time pružaju osnovu za učinkovitije rješavanje procesa modeliranja raspucavanja.

U radu je razvijen novi slojeviti gredni konačni element s ugrađenom poprečnom pukotinom, kojim je moguće prikazati raspucavanje u armiranobetonskim ravninskim elementima uslijed monotonog opterećenja. Mehanizam nastajanja i razvoj pukotine opisan je koristeći princip mehanike oštećenja u sprezi s točnom kinematikom veze između slojeva. Pukotina se u pojedinom sloju elementa otvara u trenutku kada naprezanje u betonu na središnjoj osi sloja dosegne vlačnu čvrstoću. Budući je element višeslojni, time je omogućena propagacija pukotine po visini poprečnog presjeka. Svaki raspucani sloj uključuje diskontinuitet u polju pomaka i diskontinuitet u polju zaokreta poprečnog presjeka. Armaturne šipke modelirane su kao dodatni sloj koji se nalazi unutar betonskog sloja povezan nelinearnim zakonom koji definira naprezanje prijanjanja kao funkciju proklizavanja armature. Konačni element ima dvije komponente pomaka i po jedan kut zaokreta u pojedinom sloju za svaki čvor te, dodatno, proklizavanje armaturnog sloja u svakom čvoru, i kut otvora pukotine za svaki sloj kao dodatne stupnjeve slobode. Za rješavanje problema posmične blokade upotrijebljena je vezana interpolacija. Element je testiran na nekoliko reprezentativnih primjera, u kojima su prikazane njegove prednosti u modeliranju raspucavanja.

**Ključne riječi:** višeslojni gredni element, ugrađeni diskontinuitet, poprečna pukotina, proklizavanje, monotono opterećenje, vezana interpolacija, veza između naprezanja prijanjanja i proklizavanja



## **Abstract**

Modelling of the process of crack formation and development by means of the finite element method is very complex, time consuming and requires sophisticated non-linear procedures. Beam finite elements, based on the standard beam kinematic hypotheses, have considerably less degrees of freedom compared with 2D or 3D continuum-based finite elements, and thus make a sound base for an efficient crack modelling process.

In this work, a novel layered beam finite element with embedded transversal crack is developed, which is able to predict crack formation and development in plane reinforced-concrete elements under monotonic loading. The mechanism of crack initiation and growth is described using the laws of damage mechanics in conjunction with exact kinematics of the interlayer connection. A crack opens in a layer when the tensile concrete stress at its mid-depth reaches the tensile strength. Since the beam is treated as multi-layered, the crack may propagate through the depth of the beam. The cracked layers involve a discontinuity in the position vector of the layer's reference line, as well as a discontinuity in the cross-sectional rotation. Reinforcement bars are modelled as an additional layer placed within the surrounding concrete layer, and connected to it through a non-linear constitutive bond-slip relationship. The finite element has two displacement components and one rotation per layer at each of the nodes and, in addition, a slip of the reinforcement layer at each of the nodes, and the crack profile angle for each layer as the internal degrees of freedom. Linked interpolation is used in order to avoid shear locking. The element has been tested on several numerical examples, in which its advantages in modelling crack formation and development are shown.

**Keywords:** layered beam element, embedded discontinuity, transversal crack, slip, monotonic loading, linked interpolation, bond-slip relationship

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>UVOD</b> .....	<b>1</b>
1.1	KRATKI PREGLED SADRŽAJA DISERTACIJE .....	3
<b>2</b>	<b>PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA</b> .....	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>VIŠESLOJNI GREDNI ARMIRANOBETONSKI KONAČNI ELEMENT S UGRAĐENOM POPREČNOM PUKOTINOM</b> .....	<b>9</b>
3.1	VIŠESLOJNI GREDNI KONAČNI ELEMENT S KRUTOM VEZOM IZMEĐU SLOJEVA.....	9
3.1.1	Vezne jednačbe višeslojnog grednog konačnog elementa .....	11
3.1.1.1	Opis kinematike slojeva bez poprečne pukotine.....	11
3.1.1.2	Opis kinematike slojeva s ugrađenom poprečnom pukotinom.....	12
3.1.2	Kinematičke jednačbe.....	14
3.1.3	Konstitutivne jednačbe.....	14
3.1.4	Jednačbe ravnoteže – princip virtualnog rada .....	15
3.2	UGRADNJA ARMATURNOG SLOJA .....	19
3.2.1	Kinematika proklizavanja armature i betona.....	19
3.2.2	Dodatni rad unutarnjih i vanjskih sila uslijed postojanja armaturnog sloja .....	20
3.2.2.1	Virtualni rad unutarnjih sila zbog uzdužne sile u armaturi.....	21
3.2.2.2	Virtualni rad uslijed naprežanja prijanjanja .....	22
3.2.2.3	Virtualni rad vanjskih sila koje djeluju na armaturu .....	22
3.3	INTERPOLACIJA TESTNIH FUNKCIJA I APROKSIMACIJA UKUPNOG VIRTUALNOG RADA .....	23
3.3.1	Interpolacija testnih funkcija .....	23
3.3.2	Aproksimacija ukupnog virtualnog rada unutarnjih sila .....	25
3.3.3	Aproksimacija ukupnog virtualnog rada vanjskih sila.....	26
3.3.4	Postupak rješavanja .....	27
3.4	LINEARIZACIJA .....	28
3.4.1	Linearizacija $q_{rs,j}^i$ .....	28
3.4.2	Linearizacija $q_{tp,j}^i$ .....	28
3.4.3	Linearizacija $q_{bs,j}^i$ .....	29
3.4.4	Linearizacija $q_{bw}^i$ .....	29
3.4.5	Linearizacija $q_{Bp,j}^i$ .....	30
3.4.6	Linearizacija $q_{\varphi}^i$ .....	33
3.4.7	Linearizacija $q_{Bw}^i$ .....	33
3.5	TIPOVI KONAČNIH ELEMENATA .....	35
3.5.1	Vlačni konačni element.....	35
3.5.2	Gredni konačni element .....	36

3.6	UKLJUČENJE KOHEZIVNIH NAPREZANJA.....	39
<b>4</b>	<b>NELINEARNI MATERIJALNI MODELI.....</b>	<b>42</b>
4.1	NELINEARNI KONSTITUTIVNI ZAKON BETONA.....	42
4.2	KONSTITUTIVNI ZAKON ČELIKA ZA ARMIRANJE.....	43
4.3	NAPREZANJE PRIANJANJA KAO FUNKCIJA PROKLIZAVANJA ARMATURE.....	44
4.4	NADogradnja modela za slučaja rasterećenja.....	45
4.4.1	Bilinearni plastični konstitutivni model materijala.....	46
4.4.2	Postupak rasterećenja za beton.....	50
4.4.3	Nadogradnja modela naprezanje prianjanja – proklizavanje armature.....	51
<b>5</b>	<b>VERIFIKACIJA I VALIDACIJA MODELA.....</b>	<b>52</b>
5.1	LINEARNI KONSTITUTIVNI ZAKON NAPREZANJE PRIANJANJA – PROKLIZAVANJE ARMATURE.....	52
5.1.1	Vlačni štap.....	52
5.1.2	Greda s dvije simetrične sile (Ngo i Scordelis, 1967.).....	60
5.2	NELINEARNI KONSTITUTIVNI ZAKON NAPREZANJE PRIANJANJA– PROKLIZAVANJE ARMATURE.....	67
5.2.1	Vlačni štap (Yankelevsky i sur., 2008.).....	67
5.2.2	Vlačni štap (Wollrab i sur., 1996.).....	75
5.2.3	Greda s dvije simetrične sile (Gilbert i Nejadi, 2004.).....	80
5.2.4	Greda sa silom u sredini raspona (Burns i Siess, 1962.).....	90
<b>6</b>	<b>ZAKLJUČAK I SMJERNICE ZA DALJNJA ISTRAŽIVANJA.....</b>	<b>95</b>
<b>7</b>	<b>LITERATURA.....</b>	<b>98</b>
<b>8</b>	<b>POPIS ILUSTRACIJA.....</b>	<b>103</b>
8.1	POPIS SLIKA.....	103
8.2	POPIS TABLICA.....	106

**Zahvala.** Rezultati prikazani u ovom radu dio su projekta br. 114-0000000-3025 „Unapređenje točnosti nelinearnih grednih elemenata s neograničenim 3D rotacijama“ financijski poduprtog od strane Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske.

# 1 UVOD

Armirani beton kompozitni je materijal koji kombinira dva, po mehaničkim karakteristikama, različita materijala: beton i čelik. Beton, koji ima veliku tlačnu čvrstoću, u presjeku preuzima tlačna naprezanja; no zbog male vlačne čvrstoće u vlačnom dijelu presjeka moramo ugraditi armaturu, koja preuzima vlačna naprezanja. Potpuna kompatibilnost deformiranja armaturne šipke i okolnog betona može se pretpostaviti samo u početnoj fazi opterećenja elementa i za malene razine deformacija. S porastom opterećenja, javlja se proklizavanje koje uzrokuje relativne pomake između armature i okolnog betona. Osnovni mehanizam nosivosti armiranobetonskih konstrukcija aktivira se raspucavanjem betona u vlaknu i proklizavanjem armaturnih šipki u odnosu na okolni beton.

Predmet ovog istraživanja su raspucavanje i proklizavanje armature (osnovne komponente mehanizma nošenja armiranog betona) koje su u radu obrađene unutar metode konačnih elemenata, i to primjenom metode s diskretnim pukotinama na gredne konačne elemente. Modeliranje procesa nastajanja i razvoja pukotina korištenjem konačnih elemenata vrlo je složeno, vremenski dugotrajno te iziskuje složene nelinearne proračunske postupke. Puno se radova može pronaći u kojima se diskretizacija kontinuuma provodi korištenjem ravninskih ili prostornih konačnih elemenata (detaljniji prikaz dan je u drugom poglavlju), no s grednim konačnim elementima to je puno rjeđi slučaj. Gredni konačni elementi, temeljeni na relativno jednostavnoj grednoj teoriji, imaju znatno smanjen broj stupnjeva slobode u odnosu na ravninske ili prostorne konačne elemente – u dvodimenzionalnoj i trodimenzionalnoj analizi potreban je mnogo veći broj stupnjeva slobode nego li kod grednih elemenata, što daje veći broj nepoznanica u globalnoj jednadžbi konačnih elemenata i znatno povećava vrijeme računanja. Gredni elementi time pružaju dobru osnovu za efikasnije rješavanje (računski brže ali dovoljno točno) procesa modeliranja raspucavanja, te su stoga u ovoj disertaciji oni pomniji analizirani.

Ciljevi ovog rada su:

- razviti novi višeslojni gredni konačni element s ugrađenim diskontinuitetom u polju pomaka i polju kuta zaokreta, koji će se temeljiti na Timošenkovoj grednoj teoriji. Testirati novorazvijeni element na nekoliko reprezentativnih primjera, i usporediti ga s rezultatima numeričkih analiza i eksperimentalnih ispitivanja;
- opisati mehanizam raspucavanja, tj. koncentrirati se na praćenje nastanka i razvoja poprečnih pukotina (na položaj, širinu i dubinu pukotina);
- u model uključiti proklizavanje armaturnih šipki. Armaturne šipke povezati s okolnim betonskim slojem prikladnim zakonom naprezanja prijanjanja u funkciji proklizavanja armature;
- ispitati da li se za rješavanje problema posmične blokade (*shear locking*) u višeslojnom elementu može primijeniti vezana interpolacija.

Osnovna hipoteza rada je kako se višeslojnim grednim konačnim elementima može djelotvorno opisati ponašanje raspucavanja armiranobetonskih elemenata. Podjela poprečnog presjeka elementa po visini na slojeve odabrana je zbog nekoliko prednosti: (i) moguće je modelirati krivljenje poprečnog presjeka (koje je u standardnoj grednoj teoriji zanemareno); (ii) moguće je pratiti razvoj pukotina po visini poprečnog presjeka, a da pritom ostanu sačuvani ravni presjeci unutar slojeva (Bernoullijeva hipoteza unutar svakog sloja višeslojne grede); (iii) pri razvoju pukotine nije potrebno mijenjati početnu mrežu konačnih elemenata.

Osnovne karakteristike novorazvijenog višeslojnog grednog konačnog elementa s ugrađenom poprečnom pukotinom ukratko su opisane u nastavku. Konačni element se temelji na geometrijski točnoj Reissnerovoj grednoj teoriji, odnosno Timošenkovoj teoriji, kao njezinoj geometrijski linearnoj formi. Element se sastoji od proizvoljnog broja slojeva koji su međusobno povezani krutom vezom (bez mogućnosti proklizavanja ili međusobnog odvajanja), a svaki se sloj može zaokretati neovisno o drugim slojevima. Armaturene šipke modelirane su kao dodatni sloj, konačne površine čija je debljina jednaka nuli, koji se nalazi unutar betonskog sloja i može prokliznuti u odnosu na njega. Armaturni i betonski sloj povezani su prikladnim konstitutivnim zakonom naprezanja prijanjanja kao funkcije proklizavanja armature. Kriterij za otvaranje pukotine u pojedinom sloju elementa je prekoračenje vlačne čvrstoće betona na središnjoj osi. Nakon otvaranja, pukotina se širi po cijeloj visini sloja. Na taj način moguće je modelirati razvoj pukotine po visini grede. Konačni element ima uz standardne stupnjeve slobode (dvije komponente pomaka i po jedan kut zaokreta u pojedinom sloju za svaki čvor) i dodatne stupnjeve slobode (proklizavanje armature u svakom čvoru, te širinu i kut otvora pukotine za svaki sloj). Svaki raspucali sloj uključuje diskontinuitet u polju pomaka i diskontinuitet u polju zaokreta poprečnog presjeka.

## 1.1 Kratki pregled sadržaja disertacije

U drugom poglavlju ukratko je dan pregled stanja područja istraživanja u području modeliranja raspucavanja. Opisane su prednosti i nedostaci pojedinih pristupa, kao motivacija za razvoj predloženog diskretnog modela.

Treće poglavlje sadrži detaljnu kinematsku formulaciju novog konačnog elementa s ugrađenom poprečnom pukotinom za slučaj geometrijski linearne analize. Poglavlje započinje opisom višeslojnog grednog konačnog elementa s krutom vezom između slojeva, u koji je zatim ugrađena poprečna pukotina, modelirana u obliku jakog diskontinuiteta koji se javlja u polju pomaka i polju kuta zaokreta. Slijedi modeliranje armaturnih šipki, i načina povezivanja s okolnim betonom. Primijenjen je princip virtualnog rada, a kao rezultat dobivena su dva tipa konačnih elemenata, koja se razlikuju u obliku pukotine u poprečnom presjeku i o vrsti opterećenja. Za njih su izvedeni članovi lokalne matrice krutosti. Naposljetku je opisan postupak uključivanja kohezivnih naprezanja u konačni element, koja nastaju prilikom otvaranja pukotine.

U četvrtom poglavlju uvedeni su nelinearni konstitutivni materijalni modeli: za beton, čelik s bilinearnom granom, te za naprezanja prijanjanja kao funkcije proklizavanja armature. Opisan je i postupak rasterećenja koji se može javiti i u slučaju monotono rastućeg opterećenja.

U petom poglavlju provedena je verifikacija i validacija razvijenog konačnog elementa na nekoliko primjera, pri čemu su rezultati uspoređeni s rezultatima dobivenim analitičkim i numeričkim postupcima, te eksperimentalnim ispitivanjima, s ciljem ocjene efikasnosti i točnosti razvijenih elemenata.

Rad završava zaključcima i smjernicama za daljnja istraživanja u šestom poglavlju.

## 2 PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA

Modeliranje mehanizma nastajanja i razvoja pukotina složeni je proces koji se samo u iznimno pojednostavljenim uvjetima može riješiti analitički. Dva pionirska rada, koja se bave primjenom numeričke metode konačnih elemenata u modeliranju raspucavanja, jesu radovi Ngoa i Scordelisa (1967.) te Rashida (1968.). Ovi su radovi ujedno i preteča dva potpuno različita pristupa u modeliranju raspucavanja: prvi je pristup s diskretnim pukotinama, dok je drugi preteča pristupa s razmazanim pukotinama.

Osnovna ideja pristupa s diskretnim pukotinama je ideja lokalizacije pukotine u jednoj liniji (kod ravninskih elemenata) ili plohi (kod prostornih elemenata), dok je kod pristupa s razmazanim pukotinama pukotina lokalizirana u traci konačne širine (kod ravninskih elemenata) ili u volumenu materijala (kod prostornih elementa). Prema de Borstu i sur. (2004.) pristup s diskretnim pukotinama ima za osnovni cilj modeliranje nastanka i razvoja primarnih pukotina; s druge strane, pristup s razmazanim pukotinama temelji se na ideji kako u betonu zbog heterogenosti nastaju mnoge uske pukotine koje se tek u nekoj sljedećoj fazi opterećenja povezuju i tvore primarnu pukotinu. Ove se pojedinačne pukotine ne analiziraju kao kod diskretnog pristupa, već se promjenom konstitutivnog odnosa raspodjeljuju („razmazuju“) unutar kontinuuma.

Ngo i Scordelis (1967.) su proveli dvodimenzionalnu analizu raspucavanja u armirano-betonskim gredama koristeći tročvorne konačne elemente, pri čemu su pukotine modelirali razdvajanjem mreže konačnih elemenata pomoću dvostrukih čvorova, koji se u neopterećenom stanju poklapaju. No, oni se u radu nisu bavili nastankom pukotina - položaj pukotina u gredama bio je unaprijed definiran. Iskorak je u tom smjeru napravio Nilson (1968.), koji je nastanak pukotina povezo s prekoračenjem vlačne čvrstoće betona. Problem koji se pritom pojavio je kako mrežu konačnih elemenata treba redefinirati prilikom svakog novog raspucavanja zbog nastanka dvostrukih čvorova. U početku je to bilo ručno, a kasnije su razvijeni mnogi automatski postupci za redefiniranje i proglašavanje mreže - ovisno o smjeru širenja pukotine (npr. Ingraffea i Saouma, 1985.).

Važan korak u procesu razvoja modeliranja raspucavanja bilo je Hillerborgovo (Hillerborg i sur., 1976.) uvođenje mehanizma razvoja pukotine. Definirao je oštećenje betona u vlaklu korištenjem jednog od osnovnih parametara u mehanici oštećenja – energiju loma (Bažant i Planas, 1998.). Na taj je način nastanak i razvoj pukotine opisao principima mehanike oštećenja u sprezi s energetskim zahtjevima koji izviru iz mehanike loma. Modeli koji su razvijeni na temelju ovog pristupa nazivaju se modelima kohezivnih pukotina.

Paralelno s razvojem diskretnih pukotina, razvija se pristup razmazanih pukotina. Rashid (1968.) je prvi predložio mehanizam kojim se utjecaj pukotina unutar elementa uzima u obzir promjenom ponašanja elementa iz izotropnog u ortotropno, tj. kako se pri pojavi pukotine elementu smanjuje krutost u smjeru okomitom na smjer pukotine. Razlikujemo dva osnovna modela razmazanih

pukotina: (i) model fiksnih pukotina, te (ii) model rotirajućih pukotina, čija je osnovna razlika u smjeru pukotine - u slučaju fiksnih pukotina, smjer pukotina ostaje nepromijenjen, dok se kod modela rotirajućih pukotina normala na pukotinu usklađuje s najvećom glavnom deformacijom tijekom čitavog procesa raspucavanja (npr. Rots, 1991., de Borst, 2002.).

Implementacija ovog pristupa u metodu konačnih elemenata relativno je jednostavna, a također se zbog zadržavanja kontinuiteta uklapa u samu prirodu formulacije metode konačnih elemenata. Osnovna ideja sastoji se u promjeni krutosti elementa, te nema potrebe za promjenom mreže konačnih elemenata s razvojem pukotina. Glavni nedostatak ovog pristupa je što rezultati ovise o diskretizaciji. Naime, primjena konstitutivnog zakona u kojem je oštećenje modelirano omekšanjem (naprezanja se smanjuju s povećanjem deformacija) u slučaju kada veličina konačnih elementa teži k nuli uzrokuje lokalizaciju oštećenja u traci čija je širina jednaka nuli, što onda znači da je i ukupna energija potrošena u formiranju oštećenja jednaka nuli (Bažant i Planas, 1998). Ovaj se problem ne pojavljuje kod pristupa s kohezivnim pukotinama, budući se tamo omekšanje definira pomoću konstitutivnog zakona koji povezuje naprezanje koje djeluje na pukotinu sa širinom pukotine.

Kako bismo dobili objektivne rezultate, neovisne o veličini konačnih elemenata, moguće je nekoliko rješenja. Jedno od njih predložili su Bažant i Oh (1983.) u sklopu metode pukotinskih traka na način da je konstitutivni zakon (dio koji odgovara omekšanju) potrebno energetski povezati s veličinom konačnih elemenata. Ovaj je model vrlo jednostavan, i numerički vrlo efikasan. U nekim slučajevima i dalje mogu postojati problemi s diskretizacijom, primjerice kada se smjer pukotine ne poklapa s orijentacijom konačnih elemenata. No i to se može relativno lako riješiti: u prvom koraku provedemo proračun s pravilnom mrežom kako bismo saznali putanju pukotine, a onda u drugom koraku progustimo mrežu i uskladimo je s putanjom pukotine, te ponovimo proračun (Bažant i Planas, 1998.).

Složenija rješenja ovog problema uključuju nelokalne formulacije (uz parametar karakteristične duljine koji sprječava lokalizaciju deformacija u traci čija je širina jednaka nuli). U prvu skupinu spadaju formulacije integralnog oblika u kojem stanje naprezanja u nekoj točki kontinuuma ne ovisi samo o varijablama naprezanja u toj točki, već i o raspodjeli varijabli unutar čitavog kontinuuma ili barem jednog dijela kontinuuma u okolini promatrane točke (Pijaudier-Cabot i Bažant, 1987., Ožbolt i Bažant, 1996., Bažant i Jirasek, 2002.). Pristup podrazumijeva zamjenu određene varijable nelokalnim dijelom dobivenim uprosječivanjem unutar okoline promatrane točke. Različiti oblici težinskih funkcija uprosječenja mogu se pronaći u Planas i sur. (1993.).

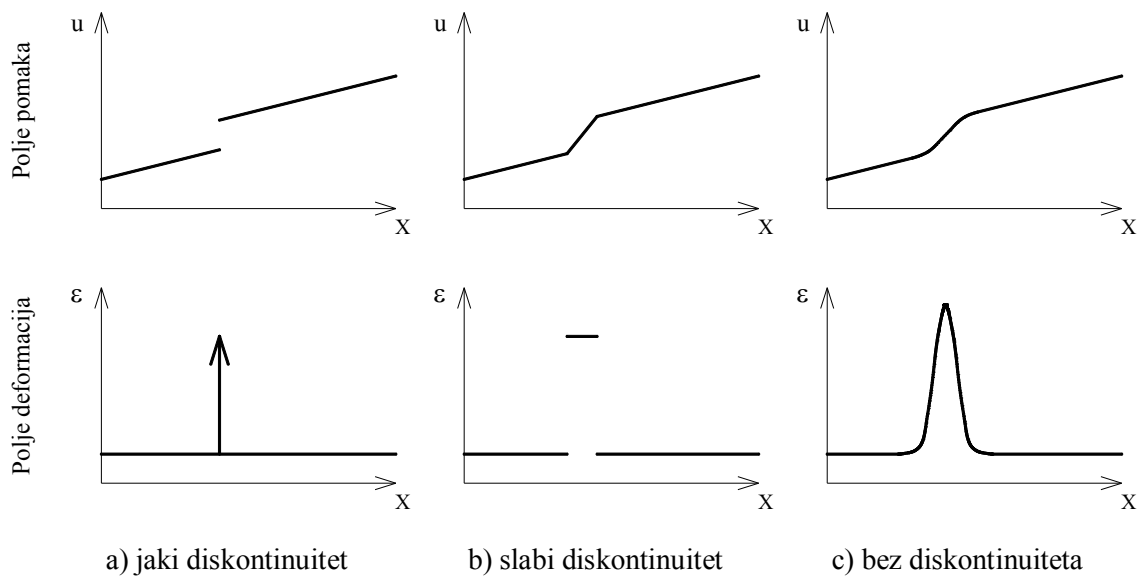
U drugu skupinu spadaju formulacije gradijentnog oblika, u kojima se umjesto integrala, utjecaj okolnog stanja uzima se u obzir primjenom derivacija (samo prvih ili i višeg reda) promatranih varijabli.



S matematičkog gledišta kinematski opis pukotine može se opisati pomoću Slike 2.1 (Jirasek, 2007.). Postoje tri različita opisa. U slučaju (i) jakog diskontinuiteta diskontinuitet se javlja u polju pomaka, dok polje deformacija sadrži singularni dio. Ovaj opis pukotine odgovara kohezivnim modelima pukotine. Polje pomaka može se zamijeniti s pravilnim dijelom i diskontinuitetom (skokom), kojeg modeliramo Heavisideovom funkcijom; polje deformacija se tako može zapisati kao kombinacija pravilnog dijela (kojeg dobivamo diferencijacijom polja pomaka) i singulariteta, kojeg možemo opisati Diracovom delta funkcijom (Simo i sur., 1993.).

U slučaju (ii) slabog diskontinuiteta polje pomaka je neprekinuta funkcija, dok se u polju deformacija javlja diskontinuitet. Ovaj bi opis odgovarao metodi pukotinskih traka. Ova se dva opisa mogu povezati: za slučaj kada širina lokalizirane zone diskontinuiteta teži k nuli, slabi diskontinuitet pretvara se u opis pukotine s jakim diskontinuitetom (Oliver i Huespe, 2004.).

Kao poseban slučaj definiran je (iii) opis bez diskontinuiteta, u kojem su i polje pomaka i polje deformacija neprekinute funkcije. Polje deformacija je lokalizirano u uskoj zoni s prijelazom na manje vrijednosti u okolnom području, što odgovara pristupu nelokalnih formulacija.



Slika 2.1 Kinematski opis pukotine za slučaj jednodimenzionalnog problema (Jirasek, 2007.)

Nedavno su vrlo popularni postali pristupi koji uključuju ugradnju diskontinuiteta u elemente (*elements with embedded discontinuities*). Oni kombiniraju neke karakteristike i diskretnog i razmazanog pristupa modeliranja raspucavanja (Jirasek, 2000). Ovaj je pristup predložen kako bi se izbjegao problem utjecaja veličine mreže na rezultate (*mesh dependency*) koji se javlja kod razmazanih modela, i problem ovisnosti propagacije pukotine o rasporedu konačnih elemenata (*bias dependency*) kod diskretnih modela (Wells i Sluys, 2001.a). Najprije su razvijeni modeli u kojima je u elemente ugrađen diskontinuitet u polju deformacija (npr. Belytschko i sur. (1988.) predložili su element koji

sadrži traku lokaliziranih deformacija omeđenu dvjema paralelnim linijama slabog diskontinuiteta), a potom su uslijedili i elementi s diskontinuitetom u polju pomaka.

Pristup jakog diskontinuiteta unutar kontinuuma (*continuum strong discontinuity approach*), koji je primijenjen u ovom radu, temelji se na ugradnji jakog diskontinuiteta u konačni element na način da se neprekinuto polje pomaka konačnog elementa obogaćuje dodatnim stupnjevima slobode kojima modeliramo skok u polju pomaka (npr. Armero i Garikipati, 1996., Oliver 1996., Jirasek i Zimmermann, 2001., Mosler i Meschke, 2003., Oliver i Huespe, 2004., Feist i Hofstetter 2006., Linder i Armero, 2007.). Prilikom obogaćenja na razini elementa dodatni stupnjevi slobode najčešće se statički kondenziraju na razini elementa, i promatraju kao lokalne varijable elementa.

Obogaćenje dodatnim stupnjevima slobode moguće je, također, i na razini čvorova (npr. Moes i sur., 1999., Wells i Sluys, 2001.b, Moes, 2011.). Osnovna razlika između obogaćenja na razini elemenata ili čvorova je što se prilikom obogaćenja na razini čvorova dodatni stupnjevi slobode tretiraju kao globalne varijable, pa je stoga ovaj pristup numerički zahtjevniji (Oliver i sur., 2006.).

Nastajanje pukotine može se predvidjeti i u međuelementima (*interface elements*) između dva konačna elementa, čime se vrlo uspješno može primijeniti princip kohezivnih pukotina. Riječ je o elementima čija je debljina u nedeformiranom stanju jednaka nuli. Međuelementi se mogu postaviti između svih elemenata promatranog problema, ili ukoliko je položaj pukotine unaprijed poznat – postaviti samo na očekivano mjesto pukotine (npr. Feenstra i sur., 1991., Alfano i Crisfield, 2001.). Ostale metode uključuju algoritme dodavanja novih međuelemenata, npr. okomito na smjer glavnog vlačnog naprezanja elementa, nakon što je došlo do prekoračenja kriterija pojave pukotine (Gerstle i Xie, 1992., Prasad i Krishnamoorthy, 2002., Yang i Chen, 2005.). Prilikom korištenja međuelemenata posebnu pažnju potrebno je posvetiti početnoj krutosti međuelementa, koja mora biti dovoljno velika da pravilno osigura modeliranje stanja prije raspucavanja, a ujedno ne smije biti prevelika kako ne bi uzrokovala numeričke poteškoće (Alfano i Crisfield, 2001., Yang i Chen, 2005.).

U dosad navedenim radovima, diskretizacija kontinuuma provedena je pomoću ravninskih ili prostornih konačnih elemenata, a vrlo se malo radova može pronaći u kojem je modeliranje raspucavanja primijenjeno na gredne konačne elemente. Neki od njih su: Bergan i Holand (1979.), Manfredi i Pecce (1998.), Marfia i sur. (2004.), Wang (2006.), Oliveira i sur. (2008.), Bajc i sur. (2013.), gdje se pukotina nalazi na krajevima elementa. Vrlo zanimljiv model razvili su Aldstedt i Bergan (1978.): predložili su gredni konačni element s poprečnim pukotinama na rubovima elementa, uz uključenje proklizavanja između armature i betona, a dodatno su razmatrali i utjecaj puzanja betona.

Uz prethodno opisane modele, treba također spomenuti i jedan drukčiji pristup lokalizacije oštećenja (prvenstveno u grednim konačnim elementima) - primjenu plastičnih zglobova. Za modeliranje omekšanja najčešće se koristi konstitutivni zakon koji povezuje moment savijanja i zakrivljenost presjeka. Kako bi se osigurala neovisnost o diskretizaciji mreže, i ovdje je potrebno dio

konstitutivnog odnosa koji odgovara omekšanju povezati s karakterističnom duljinom plastičnog zgloba, koja se promatra kao materijalni parametar (Kim i Lee, 1991., Kwak i Kim, 2002.). Bažant i sur. (1987.) su umjesto konstitutivnog odnosa momenta savijanja u ovisnosti o zakrivljenosti element podijelili na slojeve (gdje u svakom sloju promatraju samo stanje na sredini sloja) i primijenili odgovarajući konstitutivni zakon za beton s omekšanjem. Ovaj pristup može biti numerički zahtjevniji kod velikih konstrukcija s većim brojem stupnjeva slobode. Nama zanimljiviji pristup u modeliranju plastičnih zglobova u grednim konačnim elementima je primjena jakog diskontinuiteta, koja je primijenjena u npr. Ehrlich i Armero (2005.), Armero i Ehrlich (2006.), Jukić i sur. (2013.). Budući je omekšanje definirano odgovarajućim disipativnim mehanizmom na mjestu diskontinuiteta, rezultati ne ovise o mreži konačnih elemenata.

Naposljetku, kad govorimo o modeliranju armiranobetonskih konstrukcija bitno je spomenuti i pristup u kojem se sudjelovanje betona u nosivosti na vlak između pukotina nakon raspucavanja (*tension stiffening*) modelira primjenom razmazanog pristupa promjenom konstitutivnog zakona: (i) betona u vlaku (npr. Belarbi i Hsu, 1994., Abrishami i Mitchell, 1996., Bischoff, 2001., Stramandinoli i La Rovere, 2008., Zanuy, 2010.) ili (ii) armature u vlaku (npr. CEB-FIP Model Code 1990, 1993., CEB-FIP Model Code for concrete structures, 1978.). Ovi se konstitutivni zakoni definiraju na osnovu rezultata eksperimentalnih ispitivanja vlačno napreznih armiranobetonskih uzoraka, a opisuju se preko srednje deformacije uzorka. Primjena ovog pristupa ne daje podatke ni o položaju ni o širini pukotina.

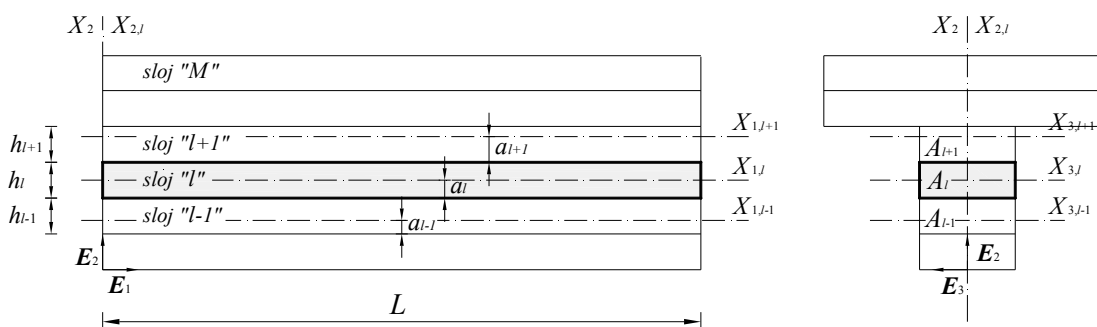
Svaki od navedenih pristupa ima svojih prednosti i nedostataka. U slučaju kada su položaj i širina pukotina od posebnog interesa, prednost treba dati diskretnom pristupu budući je kinematskim opisom moguće realnije opisati diskontinuitet na mjestu pukotine. Gredni konačni elementi s ugrađenim diskontinuitetom nisu do sad posebno istraživani, a možemo očekivati kako bi upravo zbog smanjenog broja stupnjeva slobode u odnosu na ravninske/prostorne elemente trebali rezultirati numerički efikasnijim rješenjem. Također, budući svaki element ima ugrađenu pukotinu eliminira se potreba za promjenom mreže konačnih elemenata prilikom propagacije pukotine.

### 3 VIŠESLOJNI GREDNI ARMIRANOBETONSKI KONAČNI ELEMENT S UGRAĐENOM POPREČNOM PUKOTINOM

Ovo poglavlje sadrži formulaciju grednog konačnog elementa s ugrađenom poprečnom pukotinom. Opisana je (i) kinematika raspucavanja, i način ugradnje jakog diskontinuiteta u polje pomaka i polje kuta zaokreta; (ii) kinematika proklizavanja armaturnih šipki u odnosu na okolni beton. Polazimo od višeslojnog grednog konačnog elementa, u kojem svaki sloj predstavlja jedan Reissnerov gredni element (Reissner, 1972.).

#### 3.1 Višeslojni gredni konačni element s krutom vezom između slojeva

Promatramo gredu duljine  $L$ , koja je u početnom položaju ravna (Slika 3.1), čiji se poprečni presjek sastoji od  $M$  slojeva međusobno povezanih krutom vezom bez mogućnosti proklizavanja ili međusobnog odvajanja (Škec i Jelenić, 2013.). Svaki sloj može se zaokretati neovisno o drugim slojevima. Visina proizvoljno odabranog sloja  $l$  označena je s  $h_l$ , udaljenost od donjeg ruba sloja do referentne osi sloja označena je s  $a_l$ , dok je površina sloja jednaka  $A_l$ . Svaki sloj ima svoj materijalni koordinatni sustav definiran ortonormiranim baznim vektorima  $\mathbf{E}_{1,l}$ ,  $\mathbf{E}_{2,l}$  i  $\mathbf{E}_{3,l}$  s koordinatnim osima  $X_{1,l}$ ,  $X_{2,l}$  i  $X_{3,l}$ . Koordinatna os  $X_{1,l}$  poklapa se s referentnom osi svakog sloja, koje su proizvoljno odabrane i međusobno paralelne. Poprečni presjek simetričan je s obzirom na vertikalnu glavnu os  $X_2$  definiranu baznim vektorom  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2,l}$ .



Slika 3.1 Višeslojni gredni konačni element

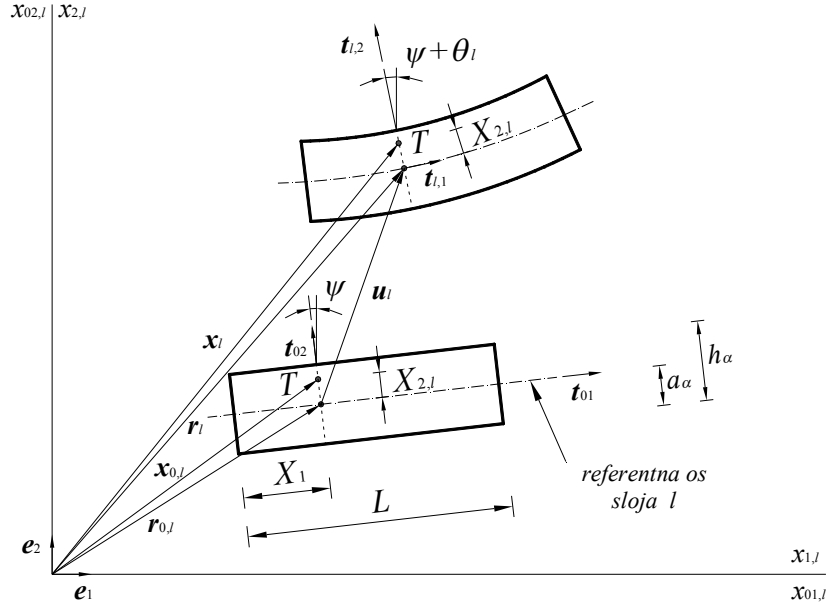
Referentne osi slojeva su u početnom nedeformiranom položaju definirane baznim vektorom  $\mathbf{t}_{01}$ , koji s prostornim baznim vektorom  $\mathbf{e}_2$  zatvara kut  $\psi$  (Slika 3.2). Položaj materijalne točke  $T(X_1, X_{2,l})$  u nedeformiranom položaju možemo opisati početnim vektorom položaja  $\mathbf{r}_{0,l}(X_1)$

$$\mathbf{x}_{0,l}(X_1, X_{2,l}) = \mathbf{r}_{0,l}(X_1) + X_{2,l} \mathbf{t}_{02}, \quad (3.1)$$

gdje je vektor  $\mathbf{t}_{0j}$  definiran kao (oznaka  $j$  odnosi se na odgovarajuću os:  $j = 1, 2$ ):

$$\mathbf{t}_{0j} = \Lambda_0 \mathbf{e}_j, \Lambda_0 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} = [\mathbf{t}_{01} \quad \mathbf{t}_{02}]. \quad (3.2)$$

Prilikom deformiranja (Slika 3.2) poprečni presjeci ostaju ravni, ali ne nužno i okomiti na deformiranu referentnu os sloja (Timošenkova gredna teorija s Bernoulijevom hipotezom). Materijalni bazni vektor  $\mathbf{E}_3$  ostaje okomit na ravninu definiranu prostornim vektorima  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$ .



Slika 3.2 Položaj sloja  $l$  u početnom i deformiranom položaju

Orijentacija poprečnog presjeka svakog sloja u deformiranom položaju opisana je baznim vektorom  $\mathbf{t}_{l,j}$  kao

$$\mathbf{t}_{l,j} = \Lambda_l \mathbf{e}_j, \Lambda_l = \begin{bmatrix} \cos(\psi + \theta_l) & -\sin(\psi + \theta_l) \\ \sin(\psi + \theta_l) & \cos(\psi + \theta_l) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

pri čemu se matrica transformacije  $\Lambda_l$  u slučaju malenih pomaka i deformacija transformira u

$$\Lambda_l = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\theta_l \\ \theta_l & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_l \\ \theta_l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Kutevi zaokreta pojedinog sloja  $\theta_l$  u potpuno su zavisni samo o koordinati  $X_1$ , odnosno možemo pisati  $\theta_l = \theta_l(X_1)$ . Položaj materijalne točke  $T$  u sloju  $l$  u deformiranom položaju može se izraziti kao

$$\mathbf{x}_l(X_1, X_{2,l}) = \mathbf{r}_l(X_1) + X_{2,l} \mathbf{t}_{l,2}(X_1), \quad (3.5)$$

gdje je  $\mathbf{r}_l(X_1)$  vektor položaja. Pomak sloja  $l$  u početnom nedeformiranom i deformiranom položaju može se definirati u odnosu na referentnu os kao

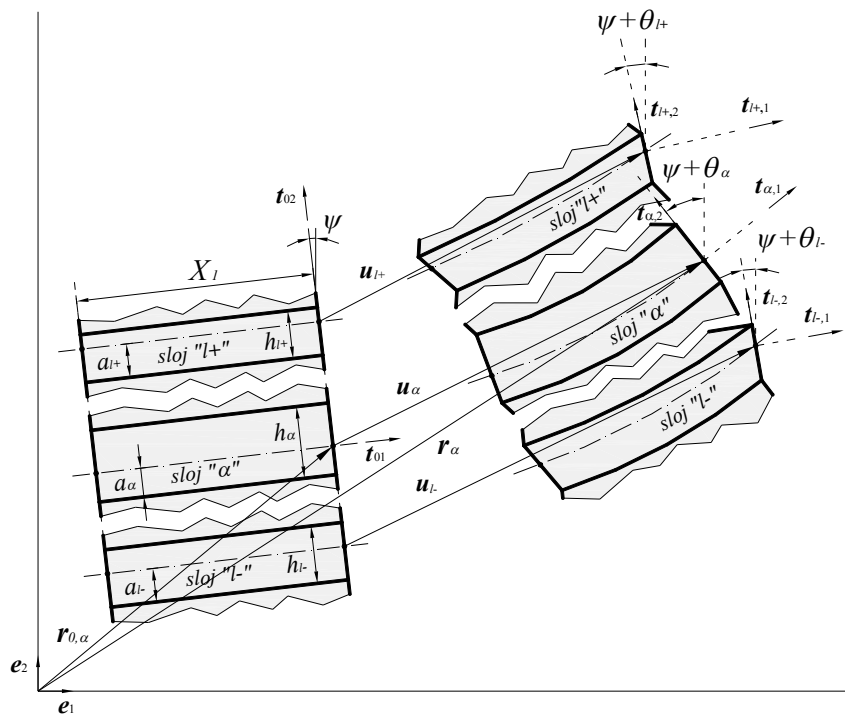
$$\mathbf{r}_l(X_1) = \mathbf{r}_{0,l}(X_1) + \mathbf{u}_l(X_1), \quad (3.6)$$

gdje je  $\mathbf{u}_l(X_1)$  vektor pomaka referentne osi sloja  $l$ .

### 3.1.1 Vezne jednadžbe višeslojnog grednog konačnog elementa

#### 3.1.1.1 Opis kinematike slojeva bez poprečne pukotine

Budući su slojevi međusobno povezani krutom vezom bez mogućnosti proklizavanja i odvajanja, pomak proizvoljnog sloja  $l$  može se zapisati preko pomaka proizvoljno odabranog referentnog sloja (kojeg ćemo označiti oznakom  $\alpha$ ) i pripadajućih kuteva zaokreta. Referentna os sloja  $\alpha$  time postaje referentna os višeslojne grede. Na Slici 3.3 prikazana je višeslojna greda s proizvoljnim brojem slojeva, u početnom i deformiranom položaju, s označenim slojem  $\alpha$ , te jednim slojem koji se nalazi ispod ( $l$ -) i jednim iznad sloja  $\alpha$  ( $l$ +). U deformiranom stanju, referentne osi svih slojeva se deformiraju i poprečni presjeci zaokreću, što je definirano jediničnim baznim vektorima  $\mathbf{t}_{\alpha,2}$ ,  $\mathbf{t}_{l+,2}$  i  $\mathbf{t}_{l-,2}$ .



Slika 3.3 Položaj višeslojne grede u početnom i deformiranom položaju

Za proizvoljno odabrani sloj  $l$  (koji se može nalaziti ispod ili iznad sloja  $\alpha$ ) vektor pomaka  $\mathbf{u}_l$  može se izraziti preko vektora pomaka  $\mathbf{u}_\alpha$  i kuteva zaokreta  $\theta_j$ , gdje je  $j \in [\zeta, \dots, \xi]$  primjenom izraza (Škec i Jelenić, 2013.)

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{u}_\alpha + a_i(\mathbf{t}_{l,2} - \mathbf{t}_{\alpha,2}) - a_\alpha(\mathbf{t}_{\alpha,2} - \mathbf{t}_{\alpha,2}) + \text{sgn}(l - \alpha) \sum_{s=\zeta}^{\xi-1} h_s(\mathbf{t}_{s,2} - \mathbf{t}_{\alpha,2}), \quad (3.7)$$

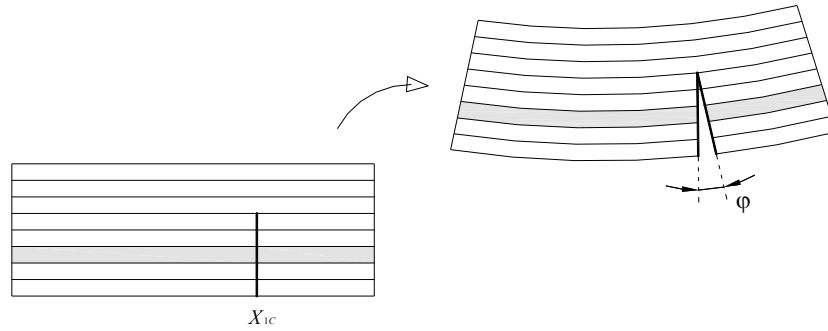
gdje je

$$\zeta = \min(\alpha, l), \quad \xi = \max(\alpha, l). \quad (3.8)$$

Korištenjem ovog zapisa broj nepoznatih funkcija problema reducira se na pomak referentnog sloja  $\alpha$  i kuteve zaokreta poprečnih presjeka svih slojeva.

### 3.1.1.2 Opis kinematike slojeva s ugrađenom poprečnom pukotinom

Budući da beton ima relativno malu vlačnu čvrstoću (oko 10% tlačne čvrstoće), na mjestu gdje dolazi do njenog prekoračenja javlja se pukotina (Slika 3.4). U predloženom modelu pretpostavljamo kako se pukotina, koja se nalazi u  $X_{1c}$ , širi po cijeloj visini sloja u kojem je vlačna čvrstoća (provjerena na sredini sloja) prekoračena. Jednom raspucani sloj ostaje raspucan za sve vrijeme analize. Kako je konačni element višeslojni, na ovaj način moguće je modelirati širenje pukotine po visini grede.



Slika 3.4 Raspucavanje elementa pri prekoračenju vlačne čvrstoće

Prilikom raspucavanja sloja  $\alpha$  javlja se diskontinuitet u polju pomaka tog sloja (Slika 3.5). Usljed toga, razlikujemo polje pomaka sloja  $\alpha$ ,  $\mathbf{u}_\alpha(X_1)$ , i polje pomaka višeslojne grede,  $\mathbf{u}(X_1)$ , koja je definirano kao kontinuirano polje po  $X_1$ , gdje je  $X_1 \in [0, L]$ . Ova su dva polja povezana izrazom

$$\mathbf{u}_\alpha(X_1) = \mathbf{u}(X_1) + p(X_1)\mathbf{t}^*(X_1). \quad (3.9)$$

U slučaju geometrijski linearne analize, vrijedi

$$\mathbf{t}^* = \frac{\mathbf{t}_{01} + \mathbf{u}'}{\|\mathbf{t}_{01} + \mathbf{u}'\|}, \quad (3.10)$$

$$p\mathbf{t}^* = p[\mathbf{t}_{01} + (\mathbf{t}^* \otimes \nabla_{\mathbf{u}})_{\mathbf{u}=0} \mathbf{u} + H.O.T.] = p\mathbf{t}_{01} + H.O.T., \quad (3.11)$$

gdje su  $H.O.T.$  članovi višeg reda, pa se (3.9) transformira u jednostavniji izraz

$$\mathbf{u}_\alpha(X_1) = \mathbf{u}(X_1) + p(X_1)\mathbf{t}_{01}. \quad (3.12)$$

Funkcija  $p(X_1)$  može se aproksimirati s

$$p(X_1) = \delta_{\alpha c} k(X_1) w \quad (3.13)$$

gdje  $\delta_{\alpha c}$  pokazuje je li sloj  $\alpha$  raspucan

$$\delta_{\alpha c} = \begin{cases} 0, & \varepsilon_\alpha \leq f_{ct}/E_c \\ 1, & \varepsilon_\alpha > f_{ct}/E_c \end{cases}, \quad (3.14)$$

pri čemu je  $\varepsilon_\alpha$  normalna deformacija,  $f_{ct}$  vlačna čvrstoća u sredini sloja  $\alpha$  te  $E_c$  modul elastičnosti betona.





Iz (3.17) slijedi kako su osnovne nepoznanice problema horizontalna i vertikalna komponenta vektora pomaka  $\mathbf{u}$  i kutevi zaokreta poprečnih presjeka svih slojeva  $\beta_1, \dots, \beta_M$ . Dodatno, kao unutarnji stupnjevi slobode javljaju se širina pukotine  $w$  u sredini sloja  $\alpha$  te kutevi otvora pukotine  $\varphi_l$  u svim raspucanim slojevima, te je time ukupan broj nepoznatih funkcija jednak  $2+M$  ( $\mathbf{u}, \beta_1, \dots, \beta_M$ ) i najveći broj ukupnih nepoznatih parametara  $1+M$  ( $w, \varphi_1, \dots, \varphi_M$ ).

### 3.1.2 Kinematičke jednadžbe

Nelinearne kinematičke jednadžbe prema Reissnerovoj grednoj teoriji (Reissner, 1972.) pojednostavljaju se u slučaju kada rotacije poprečnih presjeka postaju male, te poprimaju poznati Timošenkov oblik

$$\boldsymbol{\gamma}_l = \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \gamma_l \end{Bmatrix} = \mathbf{\Lambda}_0^T (\mathbf{u}'_l - \theta_l \mathbf{t}_{02}) = \begin{Bmatrix} u'_l \cos \psi + v'_l \sin \psi \\ -u'_l \sin \psi + v'_l \cos \psi - \theta_l \end{Bmatrix}, \quad (3.18)$$

$$\kappa_l = \theta'_l, \quad (3.19)$$

gdje su  $\varepsilon_l$ ,  $\gamma_l$  i  $\kappa_l$  uzdužna i posmična deformacija te zakrivljenost poprečnog presjeka, definirane s obzirom na referentnu os sloja  $l$  kao funkcije samo uzdužne koordinate  $X_1$ .

### 3.1.3 Konstitutivne jednadžbe

Uzdužna deformacija  $D_l$  vlakna koji se nalazi na udaljenosti  $X_{2,l}$  od referentne osi sloja  $l$  definirana je kao

$$D_l = D_l(X_1, X_{2,l}) = \varepsilon_l(X_1) - X_{2,l} \kappa_l(X_1). \quad (3.20)$$

Normalno naprezanje funkcija je uzdužne deformacije (3.20), te također i povijesti deformiranja  $D_{max}$  ovisno o usvojenom konstitutivnom zakonu materijala:

$$\sigma_l = \sigma_l(D_l, D_{max}). \quad (3.21)$$

Posmična naprezanja  $\tau_l$  ovise o posmičnim deformacijama u poprečnom presjeku, no u slučaju Timošenkove gredne teorije usvajaju se kao konstantna po visini sloja  $l$

$$\tau_l = \tau_l(\gamma_l). \quad (3.22)$$

Rezultante naprezanja i moment rezultanti naprezanja u odnosu na referentnu os sloja  $l$  dobivaju se kao rezultat integracije naprezanja po površini poprečnog presjeka sloja  $A_l$  i jednaki su

$$\begin{aligned} N_l &= \int_{A_l} \sigma_l dA, \\ T_l &= A_{s,l} \tau_l, \\ M_l &= - \int_{A_l} X_{2,l} \sigma_l dA, \end{aligned} \quad (3.23)$$

gdje je  $A_{s,l}$  posmična površina sloja  $l$ , dok  $N_l$ ,  $T_l$  i  $M_l$  predstavljaju normalnu i poprečnu silu, te moment savijanja u sloju  $l$  u poprečnom presjeku na mjestu  $X_1$ .

### 3.1.4 Jednadžbe ravnoteže – princip virtualnog rada

Jednadžbe ravnoteže u nastavku su izvedene primjenom principa virtualnog rada (Zienkiewicz i sur., 2005.): prema principu virtualnog rada za statički problem, rad unutarnjih sila višeslojne grede na virtualnim deformacijama ( $V_{B,i}$ ) jednak je radu vanjskih sila na virtualnim pomacima ( $V_{B,e}$ ):

$$V \equiv V_{B,i} - V_{B,e} = 0, \quad (3.24)$$

gdje su u slučaju višeslojne grede sastavljene od  $M$  slojeva ovi virtualni radovi definirani kao:

$$V_{B,i} = \sum_{l=1}^M \int_0^L (\bar{\gamma}_l \cdot \mathbf{N}_l + \bar{\kappa}_l M_l) dX_1, \quad (3.25)$$

$$V_{B,e} = \sum_{l=1}^M \left[ \int_0^L (\bar{\mathbf{u}}_l \cdot \mathbf{f}_l + \bar{\theta}_l m_l) dX_1 + \bar{\mathbf{u}}_{l,0} \cdot \mathbf{F}_{l,0} + \bar{\theta}_{l,0} M_{l,0} + \bar{\mathbf{u}}_{l,L} \cdot \mathbf{F}_{l,L} + \bar{\theta}_{l,L} M_{l,L} \right], \quad (3.26)$$

pri čemu je:

$$\mathbf{N}_l = \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \end{Bmatrix}. \quad (3.27)$$

$\mathbf{F}_{l,0}$  i  $\mathbf{F}_{l,L}$  su koncentrirane sile, dok su  $M_{l,0}$  i  $M_{l,L}$  momenti savijanja koji djeluju na početku (0) ili na kraju grede ( $L$ ). Raspodijeljene sile i momenti savijanja označeni su s  $\mathbf{f}_l$  i  $m_l$  (Slika 3.7).

Virtualne deformacije i zakrivljenosti predstavljeni su oznakama  $\bar{\gamma}_l$  i  $\bar{\kappa}_l$ , dok su virtualni pomaci i rotacije  $\bar{\mathbf{u}}_l$  i  $\bar{\theta}_l$ .

Iz (3.18) i (3.19) slijedi:

$$\bar{\gamma}_l = \mathbf{\Lambda}_0^T (\bar{\mathbf{u}}_l' - \bar{\theta}_l \mathbf{t}_{02}), \quad (3.28)$$

$$\bar{\kappa}_l = \bar{\theta}_l'. \quad (3.29)$$

Na temelju (3.28) i (3.29) virtualni rad unutarnjih sila može se zapisati u obliku:

$$V_{B,i} = \sum_{l=1}^M \int_0^L \left( \langle \bar{\mathbf{u}}_l^T \quad \bar{\theta}_l \rangle \mathbf{D}_l^T \right) \mathbf{L} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_l \\ M_l \end{Bmatrix} dX_1, \quad (3.30)$$

dok virtualni rad vanjskih sila postaje:

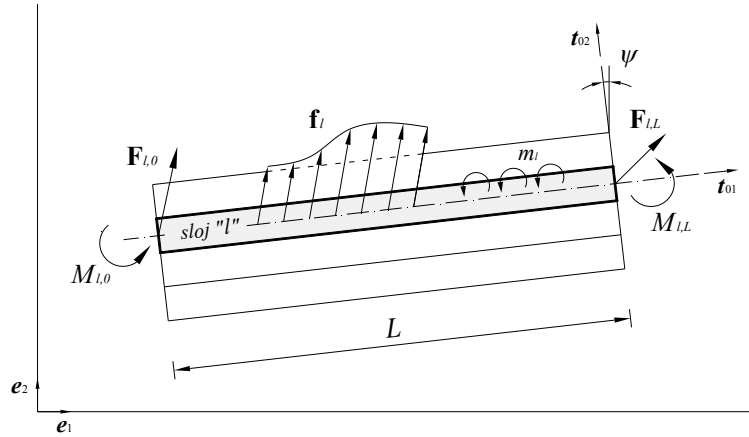
$$V_{B,e} = \sum_{l=1}^M \int_0^L \left[ \langle \bar{\mathbf{u}}_l^T \quad \bar{\theta}_l \rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_l \\ m_l \end{Bmatrix} dX_1 + \langle \bar{\mathbf{u}}_l^T \quad \bar{\theta}_l \rangle_0 \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{l,0} \\ M_{l,0} \end{Bmatrix} + \langle \bar{\mathbf{u}}_l^T \quad \bar{\theta}_l \rangle_L \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{l,L} \\ M_{l,L} \end{Bmatrix} \right]. \quad (3.31)$$

Matrica  $\mathbf{D}_l$  koja sadrži diferencijalne operatore i rotacijska matrica  $\mathbf{L}$  jednake su:

$$\mathbf{D}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{d}{dX_1} & -\mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}^T & \frac{d}{dX_1} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

pri čemu je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica dimenzija  $2 \times 2$ , dok je  $\mathbf{0}$  nulvektor drugog reda.



Slika 3.7 Definicija vanjskih sila

Iz (3.3) slijedi kako je za slučaj geometrijski linearne analize

$$\bar{\mathbf{t}}_{l,2} = \bar{\theta}_l \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Lambda_0 \mathbf{e}_2 = -\bar{\theta}_l \bar{\mathbf{t}}_{01}, \quad (3.34)$$

što je potrebno za definiranje virtualne nepoznate funkcije pomaka  $\bar{\mathbf{u}}_l$  iz (3.17) kao

$$\bar{\mathbf{u}}_l = \bar{\mathbf{u}} + \delta_{\alpha C} k \bar{w} \mathbf{t}_{01} - a_i \bar{\theta}_i \mathbf{t}_{01} + a_\alpha \bar{\theta}_\alpha \mathbf{t}_{01} - \text{sgn}(l - \alpha) \sum_{s=\zeta}^{\xi-1} h_s \bar{\theta}_s \mathbf{t}_{01}. \quad (3.35)$$

Primjenom (3.35) možemo zapisati transformaciju

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{u}}_l^T \quad \bar{\theta}_l \rangle &= \langle (\bar{\mathbf{u}} + \delta_{\alpha C} k \bar{w} \mathbf{t}_{01})^T \quad \bar{\theta}_1 \quad \dots \quad \bar{\theta}_M \rangle \mathbf{B}_l^T = \\ &= \langle \bar{\mathbf{u}}^T \quad \bar{\theta}_1 \quad \dots \quad \bar{\theta}_M \rangle \mathbf{B}_l^T + \delta_{\alpha C} k \bar{w} \langle \mathbf{t}_{01}^T \quad \mathbf{0}_M^T \rangle \mathbf{B}_l^T = \left[ \bar{\mathbf{p}}_f^T + \delta_{\alpha C} k \bar{w} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix}^T \right] \mathbf{B}_l^T, \end{aligned} \quad (3.36)$$

gdje je  $\bar{\mathbf{p}}_f^T = \langle \bar{\mathbf{u}}^T \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2 \quad \dots \quad \bar{\theta}_M \rangle$  vektor virtualnih nepoznatih funkcija,  $\mathbf{0}_M$   $M$ -dimenzionalni nulvektor, a  $\mathbf{B}_l$  matrica transformacija koja povezuje nepoznate virtualne funkcije  $\bar{\mathbf{u}}_l$  i  $\bar{\theta}_l$  sloja  $l$  i osnovne virtualne funkcije  $\bar{\mathbf{u}}$  i  $\bar{\theta}_1 \dots \bar{\theta}_M$ , definirana kao (Škec i Jelenić, 2013.)

$$\mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -d_{l,\zeta} \mathbf{t}_{01} & \dots & d_{l,s} \mathbf{t}_{01} & \dots & -d_{l,\xi} \mathbf{t}_{01} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 & \dots & 0 & \delta_{l\zeta} & \dots & 0 & \dots & \delta_{l\xi} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = [\tilde{\mathbf{I}} \quad \tilde{\mathbf{B}}_l], \quad (3.37)$$

pri čemu su

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -d_{l,\zeta} \mathbf{t}_{01} & \dots & d_{l,s} \mathbf{t}_{01} & \dots & -d_{l,\xi} \mathbf{t}_{01} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ 0 & \dots & 0 & \delta_{l\zeta} & \dots & 0 & \dots & \delta_{l\xi} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$\delta_{lk} = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases} \quad (3.39)$$

$$d_{l,\zeta} = \text{sgn}(l - \alpha)(h_\zeta - a_\zeta), \quad d_{l,\xi} = \text{sgn}(l - \alpha)a_\xi, \quad (3.40)$$

$$d_{l,s} = \text{sgn}(l - \alpha)h_s, \quad s \in [\zeta + 1, \dots, \xi - 1].$$

Matrica  $\tilde{\mathbf{B}}_l$  u (3.38) ima dimenzije  $3 \times M$ . Uvrštavanjem (3.36) u (3.30) i (3.31) virtualni radovi unutarnjih i vanjskih sila postaju

$$V_{B,i} = \sum_{l=1}^M \int_0^L \left[ \left( \left( \bar{\mathbf{p}}_f^T + \delta_{ac} k \bar{w} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \right)^T \mathbf{B}_l^T \right) \mathbf{D}_l^T \right] \mathbf{L} \begin{Bmatrix} N_l \\ M_l \end{Bmatrix} dX_1, \quad (3.41)$$

$$V_{B,e} = \sum_{l=1}^M \int_0^L \left[ \left( \bar{\mathbf{p}}_f^T + \delta_{ac} k \bar{w} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \right)^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_l \\ m_l \end{Bmatrix} dX_1 + \bar{\mathbf{p}}_{f,0}^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{l,0} \\ M_{l,0} \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{p}}_{f,L}^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{l,L} \\ M_{l,L} \end{Bmatrix} \right]. \quad (3.42)$$

Korištenjem (3.27) virtualni rad unutarnjih sila (3.41) možemo zapisati kao

$$V_{B,i} = \sum_{l=1}^M \int_0^L \left[ \left( \mathbf{L}^T \mathbf{D}_l \left( \mathbf{B}_l \bar{\mathbf{p}}_f + \delta_{ac} k \bar{w} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \right) \right)^T \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} dX_1 \right]. \quad (3.43)$$

Budući je

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D}_l = \mathbf{L}^T \left( \begin{bmatrix} d/dX_1 & 0 & 0 \\ 0 & d/dX_1 & 0 \\ 0 & 0 & d/dX_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin \psi \\ 0 & 0 & -\cos \psi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{L}^T \frac{d}{dX_1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

te matrica transformacija  $\mathbf{B}_l$  iz (3.37) konstanta, (3.43) sada možemo prikazati u obliku

$$V_{B,i} = \sum_{l=1}^M \int_0^L \left[ \left( \mathbf{L}^T \left( \mathbf{B}_l \bar{\mathbf{p}}_f + \delta_{ac} k' \bar{w} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_l \bar{\mathbf{p}}_f \right)^T \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} dX_1 \right]. \quad (3.45)$$

Gornji se izraz može dalje zapisati kao

$$V_{B,i} = \sum_{l=1}^M \int_0^L \left[ \left( \bar{\mathbf{p}}_f^T \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} + \delta_{ac} k' \bar{w} \langle \mathbf{t}_{01}^T \quad \mathbf{0} \rangle \mathbf{L} \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{p}}_f^T \mathbf{B}_l^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} \right) dX_1 \right], \quad (3.46)$$

iz čega naposljetku slijedi

$$V_{B,i} = \sum_{l=1}^M \int_0^L \left[ \left( \bar{\mathbf{p}}_f'^T \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{p}}_f^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T_l \end{Bmatrix} + \delta_{ac} k' \bar{w} N_l \right) dX_1 \right]. \quad (3.47)$$

Virtualni rad vanjskih sila iz (3.42) možemo također pojednostaviti, te dobivamo

$$V_{B,e} = \sum_{l=1}^M \left[ \int_0^L \left( \bar{\mathbf{p}}_f^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_l \\ m_l \end{Bmatrix} + \delta_{ac} k \bar{w} \mathbf{t}_{0l}^T \mathbf{f}_l \right) dX_1 + \bar{\mathbf{p}}_{f,0}^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{l,0} \\ M_{l,0} \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{p}}_{f,L}^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{l,L} \\ M_{l,L} \end{Bmatrix} \right]. \quad (3.48)$$

Dobivene jednadžbe su nelinearne, i ne mogu se riješiti u zatvorenom obliku. Za njihovo rješavanje potrebno je unaprijed odabrati oblik testnih funkcija ( $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}_l$ ), a kasnije i probnih funkcija ( $\mathbf{u}, \theta_l$ ).

Kako u svakom raspucanom sloju postoji diskontinuitet u polju kuta zaokreta (uveden u (3.16)), vektor virtualnih nepoznatih funkcija uslijed toga postaje

$$\bar{\mathbf{p}}_f = \bar{\mathbf{p}} + k \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta_c \bar{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix}, \quad (3.49)$$

pri čemu je

$$\bar{\mathbf{p}} = \langle \bar{\mathbf{u}}^T \quad \bar{\beta}_1 \quad \bar{\beta}_2 \quad \dots \quad \bar{\beta}_M \rangle^T, \quad (3.50)$$

$$\Delta_c = \begin{bmatrix} \delta_{1c} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_{2c} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_{Mc} \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_M \end{Bmatrix}. \quad (3.51)$$

Oznaka  $\delta_{1c}$  u (3.51) koristi se za raspoznavanje (ne)raspucanosti sloja  $l$

$$\delta_{1c} = \begin{cases} 0, & \varepsilon_l \leq f_{cl} / E_c \\ 1, & \varepsilon_l > f_{cl} / E_c \end{cases}. \quad (3.52)$$

Iz (3.53) slijedi

$$\bar{\mathbf{p}}_f'^T = \bar{\mathbf{p}}'^T + k' \langle \mathbf{0}^T \quad \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \Delta_c \rangle, \quad (3.53)$$

uslijed čega se virtualni rad unutarnjih (3.47) i vanjskih sila (3.48) transformiraju u

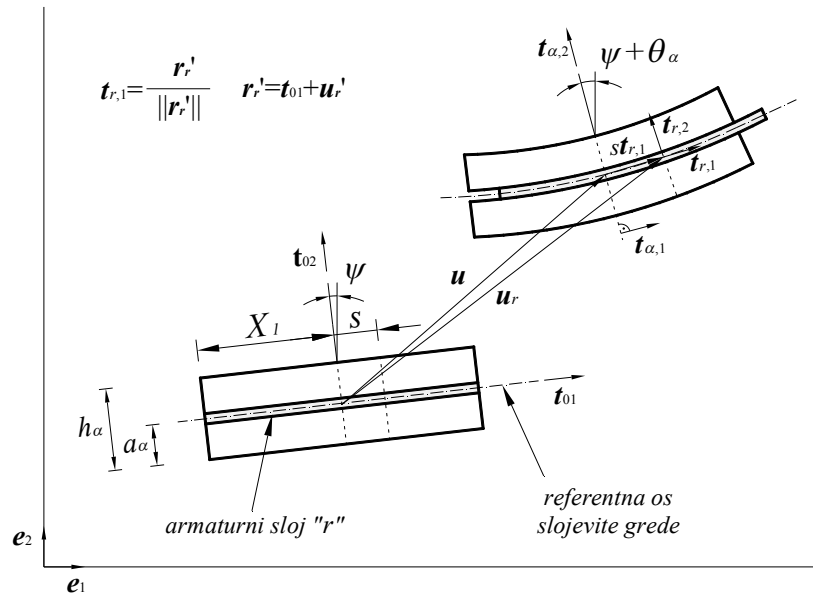
$$V_{B,i} = \sum_{l=1}^M \int_0^L \left( \bar{\mathbf{p}}_f'^T \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{p}}_f^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T_l \end{Bmatrix} + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \Delta_c k' \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \Delta_c k' \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T_l \end{Bmatrix} \right) + \bar{w} \delta_{ac} k' N_l dX_1 \quad (3.54)$$

$$V_{B,e} = \sum_{l=1}^M \left[ \int_0^L \left( \bar{\mathbf{p}}_f^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_l \\ m_l \end{Bmatrix} + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \Delta_c k \tilde{\mathbf{B}}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_l \\ m_l \end{Bmatrix} + \bar{w} \delta_{ac} k \mathbf{t}_{0l}^T \mathbf{f}_l \right) dX_1 + \bar{\mathbf{p}}_0^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{l,0} \\ M_{l,0} \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{p}}_L^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{l,L} \\ M_{l,L} \end{Bmatrix} \right]. \quad (3.55)$$

## 3.2 Ugradnja armaturnog sloja

### 3.2.1 Kinematika proklizavanja armature i betona

U ovom poglavlju, armatura, koja je predstavljena slojem čija je debljina jednaka nuli – ali ima poprečni presjek konačne vrijednosti, ugrađena je u prethodno opisanu višeslojnu gredu. Kako u predloženom modelu referentna os višeslojne grede može biti izabrana proizvoljno, pretpostavimo kako je ona postavljena u sredinu sloja koji okružuje armaturu, te kako se također i armaturni sloj nalazi u sredini spomenutog okolnog betonskog sloja. Armaturni sloj, označen s  $r$ , može prokliznuti u odnosu na okolni betonski sloj, kao što je prikazano na Slici 3.8.



Slika 3.8 Pomak armaturnog sloja  $r$  i okolnog betonskog sloja u  $X_1$

Sa Slike 3.8 možemo uspostaviti vezu između vektora pomaka referentne osi višeslojne grede  $\mathbf{u}$  i vektora pomaka armaturnog sloja  $\mathbf{u}_r$  kao

$$\mathbf{u}_r(X_1) = \mathbf{u}(X_1) + s(X_1) \mathbf{t}_{r,1}(X_1). \quad (3.56)$$

Budući je u geometrijski linearnoj analizi

$$s \mathbf{t}_{r,1} = s \left[ \mathbf{t}_{01} + \left( \mathbf{t}_{r,1} \otimes \nabla_{\mathbf{u}_r} \right)_{\mathbf{u}_r=0} \mathbf{u}_r + H.O.T. \right] = s \mathbf{t}_{01} + H.O.T., \quad (3.57)$$

izraz (3.56) transformira se u

$$\mathbf{u}_r(X_1) = \mathbf{u}(X_1) + s(X_1) \mathbf{t}_{01}. \quad (3.58)$$

Prema izrazu (3.12) prilikom pojave pukotine u sloju  $\alpha$ , taj sloj ujedno i proklizne u odnosu na zamišljenu kontinuiranu referentnu os grede. Stoga, ukupno se proklizavanje armature  $f(X_1)$  u odnosu na raspucani betonski sloj koji ga okružuje dobiva kao magnituda razlike između vektora pomaka armaturnog i okolnog betonskog sloja (Slika 3.9) kao

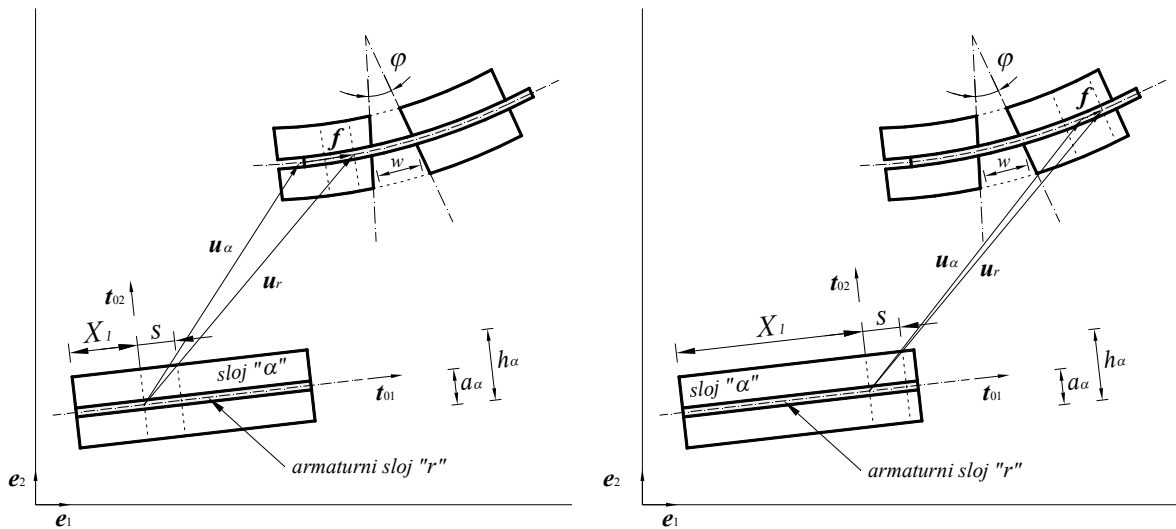
$$f(X_1) = \|\mathbf{u}_r(X_1) - \mathbf{u}_\alpha(X_1)\| = \|\mathbf{f}(X_1)\|. \quad (3.59)$$

Na temelju (3.12) i (3.58) slijedi kako u slučaju geometrijski linearne analize ukupni vektor proklizavanja armature postaje

$$\mathbf{f}(X_1) = [s(X_1) - p(X_1)]\mathbf{t}_{01}, \quad (3.60)$$

odnosno drugim riječima, ukupno proklizavanje slijedi kao

$$f(X_1) = s(X_1) - \delta_{\alpha c} k(X_1)w. \quad (3.61)$$



Slika 3.9 Objašnjenje ukupnog proklizavanja

Broj nepoznatih funkcija se sada povećava za dodatnu funkciju  $s(X_1)$  kojom opisujemo proklizavanje, što time čini ukupan broj nepoznatih funkcija  $3+M$  uz koje treba dodatno uključiti i parametre  $w$  (širinu pukotine) te  $\varphi_l$  (kuteve otvora pukotine) u svakom raspucanom sloju.

### 3.2.2 Dodatni rad unutarnjih i vanjskih sila uslijed postojanja armaturnog sloja

Virtualnom radu višeslojne grede potrebno je pribrojiti utjecaj dodatna dva člana. Prvi se odnosi na virtualni rad zbog uzdužne sile koja se javlja u armaturnom sloju zbog svoje deformabilnosti, dok je drugi član posljedica proklizavanja armaturnog sloja u odnosu na okružujući betonski sloj i pripadajućih naprezanja prijanjanja. Dodatno, budući je armatura modelirana kao sloj, također pretpostavljamo kako postoje vanjske sile koje djeluju na armaturni sloj, a koje su konzistentne s njegovim specifičnim svojstvima.

### 3.2.2.1 Virtualni rad unutarnjih sila zbog uzdužne sile u armaturi

Virtualni rad unutarnjih sila uslijed uzdužne sile koja se javlja u armaturi izvodimo na način pretpostavljajući kako je to sloj grede konačne površine čija je debljina jednaka nuli

$$V_{r,i} = \int_0^L \left( \langle \bar{\mathbf{u}}_r^T \quad \bar{\theta}_r \rangle \mathbf{D}_r^T \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_r \\ M_r \end{Bmatrix} dX_1, \quad (3.62)$$

gdje je pritom

$$\mathbf{N}_r = \begin{Bmatrix} N_r \\ 0 \end{Bmatrix}, N_r = N_r(\varepsilon_r), \quad (3.63)$$

$$M_r = 0, \quad (3.64)$$

dok je

$$\mathbf{D}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{d}{dX_1} & -\mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}^T & \frac{d}{dX_1} \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_r = [\mathbf{t}_{01} \quad \mathbf{t}_{02}]. \quad (3.66)$$

Uzdužna deformacija u armaturnom sloju

$$\varepsilon_r = \mathbf{t}_{01} \cdot \mathbf{u}'_r(X_1), \quad (3.67)$$

slijedi iz (3.58) kao

$$\varepsilon_r = s' + \mathbf{t}_{01} \cdot \mathbf{u}'. \quad (3.68)$$

Korištenjem (3.58), virtualni rad zbog uzdužne sile u armaturi (3.62) transformira se u

$$V_{r,i} = \int_0^L \left( \langle \bar{\mathbf{u}}^T + \bar{s} \mathbf{t}_{01}^T \quad \bar{\theta}_r \rangle \mathbf{D}_r^T \right) \begin{Bmatrix} N_r \mathbf{t}_{01} \\ 0 \end{Bmatrix} dX_1, \quad (3.69)$$

što se također može zapisati i kao

$$V_{r,i} = \int_0^L \left( \frac{d}{dX_1} \langle \bar{s} \quad \bar{\mathbf{u}}^T \rangle \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \mathbf{t}_{01} \end{Bmatrix} N_r dX_1 = \int_0^L \langle \bar{s}' \quad \bar{\mathbf{u}}'^T \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ \mathbf{t}_{01} \end{Bmatrix} N_r dX_1. \quad (3.70)$$

Budući vrijedi

$$\mathbf{u}'^T \mathbf{t}_{01} = \mathbf{p}'^T \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix}, \quad (3.71)$$

naposljetku dobivamo

$$V_{r,i} = \int_0^L \left( \bar{s}' N_r + \bar{\mathbf{p}}'^T \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} N_r \right) dX_1, \quad (3.72)$$

pri čemu je  $\mathbf{0}_M$  nulvektor dimenzija  $M$ .



### 3.2.2.2 Virtualni rad uslijed naprezanja prianjanja

Ovaj virtualni rad nastaje kao rezultat proklizavanja armaturne šipke u odnosu na okružujući beton. Naprezanja prianjanja  $\tau$  stvaraju virtualni rad po jedinici kontaktnog oplošja

$$\phi\pi\tau\bar{f}, \quad (3.73)$$

gdje je  $\phi$  promjer armaturne šipke (ili zbroj promjera svih armaturnih šipki armaturnog sloja).

Uzduž cijele duljine konačnog elementa, ukupni virtualni rad uslijed naprezanja prianjanja je

$$V_{b,i} = \phi\pi \int_0^L \tau \bar{f} dX_1, \quad (3.74)$$

što se korištenjem (3.61) može zapisati kao:

$$V_{b,i} = \phi\pi \int_0^L (\bar{s} - \delta_{\alpha C} k \bar{w}) \tau dX_1, \quad (3.75)$$

pri čemu je  $\tau = \tau(f)$  usvojeni konstitutivni zakon naprezanja prianjanja u funkciji ukupnog proklizavanja armature, definiranog u (3.61).

### 3.2.2.3 Virtualni rad vanjskih sila koje djeluju na armaturu

Virtualni rad vanjskih sila uslijed djelovanja raspodijeljenog i koncentriranog opterećenja na armaturni sloj može se definirati kao

$$V_{r,e} = \int_0^L \bar{\mathbf{u}}_r^T f_r \mathbf{t}_{01} dX_1 + \bar{\mathbf{u}}_{r,0}^T F_{r,0} \mathbf{t}_{01} + \bar{\mathbf{u}}_{r,L}^T F_{r,L} \mathbf{t}_{01}, \quad (3.76)$$

pri čemu je  $f_r$  raspodijeljeno uzdužno opterećenje koje djeluje u smjeru osi armature, dok su  $F_{r,0}$  i  $F_{r,L}$  koncentrirane uzdužne sile koje djeluju na krajevima armature. Supstitucijom (3.58) u (3.76) daje

$$V_{r,e} = \int_0^L \langle \bar{s} \quad \bar{\mathbf{u}}^T \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ \mathbf{t}_{01} \end{Bmatrix} f_r dX_1 + \langle \bar{s}_0 \quad \bar{\mathbf{u}}_0^T \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ \mathbf{t}_{01} \end{Bmatrix} F_{r,0} + \langle \bar{s}_L \quad \bar{\mathbf{u}}_L^T \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ \mathbf{t}_{01} \end{Bmatrix} F_{r,L}, \quad (3.77)$$

gdje su  $\bar{s}_0, \bar{s}_L, \bar{\mathbf{u}}_0$  i  $\bar{\mathbf{u}}_L$  rubne vrijednosti polja  $\bar{s}$  i  $\bar{\mathbf{u}}$  (redom u  $X_1=0$  i  $X_1=L$ ). Budući vrijedi

$$\mathbf{u}^T \mathbf{t}_{01} = \mathbf{p}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix}, \quad (3.78)$$

naposljetku dobivamo

$$V_{r,e} = \int_0^L \langle \bar{s} \quad \bar{\mathbf{p}}^T \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} f_r dX_1 + \langle \bar{s}_0 \quad \bar{\mathbf{p}}_0^T \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} F_{r,0} + \langle \bar{s}_L \quad \bar{\mathbf{p}}_L^T \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} F_{r,L}. \quad (3.79)$$

### 3.3 Interpolacija testnih funkcija i aproksimacija ukupnog virtualnog rada

Virtualnom radu unutarnjih sila višeslojne grede  $V_{B,i}$  potrebno je pribrojiti virtualni rad unutarnjih sila u armaturnom sloju  $V_{r,i}$  i virtualni rad naprezanja prijanjanja  $V_{b,i}$  kako bi dobili ukupan virtualni rad unutarnjih sila

$$V_i = V_{B,i} + V_{r,i} + V_{b,i}, \quad (3.80)$$

kojeg koristimo zajedno s ukupnim virtualnim radom vanjskih sila dobivenih u (3.55) i (3.79)

$$V_e = V_{B,e} + V_{r,e}, \quad (3.81)$$

u principu virtualnog rada  $V \equiv V_i - V_e = 0$ .

#### 3.3.1 Interpolacija testnih funkcija

Za konačan broj čvorova na gredi  $N$ , pretpostavljamo kako su vrijednosti virtualnih pomaka, kuteva zaokreta i proklizavanja poznate u čvorovima i interpolirane između njih. Nepoznate funkcije za proklizavanje  $s(X_1)$ , te pomake i kuteve zaokreta u  $\mathbf{p}(X_1)$  aproksimiraju se kao

$$s(X_1) \doteq s^h(X_1) = \sum_{j=1}^N I_j(X_1) s_j, \quad (3.82)$$

$$\mathbf{p}(X_1) \doteq \mathbf{p}^h(X_1) = \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\psi}_j(X_1) \mathbf{p}_j, \quad (3.83)$$

gdje su  $I_j(X_1)$  standardne Lagrangeove interpolacijske funkcije (npr. Sorić, 2004.), dok je  $\boldsymbol{\psi}_j(X_1)$  još nedefinirana matrica interpolacijskih funkcija, pri čemu je

$$\mathbf{p}_j = \langle \mathbf{u}_j \quad \beta_{1,j} \quad \beta_{2,j} \quad \dots \quad \beta_{M,j} \rangle^T. \quad (3.84)$$

Supstitucijom (3.82) - (3.84) u (3.54), (3.55), (3.72), (3.75) i (3.79) dobivamo aproksimacije virtualnih radova unutarnjih sila

$$\begin{aligned} V_{B,i}^h = & \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{p}}_j^T \sum_{l=1}^M \int_0^L \left( \boldsymbol{\psi}_j^T \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} + \boldsymbol{\psi}_j^T \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T_l \end{Bmatrix} \right) dX_1 \\ & + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \Delta_c \sum_{l=1}^M \tilde{\mathbf{B}}_l^T \left( \mathbf{L} \int_0^L k' \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} dX_1 + \int_0^L k \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T_l \end{Bmatrix} dX_1 \right) + \bar{w} \delta_{\alpha c} \sum_{l=1}^M \int_0^L k' N_l dX, \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$V_{r,i}^h = \sum_{j=1}^N \left( \bar{s}_j \int_0^L I_j' N_r dX_1 + \bar{\mathbf{p}}_j^T \int_0^L \boldsymbol{\psi}_j^T \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} N_r dX_1 \right), \quad (3.86)$$

$$V_{b,i}^h = \phi \pi \sum_{j=1}^N \int_0^L I_j \bar{s}_j \tau dX_1 - \bar{w} \phi \pi \int_0^L \delta_{\alpha c} k \tau dX_1, \quad (3.87)$$

i vanjskih sila

$$\begin{aligned}
V_{B,e}^h = & \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{p}}_j^T \sum_{l=1}^M \int_0^L \boldsymbol{\Psi}_j^T \mathbf{B}_l^T \left\{ \begin{matrix} \mathbf{f}_l \\ m_l \end{matrix} \right\} dX_1 + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \Delta_C \sum_{l=1}^M \tilde{\mathbf{B}}_l^T \int_0^L k \left\{ \begin{matrix} \mathbf{f}_l \\ m_l \end{matrix} \right\} dX_1 + \bar{w} \delta_{ac} \sum_{l=1}^M \int_0^L k \mathbf{t}_{01}^T \mathbf{f}_l dX_1 \\
& + \bar{\mathbf{p}}_1^T \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F}_{l,0} \\ M_{l,0} \end{matrix} \right\} + \bar{\mathbf{p}}_N^T \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F}_{l,L} \\ M_{l,L} \end{matrix} \right\},
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$V_{r,e}^h = \sum_{j=1}^N \left( \bar{s}_j \int_0^L I_j f_r dX_1 + \bar{\mathbf{p}}_j^T \int_0^L \boldsymbol{\Psi}_j^T \left\{ \begin{matrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{matrix} \right\} f_r dX_1 \right) + \bar{s}_1 F_{r,0} + \bar{\mathbf{p}}_1^T \left\{ \begin{matrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{matrix} \right\} F_{r,0} + \bar{s}_N F_{r,L} + \bar{\mathbf{p}}_N^T \left\{ \begin{matrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{matrix} \right\} F_{r,L}. \tag{3.89}$$

Umjesto obične Lagrangeove interpolacije, za interpolaciju virtualnih pomaka primijenit će se vezana interpolacija (Jelenić i Papa, 2011., Ribarić i Jelenić, 2012.), koja podrazumijeva veći stupanj interpolacije za poprečne pomake nego li za rotacije. Kako se u Timošenkovom grednom elementu javlja posmična blokada, jedna od metoda za njegovo rješavanje je korištenje standardnih Lagrangeovih interpolacijskih funkcija s reduciranom integracijom, što kod ovog elementa može biti problem ukoliko se integracijska točka poklapa s položajem pukotine  $X_{1C}$ . Vezana interpolacija pak omogućava korištenje proizvoljnog broja integracijskih točaka.

Vezana interpolacija definirana je sljedećim izrazom (Jelenić i Papa, 2011.)

$$\mathbf{u}^h = \sum_{j=1}^N I_j \mathbf{u}_j + \frac{L}{N} \prod_{j=1}^N N_j \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \binom{N-1}{k-1} \beta_{\alpha,k} \mathbf{t}_{02} = \sum_{j=1}^N (I_j \mathbf{u}_j + K_j \beta_{\alpha,j} \mathbf{t}_{02}), \tag{3.90}$$

gdje je

$$N_1 = \frac{X_1}{L}, \quad N_j = 1 - \frac{N-1}{j-1} \frac{X_1}{L} \quad \text{za } j=2, 3, \dots, N, \tag{3.91}$$

te

$$K_j = \frac{L}{N} (-1)^{j-1} \binom{N-1}{j-1} \prod_{p=1}^N N_p. \tag{3.92}$$

U trenutnom modelu s  $M$  slojeva matricu interpolacijskih funkcija koja sadrži vezanu interpolaciju možemo zapisati u sljedećem obliku

$$\boldsymbol{\Psi}_j = \begin{bmatrix} I_j & 0 & 0 & \dots & -\frac{L}{N} \left( \prod_{p=1}^N N_p \right) (-1)^{j-1} \binom{N-1}{j-1} \sin \psi & \dots & 0 \\ 0 & I_j & 0 & \dots & \frac{L}{N} \left( \prod_{p=1}^N N_p \right) (-1)^{j-1} \binom{N-1}{j-1} \cos \psi & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_j & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I_j \end{bmatrix}, \tag{3.93}$$

ili kraće

$$\boldsymbol{\Psi}_j = I_j \mathbf{I}_{2+M} + K_j \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \mathbf{m}, \quad (3.94)$$

gdje je  $\mathbf{m} = \langle \mathbf{0}^T \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \rangle$ , pri čemu se „1“ nalazi na mjestu  $\alpha+2$ .

### 3.3.2 Aproksimacija ukupnog virtualnog rada unutarnjih sila

Uvrštavanjem (3.94) u (3.85) i (3.86) dobiva se diskretizirani virtualni rad unutarnjih sila

$$V_i^h = V_{B,i}^h + V_{r,i}^h + V_{b,i}^h = \sum_{j=1}^N \bar{s}_j (q_{rs,j}^i + q_{bs,j}^i) + \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{p}}_j^T (q_{Bp,j}^i + q_{rp,j}^i) + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{q}_\varphi^i + \bar{w} (q_{Bw}^i - q_{bw}^i) \quad (3.95)$$

gdje su

$$q_{rs,j}^i = \int_0^L I'_j N_r dX_1, \quad (3.96)$$

$$q_{bs,j}^i = \phi \pi \int_0^L I_j \tau dX_1, \quad (3.97)$$

$$\mathbf{q}_{Bp,j}^i = \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \mathbf{L}_l \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} dX_1 + \mathbf{m}^T \sum_{l=1}^M \int_0^L K'_j T_l dX_1, \quad (3.98)$$

$$\mathbf{q}_{rp,j}^i = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \int_0^L I'_j N_r dX_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} q_{rs,j}^i, \quad (3.99)$$

$$\mathbf{q}_\varphi^i = \Delta_C \sum_{l=1}^M \tilde{\mathbf{B}}_l^T \mathbf{L}_l \int_0^L \mathbf{H}_k \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} dX_1, \quad (3.100)$$

$$q_{Bw}^i = \delta_{\alpha C} \sum_{l=1}^M \int_0^L k' N_l dX_1, \quad (3.101)$$

$$q_{bw}^i = \delta_{\alpha C} \phi \pi \int_0^L k \tau dX_1. \quad (3.102)$$

Pritom su

$$\mathbf{H}_{lj} = \begin{bmatrix} I'_j & 0 & 0 \\ 0 & I'_j & 0 \\ 0 & -I_j & I'_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} k' & 0 & 0 \\ 0 & k' & 0 \\ 0 & -k & k' \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

dok su  $N_l = N_l(\varepsilon_l, \kappa_l)$ ,  $T_l = T_l(\gamma_l)$ ,  $M_l = M_l(\varepsilon_l, \kappa_l)$ ,  $N_r = N_r(\varepsilon_r)$ ,  $\tau = \tau(f)$  gdje je  $f = s - \delta_{\alpha C} k w$ .

Osnovna razlika u primjeni vezane umjesto standardne Lagrangeove interpolacije je u dodatnom drugom članu u izrazu (3.98).

Izraz (3.95) može se izraziti kao

$$V_i = \left\langle \bar{\mathbf{p}}_s^T \quad \bar{\boldsymbol{\varphi}}_w^T \right\rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{ps}^i \\ \mathbf{q}_{\varphi w}^i \end{Bmatrix}, \quad (3.104)$$

pri čemu je

$$\bar{\mathbf{p}}_s^T = \left\langle \bar{\mathbf{p}}_{s1}^T \quad \bar{\mathbf{p}}_{s2}^T \quad \dots \quad \bar{\mathbf{p}}_{sN}^T \right\rangle, \quad (3.105)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_{sj}^T = \left\langle \bar{s}_j \quad \bar{\mathbf{u}}_j^T \quad \bar{\beta}_{1,j} \quad \bar{\beta}_{2,j} \quad \dots \quad \bar{\beta}_{M,j} \right\rangle,$$

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_w^T = \left\langle \bar{w} \quad \bar{\varphi}_1 \quad \bar{\varphi}_2 \quad \dots \quad \bar{\varphi}_M \right\rangle, \quad (3.106)$$

te

$$\mathbf{q}_{ps}^i{}^T = \left\langle \mathbf{q}_{ps,1}^i{}^T \quad \mathbf{q}_{ps,2}^i{}^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_{ps,N}^i{}^T \right\rangle,$$

$$\mathbf{q}_{ps,j}^i{}^T = \left\langle q_{s,j}^i \quad \mathbf{q}_{p,j}^i{}^T \right\rangle, \quad (3.107)$$

$$q_{s,j}^i = q_{rs,j}^i + q_{bs,j}^i,$$

$$\mathbf{q}_{p,j}^i = \mathbf{q}_{Bp,j}^i + \mathbf{q}_{rp,j}^i,$$

$$\mathbf{q}_{\varphi w}^i{}^T = \left\langle q_w^i \quad \mathbf{q}_{\varphi}^i{}^T \right\rangle, \quad (3.108)$$

$$q_w^i = q_{Bw}^i - q_{bw}^i.$$

### 3.3.3 Aproksimacija ukupnog virtualnog rada vanjskih sila

Uvrštavanjem (3.94) u (3.88) i (3.89) dobiva se diskretizirani virtualni rad vanjskih sila

$$V_e^h = V_{B,e}^h + V_{r,e}^h = \sum_{j=1}^N \bar{s}_j q_{s,j}^e + \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{p}}_j^T (\mathbf{q}_{Bp,j}^e + \mathbf{q}_{rp,j}^e) + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{q}_{\varphi}^e + \bar{w} q_w^e, \quad (3.109)$$

gdje su

$$q_{s,j}^e = \int_0^L I_j f_r dX_1 + \delta_{1j} F_{R,0} + \delta_{Nj} F_{R,L}, \quad (3.110)$$

$$\mathbf{q}_{Bp,j}^e = \sum_{l=1}^M \int_0^L I_j \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_l \\ m_l \end{Bmatrix} dX_1 + \mathbf{m}^T \sum_{l=1}^M \int_0^L K_j \mathbf{t}_{02}^T \mathbf{f}_l dX_1 + \delta_{1j} \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{l,0} \\ M_{l,0} \end{Bmatrix} + \delta_{Nj} \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{l,L} \\ M_{l,L} \end{Bmatrix}, \quad (3.111)$$

$$\mathbf{q}_{rp,j}^e = \int_0^L I_j \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} f_r dX_1 + \delta_{1j} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} F_{R,0} + \delta_{Nj} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} F_{R,L}, \quad (3.112)$$

$$\mathbf{q}_{\varphi}^e = \Delta_C \sum_{l=1}^M \tilde{\mathbf{B}}_l^T \int_0^L k \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_l \\ m_l \end{Bmatrix} dX_1, \quad (3.113)$$

$$q_w^e = \delta_{\alpha C} \sum_{l=1}^M \int_0^L k \mathbf{t}_{01}^T \mathbf{f}_l dX_1. \quad (3.114)$$

Analogno kao u (3.104), (3.109) se može prikazati kao

$$V_e = \left\langle \bar{\mathbf{p}}_s^T \quad \bar{\boldsymbol{\varphi}}_w^T \right\rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{ps}^e \\ \mathbf{q}_{\varphi w}^e \end{Bmatrix}, \quad (3.115)$$

gdje su

$$\mathbf{q}_{ps}^{eT} = \left\langle \mathbf{q}_{ps,1}^{eT} \quad \mathbf{q}_{ps,2}^{eT} \quad \dots \quad \mathbf{q}_{ps,N}^{eT} \right\rangle, \quad (3.116)$$

$$\mathbf{q}_{ps,j}^{eT} = \left\langle q_{s,j}^e \quad \mathbf{q}_{p,j}^{eT} \right\rangle,$$

$$\mathbf{q}_{p,j}^e = \mathbf{q}_{Bp,j}^e + \mathbf{q}_{rp,j}^e,$$

$$\mathbf{q}_{\varphi w}^{eT} = \left\langle q_w^e \quad \mathbf{q}_{\varphi}^{eT} \right\rangle. \quad (3.117)$$

### 3.3.4 Postupak rješavanja

Koristeći izraze (3.95) te (3.109) možemo uspostaviti princip virtualnog rada

$$V^h \equiv V_i^h - V_e^h = 0 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{g} \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_{ps} \\ \mathbf{g}_{\varphi w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{ps}^i \\ \mathbf{q}_{\varphi w}^i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{ps}^e \\ \mathbf{q}_{\varphi w}^e \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.118)$$

Čvorni vektor neuravnoteženih sila  $\mathbf{g}$  sad možemo proširiti u Taylorov red samo do linearnog člana

$$\mathbf{g} + \Delta \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (3.119)$$

Primjenom linearizacije dobiva se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{pp} & \mathbf{k}_{p\varphi} \\ \mathbf{k}_{p\varphi}^T & \mathbf{k}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_s \\ \Delta \boldsymbol{\varphi}_w \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_{ps} \\ \mathbf{g}_{\varphi w} \end{Bmatrix}, \quad (3.120)$$

pri čemu članovi lokalne matrice krutosti slijede iz

$$\mathbf{k}_{pp} = \mathbf{q}_{ps}^i \otimes \nabla_{ps},$$

$$\mathbf{k}_{p\varphi} = \mathbf{q}_{ps}^i \otimes \nabla_{\varphi w} = (\mathbf{q}_{\varphi w}^i \otimes \nabla_{ps})^T, \quad (3.121)$$

$$\mathbf{k}_{\varphi\varphi} = \mathbf{q}_{\varphi w}^i \otimes \nabla_{\varphi w},$$

gdje su  $\nabla_{ps}$  i  $\nabla_{\varphi w}$  vektori parcijalnih derivacija u odnosu na  $\mathbf{p}_s$  i  $\boldsymbol{\varphi}_w$ . Blokovi lokalne matrice krutosti  $\mathbf{k}_{pp}$ ,  $\mathbf{k}_{p\varphi}$  i  $\mathbf{k}_{\varphi\varphi}$  izvedeni su u nastavku. Rješenje se provodi iterativnim postupkom korištenjem Newton-Raphsonovog postupka sve dok nije postignuta zadana zadovoljavajuća točnost.

### 3.4 Linearizacija

#### 3.4.1 Linearizacija $q_{rs,j}^i$

Budući je  $N_r = N_r(\varepsilon_r)$ ,  $\Delta q_{rs,j}^i$  slijedi iz (3.96)

$$\Delta q_{rs,j}^i = \int_0^L I_j' \frac{dN_r}{d\varepsilon_r} \Delta \varepsilon_r dX_1. \quad (3.122)$$

Iz (3.68) dobiva se

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial s'} \Delta s' + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \mathbf{u}'} \cdot \Delta \mathbf{u}' = \Delta s' + \mathbf{t}_{01}^T \Delta \mathbf{u}', \quad (3.123)$$

pa je stoga

$$\Delta q_{rs,j}^i = \int_0^L I_j' \frac{dN_r}{d\varepsilon_r} \Delta s' dX_1 + \mathbf{t}_{01}^T \int_0^L I_j' \frac{dN_r}{d\varepsilon_r} \Delta \mathbf{u}' dX_1. \quad (3.124)$$

Primjenom (3.82), (3.90) i (3.92), te budući vrijedi

$$\mathbf{u}_k = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}_{2 \times M}] \mathbf{p}_k, \quad (3.125)$$

dobivamo

$$\Delta q_{rs,j}^i = \sum_{k=1}^N K_{rs,jks} \Delta s_k + \sum_{k=1}^N \mathbf{K}_{rs,jkp} \Delta \mathbf{p}_k, \quad (3.126)$$

gdje su

$$K_{rs,jks} = \int_0^L I_j' \frac{dN_r}{d\varepsilon_r} I_k' dX_1, \quad (3.127)$$

$$\mathbf{K}_{rs,jkp} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{matrix} \right\}^T K_{rs,jks}. \quad (3.128)$$

Član u  $\mathbf{K}_{rs,jkp}$  koji je rezultat primjene vezane interpolacije nestaje, budući je  $\mathbf{t}_{01}^T \mathbf{t}_{02} = 0$ .

#### 3.4.2 Linearizacija $q_{rp,j}^i$

Kako je  $\mathbf{q}_{rp,j}^i = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{matrix} \right\} q_{rs,j}^i$ ,  $\Delta \mathbf{q}_{rp,j}^i$  slijedi iz (3.126) kao

$$\Delta \mathbf{q}_{rp,j}^i = \sum_{k=1}^N \mathbf{K}_{rp,jks} \Delta s_k + \sum_{k=1}^N \mathbf{K}_{rp,jkp} \Delta \mathbf{p}_k, \quad (3.129)$$

gdje su

$$\mathbf{K}_{rp,jks} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{matrix} \right\} K_{rs,jks}, \quad (3.130)$$

$$\mathbf{K}_{rp,jkp} = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \mathbf{K}_{rs,jkp} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{01} \mathbf{t}_{01}^T & \mathbf{0}_{2 \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times 2} & \mathbf{0}_{M \times M} \end{bmatrix} \mathbf{K}_{rs,jks} \quad (3.131)$$

### 3.4.3 Linearizacija $q_{bs,j}^i$

Konstitutivni zakon naprezanja prijanjanja funkcija je proklizavanja armature ( $\tau = \tau(f)$ ), pa iz (3.97) slijedi

$$\Delta q_{bs,j}^i = \phi \pi \int_0^L I_j \frac{d\tau}{df} \Delta f dX_1. \quad (3.132)$$

Iz (3.61) dobivamo

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial f}{\partial w} \Delta w = \Delta s - \delta_{\alpha C} k \Delta w, \quad (3.133)$$

te uvrštavanjem u (3.132)

$$\Delta q_{bs,j}^i = \phi \pi \int_0^L I_j \frac{d\tau}{df} \Delta s dX_1 - \delta_{\alpha C} \phi \pi \int_0^L I_j k \frac{d\tau}{df} \Delta w dX_1. \quad (3.134)$$

Nakon interpoliranja proklizavanja  $\Delta s$  prema (3.82), gornji se izraz može prikazati kao

$$\Delta q_{bs,j}^i = \sum_{k=1}^N K_{bs,jks} \Delta s_k + K_{bs,jw} \Delta w, \quad (3.135)$$

gdje su

$$K_{bs,jks} = \phi \pi \int_0^L I_j \frac{d\tau}{df} I_k dX_1, \quad (3.136)$$

$$K_{bs,jw} = -\delta_{\alpha C} \phi \pi \int_0^L I_j k \frac{d\tau}{df} dX_1. \quad (3.137)$$

### 3.4.4 Linearizacija $q_{bw}^i$

Ako se isti postupak kao za  $\Delta q_{bs,j}^i$  primijeni na (3.102) slijedi

$$\Delta q_{bw}^i = \sum_{k=1}^N K_{bw,ks} \Delta s_k + K_{bw,w} \Delta w. \quad (3.138)$$

Pritom su

$$K_{bw,ks} = \delta_{\alpha C} \phi \pi \int_0^L k \frac{d\tau}{df} I_k dX_1, \quad (3.139)$$

$$K_{bw,w} = -\delta_{\alpha C} \phi \pi \int_0^L k^2 \frac{d\tau}{df} dX_1. \quad (3.140)$$



### 3.4.5 Linearizacija $\mathbf{q}_{Bp,j}^i$

Kako bi izračunali  $\Delta \mathbf{q}_{Bp,j}^i$ , (3.98) se može napisati u obliku

$$\mathbf{q}_{Bp,j}^i = \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} dX_1 + \mathbf{m}^T \langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle \sum_{l=1}^M \int_0^L K'_j \begin{Bmatrix} N_l \\ T_l \\ M_l \end{Bmatrix} dX_1, \quad (3.141)$$

što daje

$$\Delta \mathbf{q}_{Bp,j}^i = \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \begin{Bmatrix} \Delta N_l \\ \Delta T_l \\ \Delta M_l \end{Bmatrix} dX_1 + \mathbf{m}^T \langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle \sum_{l=1}^M \int_0^L K'_j \begin{Bmatrix} \Delta N_l \\ \Delta T_l \\ \Delta M_l \end{Bmatrix} dX_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2. \quad (3.142)$$

Kako je  $N_l = N_l(\varepsilon_l, \kappa_l)$ ,  $T_l = T_l(\gamma_l)$  te  $M_l = M_l(\varepsilon_l, \kappa_l)$  slijedi

$$\begin{Bmatrix} \Delta N_l \\ \Delta T_l \\ \Delta M_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_l}{\partial \varepsilon_l} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial \kappa_l} \\ 0 & \frac{dT_l}{d\gamma_l} & 0 \\ \frac{\partial M_l}{\partial \varepsilon_l} & 0 & \frac{\partial M_l}{\partial \kappa_l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_l \\ \Delta \gamma_l \\ \Delta \kappa_l \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_l \\ \Delta \gamma_l \\ \Delta \kappa_l \end{Bmatrix}, \quad (3.143)$$

gdje matrica  $\mathbf{C}$  predstavlja konstitutivnu matricu, a njen izvod prikazan je na kraju poglavlja.

Primjenom izraza (3.18) i (3.19) izvodi se

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \gamma_l \\ \kappa_l \end{Bmatrix} = \left( \mathbf{L}^T \frac{d}{dX_1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \\ \theta_l \end{Bmatrix}, \quad (3.144)$$

iz čega slijedi

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_l \\ \Delta \gamma_l \\ \Delta \kappa_l \end{Bmatrix} = \left( \mathbf{L}^T \frac{d}{dX_1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta u_l \\ \Delta v_l \\ \Delta \theta_l \end{Bmatrix}. \quad (3.145)$$

Dalje, iz (3.36) dobivamo

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_l \\ \Delta v_l \\ \Delta \theta_l \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_l \left( \Delta \mathbf{p}_f + \delta_{ac} k \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \Delta w \right) = \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{p}_f + \delta_{ac} k \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \Delta w. \quad (3.146)$$

Zbog postojanja diskontinuiteta u kutu zaokreta poprečnog presjeka

$$\Delta \mathbf{p}_f = \Delta \mathbf{p} + k \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta_c \Delta \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix}, \quad (3.147)$$

što uvrštavanjem u gornji izraz daje

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_l \\ \Delta v_l \\ \Delta \theta_l \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{p} + \mathbf{B}_l k \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta_c \Delta \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} + \delta_{ac} k \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta w = \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{B}}_l k \Delta_c \Delta \boldsymbol{\varphi} + \delta_{ac} k \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta w. \quad (3.148)$$

Naposljetku, supstitucijom (3.148) u (3.145) slijedi

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_l \\ \Delta \gamma_l \\ \Delta \kappa_l \end{Bmatrix} &= \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{p}' + \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l k' \Delta_c \Delta \boldsymbol{\varphi} + \delta_{ac} k' \mathbf{L}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta w + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{p} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_l k \Delta_c \Delta \boldsymbol{\varphi} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_{ac} k' \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{01} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta w, \end{aligned} \quad (3.149)$$

te uz primjenu (3.103) daje

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_l \\ \Delta \gamma_l \\ \Delta \kappa_l \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{p}' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{p} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l \Delta_c \Delta \boldsymbol{\varphi} + \delta_{ac} k' \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta w. \quad (3.150)$$

Dobiveni izraz sada uvrštavamo u (3.142), koji je u svrhu jednostavnijeg zapisa podijeljen na dva dijela ( $\mathbf{a}_1$  i  $\mathbf{a}_2$ ):

$$\mathbf{a}_1 = \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \mathbf{C} \left( \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{p}' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{p} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l \Delta_c \Delta \boldsymbol{\varphi} + \delta_{ac} k' \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta w \right) dX_1, \quad (3.151)$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{m}^T \langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle \sum_{l=1}^M \int_0^L K_j' \frac{dT_l}{d\gamma_l} \left( \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{p}' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{p} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l \Delta_c \Delta \boldsymbol{\varphi} \right) dX_1, \quad (3.152)$$

iz čega nakon interpolacije prema (3.83), (3.92) te (3.94) slijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \mathbf{C} \left( \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \sum_{k=1}^N I_k' \mathbf{I}_{2+M} \Delta \mathbf{p}_k + \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \sum_{k=1}^N K_k' \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \mathbf{m} \Delta \mathbf{p}_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_l \sum_{k=1}^N I_k \mathbf{I}_{2+M} \Delta \mathbf{p}_k \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_l \sum_{k=1}^N K_k \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \mathbf{m} \Delta \mathbf{p}_k + \mathbf{H}_k^T \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l \Delta_c \Delta \boldsymbol{\varphi} + \delta_{ac} k' \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta w \right) dX_1, \end{aligned} \quad (3.153)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= \mathbf{m}^T \langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle \sum_{l=1}^M \int_0^L K_j' \frac{dT_l}{d\gamma_l} \left( \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \sum_{k=1}^N I_k' \mathbf{I}_{2+M} \Delta \mathbf{p}_k + \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \sum_{k=1}^N K_k' \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \mathbf{m} \Delta \mathbf{p}_k \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_l \sum_{k=1}^N I_k \mathbf{I}_{2+M} \Delta \mathbf{p}_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_l \sum_{k=1}^N K_k \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \mathbf{m} \Delta \mathbf{p}_k + \mathbf{H}_k^T \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l \Delta_c \Delta \boldsymbol{\varphi} \right) dX_1. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Uvedemo li oznake

$$\mathbf{g}'\mathbf{L}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{g} = \mathbf{H}_g^T \mathbf{L}^T, \quad \mathbf{H}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{g}' & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{g}' & 0 \\ 0 & -\mathbf{g} & \mathbf{g}' \end{bmatrix} \text{ za } g = I_j, I_k, k, K_k \quad (3.155)$$

(3.153) i (3.154) može se pojednostavljeno zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 = & \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \left( \sum_{k=1}^N \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \mathbf{C} \mathbf{H}_{lk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l + \sum_{k=1}^N \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \mathbf{C} \mathbf{H}_{kk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \mathbf{m} \Delta \mathbf{p}_k \\ & + \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \mathbf{C} \mathbf{H}_k^T dX_1 \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l \Delta_C \Delta \boldsymbol{\varphi} + \delta_{\alpha C} \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \mathbf{C} k' \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dX_1 \Delta w, \end{aligned} \quad (3.156)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 = & \mathbf{m}^T \langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle \sum_{l=1}^M \left( \sum_{k=1}^N \int_0^L K'_j \frac{dT_l}{d\gamma_l} \mathbf{H}_{lk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l + \sum_{k=1}^N \int_0^L K'_j \frac{dT_l}{d\gamma_l} \mathbf{H}_{kk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \mathbf{m} \Delta \mathbf{p}_k \\ & + \int_0^L K'_j \frac{dT_l}{d\gamma_l} \mathbf{H}_k^T dX_1 \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l \Delta_C \Delta \boldsymbol{\varphi}, \end{aligned} \quad (3.157)$$

te njihovim zbrajanjem naposljetku dobivamo traženi  $\Delta \mathbf{q}_{Bp,j}^i$

$$\Delta \mathbf{q}_{Bp,j}^i = \sum_{k=1}^N \left( \mathbf{K}_{Bp,jk} + \mathbf{K}_{Bp,jk}^{link1} + \mathbf{K}_{Bp,jk}^{link2} + \mathbf{K}_{Bp,jk}^{link3} \right) \Delta \mathbf{p}_k + \left( \mathbf{K}_{Bp,j\varphi} + \mathbf{K}_{Bp,j\varphi}^{link} \right) \Delta \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{K}_{Bp,jw} \Delta w, \quad (3.158)$$

pri čemu su

$$\mathbf{K}_{Bp,jk} = \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \mathbf{C} \mathbf{H}_{lk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l, \quad (3.159)$$

$$\mathbf{K}_{Bp,jk}^{link1} = \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \mathbf{C} \mathbf{H}_{kk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \mathbf{m}, \quad (3.160)$$

$$\mathbf{K}_{Bp,jk}^{link2} = \mathbf{m}^T \langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle \sum_{l=1}^M \int_0^L \frac{dT_l}{d\gamma_l} K'_j \mathbf{H}_{lk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l, \quad (3.161)$$

$$\mathbf{K}_{Bp,jk}^{link3} = \mathbf{m}^T \langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle \sum_{l=1}^M \int_0^L \frac{dT_l}{d\gamma_l} K'_j \mathbf{H}_{kk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}_M \end{Bmatrix} \mathbf{m}, \quad (3.162)$$

$$\mathbf{K}_{Bp,j\varphi} = \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \mathbf{C} \mathbf{H}_k^T dX_1 \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l \Delta_C, \quad (3.163)$$

$$\mathbf{K}_{Bp,j\varphi}^{link} = \mathbf{m}^T \langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle \sum_{l=1}^M \int_0^L \frac{dT_l}{d\gamma_l} K'_j \mathbf{H}_k^T dX_1 \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l \Delta_C, \quad (3.164)$$

$$\mathbf{K}_{Bp,jw} = \delta_{\alpha C} \sum_{l=1}^M \mathbf{B}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_{lj} \mathbf{C} k' dX_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.165)$$

Članovi koji sadrže ( $^{link}$ ) rezultat su primjene vezane interpolacije.

### 3.4.6 Linearizacija $q^i_\varphi$

Iz (3.100)  $\Delta q^i_\varphi$  se dobiva na analogan način kao i  $\mathbf{a}_1$  iz  $\Delta q^i_{Bp,j}$ :

$$\Delta q^i_\varphi = \sum_{k=1}^N (\mathbf{K}_{\varphi k} + \mathbf{K}_{\varphi k}^{link}) \Delta \mathbf{p}_k + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \Delta \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{K}_{\varphi w} \Delta w, \quad (3.166)$$

gdje su

$$\mathbf{K}_{\varphi k} = \Delta_C \sum_{l=1}^M \tilde{\mathbf{B}}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_k \mathbf{C} \mathbf{H}_{lk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l, \quad (3.167)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi,k}^{link} = \Delta_C \sum_{l=1}^M \tilde{\mathbf{B}}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_k \mathbf{C} \mathbf{H}_{kk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \left\{ \begin{matrix} \mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}_M \end{matrix} \right\} \mathbf{m}, \quad (3.168)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi} = \Delta_C \sum_{l=1}^M \tilde{\mathbf{B}}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_k \mathbf{C} \mathbf{H}_k^T dX_1 \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l \Delta_C, \quad (3.169)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi w} = \delta_{\alpha C} \Delta_C \sum_{l=1}^M \tilde{\mathbf{B}}_l^T \mathbf{L} \int_0^L \mathbf{H}_k \mathbf{C} k' dX_1 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}. \quad (3.170)$$

### 3.4.7 Linearizacija $q^i_{Bw}$

Naposljetku iz (3.101) slijedi

$$\Delta q^i_{Bw} = \delta_{\alpha C} \sum_{l=1}^M \int_0^L k' \left\langle \frac{\partial N_l}{\partial \varepsilon_l} \quad 0 \quad \frac{\partial N_l}{\partial \kappa_l} \right\rangle \left\{ \begin{matrix} \Delta \varepsilon_l \\ \Delta \gamma_l \\ \Delta \kappa_l \end{matrix} \right\} dX_1, \quad (3.171)$$

te na analogan način kao u članovima iznad, primjenom (3.150) dobivamo

$$\Delta q^i_{Bw} = \sum_{k=1}^N (\mathbf{K}_{Bw,k} + \mathbf{K}_{Bw,k}^{link}) \Delta \mathbf{p}_k + \mathbf{K}_{Bw,\varphi} \Delta \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{K}_{Bw,w} \Delta w. \quad (3.172)$$

Pritom su

$$\mathbf{K}_{Bw,k} = \delta_{\alpha C} \sum_{l=1}^M \int_0^L k' \left\langle \frac{\partial N_l}{\partial \varepsilon_l} \quad 0 \quad \frac{\partial N_l}{\partial \kappa_l} \right\rangle \mathbf{H}_{lk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l, \quad (3.173)$$

$$\mathbf{K}_{Bw,k}^{link} = \delta_{\alpha C} \sum_{l=1}^M \int_0^L k' \left\langle \frac{\partial N_l}{\partial \varepsilon_l} \quad 0 \quad \frac{\partial N_l}{\partial \kappa_l} \right\rangle \mathbf{H}_{kk}^T dX_1 \mathbf{L}^T \mathbf{B}_l \left\{ \begin{matrix} \mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}_M \end{matrix} \right\} \mathbf{m}, \quad (3.174)$$

$$\mathbf{K}_{Bw,\varphi} = \delta_{\alpha C} \sum_{l=1}^M \int_0^L k' \left\langle \frac{\partial N_l}{\partial \varepsilon_l} \quad 0 \quad \frac{\partial N_l}{\partial \kappa_l} \right\rangle \mathbf{H}_k^T dX_1 \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_l \Delta_C, \quad (3.175)$$

$$K_{Bw,w} = \delta_{\alpha c} \sum_{l=1}^M \int_0^L k'^2 \frac{\partial N_l}{\partial \varepsilon_l} dX_1. \quad (3.176)$$

### Izvod članova konstitutivne matrice C

Budući vrijedi da je  $N_l = N_l(\varepsilon_l, \kappa_l)$ ,  $T_l = T_l(\gamma_l)$  te  $M_l = M_l(\varepsilon_l, \kappa_l)$  slijedi

$$\frac{\partial N_l}{\partial \varepsilon_l} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_l} \int_{A_l} \sigma_l(D_l) dA = \int_{A_l} \frac{\partial \sigma_l(D_l)}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \varepsilon_l} dA_l = \int_{A_l} E_l^{t,c}(D_l) dA_l, \quad (3.177)$$

$$\frac{\partial N_l}{\partial \kappa_l} = \frac{\partial}{\partial \kappa_l} \int_{A_l} \sigma_l(D_l) dA = \int_{A_l} \frac{\partial \sigma_l(D_l)}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \kappa_l} dA_l = - \int_{A_l} X_{2,l} E_l^{t,c}(D_l) dA_l = \frac{\partial M_l}{\partial \varepsilon_l}, \quad (3.178)$$

$$\frac{\partial M_l}{\partial \kappa_l} = - \frac{\partial}{\partial \kappa_l} \int_{A_l} X_{2,l} \sigma_l(D_l) dA = - \int_{A_l} X_{2,l} \frac{\partial \sigma_l(D_l)}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \kappa_l} dA_l = \int_{A_l} X_{2,l}^2 E_l^{t,c}(D_l) dA_l. \quad (3.179)$$

pri čemu je  $E_l^{t,c}$  tangenti modul elastičnosti betona.

Kako je širina sloja  $b_l$  konstantna vrijednost, integracija se odvija samo po koordinati  $X_{2,l}$

$$\frac{\partial N_l}{\partial \varepsilon_l} = b_l \int_{X_{2,l}} E_l^{t,c}(D_l) dX_{2,l}, \quad (3.180)$$

$$\frac{\partial N_l}{\partial \kappa_l} = \frac{\partial M_l}{\partial \varepsilon_l} = -b_l \int_{X_{2,l}} X_{2,l} E_l^{t,c}(D_l) dX_{2,l}, \quad (3.181)$$

$$\frac{\partial M_l}{\partial \kappa_l} = b_l \int_{X_{2,l}} X_{2,l}^2 E_l^{t,c}(D_l) dX_{2,l}. \quad (3.182)$$

U slučaju linearno-elastičnog materijala, modul elastičnosti je konstantan, pa se može izvaditi izvan granica integrala, čime konstitutivna matrica C poprima oblik

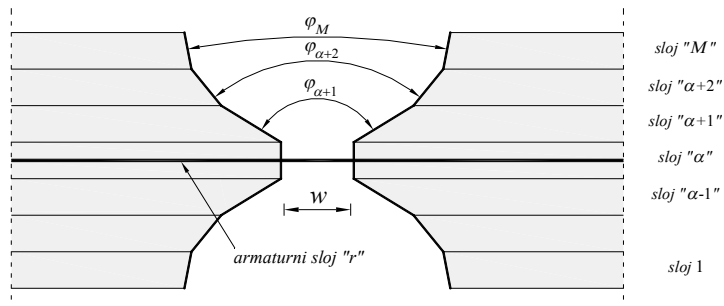
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E_{c,l} A_l & 0 & -E_{c,l} S_l \\ 0 & G A_{s,l} & 0 \\ -E_{c,l} S_l & 0 & E_{c,l} I_l \end{bmatrix}, \quad (3.183)$$

gdje je  $G$  posmični modul.

### 3.5 Tipovi konačnih elemenata

#### 3.5.1 Vlačni konačni element

Ovaj element može biti opterećen samo uzdužnim opterećenjem, a kao rezultat u presjeku se javljaju samo naprezanja istog predznaka (Slika 3.10).



Slika 3.10 Vlačni konačni element

Matrica krutosti vlačnog elementa koji sadrži  $N$  čvorova ima sljedeći oblik

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{pp}^{11} & \mathbf{k}_{pp}^{12} & \dots & \mathbf{k}_{pp}^{1N} & \mathbf{k}_{p\varphi}^1 \\ & \mathbf{k}_{pp}^{22} & \dots & \mathbf{k}_{pp}^{2N} & \mathbf{k}_{p\varphi}^2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \mathbf{k}_{pp}^{NN} & \mathbf{k}_{p\varphi}^N \\ SIM. & & & & \mathbf{k}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}, \quad (3.184)$$

gdje su

$$\mathbf{k}_{pp}^{jk} = \begin{bmatrix} K_{brs,jks} & \mathbf{K}_{rs,jkp} \\ \mathbf{K}_{rp,jks} & \mathbf{K}_{Bpr,jk}^{LINK} \end{bmatrix}, \quad (3.185)$$

$$\mathbf{k}_{p\varphi}^j = \begin{bmatrix} K_{bs,jw} & \mathbf{0}_M^T \\ \mathbf{K}_{Bp,jw} & \mathbf{K}_{Bp,j\varphi}^{LINK} \end{bmatrix}, \quad (3.186)$$

$$\mathbf{k}_{\varphi\varphi} = \begin{bmatrix} K_{Bbw,w} & \mathbf{K}_{Bw,\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi w} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}, \quad (3.187)$$

pri čemu su

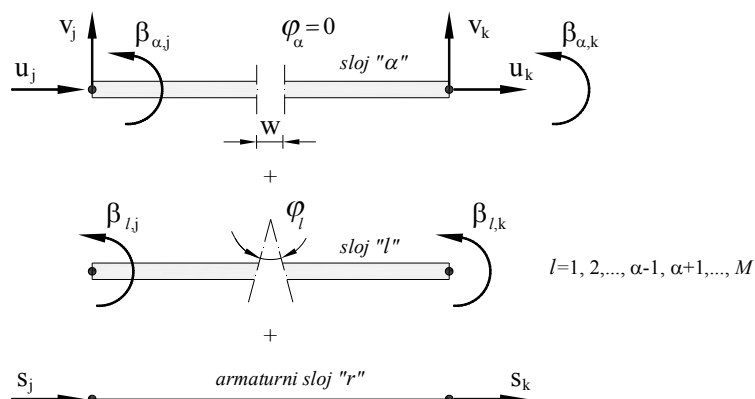
$$K_{brs,jks} = K_{rs,jks} + K_{bs,jks}, \quad (3.188)$$

$$\mathbf{K}_{Bpr,jk}^{LINK} = (\mathbf{K}_{Bp,jk} + \mathbf{K}_{Bp,jk}^{link1} + \mathbf{K}_{Bp,jk}^{link2} + \mathbf{K}_{Bp,jk}^{link3}) + \mathbf{K}_{rp,jkp}, \quad (3.189)$$

$$\mathbf{K}_{Bp,j\varphi}^{LINK} = \mathbf{K}_{Bp,j\varphi} + \mathbf{K}_{Bp,j\varphi}^{link}, \quad (3.190)$$

$$K_{Bbw,w} = K_{Bw,w} - K_{bw,w}. \quad (3.191)$$

Na Slici 3.11 prikazani su stupnjevi slobode vlačnog konačnog elementa za slučaj kada je broj čvorova elementa jednak dva.



Slika 3.11 Stupnjevi slobode vlačnog konačnog elementa za slučaj kada je broj čvorova jednak dva

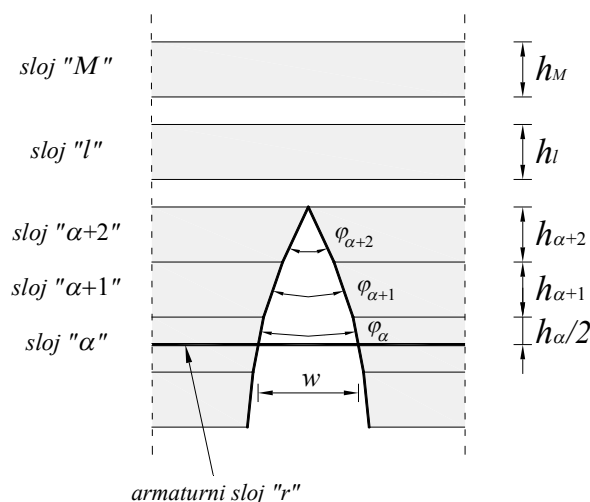
### 3.5.2 Gredni konačni element

U slučaju grednog konačnog elementa, jedan rub presjeka (gornji ili donji) mora uvijek biti u tlaku, što drugim riječima znači kako se pukotina ne može pojaviti u svim slojevima jednog elementa. Kod ovog elementa širina pukotine  $w$  u sredini sloja  $\alpha$  više nije nezavisna veličina, kao kod vlačnog štapa, već postoji veza između pukotine  $w$  i kuteva otvora pukotine  $\varphi_\alpha, \dots, \varphi_M$ , koja se može uspostaviti na osnovu Slike 3.12:

$$w = \sum_{l=\alpha+1}^M \delta_{\alpha l} h_l \varphi_l + \delta_{lc} \frac{h_\alpha}{2} \varphi_\alpha = \mathbf{h}_\alpha^T \Delta_c \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.192)$$

gdje je

$$\mathbf{h}_\alpha = \left\langle 0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{h_\alpha}{2} \quad h_{\alpha+1} \quad \dots \quad h_{M-1} \quad h_M \right\rangle^T. \quad (3.193)$$



Slika 3.12 Širina pukotine u sredini sloja  $\alpha$  i kutevi pukotine za gredni element s  $\alpha+2$  raspucala sloja

Na temelju (3.192), virtualni rad unutarnjih sila (3.95) može se zapisati na način da širina pukotine  $w$  više nije nepoznati parametar:

$$V_i^h = \sum_{j=1}^N \bar{s}_j (q_{rs,j}^i + q_{bs,j}^i) + \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{p}}_j^T (\mathbf{q}_{Bp,j}^i + \mathbf{q}_{rp,j}^i) + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T (\mathbf{q}_\varphi^i + \Delta_C \mathbf{h}_\alpha (q_{Bw}^i - q_{bw}^i)), \quad (3.194)$$

te se analogno i (3.104) transformira u

$$V_i = \left\langle \begin{matrix} \bar{\mathbf{p}}_s^T & \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \end{matrix} \right\rangle \left\{ \begin{matrix} \mathbf{q}_{ps}^i \\ \mathbf{q}_{\varphi\varphi}^i \end{matrix} \right\}, \quad (3.195)$$

gdje je

$$\mathbf{q}_{\varphi\varphi}^i = \mathbf{q}_\varphi^i + \Delta_C \mathbf{h}_\alpha (q_{Bw}^i - q_{bw}^i). \quad (3.196)$$

Na isti se način može preoblikovati i virtualni rad vanjskih sila (3.115) koji sada postaje

$$V_e = \left\langle \begin{matrix} \bar{\mathbf{p}}_s^T & \bar{\boldsymbol{\varphi}}_w^T \end{matrix} \right\rangle \left\{ \begin{matrix} \mathbf{q}_{ps}^e \\ \mathbf{q}_{\varphi\varphi}^e \end{matrix} \right\}, \quad (3.197)$$

pri čemu je

$$\mathbf{q}_{\varphi\varphi}^e = \mathbf{q}_\varphi^e + \Delta_C \mathbf{h}_\alpha q_w^e. \quad (3.198)$$

Čvorni nelinearni vektor neuravnoteženih sila sada postaje

$$\mathbf{g} \equiv \left\{ \begin{matrix} \mathbf{g}_{ps} \\ \mathbf{g}_\varphi \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{q}_{ps}^i \\ \mathbf{q}_{\varphi\varphi}^i \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mathbf{q}_{ps}^e \\ \mathbf{q}_{\varphi\varphi}^e \end{matrix} \right\} = \mathbf{0}, \quad (3.199)$$

što nakon proširenja u Taylorov red samo do linearnog člana, i nakon linearizacije daje

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{pp} & \mathbf{k}_{b,p\varphi} \\ \mathbf{k}_{b,p\varphi}^T & \mathbf{k}_{b,\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_s \\ \Delta \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_{ps} \\ \mathbf{g}_\varphi \end{Bmatrix}, \quad (3.200)$$

gdje blokovi  $\mathbf{k}_{pp}$ ,  $\mathbf{k}_{b,p\varphi}$  i  $\mathbf{k}_{b,\varphi\varphi}$  slijede iz

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{pp} &= \mathbf{q}_{ps}^i \otimes \nabla_{ps}, \\ \mathbf{k}_{b,p\varphi} &= \mathbf{q}_{ps}^i \otimes \nabla_\varphi = (\mathbf{q}_{\varphi\varphi}^i \otimes \nabla_{ps})^T, \\ \mathbf{k}_{b,\varphi\varphi} &= \mathbf{q}_{\varphi\varphi}^i \otimes \nabla_\varphi \end{aligned} \quad (3.201)$$

gdje su  $\nabla_{ps}$  i  $\nabla_\varphi$  vektori parcijalnih derivacija u odnosu na  $\mathbf{p}_s$  i  $\boldsymbol{\varphi}$ .

Za gredni konačni element s  $N$  čvorova, matrica krutosti sad poprima oblik

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{pp}^{11} & \mathbf{k}_{pp}^{12} & \dots & \mathbf{k}_{pp}^{1N} & \mathbf{k}_{b,p\varphi}^1 \\ & \mathbf{k}_{pp}^{22} & \dots & \mathbf{k}_{pp}^{2N} & \mathbf{k}_{b,p\varphi}^2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \mathbf{k}_{pp}^{NN} & \mathbf{k}_{b,p\varphi}^N \\ & & & & \mathbf{k}_{b,\varphi\varphi} \end{bmatrix}, \quad (3.202)$$

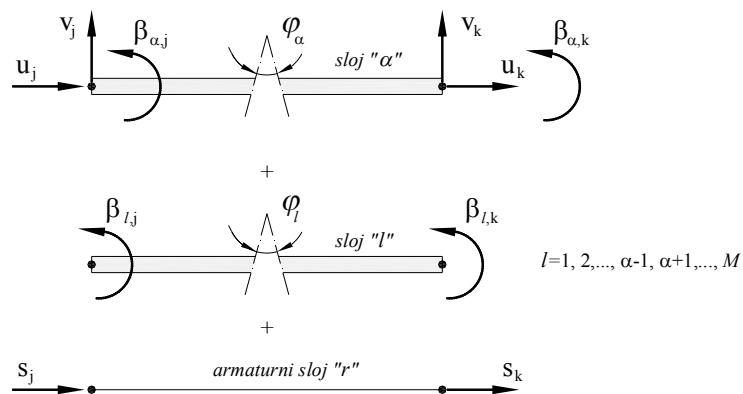


pri čemu je član  $\mathbf{k}_{pp}^{jk}$  jednak kao kod vlačnog štapa. Budući  $w$  više nije nepoznanica problema, neki od članova iz (3.184) se preraspodijele, te ih možemo prikazati kao

$$\mathbf{k}_{b,p\varphi}^j = \left\{ \begin{array}{c} K_{bs,jw} \mathbf{h}_\alpha^T \Delta_C \\ \mathbf{K}_{Bp,j\varphi}^{LINK} + \mathbf{K}_{Bp,jw} \mathbf{h}_\alpha^T \Delta_C \end{array} \right\}, \quad (3.203)$$

$$\mathbf{k}_{b,\varphi\varphi} = \mathbf{K}_{\varphi\varphi} + \mathbf{K}_{\varphi w} \mathbf{h}_\alpha^T \Delta_C + \Delta_C \mathbf{h}_\alpha (\mathbf{K}_{Bw,\varphi} + K_{Bbw,w} \mathbf{h}_\alpha^T \Delta_C). \quad (3.204)$$

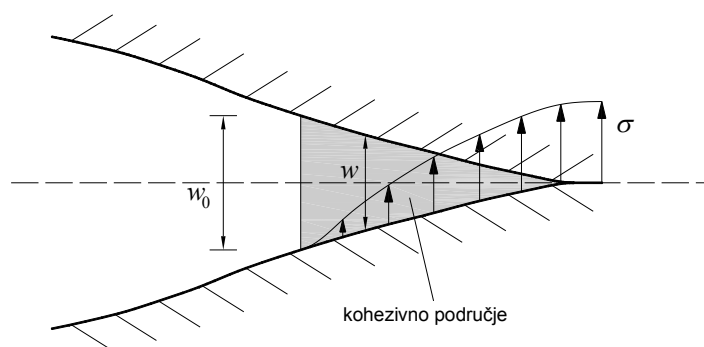
Na Slici 3.13 prikazani su stupnjevi slobode grednog konačnog elementa za slučaj kada je broj čvorova elementa jednak dva.



Slika 3.13 Stupnjevi slobode grednog konačnog elementa za slučaj kada je broj čvorova jednak dva

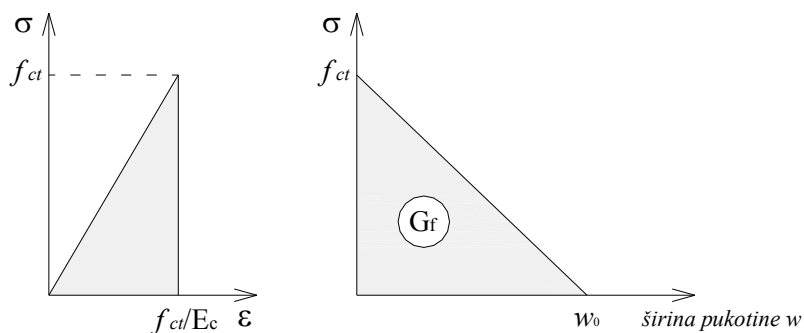
### 3.6 Uključenje kohezivnih napreznja

Osnovna pretpostavka linearno-elastične mehanike loma je kako se proces razvoja pukotine odvija u jednoj točki – vrhu pukotine. Ako je materijal linearno-elastičan, cijeli promatrani problem je u linearno-elastičnom stanju, te stoga možemo primijeniti metode linearne-elastičnosti. U slučaju kvazi-krtih materijala, u koje spada beton, područje razvoja pukotine (*fracture process zone*) znatno je veće i ne može se aproksimirati „točkom“ – dio promatranog problema sad je u nelinearnom stanju. Unutar ovog područja u materijalu dolazi do oštećenja u obliku mikropukotina (Bažant i Cedolin, 2003.). Za opisivanje ovog ponašanja možemo pretpostaviti kako se u nelinearnom području napreznja smanjuju s povećanjem širine pukotine (Slika 3.14).



Slika 3.14 Raspodjela napreznja na mjestu pukotine

U nastavku je definiran virtualni rad kohezivnih napreznja koja nastaju tijekom otvaranja pukotine, što će omogućiti primjenu elementa i u nearmiranim betonskim gredama, te također može biti vrlo poželjno, i točnije i numerički, i u armiranobetonskim elementima. Koristimo model koji su u metodu konačnih elemenata uveli Hillerborg i sur. (1976.). Prije dosezanja vlačne čvrstoće, beton se ponaša kao linearno-elastičan materijal. Pukotina se otvara u trenutku kada napreznja na mjestu pukotine dosegnu vlačnu čvrstoću betona  $f_{ct}$ . U trenutku otvaranja pukotine, napreznje na mjestu pukotine ne nestaje odjednom, već se smanjuje s povećanjem širine pukotine – napreznja djeluju na mjestu pukotine dok god je ona dovoljno uska, sve dok se ne potroši energija sloma  $G_f$  (Slika 3.15).



Slika 3.15 Bilinearni zakon oštećenja

Nakon dostizanja vlačne čvrstoće  $f_{ct}$ , naprezanje možemo opisati funkcijom u ovisnosti o širini pukotine  $w$ . Najjednostavniji bilinearni konstitutivni zakon oštećenja može se definirati za slučaj jednoosnog stanja naprezanja (koji podrazumijeva oblik sloma I.) kao

$$\sigma = \begin{cases} E_c \varepsilon, & \varepsilon \leq \frac{f_{ct}}{E_c} \\ f_{ct} \left(1 - \frac{w}{w_0}\right), & \varepsilon > \frac{f_{ct}}{E_c}, 0 \leq w \leq w_0 \quad i \quad \sigma = 0, w > w_0 \end{cases} \quad (3.205)$$

gdje je  $w$  širina pukotine na promatranom mjestu, dok je  $w_0 = 2G_f/f_{ct}$  kritična širina pukotine (najveća širina pukotine pri kojoj pukotina još može prenositi naprezanja);  $E_c$ ,  $f_{ct}$  i  $G_f$  (energija sloma ovisna o razredu betona i veličini zrna agregata) su poznati materijalni parametri. Nakon prekoračenja kritične širine pukotine  $w_0$  više ne postoji nikakvo naprezanje - pukotina više ne pruža otpor otvaranju.

Ukupni virtualni rad – zbroj virtualnih radova višeslojne grede, naprezanja prijanjanja i uzdužne sile u armaturi (3.194) potrebno je nadopuniti s virtualnim radom kohezivnih naprezanja u svim raspucanim slojevima

$$V_{c,i} = \sum_{l=1}^M \delta_{lc} (\bar{w}_l N_l + \bar{\varphi}_l M_l)_{X_{lc}}. \quad (3.206)$$

Treba primijetiti kako se sloj promatra kao raspucani kada naprezanja na sredini sloja prekorače vlačnu čvrstoću, tj. kada je  $N_l/A_l > f_{ct}$ . Bilo kakva promjena po visini sloja  $h_l$  uslijed momenta  $M_l$  su zanemarena u skladu s osnovnom kinematičkom pretpostavkom kako je sloj ili neraspucan ( $\delta_{lc}=0$ ) ili raspucan ( $\delta_{lc}=1$ ). Stoga, virtualni rad kohezivnih naprezanja se može pojednostavljeno definirati kao

$$V_{c,i} = \sum_{l=1}^M \delta_{lc} \bar{w}_l N_l = \sum_{l=1}^M \bar{w}_l \delta_{lc} A_l f_{ct} \left(1 - \frac{w_l}{w_0}\right). \quad (3.207)$$

Kako je kod grednog konačnog elementa širina pukotine u sredini sloja  $\alpha$  povezana s kutevima otvora pukotine pomoću izraza

$$\langle w_1 \quad \dots \quad w_l \quad \dots \quad w_M \rangle^T = [\mathbf{h}_1 \quad \dots \quad \mathbf{h}_l \quad \dots \quad \mathbf{h}_M]^T \Delta_C \varphi = \mathbf{H}^T \Delta_C \varphi, \quad (3.208)$$

pri čemu je

$$\mathbf{h}_l = \langle 0 \quad \dots \quad 0 \quad h_l/2 \quad h_{l+1} \quad \dots \quad h_{M-1} \quad h_M \rangle^T, \quad (3.209)$$

virtualni rad kohezivnih naprezanja tako postaje

$$V_{c,i} = \bar{\varphi}^T \Delta_C^T \mathbf{H} \Delta_C \mathbf{N}_d = \bar{\varphi}^T \mathbf{q}_{icp}, \quad (3.210)$$

$$\mathbf{q}_{icp} = \Delta_C \mathbf{H} \mathbf{N}_d,$$

gdje je

$$\mathbf{N}_d = \langle N_{d1} \quad \dots \quad N_{dl} \quad \dots \quad N_{dM} \rangle^T, N_{dl} = A_l f_{ct} \left(1 - w_l/w_0\right), \quad (3.211)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_2 & h_2/2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & \vdots \\ h_{l-1} & h_{l-1} & \dots & h_{l-1}/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_l & h_l & \dots & h_l & h_l/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_{l+1} & h_{l+1} & \dots & h_{l+1} & h_{l+1} & h_{l+1}/2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{M-1} & h_{M-1} & \dots & h_{M-1} & h_{M-1} & h_{M-1} & \dots & h_{M-1}/2 & 0 \\ h_M & h_M & \dots & h_M & h_M & h_M & \dots & h_M & h_M/2 \end{bmatrix}. \quad (3.212)$$

Dobiveni virtualni rad kohezivnih naprezanja pribrajamo ukupnom virtualnom radu (3.194) što daje

$$V_i^h = \sum_{j=1}^N \bar{s}_j (q_{irs,j} + q_{ibs,j}) + \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{p}}_j^T (\mathbf{q}_{iBp,j} + \mathbf{q}_{irp,j}) + \bar{\varphi}^T (\mathbf{q}_{i\varphi} + \Delta_C \mathbf{h}_\alpha (q_{iBw} - q_{ibw}) + \mathbf{q}_{ic\varphi}), \quad (3.213)$$

pri čemu se (3.196) transformira u

$$\mathbf{q}_{i\varphi\varphi} = \mathbf{q}_{i\varphi} + \Delta_C \mathbf{h}_\alpha (q_{iBw} - q_{ibw}) + \mathbf{q}_{ic\varphi}. \quad (3.214)$$

Dodatni doprinos bloku matrice krutosti  $\mathbf{k}_{b,\varphi\varphi}$  dobiva se razvojem (3.214) u Taylorov red i linearizacijom:

$$\Delta \mathbf{q}_{ic\varphi} = \Delta_C \mathbf{H} \Delta \mathbf{N}_d, \quad (3.215)$$

odnosno iz (3.211) dobivamo

$$\Delta \mathbf{q}_{ic\varphi} = \mathbf{K}_{c\varphi} \Delta \varphi, \quad (3.216)$$

gdje je

$$\mathbf{K}_{c\varphi} = \Delta_C \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{H}^T \Delta_C, \quad (3.217)$$

dok je matrica  $\mathbf{A}$  jednaka

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 f_{i1} \begin{cases} 0, & w_1 > w_0 \\ -1/w_0, & w_1 < w_0 \end{cases} & & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & & A_2 f_{i2} \begin{cases} 0, & w_2 > w_0 \\ -1/w_0, & w_2 < w_0 \end{cases} & \dots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & \dots & A_M f_{iM} \begin{cases} 0, & w_M > w_0 \\ -1/w_0, & w_M < w_0 \end{cases} & \end{bmatrix}. \quad (3.218)$$

Ovaj dodatni doprinos se pribraja (3.204) koji se tako transformira u

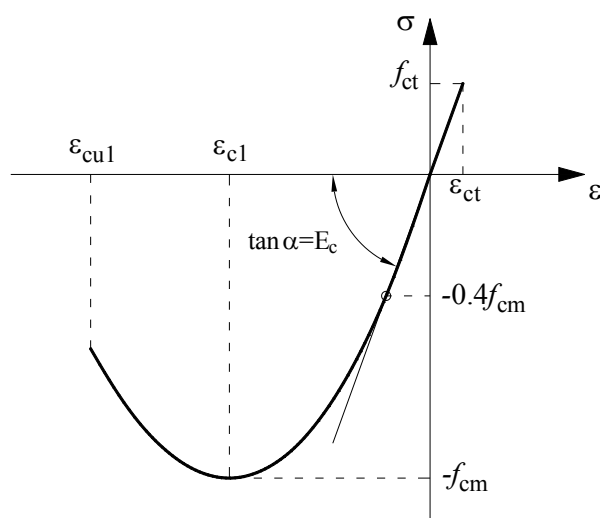
$$\mathbf{k}_{b,\varphi\varphi} = \mathbf{K}_{\varphi\varphi} + \mathbf{K}_{\varphi w} \mathbf{h}_\alpha^T \Delta_C + \Delta_C \mathbf{h}_\alpha (\mathbf{K}_{Bw,\varphi} + \mathbf{K}_{Bbw,w} \mathbf{h}_\alpha^T \Delta_C) + \mathbf{K}_{c\varphi}. \quad (3.219)$$

## 4 NELINEARNI MATERIJALNI MODELI

U ovom poglavlju opisani su jednoosni materijalni modeli betona, čelika za armiranje, te veze između njih preko odnosa naprezanja prijanjanja u funkciji proklizavanja armature.

### 4.1 Nelinearni konstitutivni zakon betona

Konstitutivni zakon za beton (Slika 4.1) usvojen je prema EN 1992-1-1:2004 (2004.), uz proširenje modela u vlačnom području (u EN 1992-1-1:2004 je zanemarena nosivost betona u vlaku).



Slika 4.1 Konstitutivni zakon za beton

Veza naprezanje - deformacija betona opisana je sljedećim zakonom:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon < \varepsilon_{cu1} \\ -f_{cm} \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} & \varepsilon_{cu1} \leq \varepsilon \leq 0 \\ \varepsilon E_c, & 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{ct} \\ 0, & \varepsilon > \varepsilon_{ct} \end{cases} \quad (4.1)$$

gdje je

$$\eta = \varepsilon / \varepsilon_{c1}, k = 1,05 E_c |\varepsilon_{c1}| / f_{cm} \quad (4.2)$$

U (4.1) je  $f_{cm}$  srednja vrijednost tlačne čvrstoće betonskog valjka (pozitivna vrijednost),  $\varepsilon_{c1}$  tlačna deformacija betona za vršno naprezanje,  $\varepsilon_{cu1}$  granična tlačna deformacija betona,  $\varepsilon_{ct}$  deformacija koja odgovara vlačnoj čvrstoći, te  $E_c$  sekantni modul elastičnosti betona (približno definiran kao nagib pravca koji prolazi kroz ishodište i točku  $\sigma = 0,4 f_{cm}$  na  $\sigma - \varepsilon$  dijagramu).

Za betone razreda tlačne čvrstoće manje ili jednake C50/60 gornje su vrijednosti definirane kao:

$$\begin{aligned}
f_{cm} \text{ (MPa)} &= f_{ck} + 8, \\
\varepsilon_{c1} (\text{‰}) &= -0,7 \cdot f_{cm}^{0,31}, \\
\varepsilon_{cu1} (\text{‰}) &= -3,5, \\
E_{cm} \text{ (GPa)} &= 22 \cdot (f_{cm} / 10)^{0,3},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

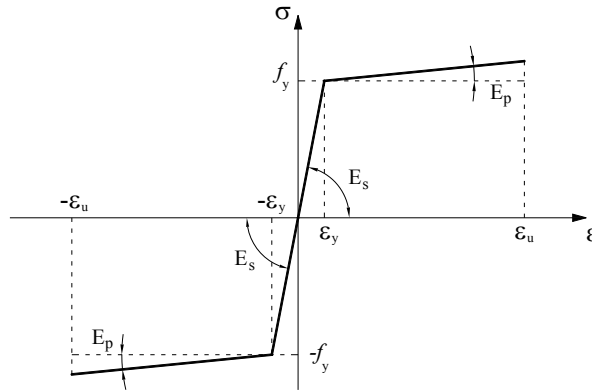
gdje se  $f_{ck}$  i  $f_{cm}$  uvrštavaju u MPa.

Derivacijom naprezanja (4.1) po deformaciji dobivamo tangenti modul

$$E^{t,c}(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon < \varepsilon_{cu1} \\ -\frac{f_{cm} (1-\eta)[k+(k-2)\eta]}{\varepsilon_{c1} (1+(k-2)\eta)^2}, & \varepsilon_{cu1} \leq \varepsilon \leq 0 \\ E_c, & 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{ct} \\ 0, & \varepsilon > \varepsilon_{ct} \end{cases} \tag{4.4}$$

## 4.2 Konstitutivni zakon čelika za armiranje

Čelik za armiranje opisan je bilinearnim modelom s istim ponašanjem u vlaku i u tlaku (Slika 4.2).



Slika 4.2 Bilinearni konstitutivni zakon za armaturni čelik

Naprežanje čelika u ovisnosti o deformaciji dano je sa

$$\sigma_s(\varepsilon) = \begin{cases} E_s \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_y \\ \text{sign}(\varepsilon) [E_s \varepsilon_y + E_p (|\varepsilon| - \varepsilon_y)], & \varepsilon_y < |\varepsilon| \leq \varepsilon_u, \\ 0, & \varepsilon_u < |\varepsilon|, \end{cases} \tag{4.5}$$

gdje je  $E_s$  modul elastičnosti čelika,  $E_p$  modul očvršćenja u plastičnom području,  $f_y$  naprežanje pri granici popuštanja,  $\varepsilon_y$  deformacija pri granici popuštanja, te  $\varepsilon_u$  deformacija armature pri maksimalnom opterećenju.

Prilikom određivanja tangente konstitutivne matrice potreban je tangenti modul, za koji vrijedi:

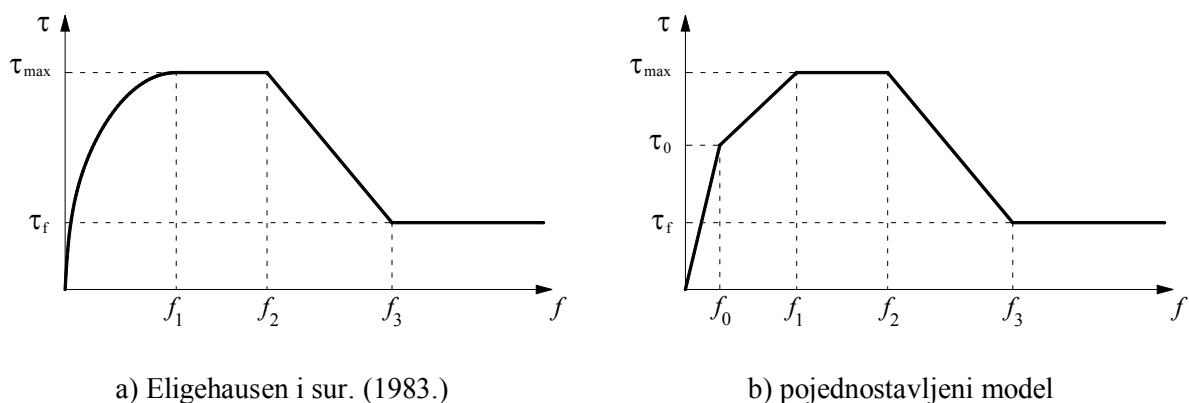
$$E^{t,s}(\varepsilon) = \begin{cases} E_s, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_y \\ E_p, & \varepsilon_y < |\varepsilon| \leq \varepsilon_u. \\ 0, & \varepsilon_u < |\varepsilon|. \end{cases} \tag{4.6}$$

### 4.3 Naprezanje prijanjanja kao funkcija proklizavanja armature

Veza između betona i armaturnih šipki vrlo je bitan dio mehanizma nosivosti armiranobetonskih konstrukcija. Ta se veza ostvaruje uzajamnim djelovanjem triju komponenti: (i) kemijske adhezije između cementne paste i čelika, (ii) trenja i (iii) mehaničke veze između rebara armature na površini šipke i betona (Fib Bulletin 10, 2000.). U slučaju glatkih armaturnih šipki izostaje efekt mehaničke veze između rebara na površini šipke i betona, što je ujedno i razlog puno manjih vrijednosti čvrstoća prijanjanja.

Rezultati ispitivanja izvlačenja armaturnih šipki iz betona pokazuju kako na čvrstoću prijanjanja utječu mnogi parametri, poput čvrstoće betona, promjera šipke, razmaka šipki, naprezanja u šipki, utjecaja ovijanja poprečnom armaturom, zaštitnom sloju betona,... (Fib Bulletin 10, 2000., Wu i Gilbert, 2009.). Upravo zbog velikog broja ovih parametara, predloženi su mnogi modeli koji nastoje opisati naprezanje prijanjanja kao funkciju proklizavanja armaturne šipke. Spomenimo samo neke: Ngo i Scordelis (1967.) su koristili pojednostavljeni linearni model, Nilson (1968.) je predložio nelinearni model u obliku polinoma trećeg stupnja, dok su Mirza i Houde (1979.) uveli polinom četvrtog stupnja. Složeniji nelinearni modeli, poput modela kojeg su razvili Eligehausen i sur. (1983.), na osnovu opsežnog eksperimentalnog istraživanja, mogu se primijeniti ne samo za monotono rastuća opterećenja, već i za ponovljena opterećenja i opterećenja u ciklusima. Naposljetku spomenimo i model Shimae i sur. (1987.) koji uključuje i naprezanje u armaturi, pa se može upotrijebiti i nakon prekoračenja granice popuštanja u čeliku za armiranje (detaljnije o tome što se događa nakon prekoračenja granice popuštanja u čeliku za armiranje može se pronaći u npr. Mayer i Eligehausen, 1998., Ruiz i sur., 2007., Lee i sur., 2011.).

U ovom je radu konstitutivni zakon naprezanja prijanjanja kao funkcija proklizavanja armature usvojen prema modelu iz CEB-FIP MC90 (2000.), temeljenom na modelu kojeg su razvili Eligehausen i sur. (1983.), uz jedno pojednostavljenje – nelinearni dio krivulje zamijenjen je bilinearnim (Slika 4.3), kako bi model bio numerički efikasniji. Očekuje se kako ovaj način pojednostavljenja neće jako utjecati na rezultate, a uporište za zamjenu pronađeno je i kod drugih autora (npr. Kwak i Filippou, 1990., Yankelevsky i sur. 2008., Mendes i Castro 2013.).



Slika 4.3 Konstitutivni zakon naprezanja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju armature

Uzlazni dio krivulje odgovara stanju u kojem rebra na plaštu šipke prodiru u beton, praćeno lokalnim drobljenjem betona i mikropukotinama – u slučaju uporabnih opterećenja u eksploataciji vrijednosti proklizavanja obično su u ovom području (Wu i Gilbert, 2009.). Nakon horizontalnog dijela krivulje, koji postoji samo u slučaju ovijenog betona, slijedi linearni padajući dio u kojem je smanjenje čvrstoće prianjanja rezultat nastanka uzdužnih pukotina u smjeru armature (Goto, 1971.). Posljednji horizontalni dio dijagrama odgovara rezidualnoj čvrstoći, koja je jednaka komponenti trenja (Fib Bulletin 10, 2000.).

Naprezanje prianjanja definirano je kao

$$\tau(f) = \begin{cases} f \cdot k_1, & 0 \leq f \leq f_0 \\ \tau_0 + (f - f_0)k_2, & f_0 < f \leq f_1 \\ \tau_{\max}, & f_1 < f \leq f_2 \\ \tau_{\max} - k_3(f - f_2), & f_2 < f \leq f_3 \\ \tau_f, & f > f_3 \end{cases} \quad (4.7)$$

gdje je  $\tau_0$  čvrstoća prianjanja koja odgovara proklizavanju  $f_0$ ,  $\tau_{\max}$  najveća čvrstoća prianjanja,  $\tau_f$  čvrstoća prianjanja koja odgovara komponenti trenja, dok su kutovi nagiba  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$  definirani kao

$$k_1 = \frac{\tau_0}{f_0}, \quad k_2 = \frac{\tau_{\max} - \tau_0}{f_1 - f_0}, \quad k_3 = \frac{\tau_{\max} - \tau_f}{f_3 - f_2}. \quad (4.8)$$

Za određivanje članova matrica krutosti koji nastaju kao rezultat proklizavanja armature: (3.136), (3.137), (3.139) i (3.140) potrebno je definirati derivaciju naprezanja prianjanja:

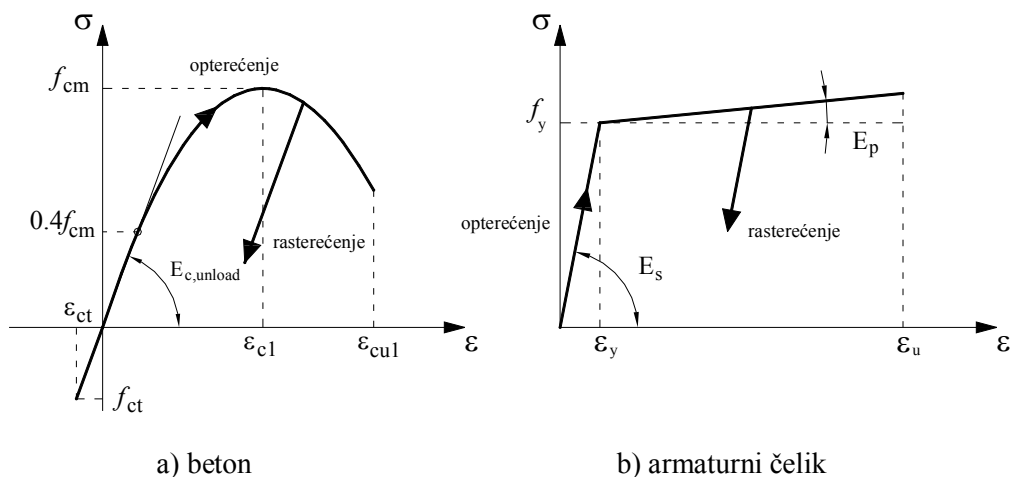
$$\frac{d\tau}{df} = \begin{cases} k_1, & 0 \leq f \leq f_0 \\ k_2, & f_0 < f \leq f_1 \\ 0, & f_1 < f \leq f_2 \\ -k_3, & f_2 < f \leq f_3 \\ 0, & f > f_3 \end{cases} \quad (4.9)$$

#### 4.4 Nadogradnja modela za slučaj rasterećenja

Nelinearni jednoosni konstitutivni model za beton i bilinearni konstitutivni model čelika za armiranje prošireni su na način kako je to prikazano na Slici 4.4. Prilikom opterećenja sve do granice elastičnosti ( $0,4f_{cm}$  kod betona, te  $f_y$  kod čelika za armiranje), rasterećenje vlakna obavlja se po istom zakonu kao i opterećenje. No, ako prilikom opterećenja prekoračimo granicu elastičnosti materijala, veza između naprezanja i deformacije različita je od one pri opterećenju – pri rasterećenju pratimo pravac paralelan početnom modulu elastičnosti ( $E_{c,unload}$  kod betona i  $E_s$  kod čelika).

Kako bi se moglo provesti takvo poboljšanje, tokom inkrementalnog postupka nanošenja opterećenja, potrebno je uvesti „spremanje“ vrijednosti iz prošlog koraka. Naime, kako bi odredili vrijednosti u koraku  $n+1$  potrebno je poznavati vrijednosti iz koraka  $n$ .





Slika 4.4 Ugradnja rasterećenja

#### 4.4.1 Bilinearni plastični konstitutivni model materijala

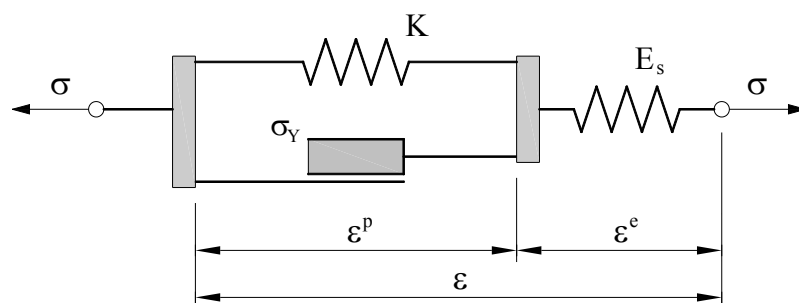
Bilinearni plastični konstitutivni model materijala s izotropnim očvršćenjem (Simo i Hughes, 1997.), opisan u nastavku, korišten je za modeliranje ponašanja čelika za armiranje. Za potrebe modeliranja betona korištena je malo pojednostavljena procedura.

Očvršćenje materijala pri jednoosnom opterećenju može se opisati sljedećom tvrdnjom: pri monotonom porastu plastične deformacije naprezanje također monotonno raste.

Izotropno očvršćenje znači da se granica popuštanja jednako povećava kako u tlaku tako i u vlaku: pri svakom ponovnom opterećenju granica elastičnosti se pomiče do one vrijednosti koju smo dosegli u prošlom koraku.

Na Slici 4.5 prikazan je reološki model elastoplastičnog materijala s izotropnim očvršćenjem. Model (jedinične duljine i jedinične površine) sastoji se od:

- linearno-elastične opruge, definirane elastičnom konstantom  $E_s$ ,
- (Coulomb-ovim) elementom trenja, definiranog konstantom  $\sigma_Y$ ,
- linearno-elastične opruge, definirane plastičnom konstantom  $K$ .



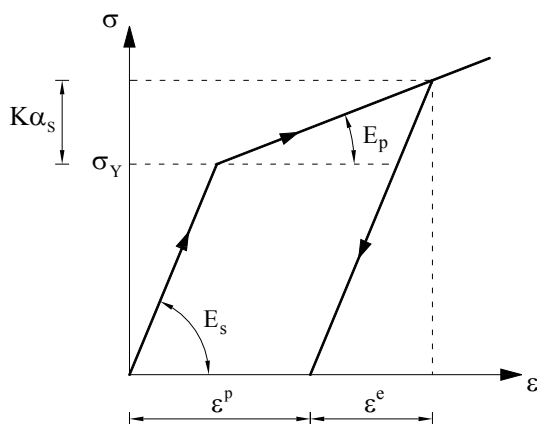
Slika 4.5 Reološki model elastoplastičnog materijala s izotropnim očvršćenjem (Bonet i Wood, 2008.)

Ukupna deformacija sastoji se od elastičnog dijela na opruzi s konstantom  $E_s$ , i plastičnog dijela koji se ostvaruje na Coulomb-ovu elementu trenja (Slika 4.6):

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \quad (4.10)$$

Pretpostavimo linearnu vezu između naprezanja i elastične deformacije:

$$\sigma = E_s \varepsilon^e = E_s (\varepsilon - \varepsilon^p). \quad (4.11)$$



Slika 4.6 Model bilinearnog elastoplastičnog materijala s izotropnim očvršćenjem

Kriterij tečenja glasi:

$$f(\sigma, \alpha_s) = |\sigma| - (\sigma_Y + K\alpha_s) \leq 0, \quad \alpha_s \geq 0, \quad (4.12)$$

gdje su  $\sigma_Y > 0$  i  $K \geq 0$  dane konstante materijala. U (4.12)  $\sigma_Y$  je granica plastičnog tečenja pri akumuliranoj plastičnoj deformaciji,  $K$  je plastični modul, definiran kao

$$K = \frac{E_s E_p}{E_s - E_p}, \quad (4.13)$$

dok je  $\alpha_s$  varijabla ojačanja (nenegativna funkcija plastične deformacije). U slučaju kad je  $K < 0$  govorimo o omekšanju materijala. Za  $K = 0$  model se pojednostavljuje na idealno elastoplastični materijal – materijal se najprije ponaša kao linearno elastičan dok se ne dostigne granica tečenja  $\sigma_Y$ , a kad je dostignuta granica tečenja  $\sigma_Y$  deformacije i dalje rastu po istom naprezanju  $\sigma = \sigma_Y$ .

Za slučaj bilinearnog elastoplastičnog modela s izotropnim očvršćenjem za varijablu ojačanja pretpostavljamo (Simo i Hughes, 1998.):

$$\dot{\alpha}_s = |\dot{\varepsilon}^p|. \quad (4.14)$$

Nadalje, za pravilo tečenja i izotropni zakon očvršćenja pretpostavimo

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \cdot \text{sign}(\sigma), \quad (4.15)$$

gdje je  $\gamma$  prirast tečenja, a  $\text{sign}(\sigma)$  definiran kao

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \sigma > 0 \\ -1 & \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Iz (4.14) i (4.15) slijedi

$$\dot{\alpha}_S = \gamma. \quad (4.17)$$

Zakon plastičnog tečenja možemo definirati pomoću Kuhn-Tuckerovih uvjeta komplementarnosti

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha_S) \leq 0, \quad \gamma \cdot f(\sigma, \alpha_S) = 0, \quad (4.18)$$

koji izražavaju fizikalni zahtjev da za proizvoljno stanje naprezanje plastične deformacije nastaju samo na plohi tečenja. U izrazu (4.18)  $\gamma \geq 0$  možemo odrediti iz uvjeta konzistentnosti

$$\gamma \dot{f}(\sigma, \alpha_S) = 0 \text{ ako je } f(\sigma, \alpha_S) = 0, \quad (4.19)$$

koji odgovara fizikalnom zahtjevu da za  $\dot{\varepsilon}^P \neq 0$  naprezanje ostaje na plohi tečenja.

Koristeći (4.12) - (4.18) možemo definirati i tangentni modul kao

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E_s \dot{\varepsilon}, & \gamma = 0 \\ \frac{E_s K}{E_s + K} \dot{\varepsilon}, & \gamma > 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Izraz  $E_s K / (E_s + K)$  označava elastoplastični tangentni modul.

U nastavku je opisan postupak kako plastični konstitutivni model materijala s izotropnim očvršćenjem možemo koristiti u inkrementalnom postupku nanošenja opterećenja/rasterećenja.

Pretpostavimo kako je vremenu  $t_n$  poznato stanje naprezanja i deformacija proizvoljnog vlakna: poznate su vrijednosti naprezanja  $\sigma_n$ , deformacije  $\varepsilon_n$ , plastične deformacije  $\varepsilon_n^P$  te varijable ojačanja  $\alpha_n$ .

U sljedećem inkrementu  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  deformacija se promijeni za  $\Delta \varepsilon$ :  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon$ .

Dalje slijedi

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^P &= \varepsilon_n^P + \Delta \gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \\ \alpha_{S,n+1} &= \alpha_{S,n} + \Delta \gamma \end{aligned} \quad (4.21)$$

gdje je  $\Delta \gamma = \gamma_{n+1} \Delta t \geq 0$ , dok su naprezanje i deformacija na kraju inkrementa  $n+1$  jednaki

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E_s (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^P) \\ \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n + \Delta \varepsilon \end{aligned} \quad (4.22)$$

Vrijednosti  $\sigma_{n+1}$  i  $\alpha_{S,n+1}$  omeđene su Kuhn-Tuckerovim uvjetom:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= |\sigma_{n+1}| - (\sigma_Y + K \alpha_{S,n+1}) \leq 0 \\ \Delta \gamma &\geq 0 \\ \Delta \gamma f_{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Pretpostavimo da je rješenje gornjeg problema jedinstveno. Uvedimo probnu funkciju

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}^{trial} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^P) = \sigma_n + E_s \Delta\varepsilon \\
\varepsilon_{n+1}^{P \text{ trial}} &= \varepsilon_n^P \\
\alpha_{S,n+1}^{trial} &= \alpha_{S,n} \\
f_{n+1}^{trial} &= |\sigma_{n+1}^{trial}| - (\sigma_Y + K\alpha_{S,n}).
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

Probno je stanje definirano samo na osnovu početnih vrijednosti ( $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_n^P$  i  $\alpha_{S,n}$ ) i zadane inkrementalne deformacije  $\Delta\varepsilon$ . Ovo stanje nužno ne odgovara fizikalno mogućem stanju, osim u slučaju ako je inkrementalni postupak elastičan.

U slučaju kad je  $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ , radi se o elastičnom stanju ( $\Delta\gamma = 0$ ); stanje naprezanja i deformacija odgovara probnoj funkciji (Slika 4.7):

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{trial} \\
\varepsilon_{n+1}^P &= \varepsilon_n^P \\
\alpha_{S,n+1} &= \alpha_{S,n}.
\end{aligned}
\tag{4.25}$$

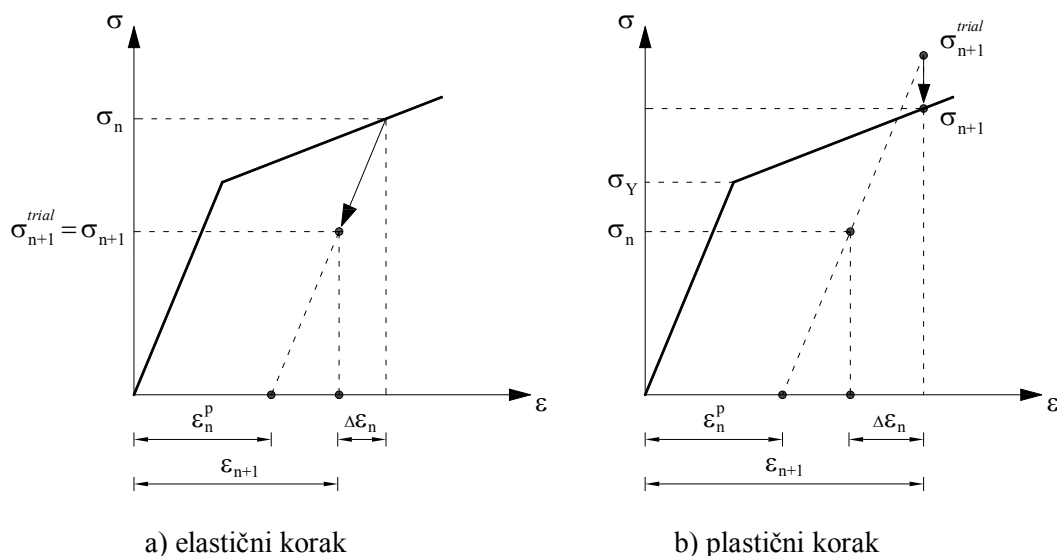
U slučaju kad je  $f_{n+1}^{trial} > 0$ , radi se o plastičnom stanju ( $\Delta\gamma > 0$ ):

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma E_s \text{sign}(\sigma_{n+1}) \\
\varepsilon_{n+1}^P &= \varepsilon_n^P + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \\
\alpha_{S,n+1} &= \alpha_{S,n} + \Delta\gamma
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

gdje je

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E_s + K} > 0.
\tag{4.27}$$

Pritom vrijedi kako je  $\text{sign}(\sigma_{n+1}) = \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})$ .



Slika 4.7 Dva moguća slučaja (Simo i Hughes, 1998.)

#### 4.4.2 Postupak rasterećenja za beton

U nastavku je prikazan pojednostavljeni postupak opterećenja – rasterećenja za beton.

Budući je  $E_c$  definiran samo aproksimativno (ne prolazi kroz točku  $0,4f_{cm}$  na dijagramu), uveden je modul rasterećenja betona  $E_{c,unload}$  koji je definiran kao „prava sekanta“ koja prolazi kroz ishodište i točku  $\sigma = 0,4f_{cm}$  na  $\sigma - \varepsilon$  dijagramu. Do  $0,4f_{cm}$  nema nikakvih zaostalih deformacija, i rasterećenje ide po krivulji, a nakon  $0,4f_{cm}$  rasterećenje (te ponovno opterećenje) ide po pravcu  $E_{c,unload}$  uz zaostale deformacije  $\varepsilon^p$ .

Postupak rasterećenja/opterećenja je sljedeći (Slika 4.8):

za promjenu  $\Delta\varepsilon$  izračunamo probnu funkciju  $\sigma_{n+1}^{trial}$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \sigma_n + E_{c,unload}\Delta\varepsilon, \quad (4.28)$$

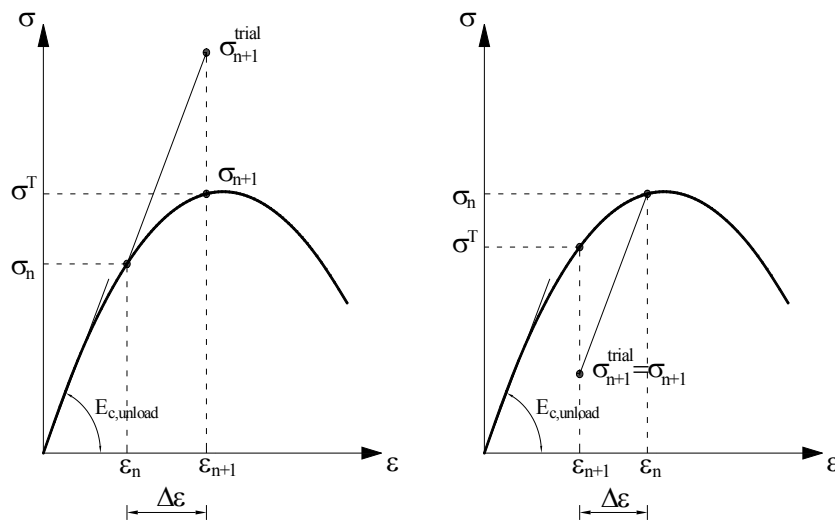
te ga usporedimo s naprezanjem po izrazu

$$\sigma^T = \sigma(\varepsilon_n + \Delta\varepsilon) = \sigma(\varepsilon_{n+1}). \quad (4.29)$$

Moguća su dva različita slučaja

$$\sigma_{n+1}^{trial} > \sigma^T \rightarrow \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}, E_{n+1} = E_{c,unload}, \varepsilon_{n+1}^P = \varepsilon_n^P \quad (4.30)$$

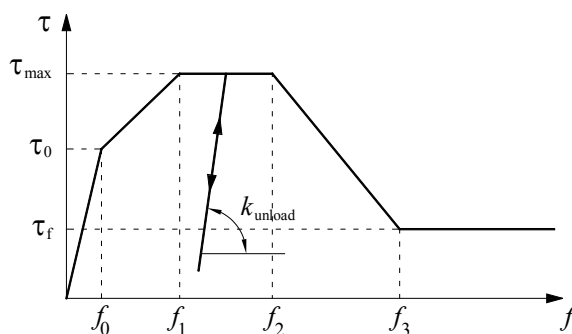
$$\sigma_{n+1}^{trial} \leq \sigma^T \rightarrow \sigma_{n+1} = \sigma^T, E_{n+1} = E_t, \varepsilon_{n+1}^P = \varepsilon_n - \frac{\sigma_{n+1}}{E_{c,unload}}. \quad (4.31)$$



Slika 4.8 Dva različita slučaja opterećenja/rasterećenja kod betona

#### 4.4.3 Nadogradnja modela naprezanje prijanjanja – proklizavanje armature

Ugrađeni konstitutivni zakon naprezanje prijanjanja – proklizavanje armature nadograđen je za „ograničeni“ slučaj rasterećenja i ponovnog opterećenja, koje se može pojaviti i u slučaju monotono rastućeg opterećenja uslijed otvaranja novih pukotina (npr. Fantilli i sur., 1998., Au i Bai 2007., Yankelevsky i sur., 2008., Zanuy i sur., 2009.). Rasterećenje je modelirano na način da se odvija po nagibu  $k_{\text{unload}}$  (Slika 4.9). Postupak rasterećenja i ponovnog opterećenja opisan je u nastavku.



Slika 4.9 Ugrađnja rasterećenja

Pretpostavimo kako je vremenu  $t_n$  poznato naprezanje prijanjanja  $\tau_n$  i proklizavanje  $f_n$ . U sljedećem inkrementu  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  proklizavanje se promijeni za  $\Delta f$

$$f_{n+1} = f_n + \Delta f. \quad (4.32)$$

Uvedimo pomoćnu funkciju

$$\tau_{n+1}^{\text{trial}} = \tau_n + k_{\text{unload}} \Delta \varepsilon, \quad (4.33)$$

i usporedimo je s naprezanjem prijanjanja  $\tau(f_{n+1})$  definirano u (4.7). Moguća su dva slučaja: opterećenje u kojem je  $\Delta f \geq 0$  i rasterećenje kod kojeg je  $\Delta f < 0$ . Slučaj opterećenja možemo podijeliti na

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}^{\text{trial}} &< \tau(f_{n+1}) \\ \tau_{n+1} &= \tau_{n+1}^{\text{trial}}, \left( \frac{d\tau}{df} \right)_{n+1} = k_{\text{unload}}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

te

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}^{\text{trial}} &\geq \tau(f_{n+1}) \\ \tau_{n+1} &= \tau(f_{n+1}), \left( \frac{d\tau}{df} \right)_{n+1} = \frac{d\tau}{df}(f_{n+1}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

U slučaju rasterećenja vrijedi

$$\tau_{n+1} = \tau_{n+1}^{\text{trial}}, \left( \frac{d\tau}{df} \right)_{n+1} = k_{\text{unload}}. \quad (4.36)$$

## 5 VERIFIKACIJA I VALIDACIJA MODELA

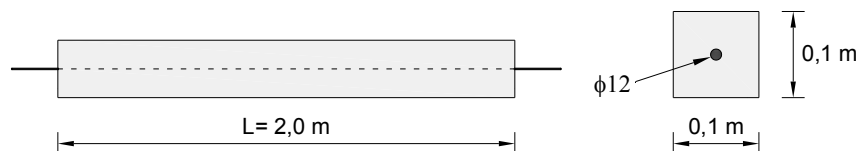
### 5.1 Linearni konstitutivni zakon naprezanje prijanjanja – proklizavanje armature

U ovom poglavlju prikazana su dva primjera u kojima je predloženi konačni element s ugrađenim raspucavanjem ispitan za slučaj monotono rastućeg opterećenja (jedan primjer s vlačnim, a drugi s grednim konačnim elementima). Primijenjeni su dvočvorni elementi. Predviđeni položaj pukotine odabran je u sredini elementa ( $X_{1c}=L_{el}/2$  gdje je  $L_{el}$  duljina elementa). U svim elementima referentna os sloja nalazi se na polovici visine sloja.

Prilikom integriranja integrala koji sadrže funkciju  $k(X_1)$ , koja je kontinuirana svugdje, osim na mjestu pukotine, integracijsko područje je podijeljeno na dva dijela (ne uključujući mjesto pukotine):  $[0, L_{el}/2) \cup (L_{el}/2, L_e]$ . Newton-Raphsonova tolerancija za normu reziduala jednaka je  $10^{-6}$ . Svi su konstitutivni zakoni ponašanja materijala linearni: čelik, beton – koji je modeliran kao idealno kruti materijal, te naprezanje prijanjanja – proklizavanje armature ( $\tau = C_s f$  gdje je  $C_s$  modul prijanjanja). Konstitutivni zakoni ponašanja materijala su odabrani kao linearni s razlogom – kako bi se koncentrirali na mehanizam nastajanja pukotina predloženim višeslojnim grednim konačnim elementom.

#### 5.1.1 Vlačni štap

U prvom primjeru analiziramo armiranobetonski štap kvadratnog poprečnog presjeka kroz čije središte prolazi armaturna šipka promjera 12 mm (Slika 5.1). Vlačna sila djeluje na krajevima šipke koja viri iz betonskog štapa. Materijalni parametri štapa dani su u Tablici 5.1.



Slika 5.1 Vlačni štap

Tablica 5.1 Materijalne karakteristike vlačnog štapa

modul elastičnosti betona $E_c$	21 000 MPa
vlačna čvrstoća betona $f_{ct}$	2,1 MPa
modul elastičnosti čelika za armiranje $E_s$	210 000 MPa
modul prijanjanja $C_s$	30 000 MPa/m

Linearna Lagrangeova interpolacija primijenjena je za pomake, kuteve zaokrete, te za polje proklizavanja. Korištena je dvočvorna Gaussova numerička integracija (primijenjena na svaku polovicu domene integrala koji sadrže skokovitu funkciju  $k(X_1)$ ).

Prvi pokus uključuje proračun proklizavanja bez raspucavanja (tj. bez ograničenja vlačne čvrstoće betona) i usporedbu s analitičkim rješenjem (npr. Creazza i Russo, 1999.). Na štap djeluje sila  $F$  u iznosu 20 kN. Analizom desne polovice štapa (na sredini štapa su proklizavanje i pomak jednaki nuli) dobivamo sljedeća rješenja za proklizavanje  $s$  i pomak  $u$ :

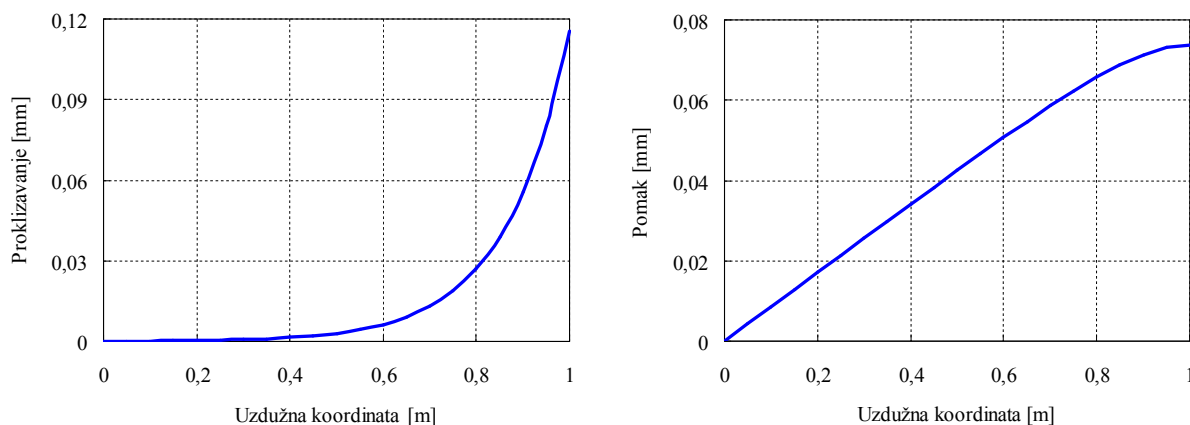
$$s(X_1) = \frac{F}{E_s A_s \beta} \frac{\sinh \beta X_1}{\cosh \beta l_t}, \quad (5.1)$$

$$u(X_1) = -\frac{\alpha F}{\beta^3} \frac{\sinh \beta X_1}{\cosh \beta l_t} + \frac{\alpha F}{\beta^2} X_1, \quad (5.2)$$

pri čemu su

$$\beta = \sqrt{B_{Cs} (1/E_s A_s + 1/E_c A_c)}, \quad \alpha = B_{Cs} / (E_s A_s) (E_c A_c), \quad B_{Cs} = \phi \pi C_s, \quad (5.3)$$

gdje je  $l_t$  polovica duljine štapa, dok su  $A_s$  i  $A_c$  redom površina armaturne šipke i površina betona. Na Slici 5.2 grafički je prikazano analitičko rješenje za proklizavanje i pomak desne polovice štapa.



Slika 5.2 Analitičko rješenje za proklizavanje i pomak vlačnog štapa (desna polovica)

U Tablici 5.2 prikazani su rezultati za proklizavanje i pomak  $u$  ovisnosti o broju jednoslojnih konačnih elemenata na slobodnom rubu štapa ( $X_1=l_t$ ), zajedno s analitičkim rješenjem.

Tablica 5.2 Proklizavanje i pomak  $u$  u mm na slobodnom rubu

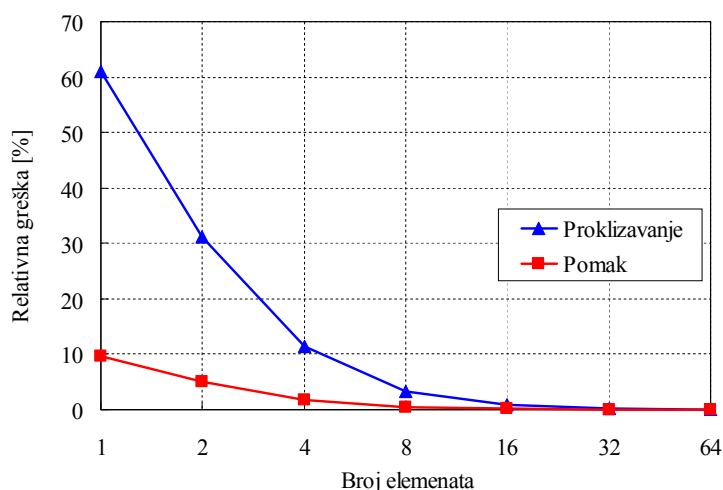
	Broj elemenata u mreži						Analitičko rješenje	
	1	2	4	8	16	32		64
proklizavanje	0,0451	0,0797	0,1024	0,1119	0,1147	0,1154	0,1156	0,1157
pomak	0,0810	0,0775	0,0752	0,0742	0,0739	0,0738	0,0738	0,0738

Usporedba rezultata za proklizavanje i pomak  $u$  ovisnosti o broju jednoslojnih konačnih elemenata provedena je za slobodni rub štapa ( $X_1=l_t$ ), i grafički dana na Slici 5.3. Pomak i proklizavanje su na lijevom rubu spriječeni dok su na desnom omogućeni. Relativna greška za proklizavanje i pomak definirana je kao  $g_s=(s_{lt} - s_{MKE})/s_{lt}$  i  $g_u=(u_{lt} - u_{MKE})/u_{lt}$ , pri čemu su  $s_{lt}$  i  $u_{lt}$



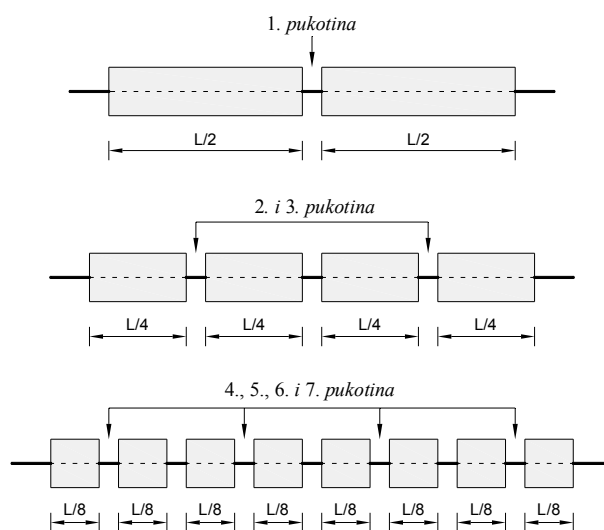
analitička rješenja, dok su  $s_{MKE}$  i  $u_{MKE}$  rješenja dobivena predloženim konačnim elementima za proklizavanje i pomak na slobodnom rubu štapa.

Primjećujemo kako je relativna greška za pomak znatno manja nego li za proklizavanje za jednak broj konačnih elemenata u mreži. Kao što se može vidjeti sa slike, vrlo se dobri rezultati dobivaju već i za relativno malen broj konačnih elemenata: sa samo 8 elemenata, relativna greška za proklizavanje iznosi 3,3%, dok je kod pomaka greška jednaka 0,5%, te se uočava trend smanjenja greške, što znači da numerička procedura konvergira k točnom rješenju.



Slika 5.3 Relativna greška za proklizavanje i pomak na slobodnom rubu

U drugom testu istražujemo pojavu i razvoj pukotina, koja je sastavni dio predloženog postupka. Kako se vlačna sila monotono povećava, tako se pukotine otvaraju jedna za drugom čim vlačno naprezanje na sredini elementa dosegne vlačnu čvrstoću betona. Prva se pukotina otvara na sredini štapa, pa se zatim povećanjem sile pojavljuju 2. i 3. pukotina (na sredini lijeve i desne polovice štapa), pukotine 4. – 7. pojavljuju se na polovici duljine između postojećih pukotina, i tako redom (Slika 5.4).



Slika 5.4 Proces raspucavanja analiziranog vlačnog štapa

Budući da je poznato analitičko rješenje za polje pomaka, sile raspucavanja mogu se iz njega odrediti vrlo jednostavno – deriviranjem u odnosu na  $X_1$  i množenjem s modulom elastičnosti betona  $E_c$  slijedi naprezanje u betonu

$$\sigma(X_1) = \frac{\alpha F}{\beta^2} \left( -\frac{\cosh \beta X_1}{\cosh \beta l_t} + 1 \right) E_c, \quad (5.4)$$

te kada ono dosegne vlačnu čvrstoću, otvara se pukotina. Širine pukotina mogu se također dobiti iz analitičkog modela – zbrajanjem proklizavanja (dobivenih za promatrane sile raspucavanja) s obje strane pukotine. Analitičko rješenje za sile raspucavanja i odgovarajuće širine pukotina prikazane su u Tablici 5.3.

Tablica 5.3 Sile raspucavanja i širine pukotina u mm prema analitičkom modelu

Sila (kN)	Broj pukotine		
	1.	2. i 3.	4., 5., 6. i 7.
23,4073	0,2704		
24,6691	0,2707	0,2707	
34,1606	0,2849	0,2849	0,2849

U analizi procesa raspucavanja razmatramo različite mreže jednoslojnih elemenata. Broj elemenata u mrežama odabran je na način da možemo pratiti pojavu i razvoj prvih sedam pukotina – započinjemo mrežom sa sedam jednakih elemenata, te postupno jednoliko povećavamo broj elemenata u mreži, zadržavajući pritom neparan broj elemenata. Tako dobivamo mreže s 15, 31, 63 i 127 elemenata. Očekivani položaj pukotina za odabrane mreže zajedno s analitičkim rješenjem dan je u Tablici 5.4. Točniji rezultati sila raspucavanja očekuju se u onim mrežama u kojima je predviđeno mjesto pukotine što bliže točnom položaju pukotine. Očito, u svim će se mrežama zbog toga 4. i 5. pukotina pojaviti prije 6. i 7. pukotine, no s progušćenjem mreže, razlike među silama koje uzrokuju ove parove pukotina se smanjuju.

Tablica 5.4 Položaj pukotina izražen preko duljine štapa  $L$  u analiziranim mrežama i analitičkom rješenju

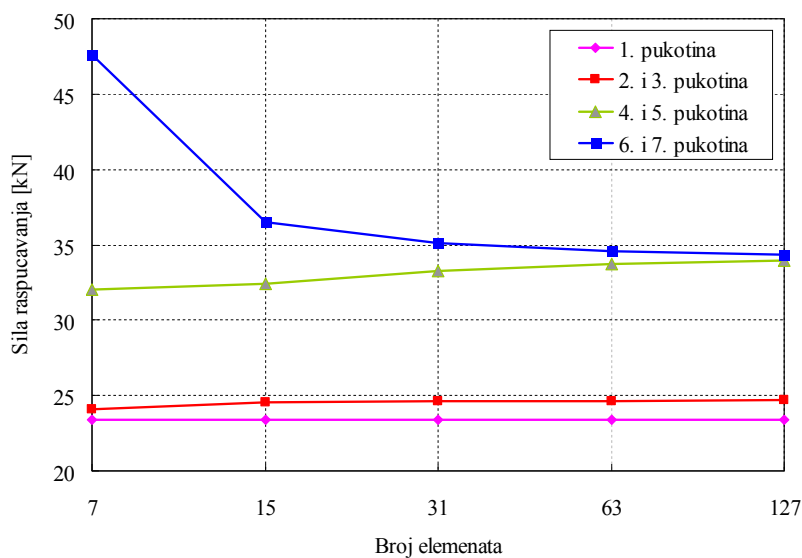
Broj elemenata u mreži	Broj pukotine						
	6.	2.	4.	1.	5.	3.	7.
7	0,071	0,214	0,357	0,500	0,643	0,786	0,929
15	0,100	0,233	0,367	0,500	0,633	0,767	0,900
31	0,113	0,242	0,371	0,500	0,629	0,758	0,887
63	0,119	0,246	0,373	0,500	0,627	0,754	0,881
127	0,122	0,248	0,374	0,500	0,626	0,752	0,878
Analitičko rješenje	0,125	0,25	0,375	0,500	0,625	0,75	0,875

Sile raspucavanja ovisno o broju elemenata u mreži dane su u Tablici 5.5 i grafički prikazane na Slici 5.5. Sila koja uzrokuje 1. pukotinu vrlo je slična u svim mrežama, što se također može reći i za silu koja uzrokuje 2. i 3. pukotinu, bez obzira što se položaj ovih pukotina ne može točno predvidjeti s promatranom jednolikom mrežom s neparnim brojem elemenata.

Tablica 5.5 Sile raspucavanja u kN za različite mreže

Broj pukotine	Broj elemenata u mreži				
	7	15	31	63	127
1.	23,379	23,400	23,408	23,407	23,407
2. i 3.	24,100	24,577	24,648	24,664	24,668
4. i 5.	32,009	32,385	33,263	33,719	33,943
6. i 7.	47,610	36,522	35,123	34,609	34,378

Sljedeće pukotine (4. – 7.) bi se, prema analitičkom rješenju, trebale otvoriti pri istoj sili, budući je udaljenost između postojećih pukotina jednaka u cijelom štapu. Razlog što se pojavljuju dvije po dvije pukotine, umjesto četiri odjednom, je opet u odabiru mreže – položaj pukotina se za ove parove pukotina u promatranim mrežama ne može točno predvidjeti, te se pukotine javljaju na mjestima koja su različito udaljena od točnih položaja. Povećanjem broja elemenata, sile koje uzrokuju pojavu 4. i 5. te 6. i 7. pukotine se također približavaju, te bi se naposljetku za beskonačan broj elemenata spojile u istu vrijednost.



Slika 5.5 Sile raspucavanja ovisno o broju elemenata u mreži

Treba primijetiti kako se u ovom primjeru, u kojem je vrlo jednostavno odrediti točan položaj pukotina, puno bolje rezultate može dobiti odabirom takve mreže konačnih elemenata koja će točno predvidjeti položaj pukotina. U nastavku su prikazani rezultati za dvije takve mreže: s 9 i s 25 elemenata, u kojima je prvi i posljednji element dvostruko kraći od ostalih elemenata (Tablice 5.6 i 5.7). Kao što je i očekivano, u ovim se mrežama 4. – 7. pukotina pojavila pri jednakoj sili.

Tablica 5.6 Sile raspucavanja i širine pukotina u mm za mrežu s 9 elemenata različite duljine

Sila (kN)	Broj pukotine		
	1.	2. i 3.	4., 5., 6. i 7.
23,386	0,2580		
24,291	0,2596	0,2596	
35,574	0,2934	0,2934	0,2934

Tablica 5.7 Sile raspucavanja i širine pukotina u mm za mrežu s 25 elemenata različite duljine

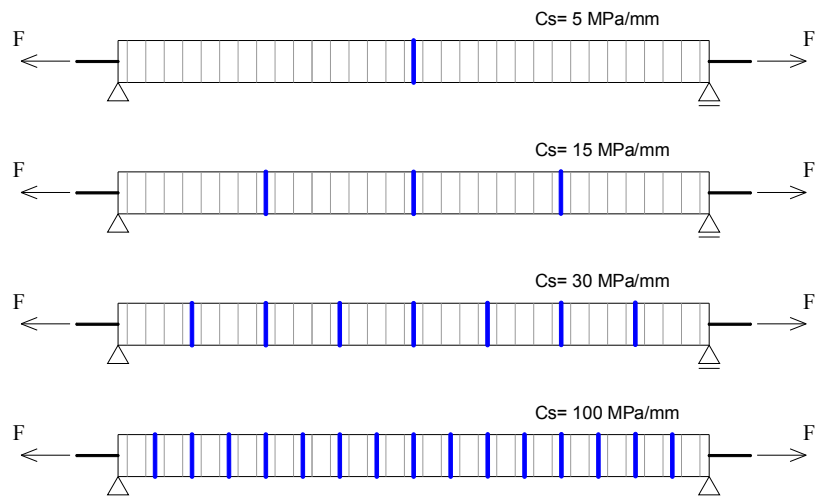
Sila (kN)	Broj pukotine		
	1.	2. i 3.	4., 5., 6. i 7.
23,405	0,2677		
24,622	0,2682	0,2682	
34,079	0,2836	0,2836	0,2836

Slijedi analiza širine pukotina (Tablice 5.6 i 5.7) i usporedba s prethodno danim analitičkim rješenjem. Širine pukotina za mrežu koja sadrži 127 elemenata dane su u Tablici 5.8. Kada se ovi rezultati usporede s analitičkim rezultatima može se uočiti vrlo dobra mogućnost predložene formulacije u prikazu raspucavanja.

Tablica 5.8 Širine pukotina u mm za jednoliku mrežu s 127 elemenata

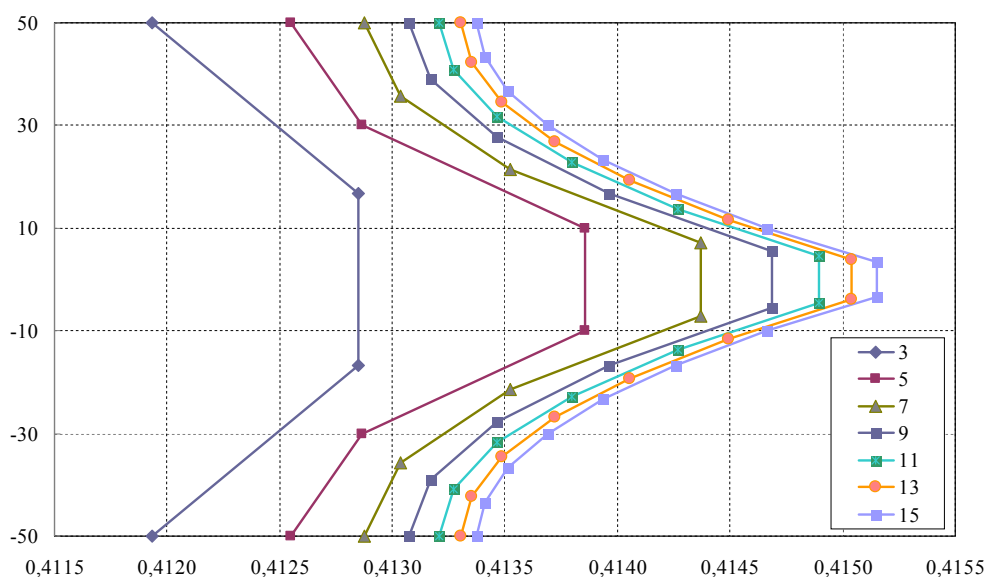
Sila (kN)	Broj pukotine			
	1.	2. i 3.	4. i 5.	6. i 7.
23,407	0,2702			
24,668	0,2710	0,2706		
33,943	0,2844	0,3281	0,2844	
34,378	0,2881	0,2881	0,2881	0,2853

Kako bismo ispitali kakav utjecaj ima promjena modula prijanjanja  $C_s$  na raspucavanje štapa u nastavku provodimo pokus s nekoliko različitih vrijednosti za modul prijanjanja, dok silu monotono povećavamo do 40 kN. Diskretizirani model štapa sadrži 33 konačna elementa različite duljine, pri čemu su prvi i posljednji element dvostruko kraći od ostalih elemenata. Rezultati analize prikazani su na Slici 5.6, gdje vidimo kako različite vrijednosti modula prijanjanja uzrokuju i različit broj pukotina, čiji se broj povećava povećanjem modula prijanjanja. Možemo primijetiti kako malene razlike modula prijanjanja uzrokuju znatno različit odziv štapa.

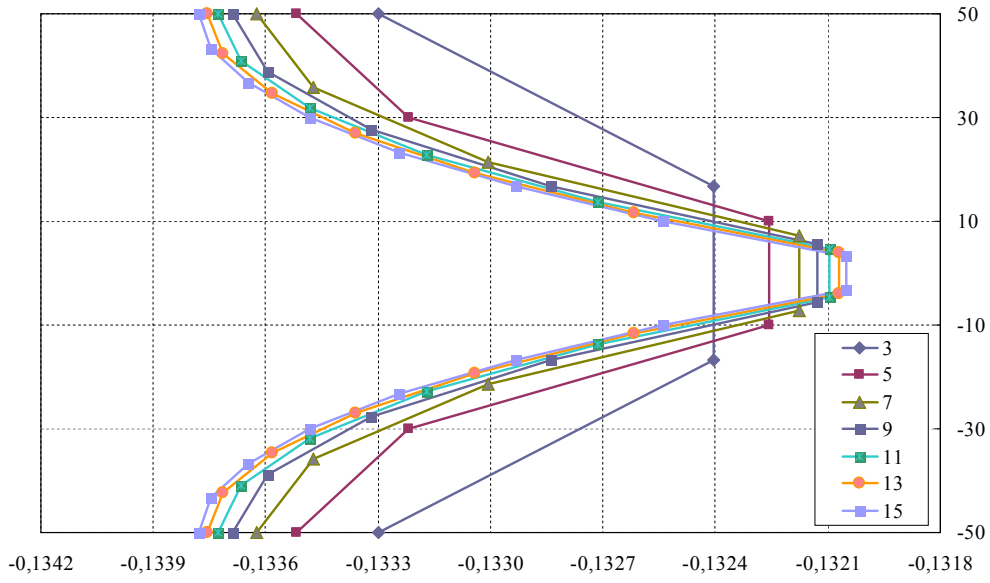


Slika 5.6 Broj pukotina u ovisnosti o modulu prijanjanja  $C_s$

U trećem testu analiziramo vitoperenje poprečnog presjeka i profil pukotine, što je predloženim konačnim elementom moguće zahvaljujući tome što se slojevi u gredi mogu zaokretati nezavisno o drugim slojevima. Štap je modeliran s 15 elemenata jednake duljine, a poprečni presjek podijeljen je u  $n$  jednakih slojeva ( $n = 3, 5, 7, 9, 11, 13$  i  $15$ ). Vrijednost sile odabrana je tako da dođe do otvaranja pukotine u sredini štapa, te ona iznosi 23,41 kN. Na Slici 5.7 prikazano je vitoperenje poprečnog presjeka desnog ruba štapa, pri čemu je ishodište koordinatnog sustava smješteno u desni rub štapa u nedeformiranom položaju. Na Slici 5.8 prikazan je profil pukotine s ishodištem koordinatnog sustava postavljenim u sredini pukotine u deformiranom položaju. U oba slučaja može se primijetiti kako korištenje većeg broja slojeva ima vrlo malen utjecaj na rezultat – ako uspoređujemo pomake razlika je manja od 0,6%.



Slika 5.7 Vitoperenje poprečnog presjeka na desnom rubu štapa (dimenzije u mm)

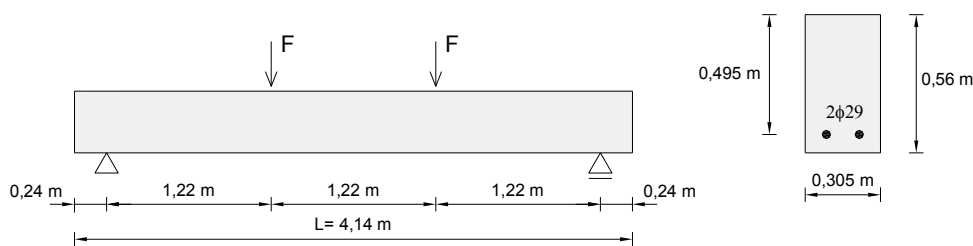


Slika 5.8 Profil lijeve strane pukotine (dimenzije u mm)

### 5.1.2 Greda s dvije simetrične sile (Ngo i Scordelis, 1967.)

U drugom primjeru s linearnim konstitutivnim zakonom naprezanja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju armature analiziramo slobodno oslonjenu gredu opterećenu dvjema silama  $F$  u trećinama raspona, čije su geometrijske karakteristike prikazane na Slici 5.9.

Materijalni parametri dani su u Tablici 5.9. Greda je armirana samo u donjoj zoni s dvije šipke promjera 29 mm.



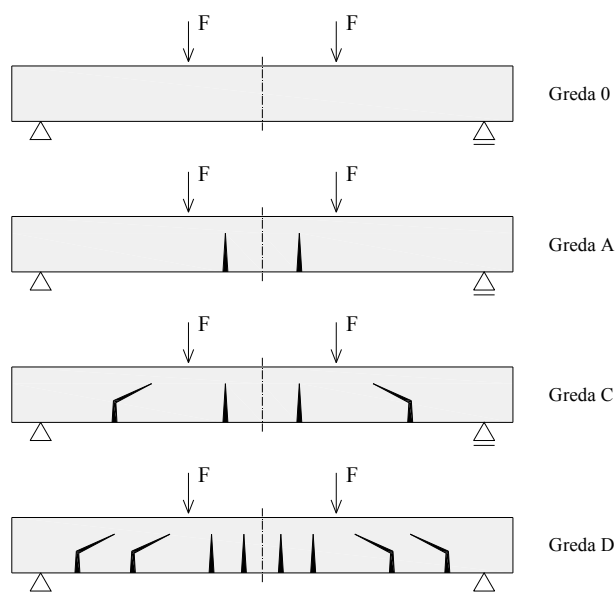
Slika 5.9 Geometrijske karakteristike grede (Ngo i Scordelis, 1967.)

Tablica 5.9 Materijalne karakteristike grede (Ngo i Scordelis, 1967.)

modul elastičnosti betona $E_c$	20 684,3 MPa
Poissonov koeficijent $\nu$	0,3
modul elastičnosti čelika za armiranje $E_s$	206 843 MPa
modul prijanjanja $C_s$	14 045 MPa/m

Ngo i Scordelis su u navedenom radu proveli dvodimenzionalni proračun koristeći tročvorne konačne elemente za različite obrasce raspucavanja, pri čemu su pukotine modelirali odvajanjem konačnih elemenata s pomoću dvostrukih čvorova na mjestu pukotine. Prije nanošenja opterećenja ti se čvorovi poklapaju, dok se pri opterećenju odvajaju – jedan ulijevo, drugi udesno, čime se simulira pukotina. Također treba spomenuti kako su autori u radu također primijenili vezni element za povezivanje konačnog elementa betona i armature (diskretno - u čvorovima), koji se sastojao od linearnih opruga, čime su u obzir uzeli proklizavanje koje se javlja između armaturnih šipki i betona.

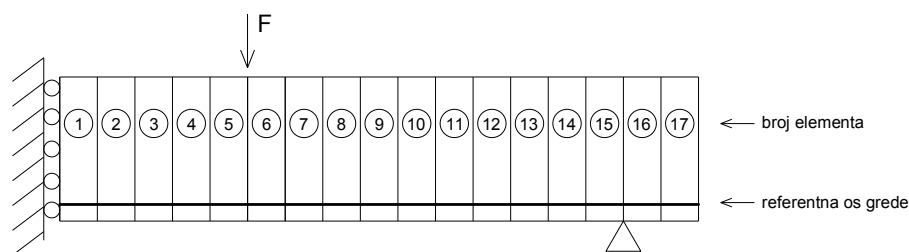
U ovom su radu za testiranje predloženog modela odabrana četiri obrasca raspucavanja (Slika 5.10). Greda 0 ne sadrži pukotine, i koristi se kao osnova za usporedbu s modelima koji imaju unaprijed definirane pukotine. Greda A ima dvije vertikalne pukotine u području s konstantnim momentom savijanja, simetrično raspoređene oko središnje osi grede. Greda C uključuje dvije vertikalne pukotine kao greda A, te dodatno još dvije kombinirane vertikalno-kose pukotine (zbog savijanja i posmika) koje su smještene izvan područja s konstantnim momentom savijanja (jedna na svakoj polovici). Ove dijagonalne pukotine su u predloženom modelu idealizirane vertikalnim pukotinama iste dubine. U gredi D pojavljuju se četiri vertikalne pukotine u području s konstantnim momentom savijanja i četiri kombinirane vertikalno-kose pukotine izvan tog područja – ponovno modelirane vertikalnim pukotinama iste dubine. Sile  $F$  kojom su grede opterećene iznose 44,48 kN.



Slika 5.10 Obrasci raspucavanja

Zbog simetrije u geometriji i rubnim uvjetima, modelirana je samo desna polovica grede. Primijenjeni su dvočvorni gredni elementi s vezanom interpolacijom za pomake (kvadratna) i rotacije (linearna), te linearna Lagrangeova interpolacija za funkciju proklizavanja. Poprečni presjek grede podijeljen je u 13 jednakih slojeva, a armaturni se sloj nalazi u drugom sloju s donje strane grede. Proklizavanje je spriječeno na središnjoj osi (uvjet simetrije) i na desnom rubu grede, čime je modelirano sidrenje armature na osloncu.

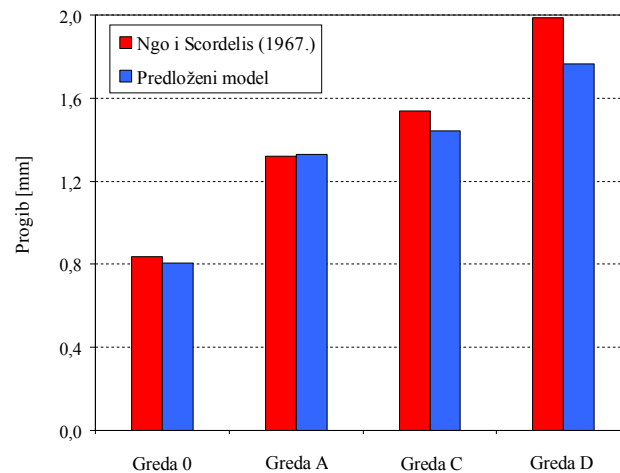
Greda je diskretizirana s dvije različite mreže. Prva mreža sadrži 17 elemenata, pri čemu je 15 elemenata smješteno između središnje osi grede i oslonca, dok se preostala dva elementa nalaze s desne strane oslonca (Slika 5.11). U onim elementima koji imaju unaprijed definirane pukotine (3. element za gredu A, 3. i 10. element za gredu C, te 2., 4., 8. i 12. element za gredu D) modelirano je 8 raspucanih slojeva (oko 62 % visine grede). Druga mreža sadrži 85 konačnih elemenata (pet puta više od prve mreže), gdje se unaprijed zadane pukotine nalaze u 13. elementu za gredu A, 13. i 48. elementu za gredu C, te 8., 18., 38. i 58. elementu za gredu D.



Slika 5.11 Diskretizacija grede



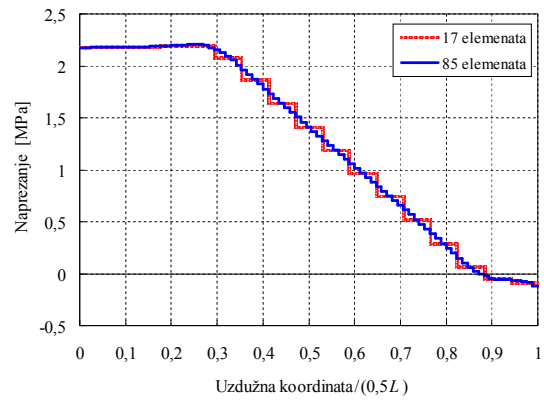
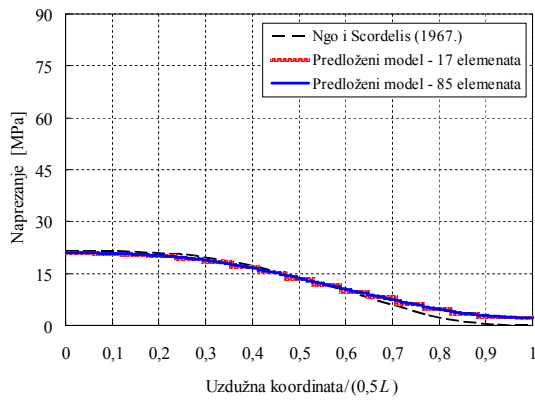
Usporedba progiba u sredini raspona grede za mrežu sa 17 konačnih elemenata dana je na Slici 5.12. Vrlo se dobra poklapanja mogu uočiti za sve obrasce raspucavanja. U gredi C i D uočena je veća razlika rezultata zbog postojanja kombiniranih vertikalno-kosih pukotina – budući su u predloženom modelu moguće samo poprečne pukotine, vertikalno-kosa pukotina modelirana je kao poprečna.



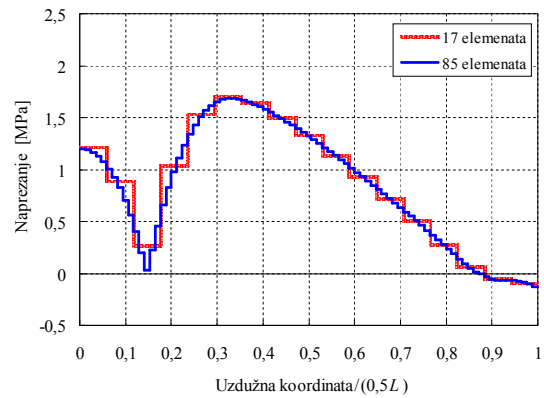
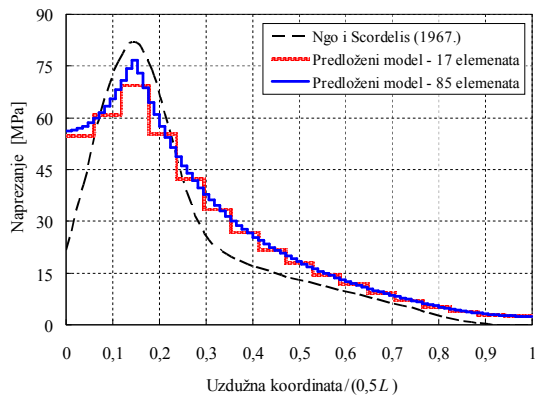
Slika 5.12 Progib u sredini raspona grede

Raspodjela naprezanja u armaturi i naprezanja u betonu u drugom sloju, te naprezanja prijanjanja prikazana su na Slikama 5.13 i 5.14 (zbog postojanja simetrije samo za desnu polovicu grede). Uslijed korištenja dvočvornih elemenata polje naprezanja u čeliku je konstantno unutar elementa (također i u betonu). Raspodjela naprezanja prijanjanja sa Slike 5.14 oblikom slijedi dijagram sila prijanjanja iz reference, no budući vrijednosti nisu opisane kvantitativno, ne mogu se usporediti s dobivenim numeričkim rezultatima.

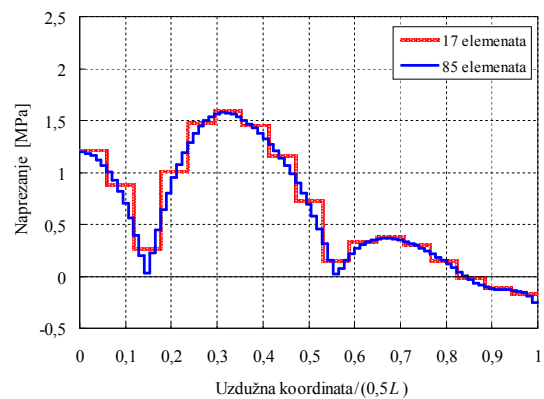
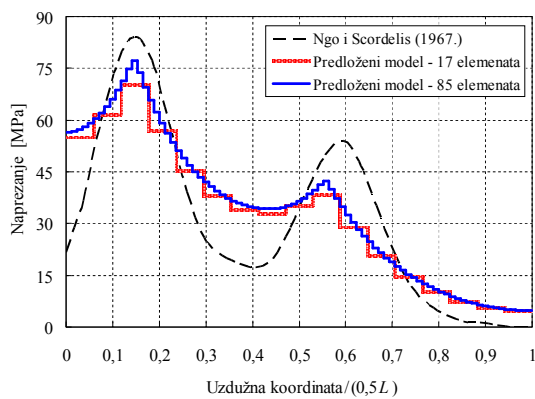
Može se primijetiti lokalizirani utjecaj raspucavanja. Na mjestu pukotine naprezanja u armaturi znatno se povećaju (a istovremeno u betonu iščezavaju), kao što se povećaju i naprezanja prijanjanja blizu pukotine, što se vrlo dobro poklapa s referentnim rezultatima. Osim na mjestu pukotina, rezultati dobiveni mrežom koja sadrži 17 elemenata vrlo se dobro slažu s rezultatima mreže s 85 elemenata, za koju možemo pretpostaviti da je konvergirano rješenje.



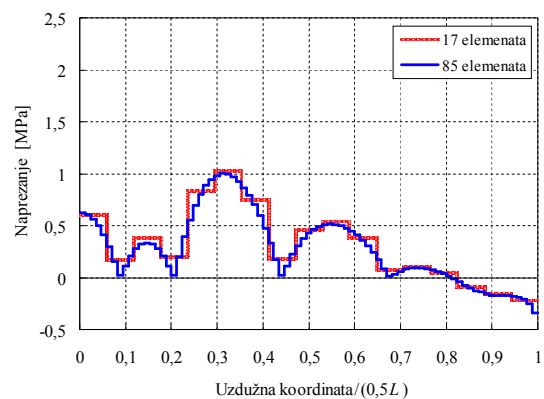
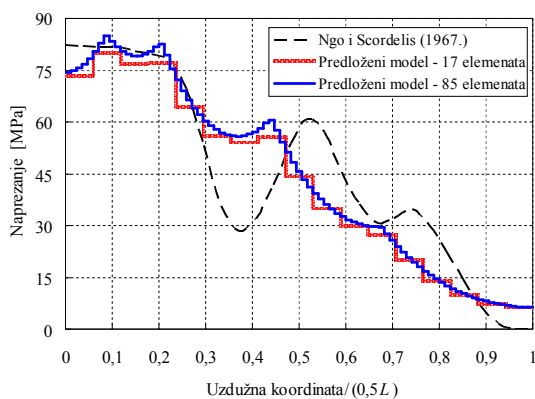
a) greda 0



b) greda A

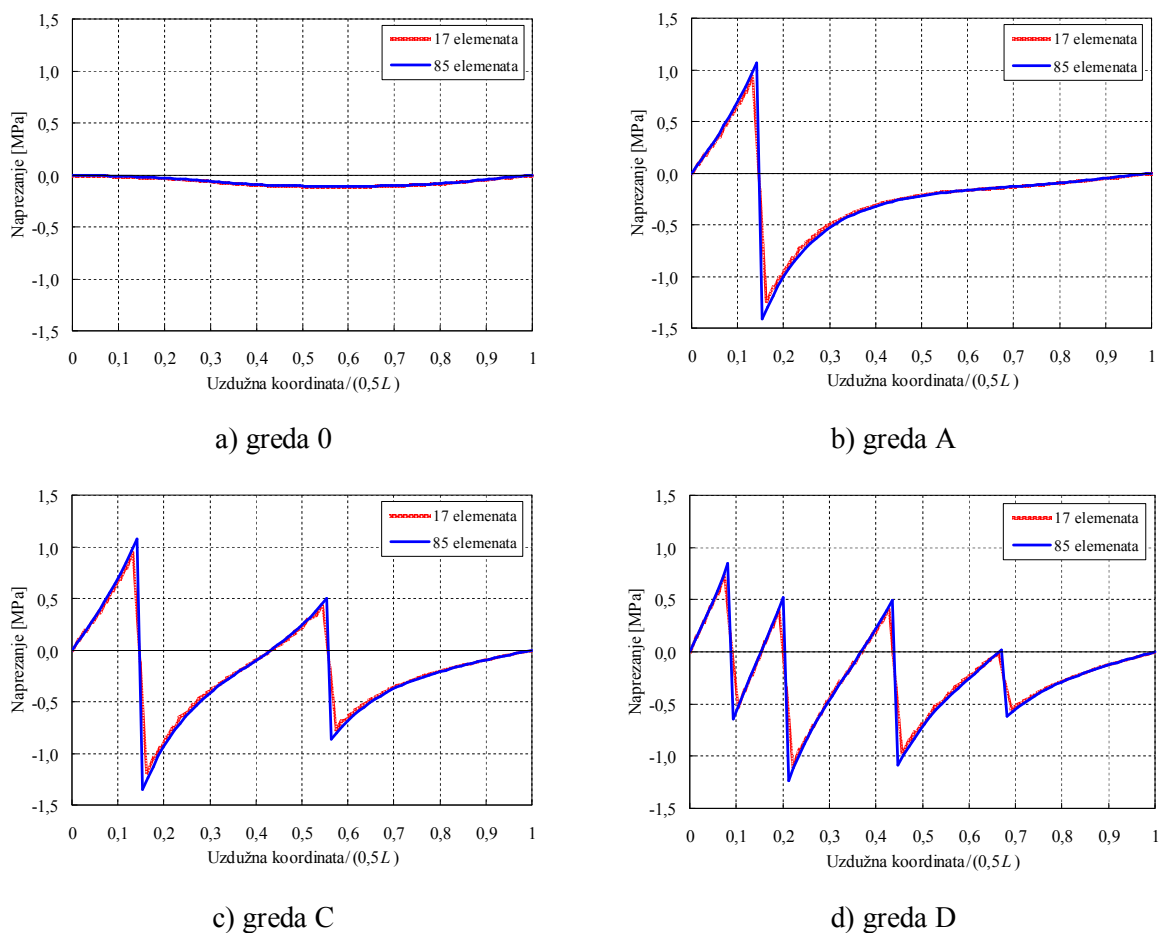


c) greda C



d) greda D

Slika 5.13 Naprezanja u armaturi (lijevo) i u betonu u 2.sloju (desno) za različite obrasce raspucavanja

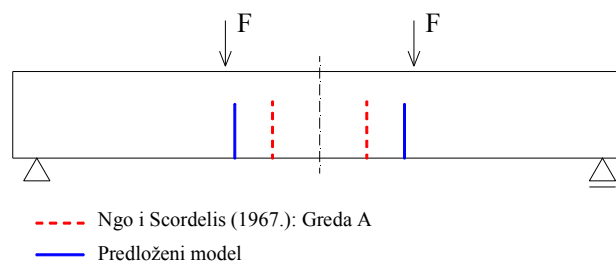


Slika 5.14 Naprezanja prijanjanja za različite obrasce raspucavanja

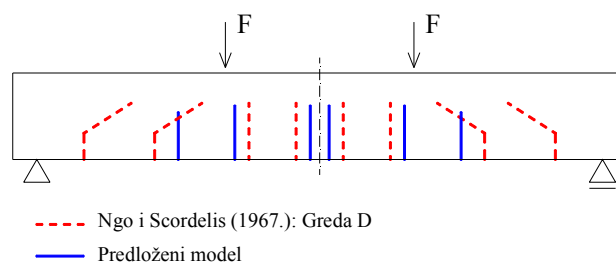
Budući je primarni doprinos predloženog konačnog elementa nastanak i širenje pukotina, kojim se Ngo i Scordelis nisu bavili, u nastavku slijedi analiza, u kojoj u elementima nema unaprijed definiranih pukotina već je betonu dodijeljena vlačna čvrstoća, a sila  $F$  monotono raste sve do 44,48 kN. Analiza je provedena za mrežu sa 17 elemenata.

Usporedba položaja i dubine pukotina za dvije različite vlačne čvrstoće dana je na Slici 5.15. Kada betonu dodijelimo vlačnu čvrstoću u iznosu 2,25 MPa (oko 11% modula elastičnosti betona), a sila  $F$  dosegne 36,3 kN, pukotina se pojavi u prvom sloju 5. elementa. Na kraju procesa opterećenja, raspuca sveukupno 8 slojeva u 5. elementu, a progib u sredini raspona iznosi 1,27 mm, što je vrlo blisko rezultatu kojeg su dobili Ngo i Scordelis za greda A (Slika 5.12). Može se primijetiti kako pojava pukotine na mjestu koji se nalazi najbliže sili  $F$  u području s konstantnim momentom savijanja (u sredini elementa neposredno lijevo od sile) ima opravdanu teorijsku osnovu. Upravo ovaj element, od svih elemenata unutar područja s konstantnim momentom savijanja, prije pojave pukotine ima najmanje naprezanje u armaturi (Slika 5.13.a)). Kako bi se zadovoljio uvjet ravnoteže u presjeku, za prihvaćanje konstantnog momenta savijanja, naprezanje u betonu u istom elementu mora biti najveće, te stoga ovaj element mora raspucati prvi.

Kada betonu dodijelimo vlačnu čvrstoća u iznosu 1,5 MPa (oko 7% modula elastičnosti betona) pukotina se pojavi u prvom sloju 5. elementa kada sila  $F$  dosegne 24,2 kN. Povećanjem sile ta se pukotina produbljuje u još 7 slojeva, i ubrzo se otvara nova pukotina u 1. elementu ( $F=30,1$  kN) te kasnije i u 8 elementu ( $F=43,6$  kN). Na kraju procesa opterećenja, 1. i 5. element imaju 8 raspucanih slojeva, 8. element ima pukotinu koja se proteže kroz 7 slojeva, a progib u sredini raspona iznosi 1,71 mm. Ovaj slučaj može se usporediti s rezultatima Ngo i Scordelisove grede D (Slika 5.12). Također primjećujemo kako se pojava druge pukotine u modelu, u elementu koji se nalazi najbliže središnjoj osi grede bila očekivana, budući od svih elemenata unutar područja s konstantnim momentom savijanja upravo taj element ima najmanje naprezanje u armaturi, odnosno naprezanje u betonu u tom elementu je najveće (Slika 5.13 b)).



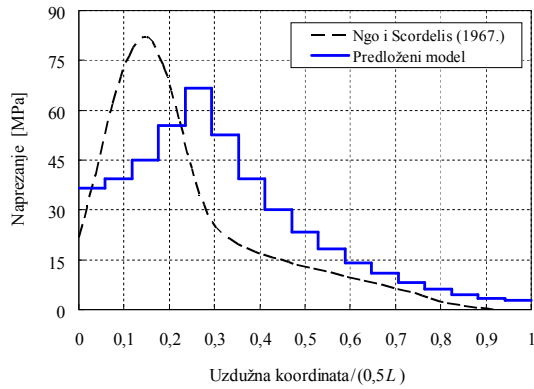
a)  $f_{ct} = 2,25$  MPa



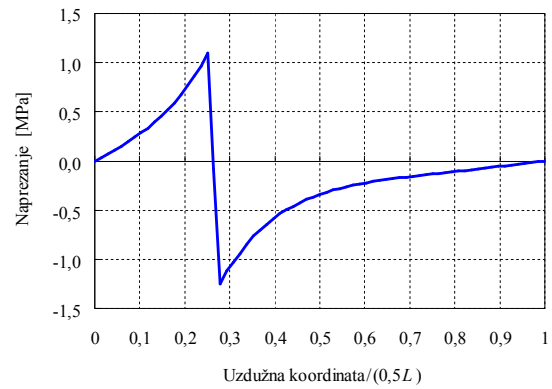
b)  $f_{ct} = 1,5$  MPa

Slika 5.15 Usporedba položaja pukotina za različite vlačne čvrstoće

Na Slici 5.16 prikazana je raspodjela naprezanja u čeliku te naprezanja prijanjanja za slučaj kada nema unaprijed zadanih pukotina, već je betonu dodijeljena vlačna čvrstoća u vrijednosti od 2,25 MPa. Rezultati se mogu usporediti s rezultatima Ngo i Scordelisove grede A (Slika 5.13), pri čemu se smanjenje vršnog naprezanja u čeliku može pripisati odabranoj mreži, ali i činjenici kako se pukotina nalazi na većoj udaljenosti od središnje osi grede.



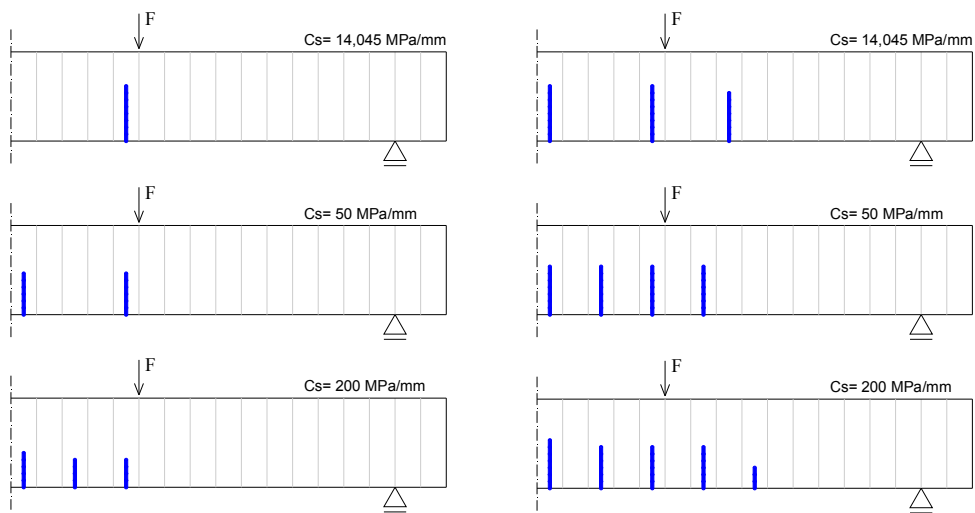
a) naprezanje u armaturi



b) naprezanja prijanjanja

Slika 5.16 Pojava pukotina za zadanu vlačnu čvrstoću od 2,25 MPa

U nastavku je proveden i pokus s ciljem ispitivanja odziva grede koji nastaje variranjem modula prijanjanja  $C_s$ , a rezultati su prikazani na Slici 5.17. Možemo uočiti kako se povećanjem modula prijanjanja povećava broj pukotina a istovremeno smanjuje njihova dubina.



a)  $f_{ct} = 2,25$  MPa

b)  $f_{ct} = 1,5$  MPa

Slika 5.17 Usporedba pukotina za različite vrijednosti modula prijanjanja  $C_s$

## 5.2 Nelinearni konstitutivni zakon naprezanje prijanjanja– proklizavanje armature

U ovom poglavlju prikazana su četiri primjera u kojima je predloženi konačni element ispitan za slučaj monotono rastućeg opterećenja uz nelinearni odnos naprezanja prijanjanja kao funkcije proklizavanja armature. Primijenjeni su dvočvorni elementi, a predviđeni položaj pukotine odabran je na sredini elementa. U svim elementima referentna os sloja nalazi se na polovici visine sloja.

### 5.2.1 Vlačni štap (Yankelevsky i sur., 2008.)

Promatramo štap duljine 750 mm, kvadratnog poprečnog presjeka stranice 79,05 mm, kroz čije središte prolazi armaturna šipka promjera 12 mm. Štap je opterećen monotono rastućim vlačnim silama koje djeluju na krajevima armaturnih šipki koje vire iz betonskog presjeka. Materijalne karakteristike štapa dane su u Tablici 5.10.

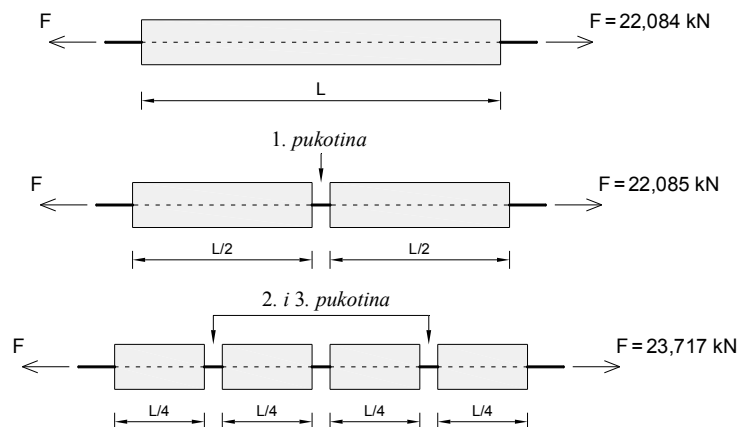
Ovaj štap obradili su Yankelevsky i sur. (2008.), koji su u navedenom radu razvili analitički model za jednodimenzionalnu analizu vlačnog štapa uz korištenje "multilinearnog" zakona naprezanje prijanjanja – proklizavanje armature koji je prikazan na Slici 4.9. Analiza je provedena za sile kod kojih neće doći do prekoračenja granice popuštanja u čeliku za armiranje.

Tablica 5.10 Materijalne karakteristike za vlačni štap (Yankelevsky i sur., 2008.)

modul elastičnosti betona $E_c$	29 000 MPa
tlačna čvrstoća betona $f_c$	22,95 MPa
vlačna čvrstoća betona $f_{ct}$	3,1 MPa
modul elastičnosti čelika za armiranje $E_s$	210 000 MPa
granica popuštanja čelika za armiranje $f_y$	460 MPa
čvrstoća prijanjanja koja odgovara $f_0 \tau_0$	6 MPa
najveća čvrstoća prijanjanja $\tau_{max}$	12 MPa
čvrstoća prijanjanja – komponenta trenja $\tau_f$	5 MPa
proklizavanje $f_0$	0,03 mm
proklizavanje pri najvećoj čvrstoći prijanjanja $f_1$	1,0 mm
proklizavanje $f_2$	3,0 mm
proklizavanje $f_3$	10 mm
kut nagiba rasterećenja $k_{unload}$	200 MPa/mm

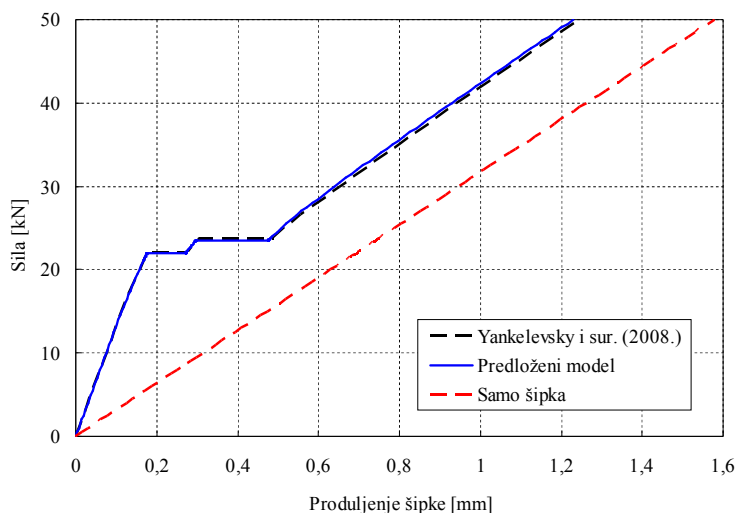
Štap je modeliran s tridesettri jednoslojna dvočvorna elementa, pri čemu su prvi i posljednji element dvostruko kraći od ostalih elemenata, a predviđeni položaj pukotina odabran je na sredini elementa. Rubni uvjeti su sljedeći: na lijevom rubu štapa horizontalni pomak je spriječen, dok je na desnom rubu dopušten; proklizavanje šipke dopušteno je na oba ruba. Linearna Lagrangeova interpolacija korištena je za polje pomaka, polje zaokreta i polje proklizavanja.

Na Slici 5.18 prikazan je proces nastajanja pukotina zajedno sa silama raspucavanja dobivenih analitičkim modelom (Yankelevsky i sur., 2008.). Sile raspucavanja u predloženom modelu nešto se razlikuju od analitičkog modela i iznose 21,950 kN za prvu, te 23,493 kN za drugu i treću pukotinu.



Slika 5.18 Proces nastajanja pukotina u analiziranom štapu (Yankelevsky i sur., 2008.)

Na Slici 5.19 prikazan je dijagram vlačne sile u ovisnosti o produljenju armaturne šipke, te je za usporedbu dano i analitičko rješenje. Jasno možemo uočiti skokove u produljenju i pad krutosti koji nastaju na mjestu nastanka pukotina. Na slici je prikazano i ponašanje samo šipke (bez betonskog omotača), iz čega možemo odrediti koliko iznosi dodatna krutost betona (sudjelovanje betona nakon raspucavanja).

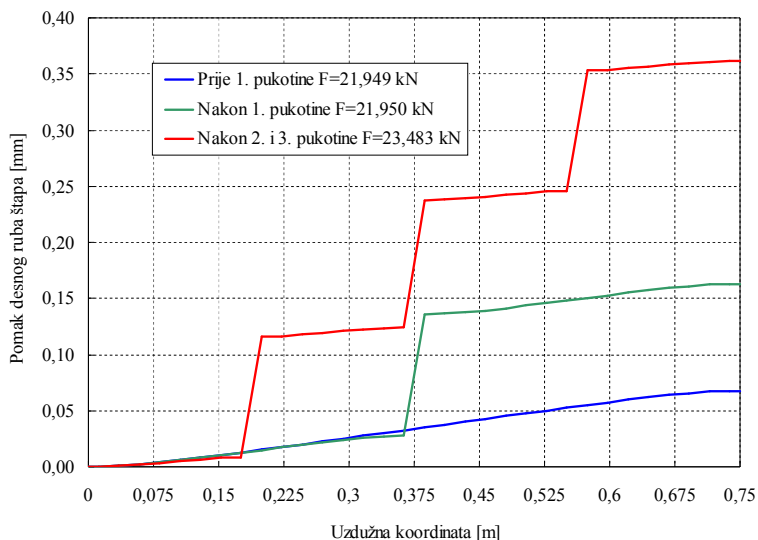


Slika 5.19 Dijagram sila – produljenje armaturne šipke

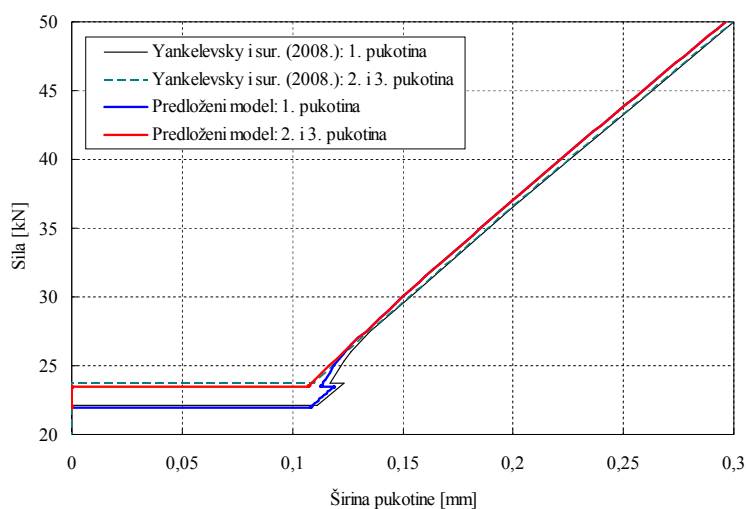
Slika 5.20 prikazuje horizontalne pomake uzduž osi štapa za tri različite sile  $F$ , koje odgovaraju stanju prije i nakon prvog raspucavanja, te nakon drugog raspucavanja. Skok na dijagramu odgovara širini pukotine za dano opterećenje.

Usporedba širine pukotina ovisno o opterećenju dana je na Slikama 5.21 i 5.22. Razlike u širini pukotine između analitičkog rješenja i predloženog modela nastaju kao rezultat različitih vrijednosti sila koje dovode do otvaranja pukotina u analitičkom rješenju i predloženom modelu (134 N razlike za prvu te 234 N za drugu i treću pukotinu).

Možemo primijetiti kako u trenutku otvaranja druge i treće pukotine, kada se javlja preraspodjela naprezanja u betonu, dolazi do djelomičnog zatvaranja prve pukotine. U slučaju korištenja konstitutivnog zakona naprezanje prijanjanja – proklizavanje bez ugrađene mogućnosti rasterećenja ovo je zatvaranje znatno veće (Slika 5.22). Ugradnja rasterećenja, dakle, neophodna je čak i kod monotonog opterećenja.



Slika 5.20 Pomaci šapa pri opterećenju  $F=21,949$ ;  $F=21,950$  i  $F=23,483$  kN

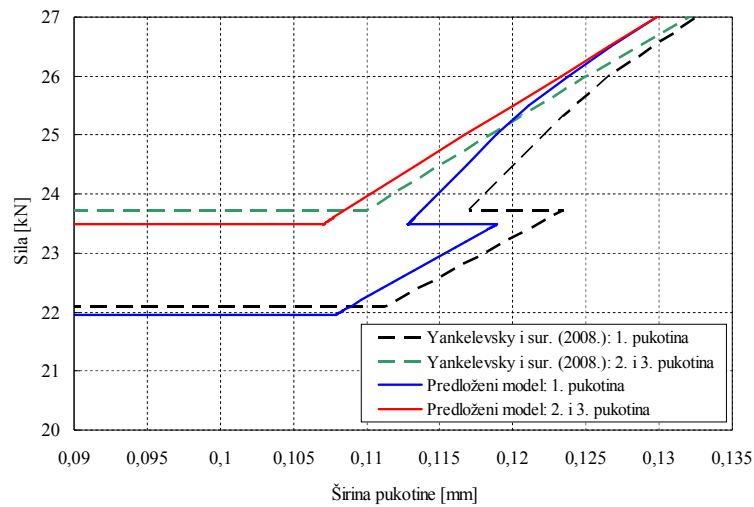


Slika 5.21 Dijagram širine pukotina ovisno o opterećenju  $F$

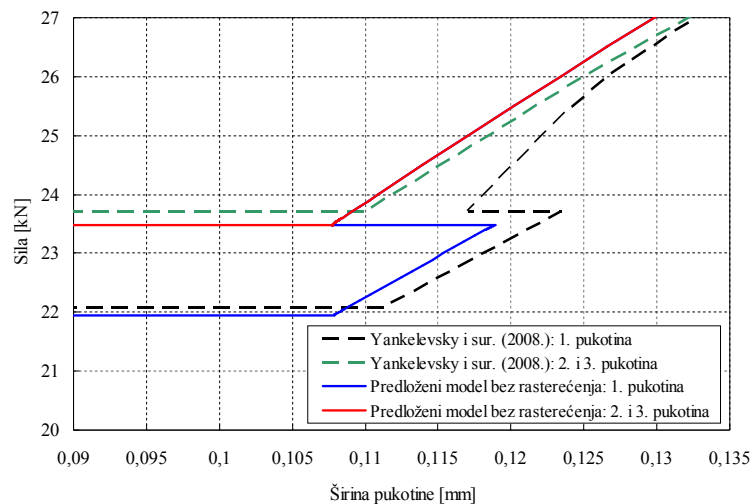
Budući je štap izrađen od homogenog materijala i raspored pukotina je simetričan, očekuje se kako bi širine svih pukotina trebala biti jednake, no to se ne događa, budući primijenjeni zakon naprezanja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju armature s rasterećenjem na mjestu prve te druge i treće pukotine uzrokuje različite vrijednosti proklizavanja (Yankelevsky i sur., 2008.). No, vidimo da



povećanje opterećenja vrlo brzo vodi ka izjednačavanju tih uvjeta, odnosno do istih vrijednosti napreznja prianjanja, i u konačnici do izjednačavanja vrijednosti širina svih pukotina.



a) model s rasterećenjem konstitutivnog zakona napreznja prianjanja u ovisnosti o proklizavanju armature

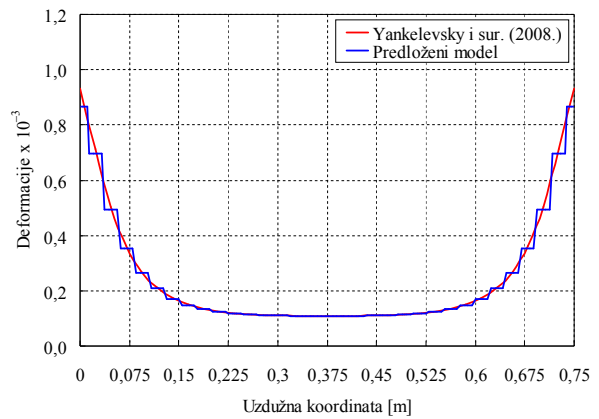
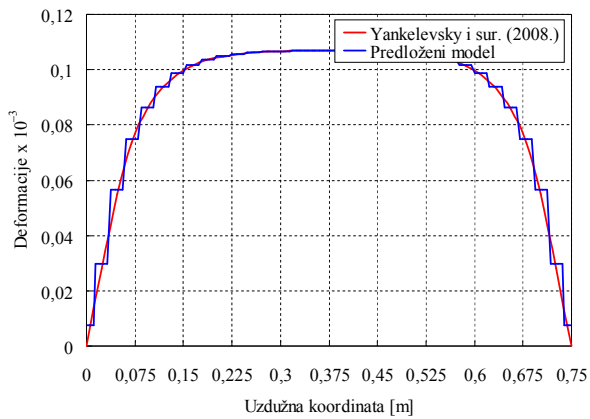


b) model bez rasterećenja konstitutivnog zakona napreznja prianjanja u ovisnosti o proklizavanju armature

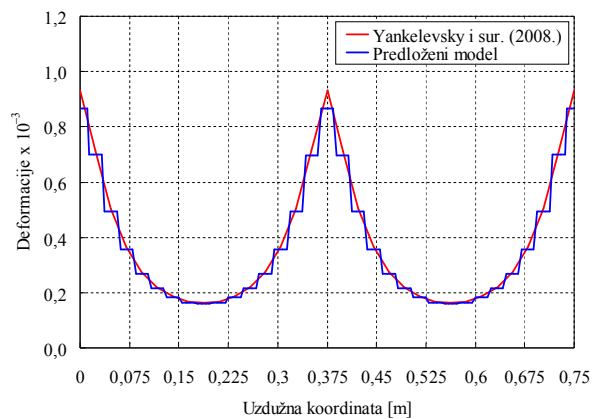
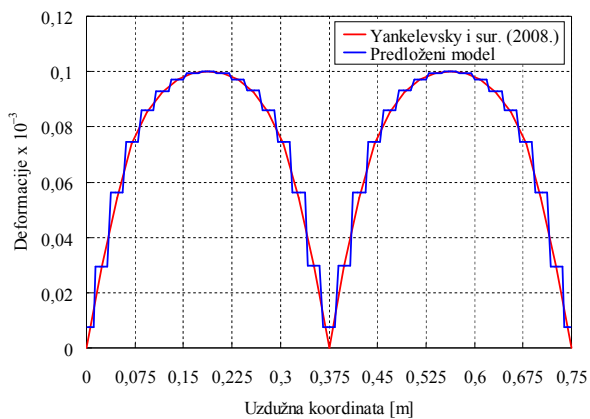
Slika 5.22 Usporedba širine pukotina – uvećani prikaz

U nastavku su prikazane deformacije u betonu i u armaturi prije nastanka prve pukotine, nakon nastanka prve pukotine te nakon nastanka druge i treće pukotine (Slika 5.23). Budući su korišteni elementi dvočvorni dobivamo konstantne deformacije unutar elementa. Na svim slikama možemo vidjeti vrlo dobro poklapanje s analitičkim rezultatima. Razlike koje se javljaju na rubovima štapa rezultat su relativno grube mreže, koje se mogu smanjiti progušćenjem broja elemenata u mreži. Prije pojave prve pukotine deformacija u betonu najveća je na sredini štapa, a jednaka nuli na rubovima, pa je stoga i vlačno napreznje u betonu najveće upravo na sredini štapa i tu najprije ono postiže

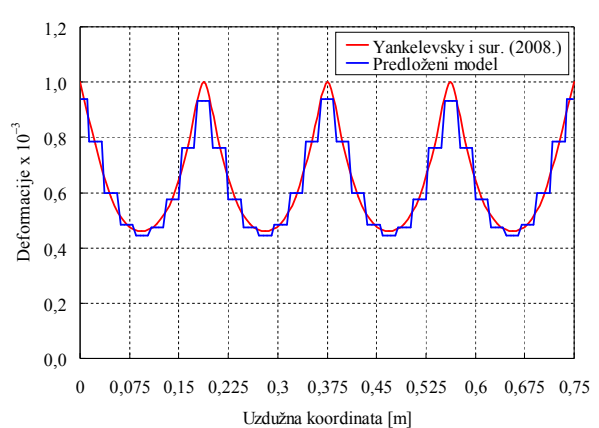
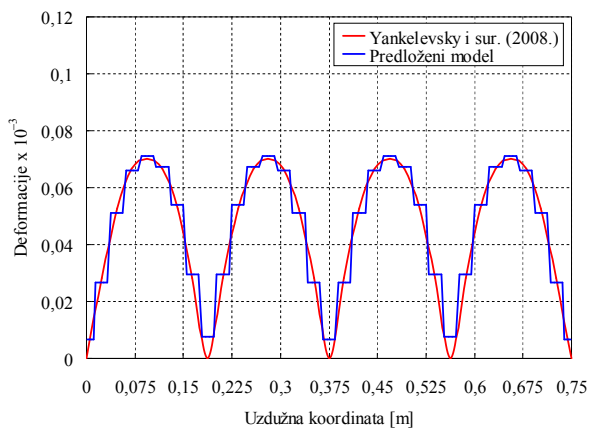
vrijednost vlačne čvrstoće betona, što je kriterij za pojavu pukotina. Nakon pojave prve pukotine, na mjestu pukotine deformacija u betonu teži k nuli, dok deformacija u armaturi naglo naraste – na mjestu pukotine sveukupnu vlačnu silu preuzima armatura. Beton između dviju pukotina i dalje prenosi vlačna naprezanja, a deformacije u betonu su najveće upravo na sredini između dviju pukotina.



a) prije nastanka prve pukotine



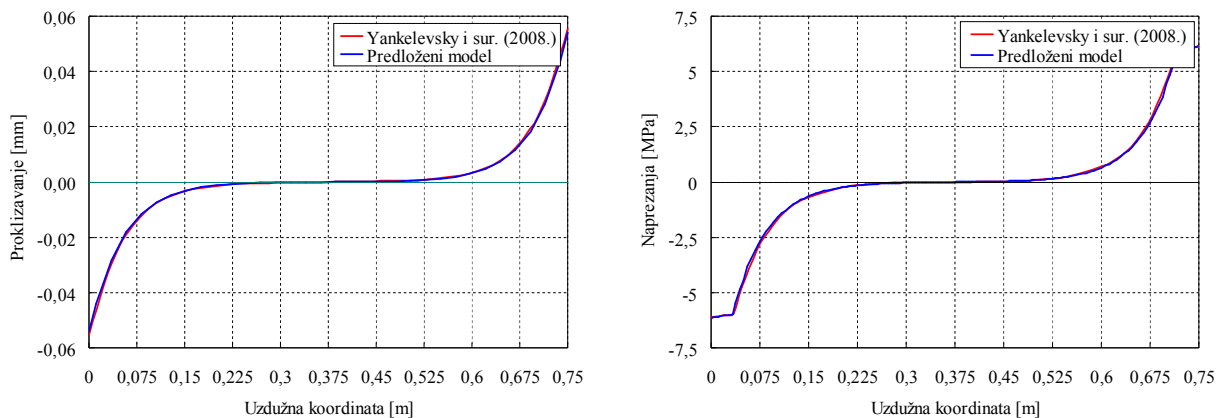
b) nakon nastanka prve pukotine



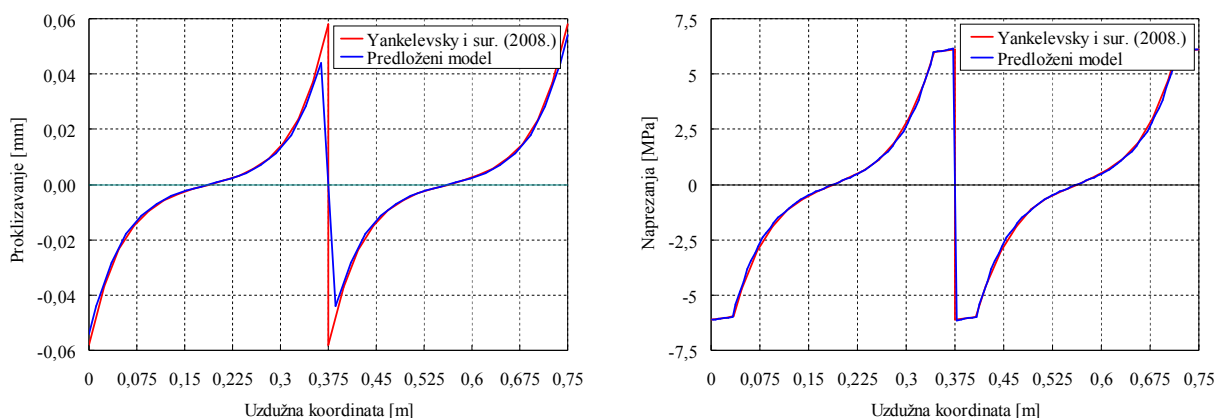
c) nakon nastanka druge i treće pukotine

Slika 5.23 Deformacije u betonu (lijevo) i armaturi (desno)

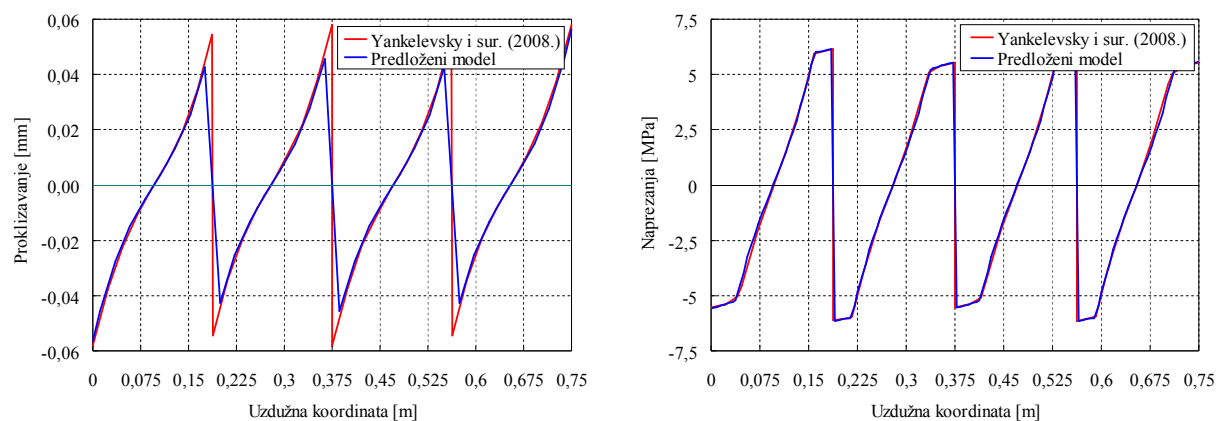
Na Slici 5.24 prikazano je proklizavanje armature te naprezanja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju armature prije i nakon nastanka prve pukotine, te nakon nastanka druge i treće pukotine.



a) prije nastanka prve pukotine



b) nakon nastanka prve pukotine



c) nakon nastanka druge i treće pukotine

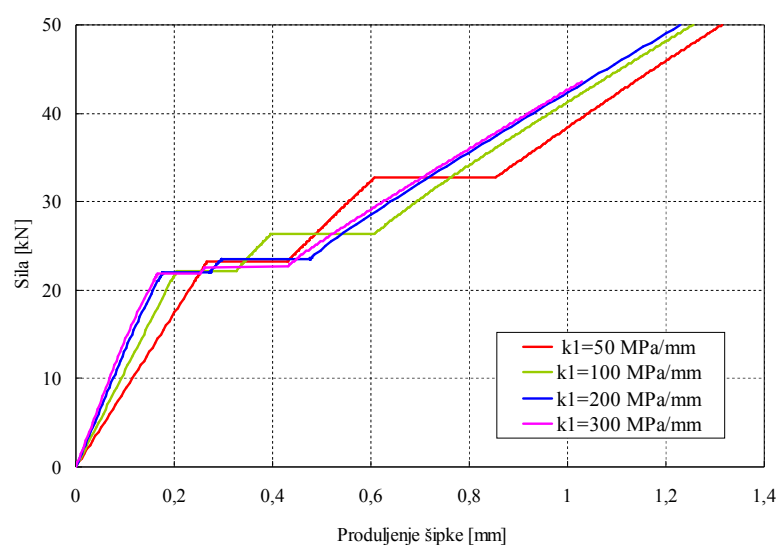
Slika 5.24 Proklizavanje u armaturi (lijevo) i naprezanja prijanjanja (desno)

I ovdje se može primijetiti vrlo dobro poklapanje rezultata. Najveća naprezanja prijanjanja javljaju se na mjestima pukotina (jer su upravo na tim mjestima i proklizavanja armature najveća), te mijenjaju predznak na polovici razmaka između dvije pukotine. Također možemo uočiti kako su lomovi u dijagramima naprezanja na mjestima u blizini najvećih naprezanja (kojih nema u odgovarajućim dijagramima deformacija) posljedica multilinearosti konstitutivnog zakona naprezanja prijanjanja kao funkcije proklizavanja armature (4.7).

Kako bismo ispitali kakav utjecaj ima promjena parametara odnosa naprezanja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju armature na ponašanje štapa proveden je pokus u kojem je variran početni nagib  $k_1$  za tri različite vrijednosti: za 50, 100 i 300 MPa/mm, uz zadržavanje konstantne vrijednosti čvrstoće prijanjanja  $\tau_0$ .

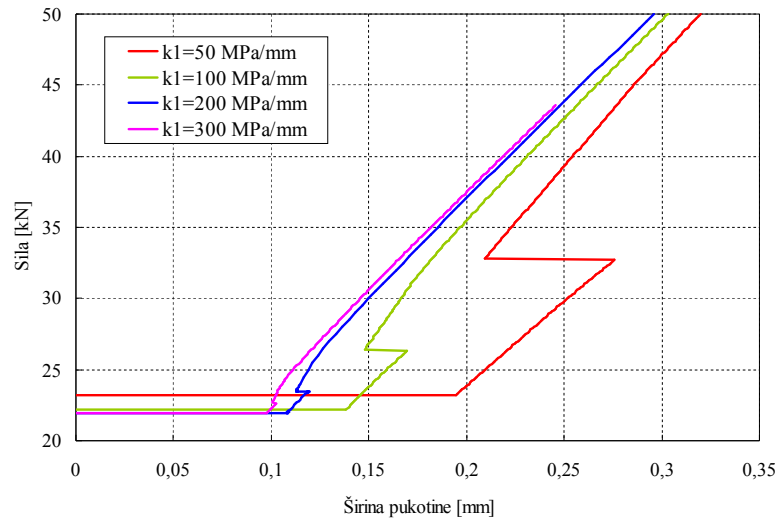
Rezultati pokusa za produljenje šipke u ovisnosti o opterećenju prikazani su na Slici 5.25. Prije nego što se pojavi prva pukotina na sredini štapa, ponašanje štapa znatno ovisi o početnom nagibu. Manja vrijednost nagiba  $k_1$  daje i mekši odaziv štapa, budući se u beton iz šipke unose manje vrijednosti sile. Također, za raspucavanje štapa pri manjem nagibu  $k_1$  biti će potrebna veća sila. Najveća razlika javlja se za  $k_1=50$  MPa/mm, i to posebno pri nastanku druge i treće pukotine. Sveukupno, iznos produljenja šipke pri sili od 50 kN je vrlo sličan za sve vrijednosti nagiba.

Također treba napomenuti kako se vrijednosti za nagib  $k_1=300$  MPa/mm prikazuju samo za silu od 43,2 kN. Pri toj sili dolazi do dostizanja vlačne čvrstoće betona u elementima na polovici raspona između postojećih pukotina, uslijed čega bi se pojavile četiri nove pukotine. No, predloženim modelom naprezanja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju armature s „ograničenim“ rasterećenjem nije moguće modelirati ovako veliko rasterećenje koje bi se javilo pri tom raspucavanju. Predloženi bi model stoga trebalo proširiti po uzoru na ponašanje pri cikličkom opterećenju (npr. FIB Bulletin 10, 2000).

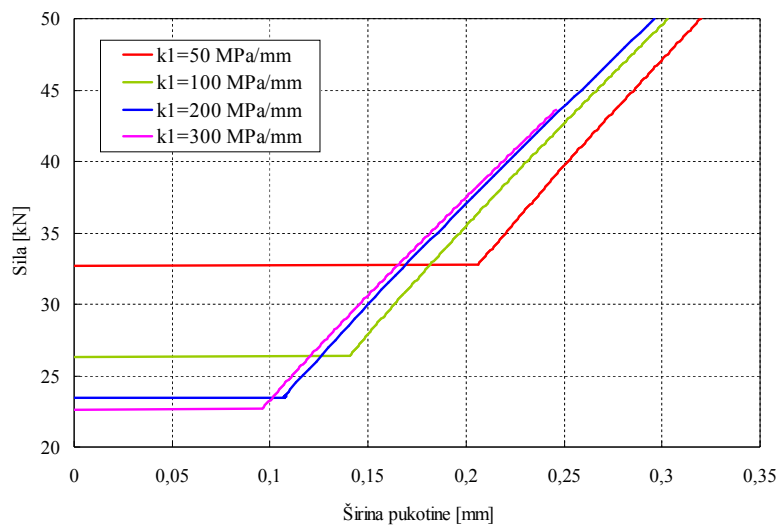


Slika 5.25 Dijagram sila-produljenje armaturne šipke za različite početne nagibe  $k_1$

Slika 5.26 prikazuje širine pukotina ovisno o početnom nagibu naprezanja prianjanja  $k_1$ . Usporedimo li rezultate primjećujemo kako su razlike u širini pukotina najveće pri manjim silama (posebno pri nagibu od 50 MPa/mm), ali povećanjem sile širine svih pukotina skoro teže k istoj vrijednosti (oko 0,29 mm). Možemo zaključiti kako početni nagib uzrokuje veće razlike samo pri manjim vrijednostima opterećenja.



a) prva pukotina

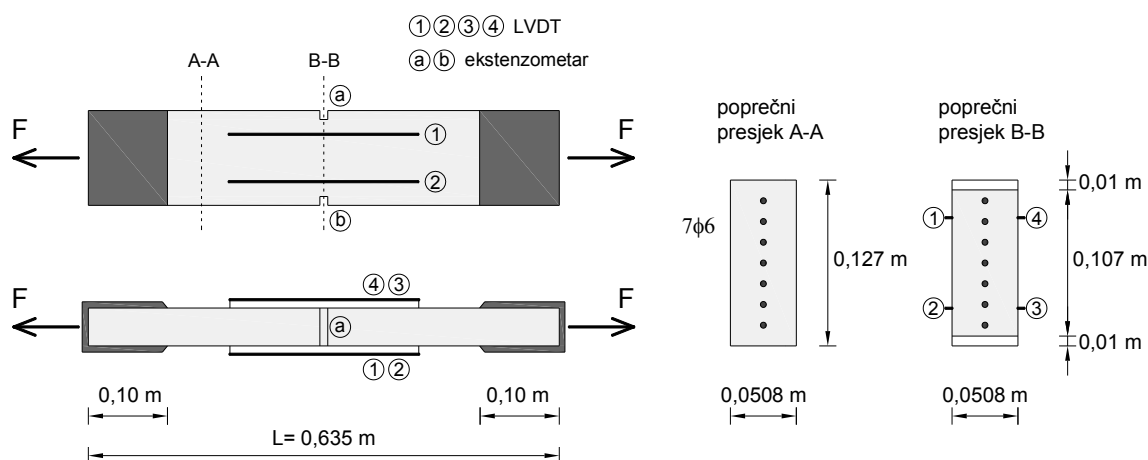


b) druga i treća pukotina

Slika 5.26 Usporedba širina pukotina za različite početne nagibe  $k_1$

## 5.2.2 Vlačni štap (Wollrab i sur., 1996.)

Vlačni štap prikazan na Slici 5.27 (Wollrab i sur., 1996.) odabran je za validaciju vlačnog konačnog elementa. U ovom eksperimentalnom istraživanju opterećenje se nanosi na beton preko čeličnih ploča koje su zalijepljene na površinu betona na krajevima štapa. Pomaci štapa mjereni su pomoću četiri LVDT-a s mjernom bazom duljine 254 mm. Kako bi se osigurao nastanak prve pukotine unutar mjerne baze LVDT-a na sredini štapa izvedena su oslabljenja duž kraće stranice uzorka (obostrano) u obliku zareza širine 2 mm i dubine 10 mm. Na mjestu oslabljenja štapa postavljena su dva ekstenzometra mjerne baze 12,7 mm u svrhu praćenja promjene širine pukotine.



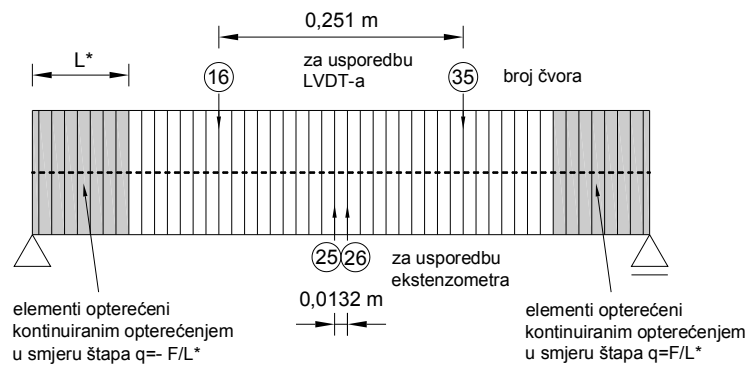
Slika 5.27 Geometrijske karakteristike vlačnog štapa (Wollrab i sur., 1996.)

Materijalne karakteristike dane su u Tablici 5.11. Podaci potrebni za definiranje konstitutivnog odnosa naprezanja prijanjanja kao funkcije proklizavanja armature usvojeni su kao u prethodnom primjeru (Yankelevsky i sur. 2008.).

Tablica 5.11 Materijalne karakteristike za vlačni štap

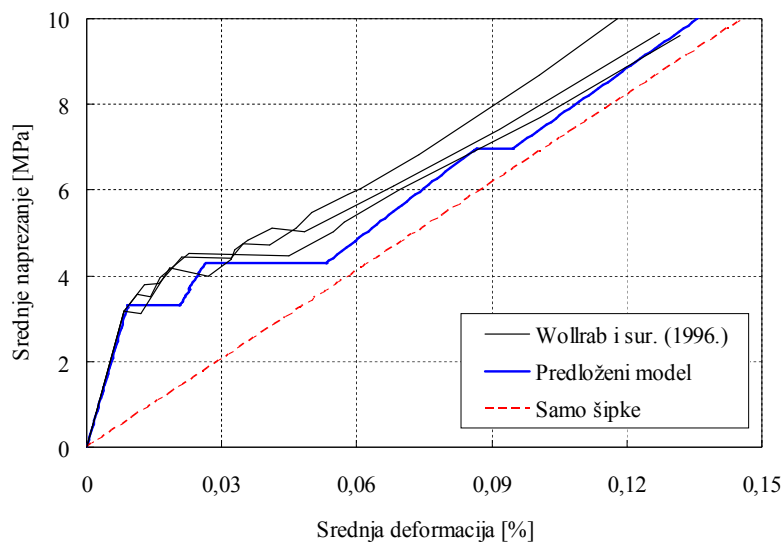
modul elastičnosti betona $E_c$	30 353 MPa
tlačna čvrstoća betona $f_c$	44,0 MPa
vlačna čvrstoća betona $f_{ct}$	3,19 MPa
modul elastičnosti čelika za armiranje $E_s$	223 480 MPa
granica popuštanja čelika za armiranje $f_y$	506 MPa
čvrstoća prijanjanja koja odgovara $f_0$ $\tau_0$	6 MPa
najveća čvrstoća prijanjanja $\tau_{max}$	12 MPa
čvrstoća prijanjanja – komponenta trenja $\tau_f$	5 MPa
proklizavanje $f_0$	0,03 mm
proklizavanje pri najvećoj čvrstoći prijanjanja $f_1$	1,0 mm
proklizavanje $f_2$	3,0 mm
proklizavanje $f_3$	10 mm
kut nagiba rasterećenja $k_{unload}$	200 MPa/mm

Diskretizirani model vlačnog štapa koji sadrži 49 dvočvornih jednoslojnih elemenata, pri čemu su prvi i posljednji element dvostruko kraći od ostalih elemenata, prikazan je na Slici 5.28. Broj, odnosno duljine elemenata odabrane su tako da određeni čvorovi odgovaraju mjernim mjestima iz eksperimenta (razlika pomaka 35. i 16. čvora za usporedbu LVDT-a, te razlika pomaka čvorova središnjeg elementa (26. i 25. čvora) za usporedbu ekstenzometara). Opterećenje je modelirano kao jednoliko kontinuirano uzdužno opterećenje na betonski sloj na 8 rubnih elemenata (što odgovara duljini od 10 cm). Armaturnom sloju, koji zamjenjuje 7 $\phi$ 6, omogućeno je proklizavanje na krajevima štapa. Zbog postojanja praznina u betonu na mjestu armaturnih šipki potrebno je smanjiti površinu poprečnog presjeka, pa je usvojen poprečni presjek dimenzija 49,24/127 mm. Oslabljenje u sredini štapa modelirano je smanjenjem vlačne čvrstoće središnjeg elementa za 13% (postotak je dobiven iz odnosa nosivosti oslabljenog i neoslabljenog presjeka armiranobetonskog štapa prije raspucavanja).



Slika 5.28 Diskretizirani model vlačnog štapa

Na Slici 5.29 prikazano je srednje naprezanje uzorka u ovisnosti o srednjoj deformaciji dobivenoj iz odnosa razlike pomaka i duljine LVDT-a. Usporedba numeričkog modela s eksperimentalnim ispitivanjem (tri uzorka jednakih karakteristika) pokazuje vrlo dobro podudaranje u rezultatima, kako u vrijednosti prvog raspucavanja tako i u padu krutosti pri nastanku novih pukotina.



Slika 5.29 Srednje naprezanje u ovisnosti o srednjoj deformaciji

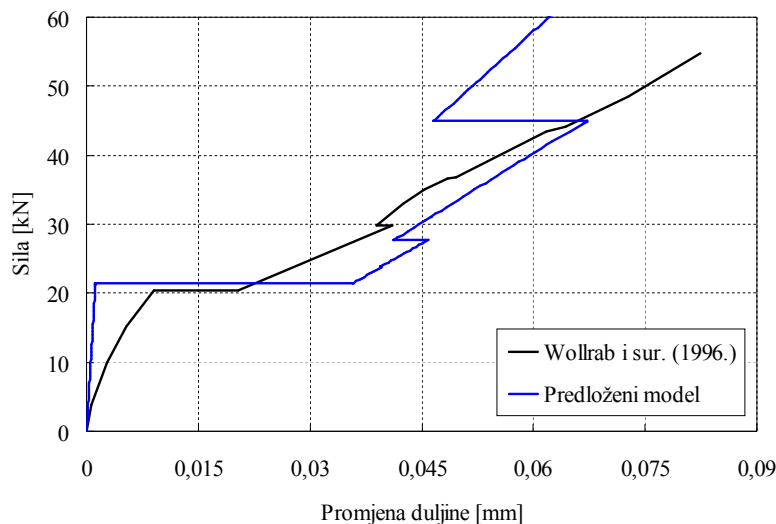
Širine pukotina dane su u Tablici 5.12, za sile koje uzrokuju pojavu pukotina, te također i za sile neposredno prije pojave novih pukotina. Prva pukotina se zbog oslabljenja javlja na sredini štapa. Sljedeće dvije pukotine otvaraju se u 9. i 41. elementu tj. u prvom elementu nakon elemenata koji simuliraju prijenos opterećenja preko čelične ploče. Sljedeće dvije pukotine nastaju između postojećih pukotina, a kasnije se pojavljuju još četiri nove pukotine. Daljnjim povećanjem opterećenja do  $F=65,0$  kN ne dolazi do nastanka novih pukotina, već samo do širenja postojećih.

Tablica 5.12 Širine pukotina u mm

Sila (kN)	Broj pukotine			
	1.	2. i 3.	4. i 5.	6., 7., 8. i 9.
21,40*	0,036			
23,80	0,040			
23,81*	0,039	0,041		
27,70	0,046	0,048		
27,71*	0,041	0,045	0,041	
44,95	0,067	0,076	0,067	
44,96*	0,046	0,065	0,046	0,046
65,00	0,067	0,107	0,067	0,067

\* Sile pri kojima dolazi do otvaranja novih pukotina

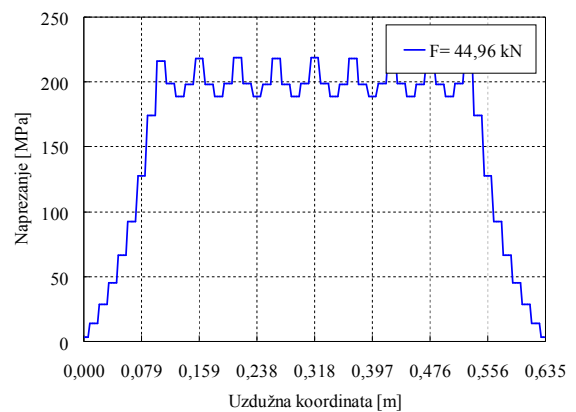
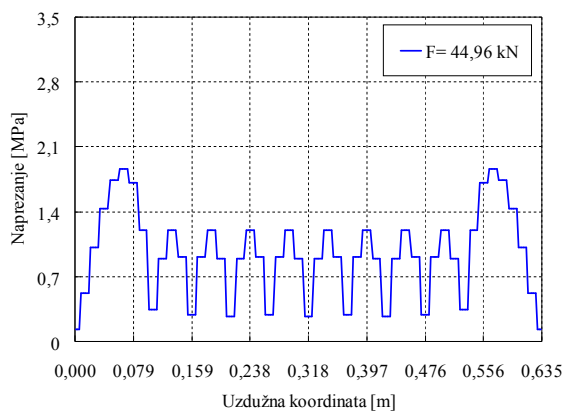
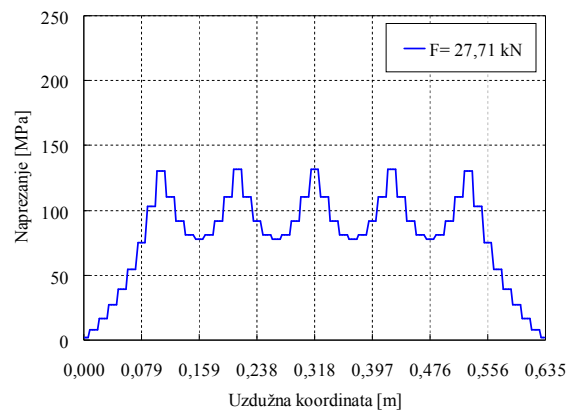
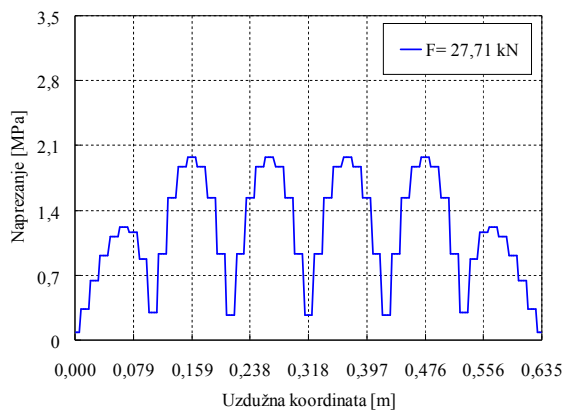
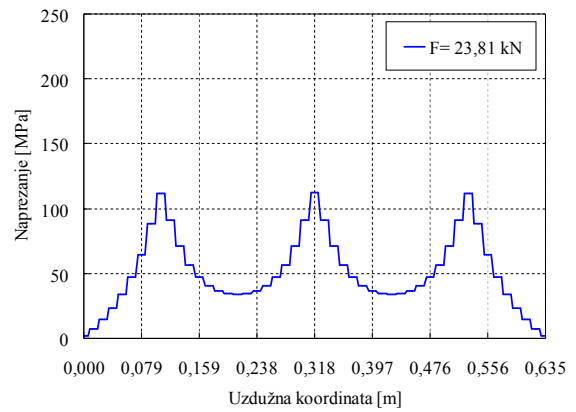
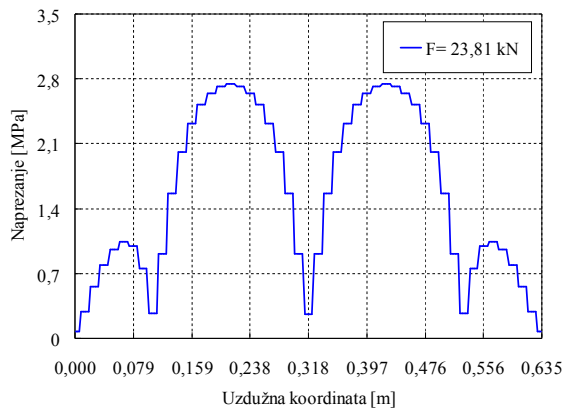
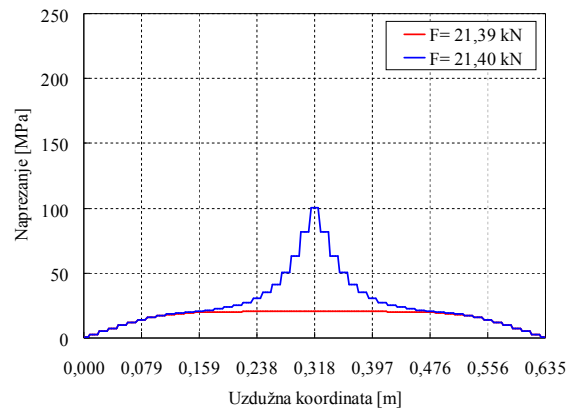
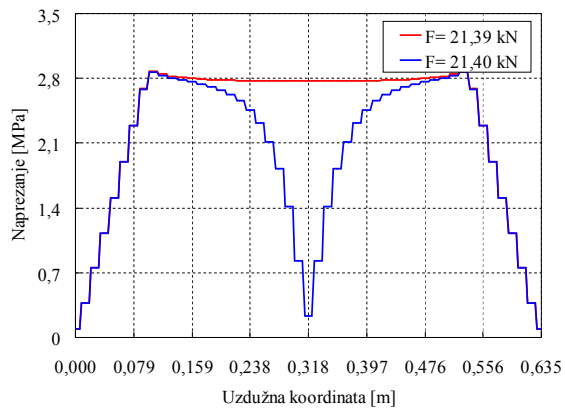
Na Slici 5.30 prikazana je usporedba promjene duljine ekstenzometra na mjestu oslabljenja (na mjestu prve pukotine) s razlikom pomaka odgovarajućih čvorova u predloženom numeričkom modelu. Osim nakon posljednjeg raspucavanja pri 44,96 kN, vidljivo je vrlo dobro podudaranje rezultata.



Slika 5.30 Promjena duljine ekstenzometra

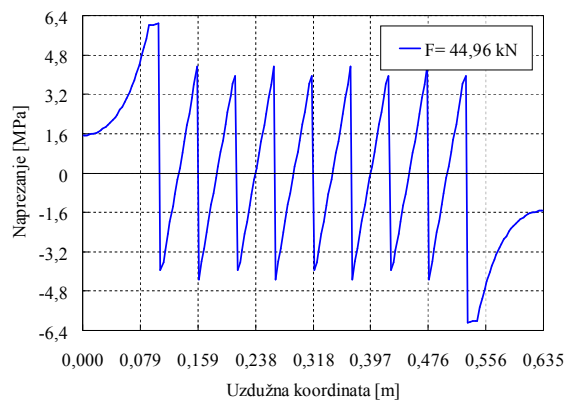
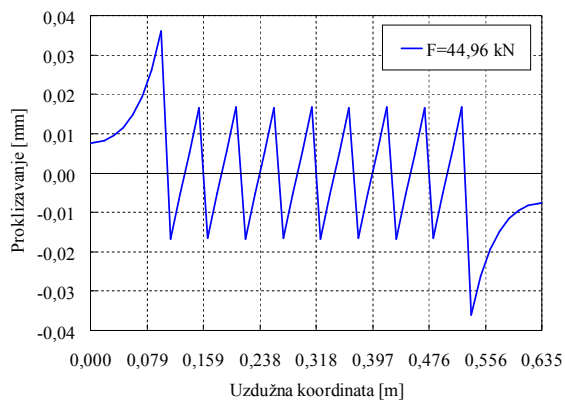
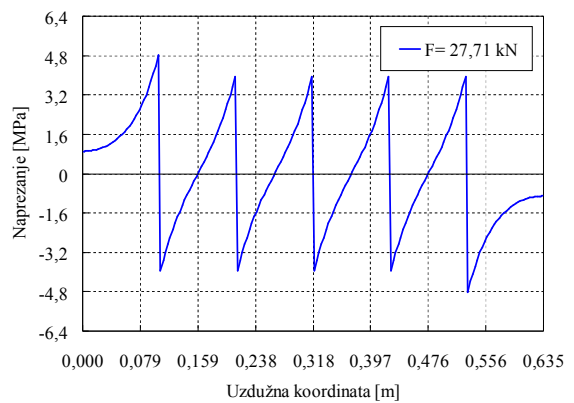
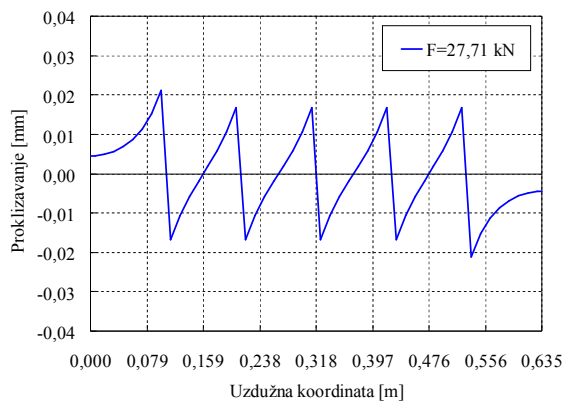
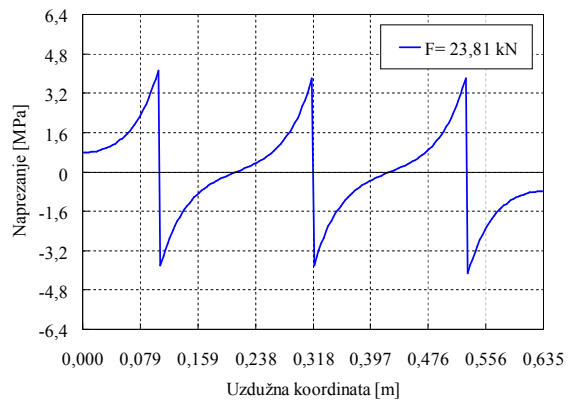
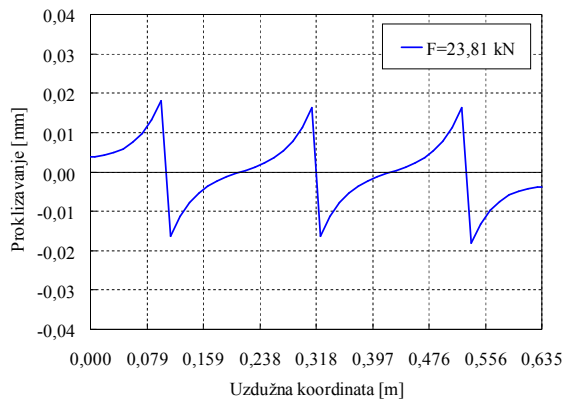
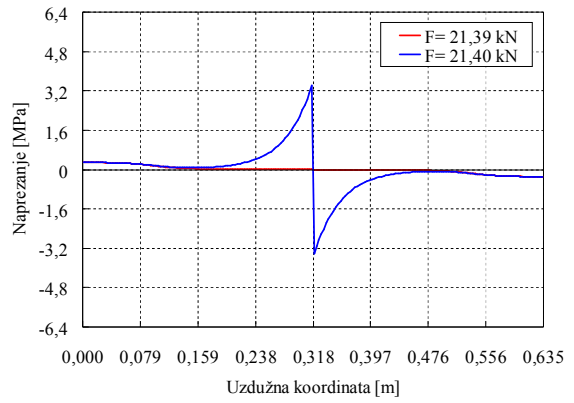
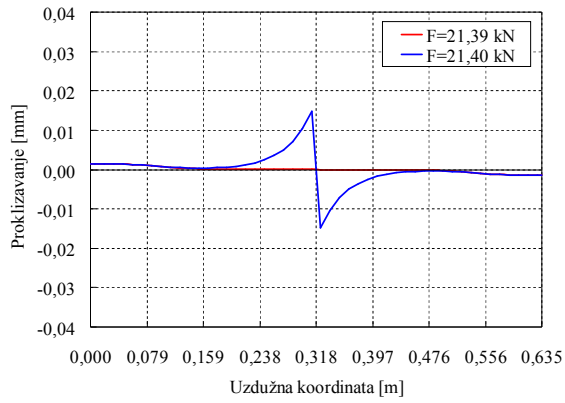
Naprezanja u betonu i odgovarajuća naprezanja u armaturnom sloju neposredno nakon pojave novih pukotina prikazana su na Slikama 5.31 i 5.32, gdje se vrlo jasno može uočiti položaj nastanka pukotina i pratiti nastanak novih pukotina. Slike 5.33 i 5.34 prikazuju proklizavanje armature i odgovarajuća naprezanja prijanjanja neposredno nakon pojave novih pukotina.





Slika 5.31 Naprežanja u betonu

Slika 5.32 Naprežanja u armaturi

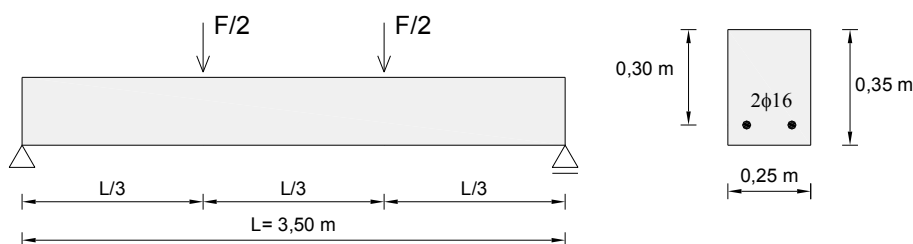


Slika 5.33 Proklizavanje armature

Slika 5.34 Naprezanja prijanjanja

### 5.2.3 Greda s dvije simetrične sile (Gilbert i Nejadi, 2004.)

Za validaciju grednog konačnog elementa odabrana je slobodno oslonjena greda opterećena s dvije sile  $F$  u trećinama raspona, koja je dio eksperimentalnog istraživanja kojeg su proveli Gilbert i Nejadi (2004.). Istraživanje se sastojalo od serije greda i ploča koje su ispitivane do sloma uslijed kratkotrajnog opterećenja, a za ovu su usporedbu odabrane dvije grede jednakih karakteristika, oznake B1-a i B1-b. Opterećenje je nanošeno u koracima po 5 kN, a u svakom je koraku detaljno dokumentiran položaj i širina pukotina na dnu grede, sve do oko 70% lomnog opterećenja (nakon toga koraci opterećenja su smanjeni). Također, mjeren je i progib u sredini grede, te deformacije u betonu na prednjoj strani grede u razini armature i na gornjoj strani grede u sredini raspona. Materijalni i geometrijski podaci dani su na Slici 5.35 i u Tablici 5.13. Greda ne sadrži poprečnu armaturu. Podaci o čvrstoćama prianjanja i proklizavanjima  $f$  potrebni za definiranje konstitutivnog zakona naprezanja prianjanja u ovisnosti o proklizavanju armature nisu dani u referentnom ispitivanju, pa su određeni na osnovu preporuka iz CEB-FIP MC90 (1993.).



Slika 5.35 Geometrijske karakteristike grede (Gilbert i Nejadi, 2008.)

Tablica 5.13 Materijalne karakteristike grede

modul elastičnosti betona $E_c$	27 000 MPa
tlačna čvrstoća betona $f_c$	36,3 MPa
vlačna čvrstoća betona $f_{ct}$	2,8 MPa
Poissonov koeficijent $\nu$	0,2
modul elastičnosti čelika za armiranje $E_s$	200 000 MPa
čvrstoća prianjanja koja odgovara $f_0$ $\tau_0$	3 MPa
najveća čvrstoća prianjanja $\tau_{max}$	9 MPa
čvrstoća prianjanja – komponenta trenja $\tau_f$	2 MPa
proklizavanje $f_0$	0,03 mm
proklizavanje pri najvećoj čvrstoći prianjanja $f_1$	0,6 mm
proklizavanje $f_2$	0,6 mm
proklizavanje $f_3$	1 mm
kut nagiba rasterećenja $k_{unload}$	100 MPa/mm

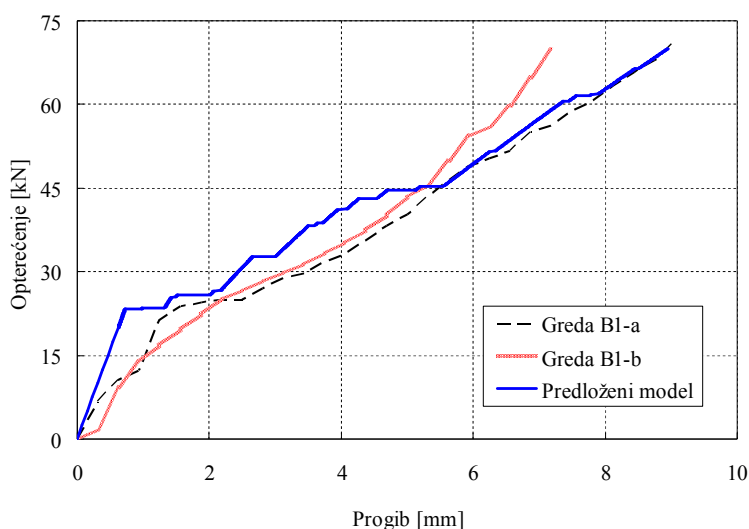
Diskretizirani model grede sadrži 51 element jednake duljine. Primijenjena je vezana interpolacija za pomake i kuteve zaokreta, te linearna Lagrangeova interpolacija za proklizavanje. Predviđeni položaj

pukotine nalazi se na sredini konačnog elementa. Poprečni presjek podijeljen je u 11 jednakih slojeva, a armatura se nalazi u drugom sloju s donje strane grede. Proklizavanje na rubovima grede je spriječeno (pretpostavljeno je kako su šipke usidrene).

Budući da promatramo opterećenje koje ne prelazi 70% lomnog opterećenja, možemo pretpostaviti kako će se i beton i čelik ponašati linearno-elastično.

Na Slici 5.36 prikazan je odnos progiba grede u sredini raspona ovisno o opterećenju, i uspoređen s eksperimentalno izmjerenim progibima. U prvom koraku greda je opterećena samo vlastitom težinom (modelirano kao kontinuirano opterećenje u vrijednosti od 2,188 kN/m), a dobiveni progib usvojen je kao početno ishodište za prikaz progiba od koncentriranih sila.

Za male vrijednosti opterećenja - prije doseganja vlačne čvrstoće betona greda se ponaša linearno-elastično, i odziv neraspucane grede možemo odrediti na osnovu idealnog presjeka, gdje je površina armature transformirana u ekvivalentni betonski presjek. Prekoračenje vlačne čvrstoće betona i pojava prve pukotina javlja se pri sili od 23,358 kN u središnjem elementu. Svako formiranje pukotina odražava se skokom na dijagramu, i padom krutosti grede.

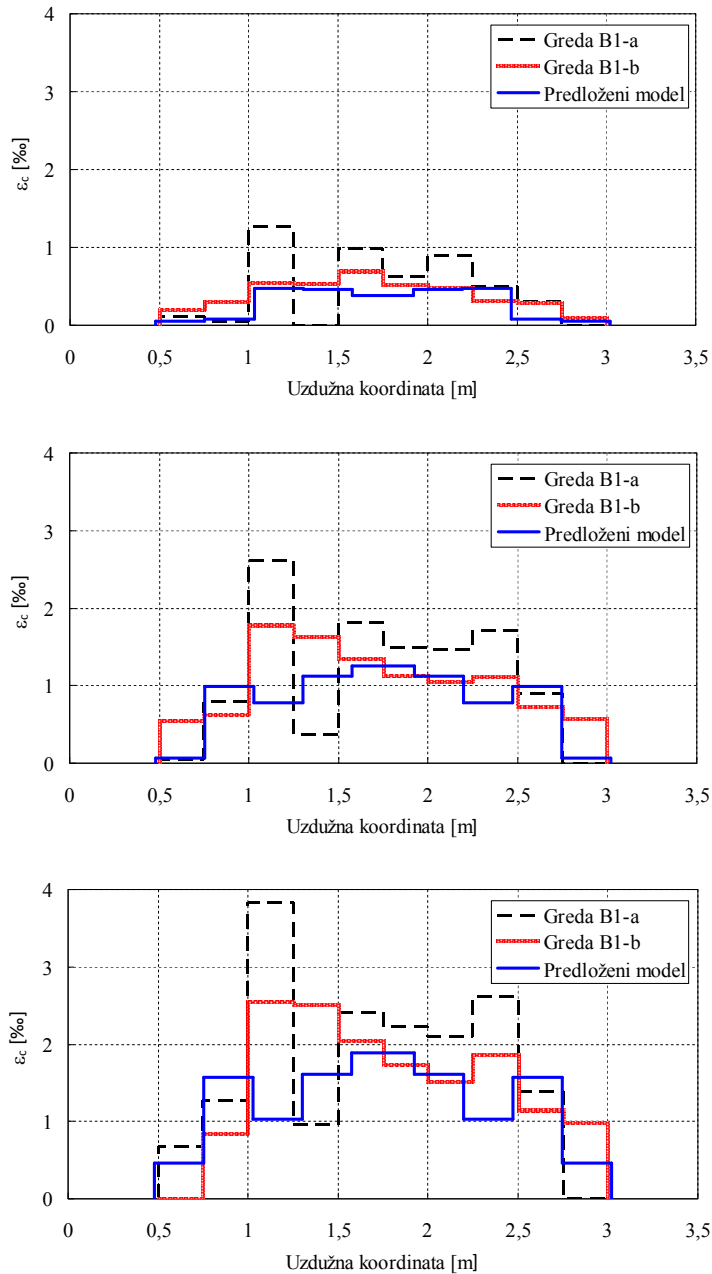


Slika 5.36 Dijagram opterećenje – progib grede u sredini raspona

Deformacije u betonu u razini armature, izmjerene na prednjoj strani grede, za tri različita opterećenja prikazane su na Slici 5.37, gdje se može primijetiti vrlo dobro podudaranje između izmjerenih i numerički dobivenih vrijednosti. Deformacije u betonu na gornjoj strani grede u sredini raspona uspoređene su u Tablici 5.14, gdje također dobivamo zadovoljavajuće rezultate.

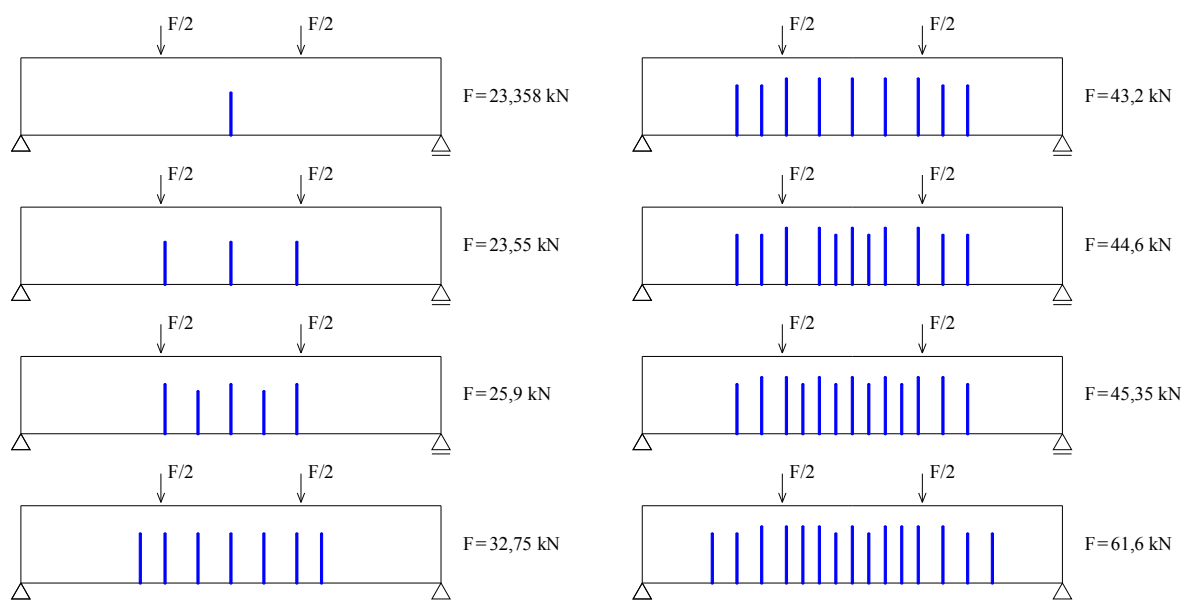
Tablica 5.14 Deformacije u betonu u ‰ na gornjoj strani grede u sredini raspona

Opterećenje kN	Greda B1-a	Greda B1-b	Predloženi model
30	-0,27	-0,22	-0,21
50	-0,52	-0,43	-0,37
70	-0,74	-0,59	-0,49



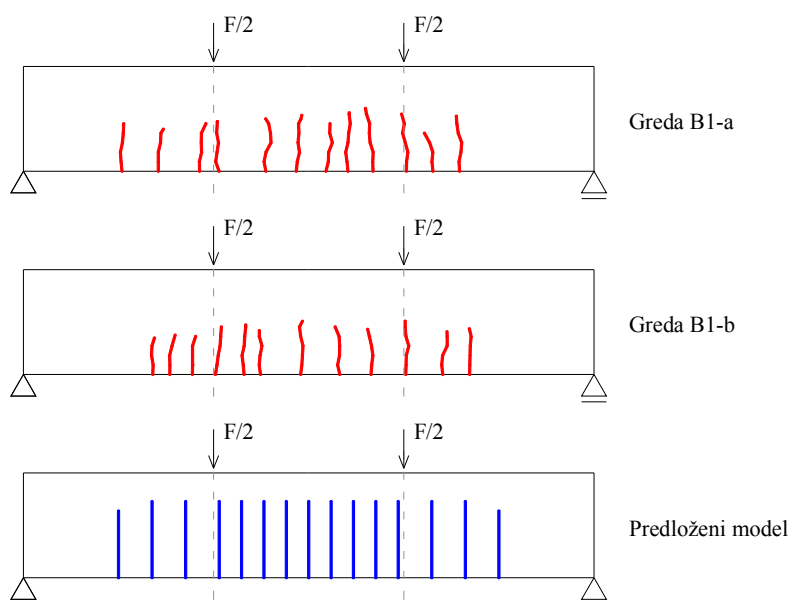
Slika 5.37 Deformacije u betonu u razini armature za opterećenje: 30 kN, 50 kN i 70 kN

Proces razvoja pukotina s porastom opterećenja u predloženom modelu možemo pratiti na Slici 5.38, gdje su također dane i vrijednosti sila koje uzrokuju nove pukotine. Prva pukotina nastaje na sredini grede, gdje je ujedno i najveći moment savijanja. Povećanjem opterećenja postupno nastaju nove pukotine, najprije u području srednje trećine grede, a kasnije i izvan tog područja. Zbog simetrije u geometriji, rubnim uvjetima i opterećenju, sve pukotine nakon prve javljaju se u paru. Na kraju procesa opterećivanja, pri opterećenju od 70 kN sveukupno se 15 pukotina razvilo u polovici grede, od čega 9 u srednjoj trećini grede.



Slika 5.38 Proces nastajanja i razvoja pukotina

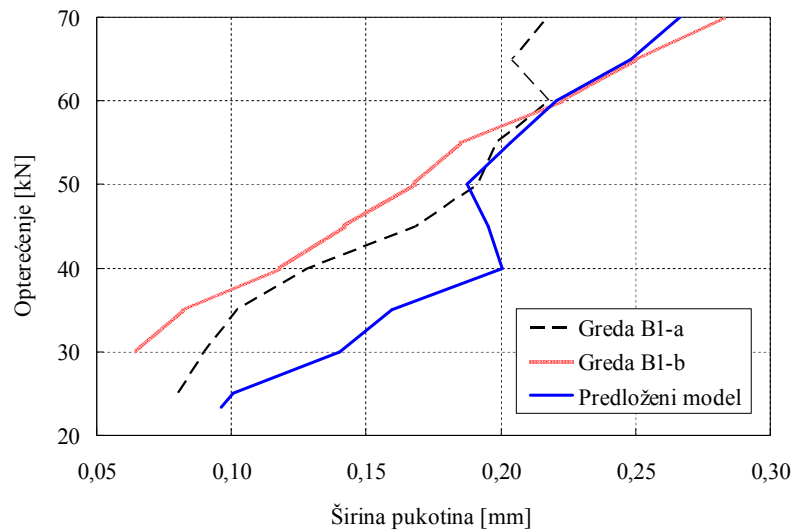
Na Slici 5.39 dana je usporedba predloženog modela s eksperimentalnim rezultatima za vrijednost opterećenja od 70 kN. U eksperimentalnom ispitivanju je u obje grede pri opterećenju od 70 kN dokumentirano 12 pukotina, od čega se u gredi B1-a 7 pukotina nalazi u području srednje trećine grede, a u gredi B1-b 6 pukotina se nalazi u tom području. Možemo primijetiti vrlo dobra poklapanja u broju pukotina, te također u širini zone u kojoj se javljaju pukotine. Poklapanje točnog položaja pukotina u eksperimentu i modelu, naravno, ne možemo ni očekivati, budući je beton nehomogen materijal, kojeg modeliramo kao homogenog.



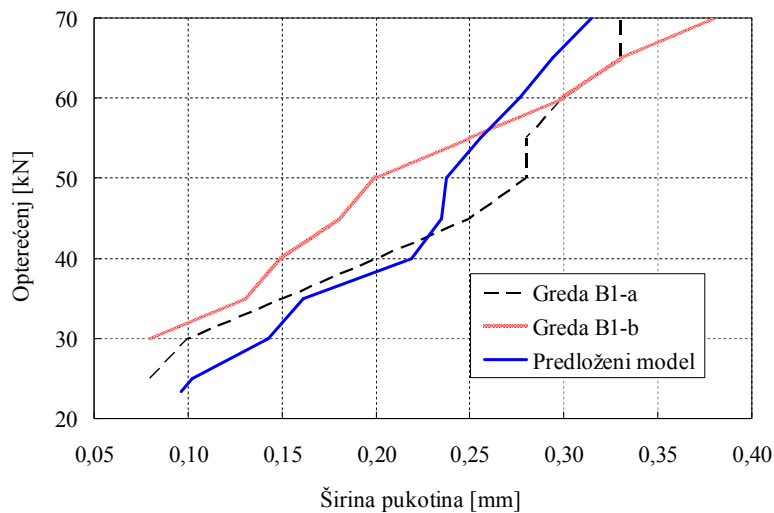
Slika 5.39 Usporedba položaja i dubine pukotina za  $F=70,0$  kN

Jedan od načina modeliranja nehomogenosti bio bi npr. variranjem vlačne čvrstoće betona po elementima i/ili po slojevima (npr. Wu i Gilbert, 2009., Casanova i sur., 2012.). Također uočavamo kako su dobivene pukotine dublje u odnosu na eksperiment, te možemo pretpostaviti kako bi se bolje rezultate u poklapanju dubina pukotina dobilo uključenjem kohezivnih naprezanja.

Srednja i najveća širina pukotina na donjem rubu grede u području srednje trećine grede uspoređena je redom na Slikama 5.40 i 5.41. Greda B1-a raspucala je pri fazi opterećenja od 25 kN, dok je greda B1-b raspucala pri fazi od 30 kN. Vidimo da predložena procedura daje zadovoljavajuće rezultate također i za širine pukotina. Može se primijetiti kako je bolje podudaranje rezultata s eksperimentalnim ispitivanjima pri većim vrijednostima opterećenja. Uključenjem kohezivnih naprezanja možemo očekivati manje vrijednosti širina pukotina, posebno za manje vrijednosti opterećenja.



Slika 5.40 Srednja širina pukotina u području srednje trećine grede

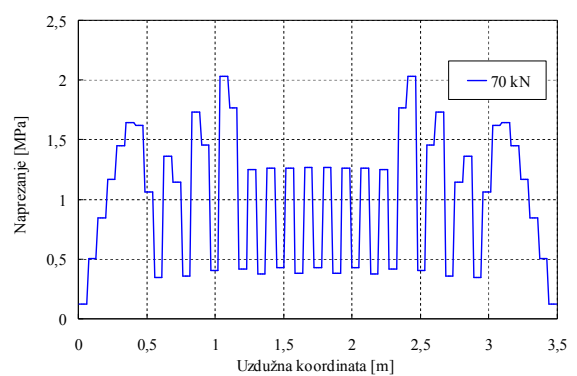
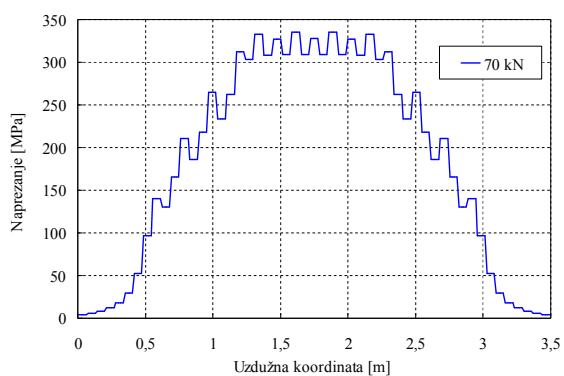
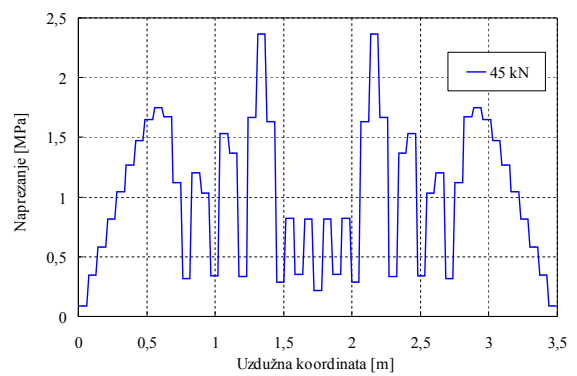
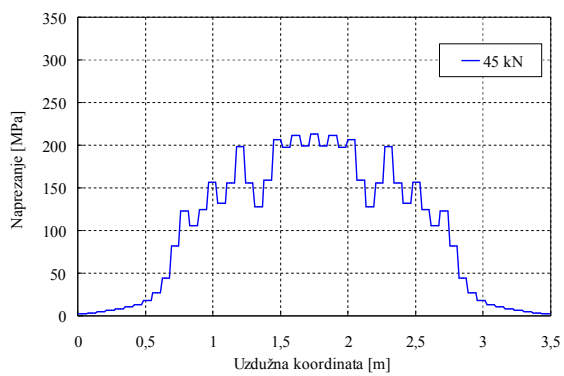
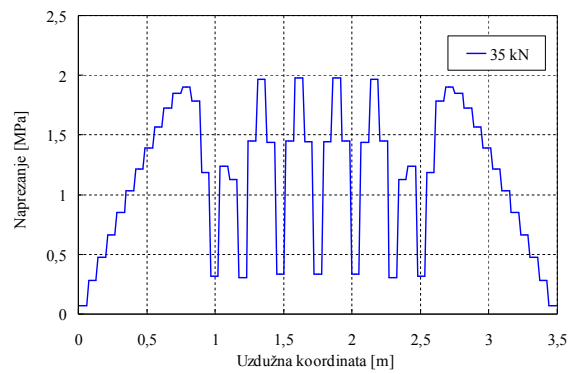
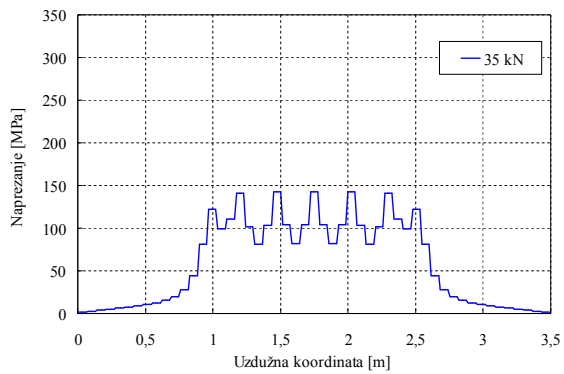
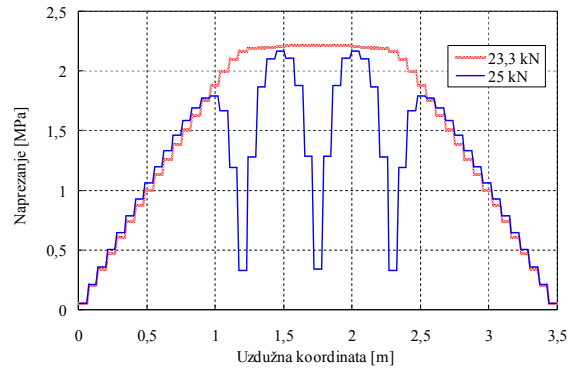
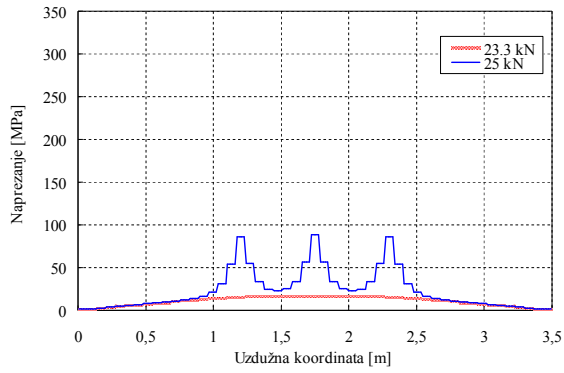


Slika 5.41 Najveća širina pukotina u području srednje trećine grede

Na Slikama 5.42 i 5.43 prikazana su redom naprezanja u armaturi i pripadajuća naprezanja u drugom sloju u betonu za nekoliko različitih vrijednosti opterećenja, koja uključuju stanje prije raspucavanja i stanja s 3, 7, 11 i 15 pukotina. Mogu se primijetiti lokalni maksimumi na dijagramu naprezanja u armaturi koji odgovaraju položaju pukotina - naprezanje u armaturi postiže najveću vrijednost na mjestu pukotine, budući da tamo armatura prenosi sveukupnu vlačnu silu, i opada između pukotina. Vlačna naprezanja u betonu imaju tendenciju iščezavanja na mjestu pukotina, dok neraspucani beton između pukotina i dalje prenosi vlačnu silu uslijed veze koja se ostvaruje s armaturom.

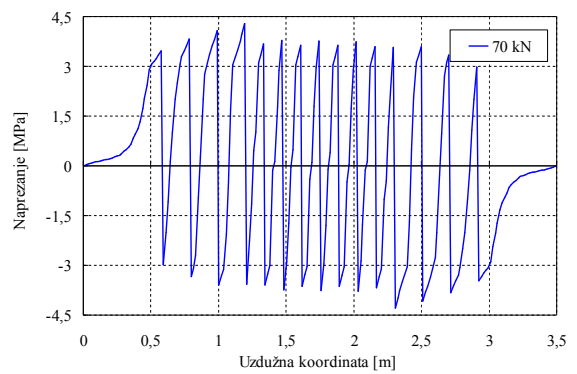
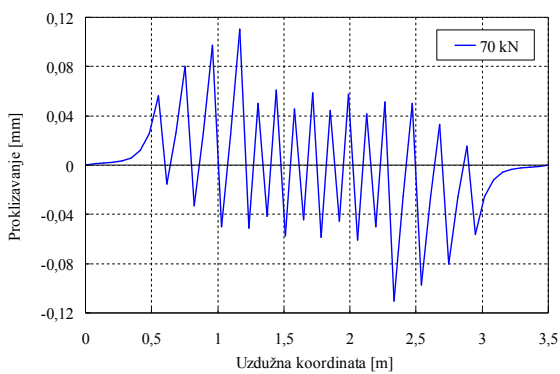
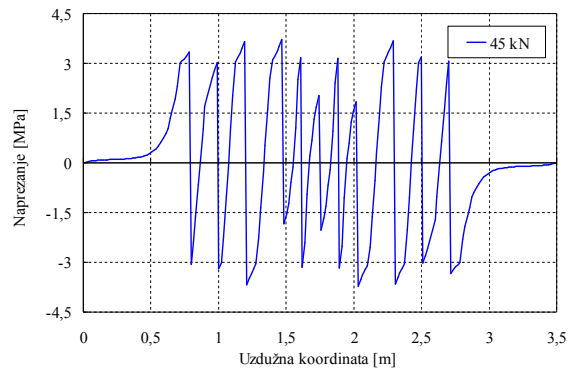
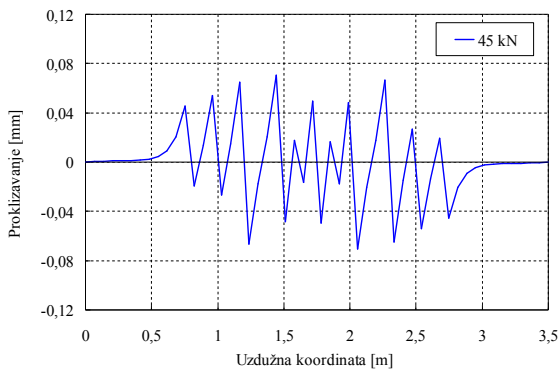
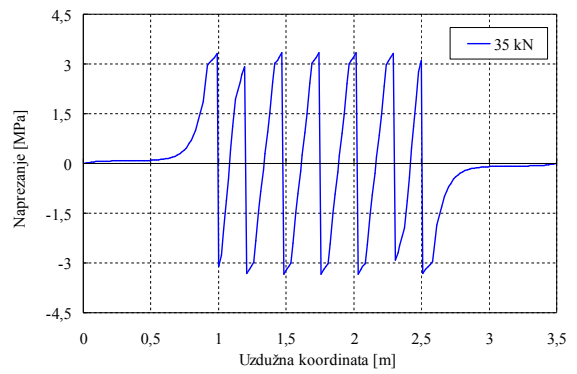
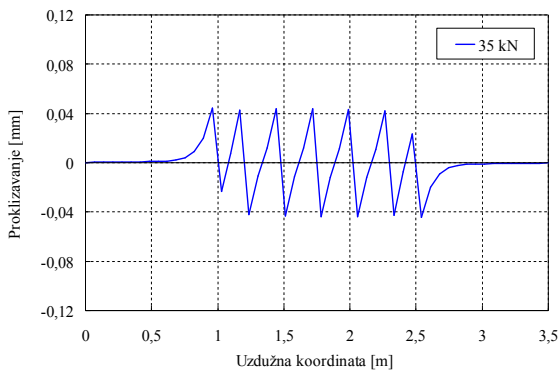
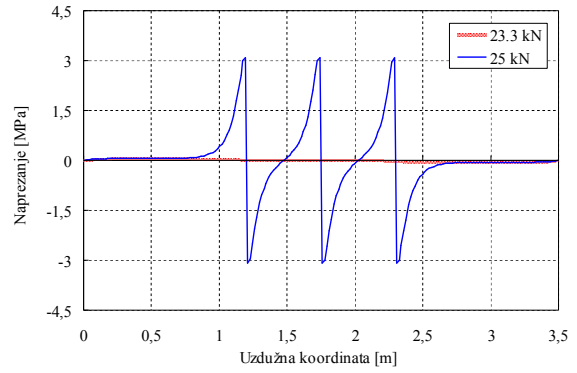
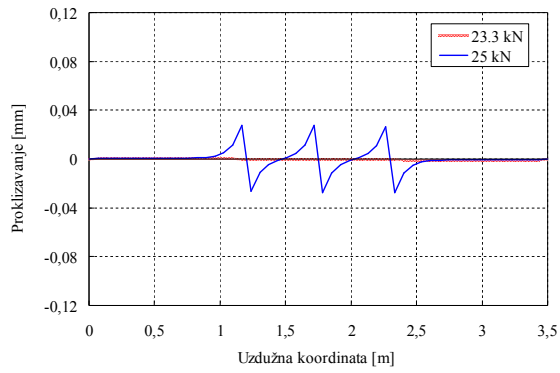
Na Slikama 5.44 i 5.45 prikazana su redom proklizavanja armature i pripadajuća naprezanja prijanjanja, koja nastaju uslijed tih proklizavanja, za nekoliko različitih vrijednosti opterećenja, koja uključuju stanje prije raspucavanja i stanja s 3, 7, 11 i 15 pukotina. Najveće vrijednosti naprezanja prijanjanja javljaju se na mjestu pukotina, a između njih mijenjaju predznak.





Slika 5.42 Naprezanja u armaturi

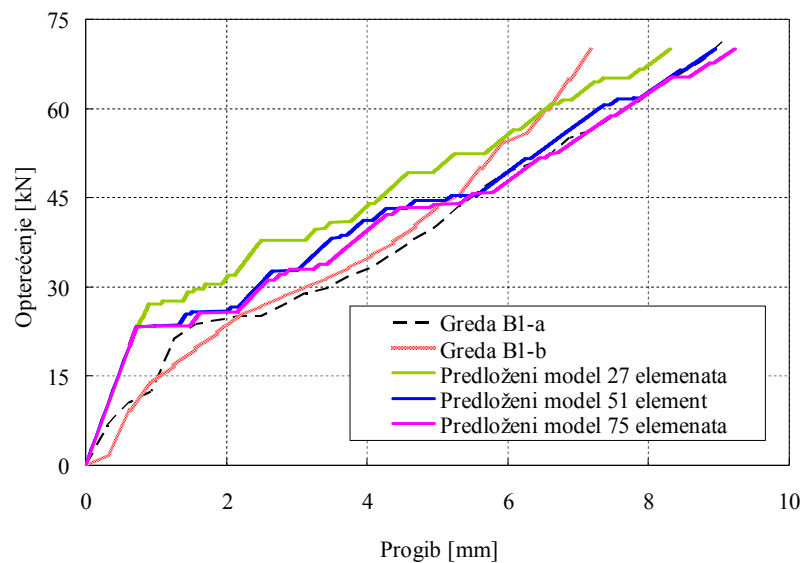
Slika 5.43 Naprezanja u drugom sloju betona



Slika 5.44 Proklizavanje armature

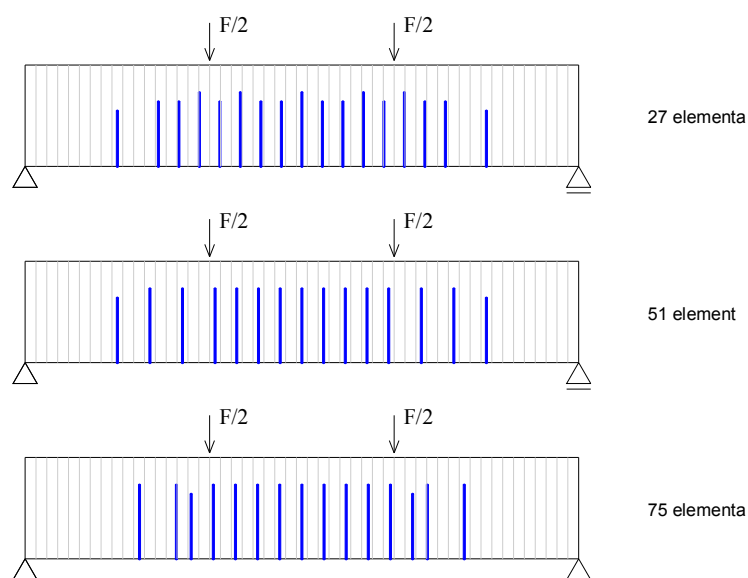
Slika 5.45 Naprezanja prijanjanja

U nastavku je provedena analiza s još dvije mreže dvočvornih konačnih elemenata (jedna sadrži 27, a druga 75 elemenata), u cilju ocjene rezultata u ovisnosti o gustoći mreže. Slika 5.46 prikazuje usporedbu progiba ovisno o opterećenju za sve tri promatrane mreže. Mreže s 51 i 75 elemenata pokazuju vrlo slično ponašanje, dok mreža s 27 elemenata pokazuje malo krući odziv. Naime, sve mreže sadrže neparan broj elemenata (koji je odabran kako bi se prva pukotina pojavila na sredini grede), te su u srednjem elementu vrijednosti progiba u oba čvora jednaka (tj. i u cijelom elementu). Veće odstupanje kod mreže s 27 elemenata djelomično su rezultat toga što je točka u kojoj računamo progib više udaljena od sredine grede nego li kod drugih mreža.



Slika 5.46 Dijagram sila-progib za mreže s 27, 51 i 75 elemenata

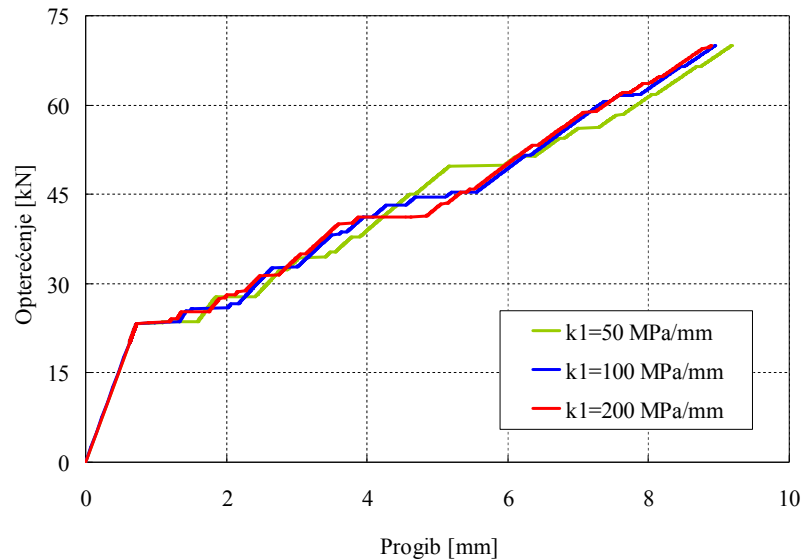
Usporedba položaja i dubine pukotina pri opterećenju od 70 kN na Slici 5.47 prikazuje vrlo slične rezultate, bez obzira na gustoću mreže.



Slika 5.47 Usporedba pukotina za mreže s 27, 51 i 75 elemenata za opterećenje  $F=70$  kN

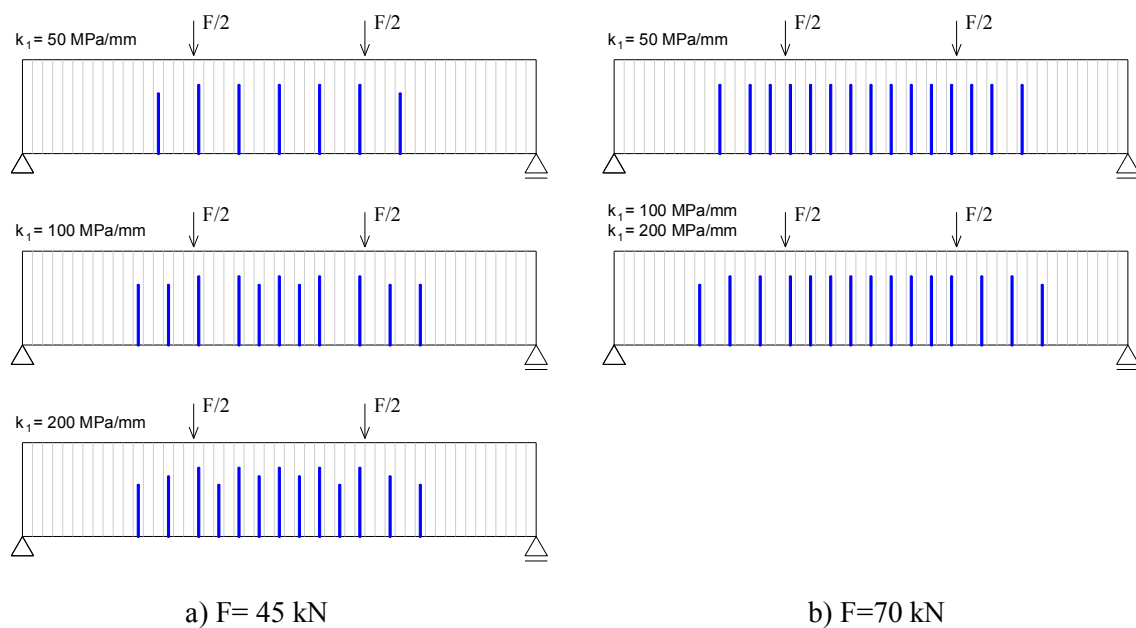
S ciljem ocjene početnog nagiba naprezanja prijanjanja  $k_1$  na ponašanje grede u nastavku je proveden pokus s još dva početna nagiba (50 i 200 MPa/mm), uz zadržavanje konstantne vrijednosti naprezanja prijanjanja  $\tau_0$ , za mrežu koja sadrži 51 konačni element.

Bez obzira na vrijednost početnog nagiba  $k_1$ , progib u sredini raspona vrlo je sličan (Slika 5.48).



Slika 5.48 Dijagram opterećenje – progib za različite početne nagibe  $k_1$

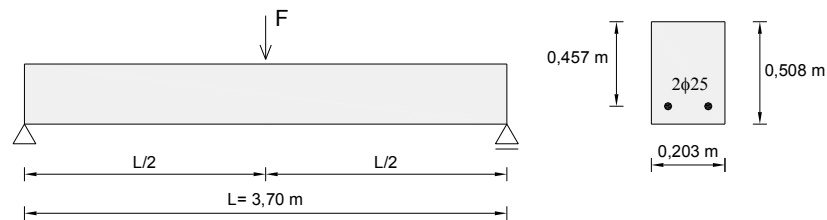
Na Slici 5.49 prikazana je usporedba pukotina za različite početne nagibe  $k_1$ . Možemo primijetiti kako se za manje vrijednosti opterećenja pri povećanju krutosti javlja veći broj pukotina, ali porastom opterećenja broj i dubina pukotina teže izjednačavanju bez obzira na početni nagib.



Slika 5.49 Usporedba pukotina za različite početne nagibe

### 5.2.4 Greda sa silom u sredini raspona (Burns i Siess, 1962.)

Kao drugi primjer za validaciju grednog konačnog elementa odabrana je slobodno oslonjena greda opterećena koncentriranom silom  $F$  u sredini raspona, koja je dio eksperimentalnog ispitivanja kojeg su proveli Burns i Siess (1962.). Geometrijske karakteristike grede prikazane su na Slici 5.50. Greda je armirana s dvije šipke promjera 25 mm u donjoj zoni, i sadrži poprečnu armaturu promjera 10 mm na razmaku 15 cm.



Slika 5.50 Geometrijske karakteristike grede J4 (Burns i Siess, 1962.)

Materijalne karakteristike grede dane su u Tablici 5.15. Budući nisu poznati rezultati vlačne čvrstoće betona, ona je određena na osnovu preporuka iz CEB-FIP MC90 (1993.) iz poznate tlačne čvrstoće betona. Primijenjen je trilinearni konstitutivni zakon naprezanja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju armature kojeg su primijenili Kwak i Filippou (1990.), koji predstavlja dio multiliniarnog opisa do  $f_2$  sa Slike 4.3 b.

Tablica 5.15 Materijalne karakteristike grede J4

modul elastičnosti betona $E_c$	26 700 MPa
tlačna čvrstoća betona $f_c$	34 MPa
vlačna čvrstoća betona $f_{ct}$	3,2 MPa
Poissonov koeficijent $\nu$	0,2
modul elastičnosti čelika za armiranje $E_s$	207 000 MPa
čvrstoća prijanjanja koja odgovara $f_0 \tau_0$	2,0 MPa
najveća čvrstoća prijanjanja $\tau_{max}$	4,0 MPa
proklizavanje $f_0$	0,02 mm
proklizavanje pri najvećoj čvrstoći prijanjanja $f_1$	0,15 mm
proklizavanje $f_2$	1 mm
kut nagiba rasterećenja $k_{unload}$	100 MPa/mm

Ovu su gredu također numerički obradili Kwak i Filippou (1990.), te Oliveira i sur. (2008.), pa će se u nastavku za usporedbu koristiti i rezultati njihovih numeričkih analiza.

Kwak i Filippou (1990.) su predložili model koji se temelji na pristupu razmazanih pukotina. Razvili su osmeročvorne ravninske konačne elemente s ugrađenim elementom armaturene šipke. U cilju uključivanja efekta kako mikropukotine mogu biti koncentrirane u području koje je vrlo malo u odnosu na veličinu konačnog elementa, uveli su eksponencijalnu funkciju raspodjele mikropukotina unutar širine elementa. To omogućava stvarniji prikaz raspucavanja i kad su konačni elementi većih

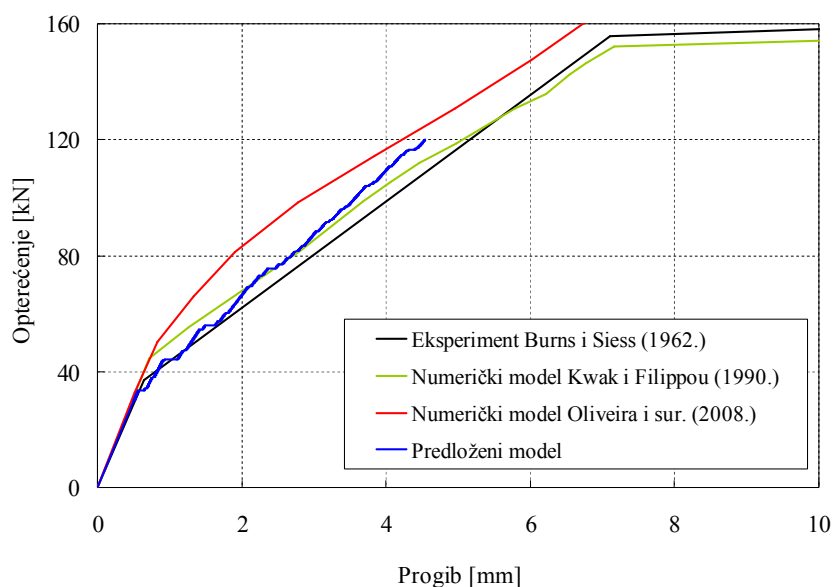
dimenzija. U radu su prikazali nekoliko različitih modela, a za ovu su usporedbu odabrani rezultati modela s 24 konačna elementa koji uključuje proklizavanje armature i sudjelovanje betona u nosivosti na vlak nakon raspucavanja.

Oliveira i sur. (2008.) su gredu J4 upotrijebili za verifikaciju slojevitog grednog konačnog elementa s ugrađenim pukotinama na krajevima elementa. Podjela na slojeve služi samo kao pojednostavljenje pri integraciji polja naprezanja u poprečnom presjeku. Za usporedbu su odabrani rezultati mreže koja sadrži 16 konačnih elemenata, s podjelom na 10 slojeva u poprečnom presjeku.

Greda je diskretizirana s 49 dvočvornih konačnih elemenata jednake duljine, pri čemu je opterećenje koncentriranom silom zamijenjeno dvjema silama koje djeluju u čvorovima srednjeg elementa. Poprečni presjek podijeljen je na 15 jednakih slojeva, dok se armaturni sloj nalazi u drugom sloju s donje strane grede.

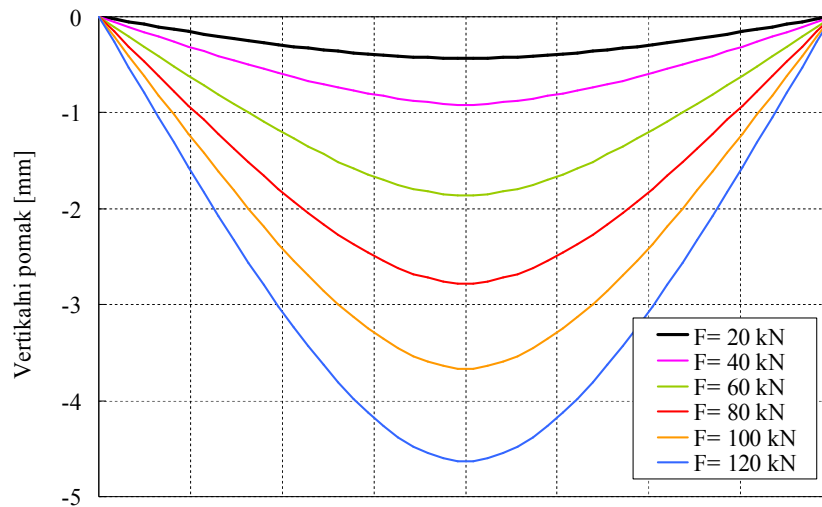
U ovom numeričkom pokusu na gredu je nanoseno opterećenje u vrijednosti od oko 70% lomnog opterećenja, za koje možemo pretpostaviti kako će naprezanje u betonu i čeliku biti linearno-elastično. U prvom koraku nanosena je samo vlastita težina grede (kao kontinuirano opterećenje iznosa 2,5 kN/m), a dobiveni progib usvojen je kao početno ishodište za prikaz progiba od opterećenja koncentrirane sile. Na Slici 5.51 dana je usporedba progiba gdje se može uočiti dobro podudaranje s eksperimentalnim rezultatima i rezultatima dviju numeričkih analiza.

Veća odstupanja u odnosu na eksperiment za veće vrijednosti opterećenja mogu se objasniti pojavom kosih pukotina (zbog utjecaja poprečnih sila). U predloženom modelu se umjesto kosih pukotina javljaju poprečne pukotine, a kod grede Ngo i Scordelis (1967.) primijetili smo kako upravo ova idealizacija kosih pukotina vertikalnim pukotinama daje manje vrijednosti progiba (Slika 5.12).



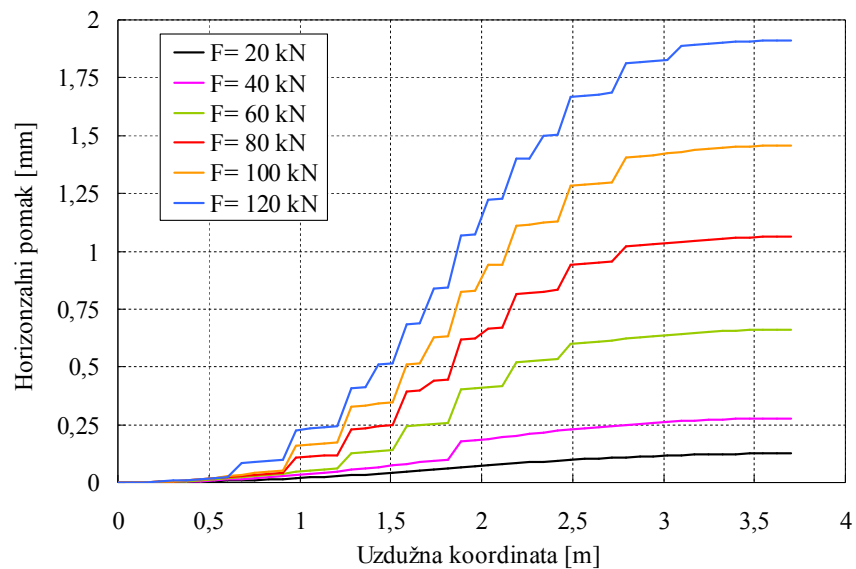
Slika 5.51 Dijagram opterećenje – progib u sredini grede

Na Slici 5.52 prikazani su vertikalni pomaci uzduž grede za nekoliko različitih vrijednosti opterećenja. Budući da zbog raspucavanja dolazi do smanjenja krutosti grede, jasno se može uočiti kako su pomaci znatno veći od onih koje bismo dobili linearnom analizom.



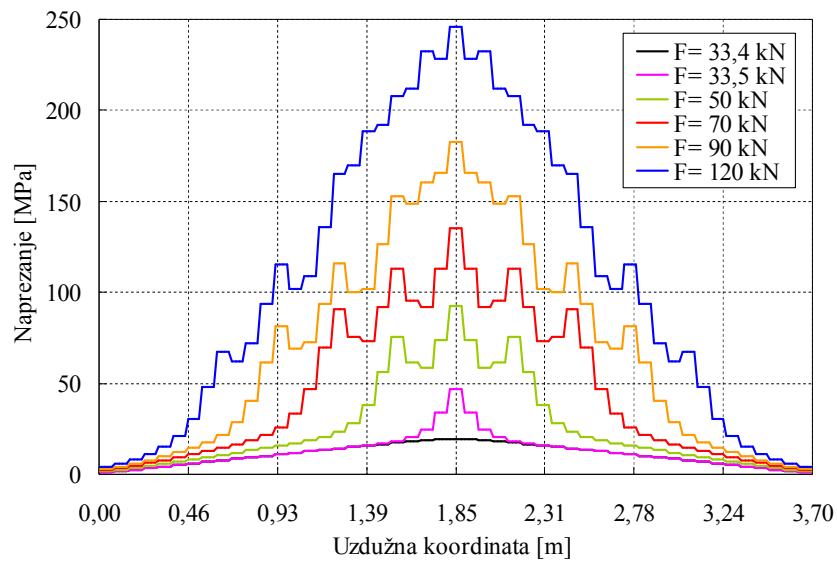
Slika 5.52 Vertikalni pomaci uzduž grede za različite vrijednosti opterećenja

Slika 5.53 prikazuje horizontalne pomake uzduž osi grede, koja se nalazi u drugom sloju odozdo, za nekoliko različitih vrijednosti opterećenja. Skokovi na dijagramu odgovaraju vrijednostima širina pukotina.



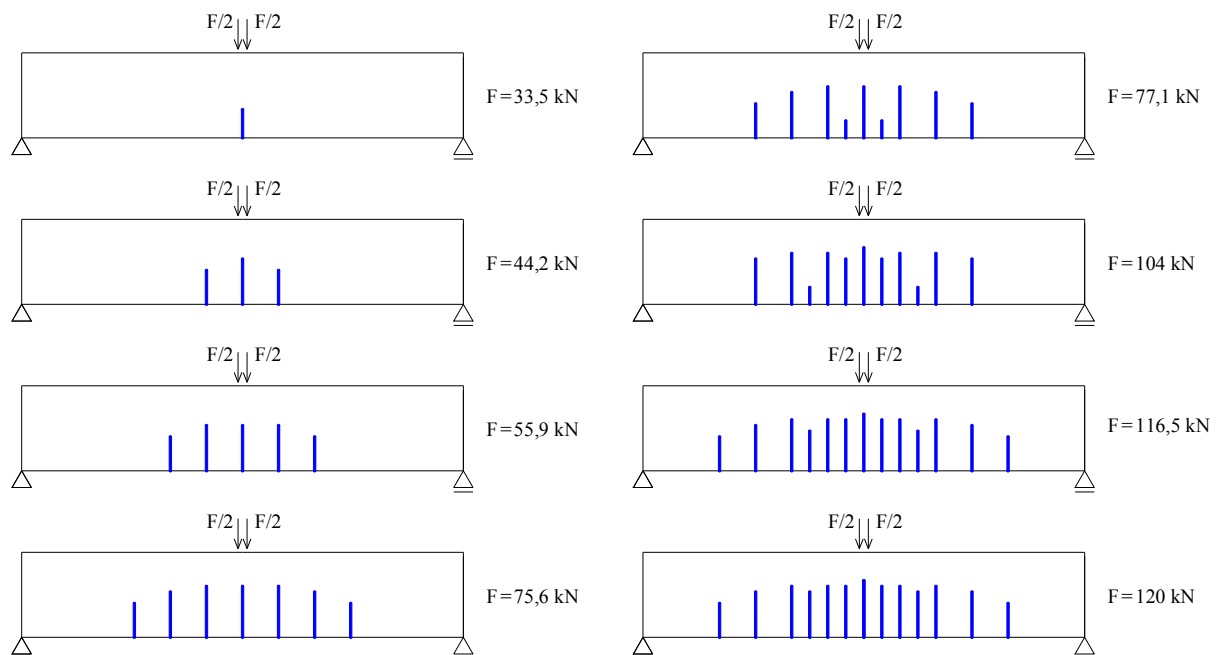
Slika 5.53 Horizontalni pomaci za različite vrijednosti opterećenja

Naprezanja u armaturnom sloju prikazana su na Slici 5.54 za nekoliko različitih vrijednosti opterećenja, gdje se vrlo jasno na osnovu lokalnih vršnih naprezanja može ustanoviti u kojim konačnim elementima je došlo do prekoračenja vlačne čvrstoće i otvaranja pukotina.



Slika 5.54 Naprezanja u armaturi

Na Slici 5.55 prikazan je proces nastanka i razvoja pukotina u gredi J4, zajedno sa silama koje uzrokuju određeni par pukotina (osim prve pukotine koja se javlja na sredini grede). Zbog simetrije u geometriji i opterećenju, svaka se nova pukotina javlja kao simetričan par. Povećanjem opterećenja područje raspucavanja se širi prema osloncima grede, a kasnije dolazi do pojave novih pukotina između već postojećih pukotina, te do produbljivanja postojećih.

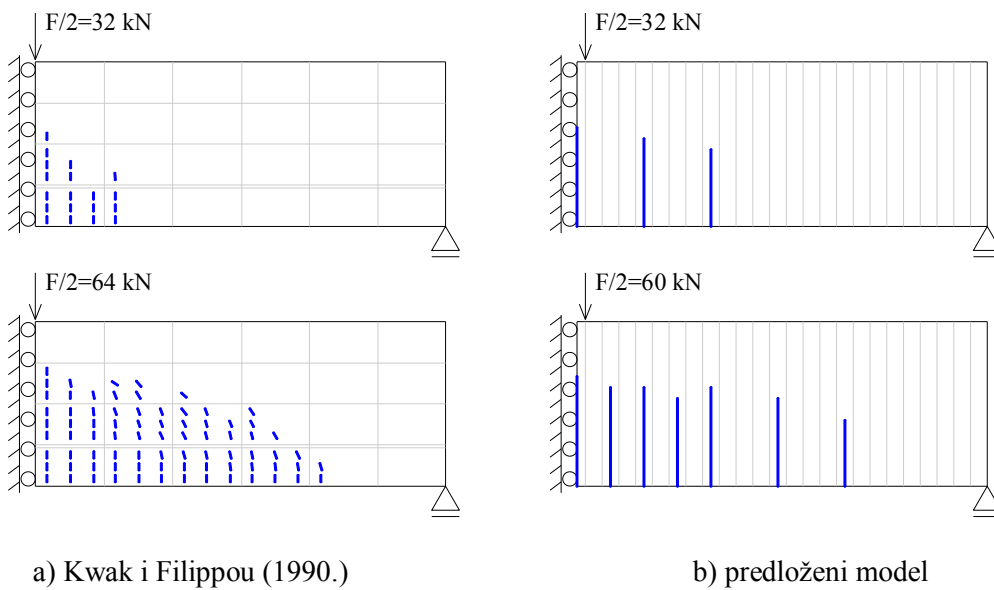


Slika 5.55 Proces raspucavanja grede J4



Na Slici 5.56 provedena je usporedba pukotina predloženog modela s rezultatima Kwaka i Filippoua (1990.) za dvije različite vrijednosti opterećenja. Zbog primjene modela razmazanih pukotina Kwak i Filippou ne daju rezultate o broju i širini pukotina, već samo smjer pukotina u onim Gaussovima točkama u kojim je došlo do prekoračenja vlačne čvrstoće (9 Gaussovih točaka po elementu). Na osnovu takvog prikaza, elemente u kojima su dani podaci u svih 9 točaka možemo promatrati kao potpuno raspucale, dok oni elementi kod kojih je taj broj manji možemo promatrati kao djelomično oslabljene elemente. Takav prikaz usporediv je s rezultatima dobivenim predloženim modelom.

Možemo zaključiti kako je u slučaju kada nas zanima točan položaj, širina i dubina pukotina predloženi model s diskretnim pukotinama prikladniji odabir.



Slika 5.56 Usporedba pukotina za dvije različite vrijednosti opterećenja

## 6 ZAKLJUČAK I SMJERNICE ZA DALJNJA ISTRAŽIVANJA

U sklopu ovog istraživanja razvijen je novi gredni konačni element s ugrađenim diskontinuitetom u polju pomaka i polju kuta zaokreta, kojim je moguće modelirati nastanak i razvoj poprečnih pukotina u gredama pri monotonom opterećenju. Model je primijenjen na armiranobetonske elemente. Konačni se element sastoji od proizvoljnog broja slojeva, međusobno povezanih krutom vezom, u kojem svaki sloj predstavlja jedan Reissnerov gredni element, koji se u slučaju kada rotacije poprečnih presjeka postaju male pojednostavljuje na Timošenkov gredni element.

Pokazano je kako korištenje slojeva ima nekoliko prednosti: moguće je pratiti razvoj pukotina po visini poprečnog presjeka, te također i modelirati krivljenje poprečnog presjeka, koje je u standardnoj grednoj teoriji zanemareno. Armaturne šipke su modelirane kao dodatni sloj (čija je debljina jednaka nuli) unutar betonskog sloja, koji može prokliznuti u odnosu na njega. Armaturni i betonski sloj povezani su prikladnim konstitutivnim zakonom koji definira naprezanje prijanjanja kao funkciju proklizavanja armature. Mehanizam nastajanja i razvoj pukotine opisan je koristeći princip mehanike oštećenja. Razvijena su dva tipa konačnih elemenata: vlačni i gredni element, koji se razlikuju u vrsti opterećenja i obliku pukotine u poprečnom presjeku.

Ostvareni doprinosi u ovom radu jesu:

- kinematička formulacija višeslojnog grednog konačnog elementa koja omogućava opis raspucavanja u armiranobetonskim elementima, što uključuje praćenje položaja, širine i dubine pukotina s porastom opterećenja. Ova formulacija uključuje obogaćenje neprekinutih polja pomaka i polja kuta zaokreta dodatnim funkcijama kojima modeliramo diskontinuitet na mjestu pukotine. Kriterij za uključenje ovih diskontinuiteta je prekoračenje vlačne čvrstoće betona na središnjoj osi pojedinog sloja.

Ugradnja diskontinuiteta u konačne elemente puno se češće primjenjuje na ravninske i prostorne konačne elemente, pa ovaj rad predstavlja pozitivan napredak u području razvoja grednih konačnih elemenata s ugrađenim diskontinuitetom;

- pokazano je kako se za rješavanje problema posmične blokade može primijeniti vezana interpolacija, koja do sada nije bila primijenjivana na višeslojnim grednim elementima (u kojem svaki sloj predstavlja jedan Timošenkov gredni element);
- vrlo veliki potencijal primjene u modeliranju raspucavanja. U odnosu na ravninske ili prostorne konačne elemente, gredni konačni elementi imaju znatno manji broj stupnjeva slobode, što ih čini numerički efikasnijim. Postojeći postupci modeliranja raspucavanja ravninskim ili prostornim elementima, naime, još nisu pronašli svoje mjesto u inženjerskoj praksi i realno je očekivati da bi novorazvijeni gredni elementi tu ulogu mogli lakše ispuniti.

Na osnovu provedene verifikacije i validacije razvijenog konačnog elementa na nekoliko testnih primjera, pri čemu su rezultati uspoređeni s rezultatima dobivenim analitičkim i numeričkim postupcima, te eksperimentalnim ispitivanjima možemo izvesti sljedeće zaključke:

- predloženim elementom može se vrlo djelotvorno prikazati nastanak i razvoj poprečnih pukotina, te pratiti širinu pukotina s porastom opterećenja. Rješenja dobivena predloženim modelom vrlo su dobre točnosti u usporedbi s numeričkim i eksperimentalnim testovima;
- predloženi model posebno je prikladan kada želimo saznati više informacija o položaju, širini i dubini pukotina;
- proces raspucavanja može se vrlo dobro opisati već i s malim brojem konačnih elemenata;
- veza između armature i betona, opisana prikladnim konstitutivnim odnosom napreznja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju armature vrlo je bitan sastojak pri razmatranju procesa raspucavanja;
- bez ugradnje modela rasterećenja u konstitutivni odnos napreznja prijanjanja kao funkcije proklizavanja armature nije moguće realno opisati ponašanje raspucavanja;
- rezultati numeričkih analiza pokazuju kako je utjecaj početne krutosti napreznja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju armature vrlo velik posebno pri malim opterećenjima. Porastom opterećenja ovaj utjecaj iščezava.

Razvijena formulacija predstavlja osnovu za vrlo široku primjenu. Uz ovdje prikazanu primjenu na armiranobetonske štapove i grede moguća je:

- primjena i izvan „klasičnih“ čelikom armiranih betonskih elemenata: umjesto čeličnih armaturnih šipki, kao armatura može se primijeniti neki drugi materijal (npr. staklene ili ugljične šipke) s odgovarajućim konstitutivnim odnosom napreznja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju;
- prilagodba modela za primjene u sanacijama konstrukcija. Danas su vrlo česta ojačanja oštećenih armiranobetonskih elemenata trakama sa staklenim ili ugljičnim vlaknima, koje se primjenjuju kao dodatna armatura lijepljenjem na površinu elementa. Implementacija ovog problema u predloženi model mogla bi se ostvariti dodavanjem novog sloja koji bi se aktivirao nakon što su se u elementu pojavile pukotine;
- promjena konstitutivnog zakona napreznja prijanjanja kao funkcije proklizavanja armature na način da se uključi narušavanje veze, primjerice zbog korozije armature. Također otpadanje vanjskog sloja betona koje nastaje uslijed širenja produkata korozije, može se modelirati isključenjem rubnih slojeva.

Smjernice za daljnja istraživanja uključuju:

- redefiniranje kinematike raspucavanja na način da se predloženim elementom omogući modeliranje kombiniranih vertikalno-kosih pukotina, tj. da se u model uključe i naprezanja od poprečnih sila. To bi bilo moguće npr. uključanjem proklizavanja između betonskih slojeva ili dodavanjem međuelemenata, što bi omogućilo pojavu „cik-cak“ pukotina, koje u slučaju dovoljno guste mreže mogu biti vrlo dobra aproksimacija kosih pukotina;
- kondenzaciju unutarnjih stupnjeva slobode (širine pukotina i nagiba otvora pukotina) na razini elementa, čime bi se broj stupnjeva slobode znatno smanjio u odnosu na trenutno stanje (u slučaju dvočvornih konačnih elemenata to bi smanjenje iznosilo skoro 50%). To bi predloženi gredni konačni element učinilo numerički još efikasnijim u odnosu na ravninske/prostorne konačne elemente;
- razmatranje vremenski ovisnih deformacija (skupljanja i puzanja betona), koje znatno utječu na deformabilnost konstrukcija;
- nadogradnju modela na opterećenja cikličkog i dinamičkog karaktera, pri čemu bi posebnu pažnju trebalo posvetiti konstitutivnom odnosu naprezanja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju armature;
- proširenje modela iz ravninskih konstrukcija na prostorne, čime bi uz sadašnju podjelu na slojeve po visini presjeka element trebalo nadograditi podjelom na slojeve po širini presjeka;
- zapis sustava jednadžbi u geometrijski nelinearnom obliku, što bi omogućilo opisivanje stanja velikih pomaka i rotacija. Iako to najčešće nije slučaj kod armiranobetonskih konstrukcija, može imati prednosti u optimizaciji konstrukcija.

## 7 LITERATURA

- [1] Abrishami, H., Mitchell, D. (1996), *Influence of splitting cracks on tension stiffening*, ACI Structural Journal, 93, 703-710.
- [2] Aldstedt, E., Bergan, P.G. (1978.), *Nonlinear time-dependent concrete-frame analysis*, ASCE Journal of Structural Division, 104(7), 1077-1092.
- [3] Alfano, G., Crisfield, M.A. (2001.), *Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: Mechanical and computational issues*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50, 1701-1736.
- [4] Armero, F., Garikipati, K. (1996.) *An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids*, International Journal of Solids and Structures, 33, 2863-2885.
- [5] Armero, F., Ehrlich, D. (2006.), *Numerical modeling of softening hinges in thin Euler-Bernoulli beams*, Computers and Structures, 84, 641-656.
- [6] Au, F.T.K., Bai, Z.Z. (2007.), *Two-dimensional nonlinear finite element analysis of monotonically and non-reversed cyclically loaded RC beams*, Engineering Structures, 29, 2921-2934.
- [7] Bajc, U., Bratina, S., Saje, M., Planinc, I. (2013.), *Nelinearna analiza razpokane armirano-betonske natezne palice – primjerava numeričnih metod*, Gradbeni vestnik, 62 (maj), 105-116.
- [8] Bažant, Z.P., Oh, B.H. (1983.), *Crack band theory for fracture of concrete*, Materials and Structures, 16, 155-177.
- [9] Bažant, Z.P., Pan, J.Y., Pijaudier-Cabot, G. (1987.), *Softening in reinforced concrete beams and frames*, ASCE Journal of Structural Engineering, 113(12), 2333-2347.
- [10] Bažant, Z.P., Planas, J. (1998.), *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*, CRC Press LLC.
- [11] Bažant, Z.P., Jirasek, M. (2002.), *Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, 128(11), 1119-1149.
- [12] Bažant, Z.P., Cedolin, L. (2003.), *Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture, and damage theories*, Dover Publications, New York.
- [13] Belarbi, A., Hsu, T.T.C. (1994.), *Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete*, ACI Structural Journal, 91(4), 465-474.
- [14] Belytschko, T., Fish, J., Engelmann, E., (1988.), *A finite element with embedded localization zones*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 70, 59-89.
- [15] Bergan, P.G., Holand, I. (1979.), *Nonlinear finite element analysis of concrete structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 443-467.
- [16] Bischoff, P.H. (2001.), *Effect of shrinkage on tension stiffening and cracking in reinforced concrete*, Canadian Journal of Civil Engineering, 65(8), 730-742.
- [17] Bonet, J., Wood, R.D. (2008.), *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*, Cambridge University Press.

- [18] Burns, N.H., Siess, C.P. (1962.), *Load-deformation characteristics of beam-column connections in reinforced concrete*, University of Illinois at Urbana, SRS 234.
- [19] Casanova, A., Jason, L., Davenne, L. (2012.), *Bond slip model for the simulation of reinforced concrete structures*, *Engineering Structures*, 39, 66-78.
- [20] CEB-FIP Model Code for concrete structures, (1978.), Comité Euro-Internacional du Béton and Federation International de la Pecontraint, CEB, Paris.
- [21] CEB-FIP Model Code 1990 Design Code, (1993.), Comité Euro-Internacional du Béton, Thomas Telford Ltd., London.
- [22] Creazza, G., Russo, S. (1999.), *A new model for predicting crack width with different percentages of reinforcement and concrete strength classes*, *Materials and Structures*, 32, 520-524.
- [23] de Borst, R. (2002.), *Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches*, *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 95-112.
- [24] de Borst, R., Remmers, J.J.C., Needleman, A., Abellan, M.A. (2004.), *Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap*, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28, 583-607.
- [25] Ehrlich, D., Armero, F. (2005.), *Finite element methods for the analysis of softening plastic hinges in beams and frames*, *Computational Mechanics*, 35, 237-264.
- [26] Eligehausen, R., Popov, E.P., Bertero, V.V. (1983.), *Local bond stress-slip relationship of deformed bars under generalized excitations*, Report No. UCB/EERC 83-23, University of California, Berkely.
- [27] EN 1992-1-1, Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings. CEN, Brussels, 2004.
- [28] Fantilli, P., Ferretti, D., Iori, I., Vallini, P. (1998.), *Flexural deformability of reinforced concrete beams*, *ASCE Journal of Structural Engineering*, 124(9), 1041-1049.
- [29] Feenstra, P.H., de Borst, R., Rots, J.G. (1991.), *Numerical study on crack dilatancy. I: Models and stability analysis*, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 117(4), 733-753.
- [30] Feist, C., Hofstetter, G. (2006.), *An embedded strong discontinuity model for cracking of plain concrete*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 7115-7138.
- [31] FIB Bulletin 10, Bond of reinforcement in concrete, (2000.), State-of-art report, International Federation for Structural Concrete, Lausanne, Switzerland.
- [32] Gerstle, W.H., Xie, M. (1992.), *FEM modelling of fictitious crack propagation in concrete*, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 118(2), 416-434.
- [33] Gilbert, R.I., Nejadi, S. (2004.), *An experimental study of flexural cracking in reinforced concrete members under short term loads*, UNICIV Report No. R-434.
- [34] Goto, Y. (1971.), *Cracks formed in concrete around deformed tension bars*, *ACI Journal*, 68, 244-251.
- [35] Hillerborg, A., Modeer, M., Petersson, P.-E. (1976.), *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*, *Cement and Concrete Research*, 6, 773-782.

- [36] Ingraffea, A.R., Saouma, V. (1985.), *Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete*, in Sih, G., DiTommaso, A.: *Fracture mechanics of concrete: Structural application and numerical calculation*, Martinus Nijhoff, Hingham, 171-225.
- [37] Jelenić, G., Papa, E. (2011.), *Exact solution of 3D Timoshenko beam problem using linked interpolation of arbitrary order*, *Archive of Applied Mechanics*, 81, 171-183.
- [38] Jirasek, M. (2000.), *Comparative study on finite elements with embedded discontinuities*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188, 307-330.
- [39] Jirasek, M., Zimmermann, T. (2001.), *Embedded crack model: I. Basic formulation*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 1269-1290.
- [40] Jirasek, M. (2007), *Nonlocal damage mechanics*, *Revue européenne de génie civil – Damage and Fracture in Geomaterials*, 11 (7-8), 993-1021.
- [41] Jukić, M., Brank, B., Ibrahimbegović, A. (2013.), *Embedded discontinuity finite element formulation for failure analysis of planar reinforced concrete beams and frames*, *Engineering Structures*, 50, 115-125.
- [42] Kim, J.K., Lee, T.G. (1992.), *Nonlinear analysis of reinforced concrete beams with softening*, *Computers and Structures*, 44(3), 567-573.
- [43] Kwak, H.G., Filippou, F.C. (1990.), *Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads, Report UCB/SEMM-90/14, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.*
- [44] Kwak, H.G., Kim S.P. (2002.), *Nonlinear analysis of RC beams based on moment-curvature relation*, *Computers and Structures*, 80, 615-628.
- [45] Lee, S.C., Cho, J.Y., Vecchio, F.J. (2011.), *Model for post-yield tension stiffening and rebar rupture in concrete members*, *Engineering Structures*, 33, 1723-1733.
- [46] Linder, C., Armero, F. (2007.), *Finite elements with embedded strong discontinuities for the modeling of failure in solids*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72, 1391-1433.
- [47] Manfredi, G., Pecce, M. (1998.), *A refined R.C. beam element including bond-slip relationship for the analysis of continuous beams*, *Computers and Structures*, 69, 53-62.
- [48] Marfia, S., Rinaldi, Z., Sacco, E. (2004.), *Softening behaviour of reinforced concrete beams under cyclic loading*, *International Journal of Solids and Structures*, 41, 3293-3316.
- [49] Mayer, U., Eligehausen, R. (1998.), *Bond behaviour of ribbed bars at inelastic steel strains*, u: 2<sup>nd</sup> Int. Ph.D. Symposium in Civil Engineering, Budapest, 1-8.
- [50] Mendes, L.A.M., Castro, L.M.S.S. (2013.), *A new RC bond model suitable for three-dimensional cyclic analyses*, *Computers and Structures*, 120, 47-64.
- [51] Mirza, S.M., Houde, J. (1979.), *Study of bond-stress slip relationships in reinforced concrete*, *ACI Journal*, 76, 19-46.
- [52] Moes, N., Dolbow, J., Belytschko, T. (1999.), *A finite element method for crack growth without remeshing*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, 131-150.
- [53] Moes, N. (2011.), *Crack models based on the extended finite element method*, u: Hofstetter, G., Meschke, G., *Numerical modelling of concrete cracking, CISM Courses and lectures vol. 532, SpringerWienNewYork*, 221-264.

- [54] Mosler, J., Meschke, G. (2003.), *3D modeling of strong discontinuities in elastoplastic solids: Fixed and rotating localization formulations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 57, 1553-1576.
- [55] Nilson, A.H. (1968.), *Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method*, ACI Journal, 65, 757-766.
- [56] Ngo, D., Scordelis, A.C. (1967.), *Finite element analysis of reinforced concrete beams*, ACI Journal, 64, 152-163.
- [57] Oliveira, R.S., Ramalho, M.A., Correa, M.R.S. (2008.), *A layered finite element for reinforced concrete beams with bond-slip effects*, Cement and Concrete Composites, 30, 245-252.
- [58] Oliver, J. (1996.), *Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39, 3601-3623.
- [59] Oliver, J., Huespe, A.E. (2004.), *Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193, 3195-3220.
- [60] Oliver, J., Huespe, A.E., Sanchez, P.J. (2006.), *A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195, 4732-4752.
- [61] Ožbolt, J., Bažant, Z.P. (1996.), *Numerical smeared fracture analysis: Nonlocal microcrack interaction approach*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39, 635-661.
- [62] Pijaudier-Cabot, G., Bažant, Z.P. (1987.), *Nonlocal damage theory*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, 113 (10), 1512-1533.
- [63] Planas, J., Elices, M., Guinea, G.V. (1993.), *Cohesive cracks versus nonlocal models: Closing the gap*, International Journal of Fracture, 63, 173-187.
- [64] Prasad, M.V.K.V., Krishnamoorthy, C.S. (2002.), *Computational model for discrete crack growth in plain and reinforced concrete*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191, 2699-2725.
- [65] Rashid, Y.R. (1968.), *Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels*, Nuclear Engineering and Design, 7, 334-344.
- [66] Reissner, E. (1972.), *On one-dimensional finite-strain beam theory; the plane problem*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 23(5), 795-804.
- [67] Ribarić, D., Jelenić, G. (2012.), *Higher-order linked interpolation in quadrilateral thick plate finite elements*, Finite Elements in Analysis and Design, 51, 67-80.
- [68] Rots, J.G. (1991.), *Smeared and discrete representations of localized fracture*, International Journal of Fracture, 51, 45-59.
- [69] Ruiz, M.F., Muttoni, A., Gambarova, P.G. (2007.), *Analytical modeling of pre- and postyield behaviour of bond in reinforced concrete*, ASCE Journal of Structural Engineering, 133(10), 1364-1372.
- [70] Shima, H., Chou, L.L., Okamura, H. (1987.), *Micro and macro models for bond in reinforced concrete*, Journal of the Faculty of Engineering, University of Tokyo, 39(2), 133-194.
- [71] Simo, J.C., Oliver, J., Armero, F. (1993.), *An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids*, Computational Mechanics, 12, 277-296.



- [72] Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1998.), *Computational Inelasticity*. Springer.
- [73] Sorić, J. (2004.), *Metoda konačnih elemenata*, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb.
- [74] Stramandinoli, R.S.B., La Rovere, H.L. (2008.), *An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members*, *Engineering Structures*, 30, 2069-2080.
- [75] Škec, L., Jelenić, G. (2013.), *Analysis of a geometrically exact multi-layer composite beam with a rigid interlayer connection*, *Acta Mechanica*, DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5
- [76] Wang, J. (2006.), *Cohesive zone model of intermediate crack-induced debonding of FRP-plated concrete beam*, *International Journal of Solids and Structures*, 43, 6630-6648.
- [77] Wells, G.N., Sluys, L.J. (2001.a), *Three-dimensional embedded discontinuity model for brittle fracture*, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 897-913.
- [78] Wells, G.N., Sluys, L.J. (2001.b), *A new method for modeling cohesive cracks using finite elements*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 2667-2682.
- [79] Wollrab, E., Kulkarni, S.M., Ouyang, C., Shah, S.P. (1996.), *Response of reinforced concrete panels under uniaxial tension*, *ACI Structural Journal*, 93, 648-657.
- [80] Wu, H.Q., Gilbert, R.I. (2009.), *Modeling short-term tension stiffening in reinforced concrete prisms using a continuum-based finite element model*, *Engineering Structures* 31, 2380-2391.
- [81] Yang, Z.J., Chen, J. (2005.), *Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams*, *Engineering Fracture Mechanics*, 72, 2280-2297.
- [82] Yankelevsky, D.Z., Jabareen, M., Abutbul, A.D. (2008.), *One-dimensional analysis of tension stiffening in reinforced concrete with discrete cracks*, *Engineering Structures* 30, 206-217.
- [83] Zanuy, C., Albajar, L., de la Fuente, P. (2009.), *On the cracking behaviour of the reinforced concrete tension chord under repeated loading*, *Materials and Structures*, 43, 611-632.
- [84] Zanuy, C. (2010.), *Investigating the negative tension stiffening effect of reinforced concrete*, *Structural Engineering and Mechanics*, 34(2), 189-211.
- [85] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z. (2005.) *The finite element method: its basis and fundamentals*, Elsevier Butterworth Heinemann.

## 8 POPIS ILUSTRACIJA

### 8.1 Popis slika

Slika 2.1 Kinematski opis pukotine za slučaj jednodimenzionalnog problema (Jirasek, 2007.).....	6
Slika 3.1 Višeslojni gredni konačni element .....	9
Slika 3.2 Položaj sloja $l$ u početnom i deformiranom položaju.....	10
Slika 3.3 Položaj višeslojne grede u početnom i deformiranom položaju .....	11
Slika 3.4 Raspucavanje elementa pri prekoračenju vlačne čvrstoće .....	12
Slika 3.5 Diskontinuitet u polju pomaka sloja $\alpha$ .....	13
Slika 3.6 Prikaz diskontinuirane funkcije $k(X_1)$ .....	13
Slika 3.7 Definicija vanjskih sila .....	16
Slika 3.8 Pomak armaturnog sloja $r$ i okolnog betonskog sloja u $X_1$ .....	19
Slika 3.9 Objašnjenje ukupnog proklizavanja .....	20
Slika 3.10 Vlačni konačni element .....	35
Slika 3.11 Stupnjevi slobode vlačnog konačnog elementa za slučaj kada je broj čvorova jednak dva .....	36
Slika 3.12 Širina pukotine u sredini sloja $\alpha$ i kutevi pukotine za gredni element s $\alpha+2$ raspucala sloja.....	36
Slika 3.13 Stupnjevi slobode grednog konačnog elementa za slučaj kada je broj čvorova jednak dva .....	38
Slika 3.14 Raspodjela naprezanja na mjestu pukotine .....	39
Slika 3.15 Bilinearni zakon oštećenja .....	39
Slika 4.1 Konstitutivni zakon za beton.....	42
Slika 4.2 Bilinearni konstitutivni zakon za armaturni čelik.....	43
Slika 4.3 Konstitutivni zakon naprezanja prijanjanja u ovisnosti o proklizavanju armature .....	44
Slika 4.4 Ugradnja rasterećenja .....	46
Slika 4.5 Reološki model elastoplastičnog materijala s izotropnim očvršćenjem (Bonet i Wood, 2008.).....	46
Slika 4.6 Model bilinearnog elastoplastičnog materijala s izotropnim očvršćenjem.....	47
Slika 4.7 Dva moguća slučaja (Simo i Hughes, 1998.).....	49
Slika 4.8 Dva različita slučaja opterećenja/rasterećenja kod betona .....	50
Slika 4.9 Ugradnja rasterećenja .....	51
Slika 5.1 Vlačni štap .....	52
Slika 5.2 Analitičko rješenje za proklizavanje i pomak vlačnog štapa (desna polovica).....	53
Slika 5.3 Relativna greška za proklizavanje i pomak na slobodnom rubu.....	54
Slika 5.4 Proces raspucavanja analiziranog vlačnog štapa .....	54
Slika 5.5 Sile raspucavanja ovisno o broju elemenata u mreži .....	56
Slika 5.6 Broj pukotina u ovisnosti o modulu prijanjanja $C_s$ .....	58
Slika 5.7 Vitoperenje poprečnog presjeka na desnom rubu štapa (dimenzije u mm).....	58
Slika 5.8 Profil lijeve strane pukotine (dimenzije u mm).....	59
Slika 5.9 Geometrijske karakteristike grede (Ngo i Scordelis, 1967.).....	60
Slika 5.10 Obrasci raspucavanja.....	61
Slika 5.11 Diskretizacija grede .....	61

Slika 5.12 Progib u sredini raspona grede .....	62
Slika 5.13 Naprezanja u armaturi (lijevo) i u betonu u 2.sloju (desno) za različite obrasce raspucavanja .....	63
Slika 5.14 Naprezanja prijanjanja za različite obrasce raspucavanja .....	64
Slika 5.15 Usporedba položaja pukotina za različite vlačne čvrstoće .....	65
Slika 5.16 Pojava pukotina za zadanu vlačnu čvrstoću od 2,25 MPa.....	66
Slika 5.17 Usporedba pukotina za različite vrijednosti modula prijanjanja $C_s$ .....	66
Slika 5.18 Proces nastajanja pukotina u analiziranom štapu (Yankelevsky i sur., 2008.) .....	68
Slika 5.19 Dijagram sila – produljenje armaturne šipke.....	68
Slika 5.20 Pomaci štapa pri opterećenju $F=21,949$ ; $F=21,950$ i $F=23,483$ kN.....	69
Slika 5.21 Dijagram širine pukotina ovisno o opterećenju $F$ .....	69
Slika 5.22 Usporedba širine pukotina – uvećani prikaz .....	70
Slika 5.23 Deformacije u betonu (lijevo) i armaturi (desno) .....	71
Slika 5.24 Proklizavanje u armaturi (lijevo) i naprezanja prijanjanja (desno) .....	72
Slika 5.25 Dijagram sila-produljenje armaturne šipke za različite početne nagibe $k_1$ .....	73
Slika 5.26 Usporedba širina pukotina za različite početne nagibe $k_1$ .....	74
Slika 5.27 Geometrijske karakteristike vlačnog štapa (Wollrab i sur., 1996.).....	75
Slika 5.28 Diskretizirani model vlačnog štapa.....	76
Slika 5.29 Srednje naprezanje u ovisnosti o srednjoj deformaciji.....	76
Slika 5.30 Promjena duljine ekstenzometra.....	77
Slika 5.31 Naprezanja u betonu .....	78
Slika 5.32 Naprezanja u armaturi.....	78
Slika 5.33 Proklizavanje armature .....	79
Slika 5.34 Naprezanja prijanjanja.....	79
Slika 5.35 Geometrijske karakteristike grede (Gilbert i Nejadi, 2008.) .....	80
Slika 5.36 Dijagram opterećenje – progib grede u sredini raspona.....	81
Slika 5.37 Deformacije u betonu u razini armature za opterećenje: 30 kN, 50 kN i 70 kN.....	82
Slika 5.38 Proces nastajanja i razvoja pukotina .....	83
Slika 5.39 Usporedba položaja i dubine pukotina za $F=70,0$ kN.....	83
Slika 5.40 Srednja širina pukotina u području srednje trećine grede.....	84
Slika 5.41 Najveća širina pukotina u području srednje trećine grede.....	84
Slika 5.42 Naprezanja u armaturi.....	86
Slika 5.43 Naprezanja u drugom sloju betona .....	86
Slika 5.44 Proklizavanje armature .....	87
Slika 5.45 Naprezanja prijanjanja .....	87
Slika 5.46 Dijagram sila-progib za mreže s 27, 51 i 75 elemenata .....	88
Slika 5.47 Usporedba pukotina za mreže s 27, 51 i 75 elemenata za opterećenje $F=70$ kN .....	88
Slika 5.48 Dijagram opterećenje – progib za različite početne nagibe $k_1$ .....	89
Slika 5.49 Usporedba pukotina za različite početne nagibe.....	89
Slika 5.50 Geometrijske karakteristike grede J4 (Burns i Siess, 1962.).....	90
Slika 5.51 Dijagram opterećenje – progib u sredini grede.....	91

Slika 5.52 Vertikalni pomaci uzduž grede za različite vrijednosti opterećenja.....	92
Slika 5.53 Horizontalni pomaci za različite vrijednosti opterećenja .....	92
Slika 5.54 Naprezanja u armaturi.....	93
Slika 5.55 Proces raspucavanja grede J4.....	93
Slika 5.56 Usporedba pukotina za dvije različite vrijednosti opterećenja .....	94

## 8.2 Popis tablica

Tablica 5.1 Materijalne karakteristike vlačnog štapa .....	52
Tablica 5.2 Proklizavanje i pomak u mm na slobodnom rubu.....	53
Tablica 5.3 Sile raspucavanja i širine pukotina u mm prema analitičkom modelu .....	55
Tablica 5.4 Položaj pukotina izražen preko duljine štapa $L$ u analiziranim mrežama i analitičkom rješenju .....	55
Tablica 5.5 Sile raspucavanja u kN za različite mreže .....	56
Tablica 5.6 Sile raspucavanja i širine pukotina u mm za mrežu s 9 elemenata različite duljine .....	57
Tablica 5.7 Sile raspucavanja i širine pukotina u mm za mrežu s 25 elemenata različite duljine .....	57
Tablica 5.8 Širine pukotina u mm za jednoliku mrežu s 127 elemenata.....	57
Tablica 5.9 Materijalne karakteristike grede (Ngo i Scordelis, 1967.).....	60
Tablica 5.10 Materijalne karakteristike za vlačni štap (Yankelevsky i sur., 2008.).....	67
Tablica 5.11 Materijalne karakteristike za vlačni štap .....	75
Tablica 5.12 Širine pukotina u mm.....	77
Tablica 5.13 Materijalne karakteristike grede .....	80
Tablica 5.14 Deformacije u betonu u % na gornjoj strani grede u sredini raspona .....	81
Tablica 5.15 Materijalne karakteristike grede J4 .....	90