

# Numeričko modeliranje optjecanja plovnog objekta

---

**Dejhalla, Roko**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**1999**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:188:861823>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-07**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka Library - SVKRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

NUMERIČKO MODELIRANJE OPTJECANJA  
PLOVNOG OBJEKTA

Doktorska disertacija

**Roko Dejhalla**

Mentor: Red. prof. dr. sc. Zoran Mrša, dipl.ing.



Rijeka, 1999.

Sveučilište u Rijeci  
TEHNIČKI FAKULTET  
- Fakultetsko vijeće -  
Klasa:602/04-96/97/98.-01/16  
Ur.br.:2170-57-43-98-06  
Rijeka, 27. travnja 1998.

Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na svojoj 16. sjednici u šk.god.1996./97./98., održanoj dana 24. travnja 1998. godine, donijelo je sljedeću

### ODLUKU

Imenuje se red.prof.dr.sc. Zoran Mrša,dipl.ing. za mentora (umjesto pok.red.prof.dr.sc. Alice Vučinić,dipl.ing.) pri izradi doktorske disertacije asis.mr.sc. Roka Dejhalla,dipl.ing., naslovljene: "Numeričko modeliranje optjecanja plovno objekta".

DEKAN

*Josip Brnić*  
Red.prof.dr.sc. Josip Brnić,dipl.ing.

Sveučilište u Rijeci  
TEHNIČKI FAKULTET  
Vukovarska 58, Rijeka 1

Dostaviti:

1. Red.prof.dr.sc. Zoran Mrša,dipl.ing.
2. Asis.mr.sc. Roko Dejhalla,dipl.ing.
3. Povjerenstvo za poslijediplomske studije  
i doktorate znanosti
4. Dosje (Evidencija studija)
5. Voditelj Opće i kadrovske službe
6. Arhiva F.V.


Sveučilište u Rijeci  
TEHNIČKI FAKULTET  
- Fakultetsko vijeće -  
Klasa: 602-04/96-01/19  
Ur.broj: 2170-57-43-96-5  
Rijeka, 30.04.1996.

Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na 19. sjednici održanoj 26.04.1996. donijelo je sljedeću

### ODLUKU

Prihvata se izvješće Stručnog povjerenstva u sastavu: prof.dr.sc. Alice Vučinić, prof.dr.sc. Zoran Mrša i dr.sc. Antun Gamulin, viši znanstveni suradnik - Brodarski institut Zagreb, te se utvrđuje da pristupnik **mr.sc. Roko Dejhalla, dipl.ing.** ispunjava zakonom propisane uvjete te da može pristupiti izvan doktorskog studija izradbi i obrani doktorske disertacije, pod naslovom: **"NUMERIČKO MODELIRANJE OPTJECANJA PLOVNOG OBJEKTA"**.

Pristupniku se za mentora određuje prof.dr.sc. Alice Vučinić.

Dekan:  
  
Izv.prof.dr.sc. Josip Brnić, dipl.ing.



Dostaviti:

- 1.) Pristupniku
- 2.) Mentoru
- 3.) Članovima Stručnog povjerenstva
- 4.) Povjerenstvo za poslijediplomske studije i doktorate znanosti
- 5.) Dosje (Evidencija studija)
- 6.) Voditelj Opće i kadrovske službe
- 7.) Arhiva F.V.



*Nobody believes the findings of a theoretical analysis except their autor,  
while everyone believes experimental results except the experimenter.*

(Anon, quoted by C.S. Smith 1988.)

## SAŽETAK

Prikazana je numerička metoda za rješavanje trodimenzionalnog potencijalnog optjecanja broda na mirnoj slobodnoj površini. Numerički se model temelji na metodi Rankineovih izvora. Oplakivana i slobodna površina aproksimiraju se ravninskim panelima, te se na oplakivanoj površini zadovoljava egzaktni rubni uvjet, a na slobodnoj površini linearizirani primjenom dvostrukog modela te Dawsonove sheme konačnih razlika. Sile na brod određuju se metodom integracije tlakova te primjenom Lagallijevega teorema na oplakivanoj i slobodnoj površini. Na temelju metode razvijen je računalni program te su dani numerički rezultati za Wigleyevu matematičku formu kao i forme iz Serije 60 sa  $C_B = 0.60, 0.70$  i  $0.80$ . Rezultati numeričkih proračuna pokazuju vrlo dobro podudaranje sa eksperimentalnim rezultatima. Numeričkom metodom može se vrlo uspješno određivati raspored tlakova i brzina po oplakivanoj površini broda, oblik nastalih valova te otpor valova što se može koristiti za određivanje hidrodinamičkih značajki forme. Metoda je primjenjena za optimiziranje forme broda sa stajališta minimalnog otpora valova. U postupku optimiziranja primjenjen je genetski algoritam. Kao osnovna forma izabrana je forma iz Serije 60 sa  $C_B = 0.60$ . Rezultati proračuna iz postupka optimiziranja pokazuju da izvedene forme imaju manji otpor valova od osnovne forme.

## ABSTRACT

The numerical method for solving the three-dimensional potential flow around a ship moving at constant speed in calm water is presented. The numerical method is based upon a Rankine source method. The hull and a part of the free surface are paneled, and the boundary conditions on the hull are exactly satisfied. The free surface condition is linearized using the double model solution and Dawson's finite difference scheme. The forces on the hull are computed by integration of pressure and Lagally forces over the hull and the free surface. A computer program has been developed and the numerical calculations for a Wigley hull and Series 60,  $C_B = 0.60, 0.70$  and  $0.80$  ships are included. The results of numerical calculations compared with experimental results show reasonably good agreement. The method is shown to be the most useful for prediction of pressure distribution and flow direction on the hull, calculation of wave pattern and wave resistance and for answering a variety of other design questions. This method is coupled with a hull optimization procedure based on minimizing the wave resistance. The optimization technique used in the computational procedure is referred to the genetic algorithm. The Series 60,  $C_B = 0.60$  has been selected as "mother-model" for developing the optimal forms. The results of optimization procedure indicate that the optimized hull forms yields a reduction in wave resistance.

## PREDGOVOR

Doktorska disertacija "Numeričko modeliranje optjecanja plovnog objekta" izrađena je sa ciljem da doprinese usvajanju i razvoju numeričkih metoda iz područja brodske hidrodinamike na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.

S posebnim sam pijetetom zahvalan prof.dr.sc. Alice Vučinić, pod čijim sam vođenjem započeo izradu ovog rada. Nažalost, tijekom izrade rada neumitna je sudbina prekinula našu višegodišnju suradnju.

Prof.dr.sc. Zoranu Mrši, koji se prihvatio mentorstva u situaciji kada je veliki dio rada već bio izrađen, izražavam posebnu zahvalnost za pomoć i korisne sugestije čime je rad nesumnjivo dobio na kvaliteti.

Veliku zahvalnost dugujem prof. Igoru Zottiu sa *Dipartimento di Ingegneria Navale, del Mare e per l'Ambiente, Università degli studi di Trieste* na nesebičnoj susretljivosti, usmjeravanju i posebno pomoći pri prikupljanju neophodne literature.

Za dragocjenu pomoć koju mi je pružila u primjeni genetskog algoritma najiskrenije se zahvaljujem Doc.dr.sc. Senki Vuković.

Zahvalan sam kolegama sa Zavoda za brodogradnju i inženjerstvo morske tehnologije na razumijevanju i potpori tijekom izrade rada, a osoblju knjižnice Tehničkog fakulteta na trudu koji su uložili oko pribavljanja pojedinih naslova.

Svima onima koji su na bilo koji način pokazali interes u vezi s izradom i završetkom ovog rada najljepše se zahvaljujem.

Rijeka, travanj, 1999.

*Autor*

## SADRŽAJ

	Str.
1. UVOD .....	1
1.1. Općenito .....	1
1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja .....	2
2. MATEMATIČKA POSTAVKA PROBLEMA .....	6
2.1. Osnovne jednadžbe problema .....	6
2.2. Rubni uvjeti .....	7
2.3. Linearizacija rubnog uvjeta na slobodnoj površini .....	9
2.4. Integralna formulacija problema .....	12
2.5. Određivanje vrijednosti tlakova te elevacija slobodne površine .....	15
3. NUMERIČKO RJEŠENJE HIDRODINAMIČKOG MODELA .....	16
3.1. Diskretizacija rubnih površina .....	16
3.2. Numerički rubni uvjet na oplakivanoj površini .....	18
3.3. Numerički rubni uvjet na slobodnoj površini .....	19
3.4. Određivanje vrijednosti derivacija primjenom metode konačnih razlika .....	21
3.5. Rješenje numeričkog modela .....	25
3.6. Određivanje vrijednosti brzina i tlakova te elevacija slobodne površine .....	26
4. ODREĐIVANJE HIDRODINAMIČKIH SILA I MOMENATA .....	28
4.1. Određivanje sila i momenata integracijom tlakova po oplakivanoj površini .....	28
4.2. Određivanje sila primjenom Lagallyjevog teorema .....	30
4.3. Određivanje otpora valova analizom valovite slobodne površine .....	32
5. RAČUNALNI PROGRAMI .....	33
5.1. Računalni program SGRID .....	33
5.2. Računalni program FSFLOW .....	36
5.3. Grafički prikaz rezultata .....	38
6. POTVRĐIVANJE VALJANOSTI NUMERIČKOG MODELA .....	40
6.1. Usporedba s <i>ITTC</i> eksperimentalnim rezultatima .....	40
6.1.1. Wigleyeva matematička forma .....	41
6.1.2. Serija 60, $C_B = 0.60$ .....	47
6.2. Eksperimenti u hidrodinamičkom laboratoriju Sveučilišta u Trstu .....	50
7. OPTIMIZIRANJE FORME BRODA PRIMJENOM GENETSKOG ALGORITMA .....	58
7.1. Optimiziranje forme broda .....	58
7.2. Genetski algoritam .....	58
7.2.1. Kodiranje varijabli u oblik umjetnog kromosoma .....	59
7.2.2. Prilagođenost jedinke .....	60
7.2.3. Operatori genetskog algoritma .....	63
7.2.3.1. Odabir roditelja .....	63
7.2.3.2. Križanje .....	63

7.2.3.3. Mutacija .....	64
7.3. Primjena genetskog algoritma za optimiziranje forme broda .....	65
8. REZULTATI OPTIMIZIRANJA FORME BRODA PRIMJENOM GENETSKOG ALGORITMA .....	66
8.1. Izbor osnovne forme broda .....	66
8.2. Mijenjanje oblika pramčane polovice .....	67
8.3. Mijenjanje oblika kompletne forme .....	72
8.4. Analiza dobivenih rezultata .....	77
9. ZAKLJUČAK .....	79
POPIS LITERATURE .....	82
POPIS OZNAKA I SIMBOLA .....	86
POPIS KRATICA .....	88
POPIS SLIKA .....	89
POPIS TABLICA .....	91
PRILOZI .....	92
Prilog 1. Elementarno rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe .....	93
Prilog 2. Određivanje brzine inducirane četverokutnim ravninskim izvorom .....	95
Prilog 3. Ravninski kubični <i>spline</i> .....	103
ŽIVOTOPIS .....	119



## 1. UVOD

### 1.1. Općenito

Izbor optimalne forme broda sa značajkama koje zadovoljavaju zadane zahtjeve za istisninom i brzinom, trajni je i središnji problem brodske hidrodinamike. Pri osnivanju broda od primarne je važnosti odrediti otpor za odabranu brodsku formu. U prvom je redu to potrebno kako bi se utvrdilo da li je odabrana forma optimalna s obzirom na otpor ili bi se nekim izmjenama forme otpor mogao smanjiti, a u drugom redu da bi se mogla odabrati potrebna snaga broskog pogonskog stroja i izraditi projekt vijka.

Otpor broda nastaje zbog vrlo složenih pojava koje se ne mogu jednostavno matematički definirati. Da bi se mogao praktično određivati, otpor broda se rastavlja na pojedine komponente koje se zatim mogu odrediti bilo eksperimentalno bilo matematički. Otpor koji tekućina pruža gibanju broda nastaje uslijed viskoznih svojstava tekućine i nastajanja valova na slobodnoj površini. Stoga se viskozni otpor uzima kao komponenta otpora broda nastala djelovanjem viskoznih sila, a otpor valova kao komponenta nastala djelovanjem sila inercije i gravitacije. Pretpostavlja se da su te dvije komponente jedna o drugoj neovisne i da se svaka od njih ravna po drugom zakonu. Ovakva podjela otpora je u stvari proizvoljna i nije potpuno egzaktna jer se pojedine komponente otpora međusobno isprepliću i jedna na drugu utječu, međutim današnja saznanja ne omogućavaju druga rješenja. S druge strane, ovakvo parcijalno određivanje i analiziranje komponenti otpora daje za praktične potrebe potpuno zadovoljavajuće rezultate te se na ovom načelu zasniva eksperimentalno određivanje otpora broda ispitivanjem modela. Rezultati dobiveni za model se zatim preračunavaju za brod u naravnoj veličini primjenom zakona sličnosti.

Razvojem snažnijih računala, u proteklom je desetljeću došlo do velikog napretka u njihovoj primjeni u brodogradnji. Brodska hidrodinamika jedno je od područja u kojem je razvoj računala i računalnih modela potaknuo velike promjene i pružio potpuno nove mogućnosti. Između ostalog su na institutima i sveučilištima razvijane različite metode za procjenu otpora broda na mirnoj vodi. Te se metode kreću u rasponu od prilično jednostavnih empirijskih do vrlo naprednih iz grupe računalne dinamike fluida (*Computational Fluid Dynamics*).

Premda će ispitivanje modela i u budućnosti zadržati primat pri određivanju otpora broda, računalna dinamika fluida posljednjih godina dobiva priznanje kao vrlo koristan alat [1] koji se uspješno može koristiti za određivanje hidrodinamičkih značajki u fazi preliminarnog osnivanja broda, kao i fazi razrade projekta. Primjena tih alata pruža snažnu podršku modelskim ispitivanjima, gdje se prethodnom numeričkom analizom strujanja oko forme može steći predodžba o značajkama forme. Takve se analize mogu obaviti lakše i jeftinije od tradicionalnog ispitivanja modela, budući da se numeričkim modelima dobiva više podataka o obliku strujanja. Međutim, aposolutna veličina izračunatog otpora nije još dovoljno točna za konačnu prognozu koja se ipak mora obaviti na temelju ispitivanja modela.

Pojave koje nastaju pri optjecanju broda nije jednostavno numerički modelirati, prvenstveno zbog postojanja slobodne površine po kojoj brod plovi, te zbog složene geometrije forme velike većine suvremenih plovnih objekata.

Slično kao kod ispitivanja modela broda gdje se komponente otpora promatraju odvojeno, i numeričke su se metode razvijale odvojeno vezano uz viskoznost tekućine te pojave nastajanja valova. Načelno postoje dvije skupine: u jednoj su skupini metode koje rješavaju strujanje

viskozne tekućine oko brodske forme, a u drugoj su skupini metode potencijalnog strujanja. Za razliku od viskoznih metoda, u modelima potencijalnog strujanja uobičajeno je uključena i slobodna površina.

Metode koje rješavaju strujanje viskozne tekućine oko brodske forme još uvijek se vrlo sporo prihvaćaju kao projektni alat. Međutim, metode koje obrađuju potencijalno strujanje danas se već rutinski koriste. Ove su se metode pokazale kao vrlo efikasne za određivanje oblika nastalih valova na slobodnoj površini, profila vala uzduž broda, oblika strujnica, brzina i tlakova u točkama proračunskog područja te konačno otpora valova.

Premda je mnogo poznato o optimalnim formama brodova, promjene tehničkih, posebno tehnoloških te tržišnih uvjeta dovode do potrebe za drugačijim tipovima brodova, koji osim ostalog moraju zadovoljiti i drugačije hidrodinamičke uvjete. Zbog toga se postavljaju sve veći zahtjevi pred projektantima kojima primjena sofisticiranih numeričkih metoda može dati odgovor na postavljena pitanja.

U ovom je radu prikazana numerička metoda za rješavanje trodimenzionalnog problema potencijalnog strujanja oko brodske forme. Praktični je proračun omogućen izrađenim računalnim programima.

## 1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja

Pojava nastajanja valova te otpor valova broda koji plovi na mirnoj vodi jedan je od najstarijih problema koji se kontinuirano istražuje u brodskoj hidrodinamici, s počecima još u prošlom stoljeću. Prvi koji je rastumačio pojavu nastajanja valova na slobodnoj površini 1887. godine bio je Lord Kelvin. On je istraživao pojave koje izaziva točka povišenog tlaka kretanjem po slobodnoj površini te je dao prikaz karakterističnog sustava valova. Rezultate svojih istraživanja Lord Kelvin je prikazao 1904. godine te je metoda postala poznata pod nazivom "Kelvinova metoda stacionarne faze". Kelvinov sustav valova rasvjetljava i objašnjava mnoge pojave nastajanja valova oko plovnih objekata.

Mehanizam nastajanja valova te pripadajućeg otpora valova dobro prikazuju eksperimenti koje je obavio Eggert [2]. Eggert je mjerio raspodjelu tlakova na oplakivanoj površini modela broda te je dokazao da se integracijom izmjerenih tlakova u uzdužnom smjeru može izračunati rezultirajući otpor. Ovi su eksperimenti između ostalog pokazali da velik utjecaj na otpor valova ima gornji dio forme broda koji je bliže vodnoj liniji.

Osim niza istraživanja temeljenih na eksperimentima, veliki se broj istraživača bavio razvojem teorijskih metoda za određivanje otpora valova te njihovoj eksperimentalnoj potvrdi.

Michell [3] je još 1898. godine razvio matematičku teoriju za rješavanje optjecanja broda koji napreduje slobodnom površinom. Michell je teoriju razvio za vitki brod male širine na koji jednoliko dostrujava tekućina. Primjenio je model potencijalnog strujanja, pomoću kojeg je mogao odrediti raspored brzina i tlakova po oplakivanoj površini, pa integracijom normalnih komponenti tlakova odrediti otpor valova. Međutim, Michell je pri tome usvojio određene pretpostavke. On je pretpostavio neviskoznu tekućinu i bezvrtložno strujanje. Pretpostavio je da je trup broda uzak u odnosu na duljinu tako da je nagib oplakivane površine u odnosu na simetralu vrlo mali. Nadalje, valove koje stvara brod pretpostavio je male visine u odnosu na duljinu tako da se kvadrati brzina čestica u valu mogu zanemariti u usporedbi s brzinom broda. Osim toga, nije uključio mogućnost promjene hidrodinamičkog trima ili urona broda. Da bi metoda bila pristupačna za matematičke metode, Michell je usvojio da se rubni uvjeti umjesto

na oplakivanoj površini mogu zadovoljiti u ravnini simetrale broda. Na taj se način rezultati mogu primjeniti za uski brod (*thin ship*). Za rubni uvjet na slobodnoj površini prihvatio je da se zadovolji na ravnoj slobodnoj površini, odnosno zanemario je valnu deformaciju slobodne površine. Pojedine od ovih pretpostavki i danas su polazno stajalište za mnoge moderne metode. Na temelju Michellovog rada razvijene su druge teorije [4,5] za određivanje otpora valova vitkog broda (*slender ship*). Nažalost, pionirski rad Michella bio je zanemaran cijeli niz godina budući da ograničenja modela nisu dopuštala neke veće praktične primjene. Usprkos tome, veći se broj znanstvenika konstantno bavio istraživanjima u tom području pa se mogu spomenuti Havelock i Wigley u Engleskoj, Weinblum u Njemačkoj, Hogner u Švedskoj, Lunde u Norveškoj te mnogi drugi [6].

Havelock [7,8] je razvio metodu koja se sastoji u određivanju oblika valovite slobodne površine na većoj udaljenosti iza krme broda. Otpor valova se tada može odrediti iz energije potrebne da se taj sustav valova održi. Pri tome se primjenjuje ideja kinematičkih izvora i ponora. Ova metoda predstavlja snažan alat za simulaciju strujanja oko tijela različitih oblika, na temelju kojeg se može odrediti oblik valova na slobodnoj površini, raspored tlakova te konačno otpor valova. Na primjer, uski brod se može simulirati rasporedom izvora po simetrali broda na pramčanom dijelu, te rasporedom ponora na krmenom dijelu. Ukupna suma izvora i ponora mora tada biti jednaka nuli. Ograničenje primjene na uski brod može se ukloniti kada se izvori i ponori raspoređuju na samu oplakivanu površinu. Havelock je na ovaj način uspio odrediti oblik valova daleko iza broda te iz potrebne energije izračunati otpor valova. Lunde [9] je primjenio Havelockovu metodu za određivanje otpora valova za vitke forme pri većim brzinama. Ideju o određivanju otpora valova iz oblika valova na slobodnoj površini na velikoj udaljenosti iza krme broda te pripadajuće energije mnogi su istraživači primjenili prilikom eksperimenata s modelima brodova. Rezultati ovakvih teorijskih istraživanja dragocijeni su u objašnjavanju pojava interferencije valova te njihovog utjecaja na otpor valova [10].

Veliki je broj istraživanja problema otpora valova obavljen za matematičke forme, kojih su rebra i vodne linije definirane matematičkim funkcijama. Za primjenu rezultata ovih istraživanja, stvarna se brodska forma morala na odgovarajući način aproksimirati matematičkim krivuljama. Slično tome, Guilloton [11] razmatra formu broda sastavljenu od većeg broja elementarnih klinova.

U Japanu je obavljen cijeli niz istraživanja u području otpora valova. Inui [12] je sa suradnicima razvio kombinaciju matematičko-eksperimentalne metode. Umjesto sa zadanim oblikom forme, Inui započinje s pretpostavljenom razdiobom izvora i ponora, u cilju dobivanja boljeg podudaranja izračunatog i izmjerenog valnog sustava. Otpor valova se zatim određuje prema metodi Havelocka. Ideja se sastoji u nalaženju razdiobe hidrodinamičkih singulariteta za odgovarajući oblik forme koja će imati povoljan otpor. Nakon obavljenog pokusa otpora te određivanja oblika nastalih valova na slobodnoj površini, oblik dobivene forme u središnjem se dijelu mijenjao radi dobivanja oblika koji više nalikuje brodskoj formi. Na ovaj je način Inui bio u mogućnosti kreirati forme sa značajno smanjenim otporom valova. Forme su u pravilu imale pramčani, a ponekad i krmeni bulb.

Rezultati mnogih ovakvih teorijskih istraživanja dali su značajan doprinos razvitku brodske hidrodinamike.

Premda kvantitativne prognoze otpora nisu zadovoljavajuće, Michellova se teorija može uspješno primjeniti za relativno vitke forme brodova koji plove pri većim brzinama gdje je komponenta valova dominantna. Međutim, za brodove punijih formi teorija uskog broda nije primjenjiva. Za brodove punijih formi koji plove pri manjim brzinama dominantan je viskozni otpor, a otpor valova je vrlo mali. Međutim, kada ti brodovi plove u uvjetima balasta, otpor



valova se povećava. Od sedamdesetih se godina intenzivnije radilo na poboljšanju postojećih i razvoju novih teorija uz primjenu za rješavanje konkretnih problema [13,14,15]. Između teorija višeg reda, značajan doprinos istraživanju problema optjecanja brodova i razvoju modela koji uključuju utjecaje slobodne površine dala je tzv. teorija sporog broda koju je izvorno predložio 1968. godine Ogilvie, a kasnije proširio Newman [16].

Tim zamašnim istraživačkim aktivnostima te dolaskom brzih računala većeg kapaciteta ostvaren je značajan napredak u području otpora valova. Razvijene su numeričke metode za izravno rješenje trodimenzionalnih problema. Pri tome su se vrlo efikasnim pokazale metode rubnih elementa (*Boundary Element Methods*). Jedna je od najvećih prednosti tih metoda da se za modele potencijalnog strujanja moraju diskretizirati samo rubne površine, a ne cijeli proračunski volumen kao za slučaj konačnih elemenata ili konačnih volumena.

U primjeni za probleme otpora valova plovnih objekata metode rubnih elemenata mogu se podijeliti u dvije skupine. U jednoj su skupini metode u kojima se primjenjuju izvori koji zadovoljavaju linearizirani Neumann-Kelvinov rubni uvjet na slobodnoj površini i za ove su metode razvijeni djelotvorni algoritmi [17,18,19,20]. Prednost je ovih metoda da se izvori moraju rasporediti samo po oplakivanoj površini broda, a nedostatak da su izrazi za izvore prilično složeni. U drugoj su skupini metode koje primjenjuju Rankineove izvore za koje su izrazi vrlo jednostavni. Međutim, u ovim se metodama zahtijeva da se izvori rasporede osim na oplakivanoj površini i na određenom dijelu slobodne površine budući da rubni uvjet na slobodnoj površini nije automatski zadovoljen. Time se broj nepoznanica u problemu znatno povećava. Metode Rankineovih izvora imale su za preteču metodu Gadda [21] i posebice Dawsona [22]. Dawsonova se metoda u nizu usporednih studija pokazala vrlo efikasnom te je u međuvremenu postala vrlo popularnom. Mnogi su istraživači razvijali metodu i predložili niz poboljšanja pa danas postoje različite realizacije od kojih se mogu navesti npr. Larsson [23], van den Berg [24], Raven [25,26,27,28], Daube [29], Jensen G. [30], Jensen P.S. [31,32], Delhommeau i Maissonneuve [33], Bruzzone [34,35,36], itd. Veliku su potporu razvoju ovih metoda pružila sustavna eksperimentalna ispitivanja [37]. Premda sve ove metode koriste istu teorijsku formulaciju problema te poznatu osnovnu ideju za numeričko rješenje, određene razlike postoje u realizaciji ovih ideja. Metode se međusobno više ili manje razlikuju u nekim bitnim dijelovima među kojima je sigurno najvažnije da li je uključen nelinearni rubni uvjet na slobodnoj površini te kako je zadovoljen radijacijski uvjet neširenja valova ispred plovnog objekta. Ostale su razlike više marginalne, ali ne i manje važne za funkcioniranje metode, a sastoje se u izboru elemenata i mreže, uvjetima na rubovima, numeričkoj stabilnosti [38], itd. Metode su proširivane pa su dodane mogućnosti za primjenu na brodove s krmenim zrcalom [39], katamarane [40], SWATH brodove [41], jedrilice i brodove na zračnom jastuku [42].

Razvijeni modeli omogućavaju dobivanje niza podataka kao npr. vrijednosti tlakova i brzina, oblika formiranih valova, strujnica [43], na temelju kojih se mogu odrediti hidrodinamičke značajke forme. Eksperimentalno bi se ovi podaci mogli dobiti samo uz visoku cijenu. Time postaje dostupno određivanje hidrodinamičkih značajki plovnih objekata u vrlo kratkom vremenu uz niske troškove u preliminarnoj fazi osnivanja plovnog objekta. Metode se vrlo uspješno koriste za optimiziranje pramčanog dijela forme [44], posebice oblika pramčanog bulba [45,46], položaja otvora pramčanog porivnog sustava [47], itd.

Iz ovog se kratkog pregleda može vidjeti da je otpor valova problem za koji postoji stalna zainteresiranost i znanstvenika i inženjera. Teorijska i eksperimentalna, a u novije vrijeme i numerička istraživanja imala su veliki utjecaj na razvoj suvremenih formi plovnih objekata pa su danas zahvaljujući zajedničkim naporima projektantima na raspolaganju alati kojima mogu

na zadovoljavajući način dobiti odgovor na postavljena pitanja. Razvoj i projektiranje suvremenih formi plovnih objekata, koje imaju minimalni otpor valova i danas je predmet od velikog interesa, posebice za veće brzine pri kojima je komponenta otpora valova dominantna.

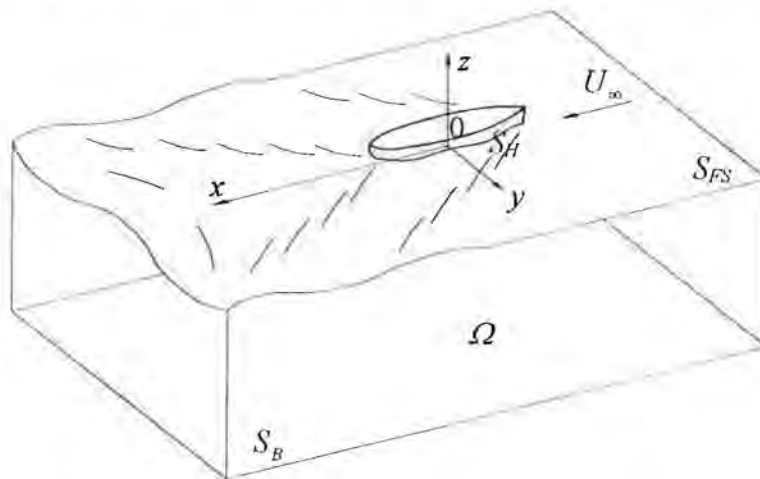
## 2. MATEMATIČKA POSTAVKA PROBLEMA

U radu se razmatra trodimenzionalni hidrodinamički problem optjecanja broda koji plovi mirnom slobodnom površinom tekućine te je potrebno odrediti značajke koje takvo optjecanje uzrokuje u tekućini. U pokušaju da se primjeni matematički aparat za rješenje problema, usvajaju se određena fizikalna i matematička pojednostvjenja.

### 2.1. Osnovne jednadžbe problema

Brod se promatra kao kruto tijelo koje se giba pravocrtno jednolikom brzinom  $\mathbf{U} = -U_\infty \mathbf{i}$  na mirnoj slobodnoj površini neograničene tekućine. Proračunsko područje tekućine  $\Omega$  s gornje je strane ograničeno slobodnom površinom  $S_{FS}$  te oplakivanom površinom broda  $S_H$ . Ostali je dio područja u općenitom slučaju neograničen. Međutim, za slučajeve kada je plovidbeni put ograničene širine ili dubine, proračunsko je područje  $\Omega$  dodatno ograničeno rubnim površinama  $S_B$ . Ti slučajevi ovdje nisu razmatrani.

Ishodište pravokutnog koordinatnog sustava  $(0, x, y, z)$  smješteno je na glavnom rebru broda na neporemećenoj slobodnoj površini  $z = 0$ . Os  $x$  usmjerena je suprotno od smjera gibanja broda, os  $y$  je horizontalna, a os  $z$  usmjerena je vertikalno prema gore. Na sl. 2.1. prikazano je proračunsko područje i izabrani koordinatni sustav. Koordinatni je sustav vezan uz brod, te su na taj način sve promatrane veličine stacionarne. Pri postavljanju problema, brod se zaustavlja i pušta se da na njega nailazi paralelno strujanje iz beskonačnosti konstantnom brzinom  $\mathbf{U}_\infty = U_\infty \mathbf{i}$ . Pretpostavlja se da brod ne mijenja položaj uslijed optjecanja.



Sl. 2.1. Proračunsko područje i koordinatni sustav

Pri formulaciji problema uobičajeno se pretpostavlja bezvrtložno strujanje homogene, nestlačive i neviskozne tekućine. Utjecaj površinske napetosti se zanemaruje. Ove su pretpostavke potpuno opravdane s obzirom na prihvatljivu točnost rezultata za tehničku praksu. U tom slučaju postoji skalarni potencijal  $\phi(x, y, z)$ , čijim je negativnim gradijentom definirano vektorsko polje brzina takvog potencijalnog strujanja:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = -\text{grad } \phi, \quad (2.1)$$

s komponentama brzine:

$$V_x = -\partial_x \phi, \quad V_y = -\partial_y \phi, \quad V_z = -\partial_z \phi. \quad (2.2)$$

U cijelom području tekućine  $\Omega$  potencijal  $\phi$  mora zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta za stacionarno strujanje nestlačive tekućine  $\text{div } \mathbf{V} = 0$  koja se svodi na poznatu Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu:

$$\nabla^2 \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi = 0, \quad \text{za } (x, y, z) \in \Omega. \quad (2.3)$$

Također, mora zadovoljavati jednadžbu količine gibanja koja se zbog značajki tekućine i strujanja svodi na Bernoullijevu jednadžbu:

$$p - p_\infty = -\frac{1}{2} \rho (\nabla \phi \cdot \nabla \phi - U_\infty^2) - \rho g z, \quad \text{za } (x, y, z) \in \Omega. \quad (2.4)$$

Ovakvom formulacijom problema uobičajeno se prvo određuje potencijal  $\phi$  iz (2.3), a zatim tlak primjenom (2.4). Laplaceova jednadžba (2.3) je eliptička parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda, i ona je osnovna diferencijalna jednadžba potencijalnog strujanja. Za njeno rješenje zahtijevaju se rubni uvjeti na svim rubovima proračunskog područja  $\Omega$ .

## 2.2. Rubni uvjeti

Na oplakivanoj površini broda  $\Gamma(x, y, z) = \gamma(x, z) - y = 0$  mora se zadovoljiti kinematički rubni uvjet nepromočivosti stijenke. Budući da je tekućina pretpostavljena kao idealna, ne postoji normalna komponenta brzine čestica tekućine. Taj tzv. Neumannov rubni uvjet za potencijal dan je izrazom:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0, \quad \text{na } S_H, \quad (2.5)$$

odnosno:

$$\partial_y \phi - \partial_x \phi \partial_x \gamma - \partial_z \phi \partial_z \gamma = 0, \quad \text{za } y = \gamma(x, z), \quad (2.6)$$

gdje  $\mathbf{n} = \partial_x \Gamma \mathbf{i} + \partial_y \Gamma \mathbf{j} + \partial_z \Gamma \mathbf{k}$  predstavlja jedinični vektor normale na oplakivanu površinu. Za slučajeve kada je proračunsko područje  $\Omega$  dodatno ograničeno rubnim površinama  $S_B$ , tada je na tim površinama također potrebno uvesti rubni uvjet  $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0$ .

Slično kao na oplakivanoj površini, i na slobodnoj površini tekućine mora se zadovoljiti rubni uvjet nepromočivosti odnosno uvjet da ne postoji normalna komponenta brzine čestica tekućine relativno prema slobodnoj površini. Ako je slobodna površina definirana jednadžbom:

$$H(x, y, z) = h(x, y) - z = 0, \quad (2.7)$$

taj je kinematički rubni uvjet dan izrazom:

$$\nabla\phi \cdot \nabla H = 0, \quad \text{na } S_{FS}, \quad (2.8)$$

odnosno:

$$\partial_x\phi \partial_x h + \partial_y\phi \partial_y h - \partial_z\phi = 0, \quad \text{za } z = h(x, y). \quad (2.9)$$

Elevacije slobodne površine  $h(x, y)$  nisu unaprijed poznate pa se na slobodnoj površini uvodi i dinamički rubni uvjet koji izražava činjenicu da je tlak na slobodnoj površini konstantan. Taj se rubni uvjet dobiva iz Bernoullijeve jednadžbe (2.4) u obliku:

$$gh + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi = \frac{1}{2} U_\infty^2, \quad \text{na } z = h(x, y). \quad (2.10)$$

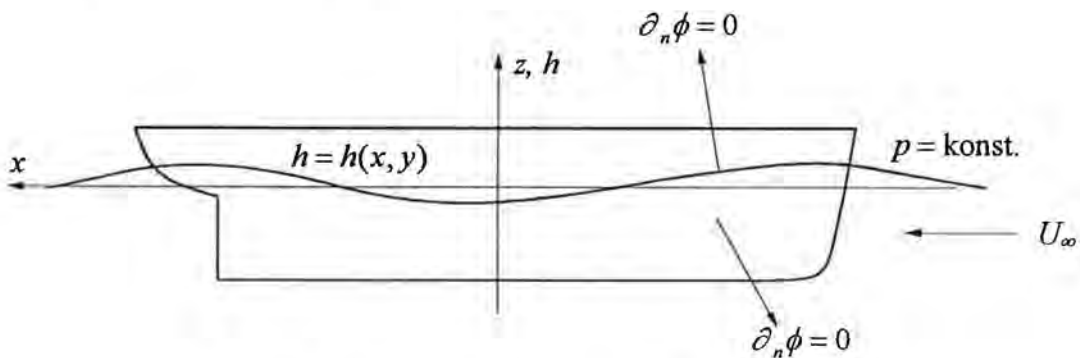
odnosno:

$$gh + \frac{1}{2} (\partial_x\phi^2 + \partial_y\phi^2 + \partial_z\phi^2 - U_\infty^2) = 0. \quad (2.11)$$

Na velikoj udaljenosti od broda utjecaj optjecanja nestaje i ostaje samo paralelno strujanje tekućine:

$$\lim_{x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty} \nabla\phi = U_\infty \mathbf{i}. \quad (2.12)$$

Rubni su uvjeti prikazani na sl. 2.2.



Sl. 2.2. Rubni uvjeti za potencijalno strujanje

Osim navedenih rubnih uvjeta, potrebno je zadovoljiti i tzv. radijacijski uvjet. Napredovanje broda izaziva širenje valnog poremećaja slobodne površine, pa se postavlja dodatni zahtjev da se taj valni poremećaj ne širi ispred pramca broda. Taj dodatni uvjet simbolički se može prikazati u obliku:



$$\phi = U_{\infty}x + \begin{cases} O(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{za } x < -\frac{L}{2}, \\ O(1), & \text{za } x \geq -\frac{L}{2}, \end{cases} \text{ kada } (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

Konačno, zahtijeva se da brzina ima konačnu vrijednost u  $\Omega$ .

### 2.3. Linearizacija rubnog uvjeta na slobodnoj površini

Problem optjecanja broda definiran izrazima (2.3)-(2.13) točan je u okviru teorije potencijalnog strujanja. Problem privlači matematičare i hidrodinamičare već cijelo stoljeće te su predlagane različite približne metode. Osnovni problem je nelinearnost dinamičkog rubnog uvjeta (2.10) te činjenica da se rubni uvjeti (2.8) i (2.10) moraju zadovoljiti na slobodnoj površini  $z = h(x, y)$  čiji oblik nije unaprijed poznat. Zbog toga se uobičajeno pristupa linearizaciji rubnog uvjeta na slobodnoj površini.

Da bi se problem linearizirao, potrebno je poznavati osnovno rješenje. Ako  $\Phi$  predstavlja osnovno rješenje potencijala brzine, a  $h^o$  osnovno rješenje elevacije slobodne površine, točno se rješenje potencijala i elevacije može napisati u obliku:

$$\phi = \Phi + \delta\phi, \quad (2.14)$$

$$h = h^o + \delta h, \quad (2.15)$$

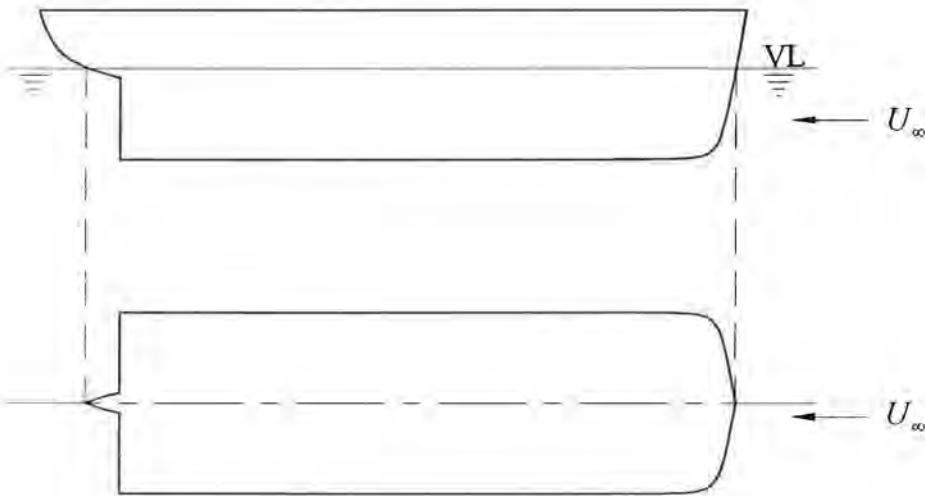
gdje  $\delta\phi$  i  $\delta h$  predstavljaju razliku između točnog i približnog rješenja. Pri tome se pretpostavlja da su  $\Phi$  i  $h^o$  reda veličine  $O(1)$ , a  $\delta\phi$  i  $\delta h$  reda veličine  $O(\varepsilon)$ . Linearizacijom se zanemaruju svi članovi reda  $O(\varepsilon^2)$ . Rješenje potpuno nelinearnog problema može se dobiti iterativnim rješavanjem lineariziranog problema, primjenom načela malih perturbacija. Pri tome se  $\Phi$  i  $h^o$  uzimaju iz prethodnog rješenja. Princip za elevaciju slobodne površine prikazan je na sl. 2.3. Rubni se uvjeti (2.8) i (2.10) na taj način uvode na slobodnu površinu  $z = h^o(x, y)$  čiji se oblik iterativno približava točnom rješenju. Rubni uvjet (2.5) uvodi se za  $z < h^o(x, y)$  na oplakivanu površinu čiji se oblik mora usklađivati prema obliku slobodne površine. Ako postupak konvergira, tada razlika rješenja između dvije iteracije teži nuli, te također i zanemareni nelinearni članovi od  $\delta\phi$  i  $\delta h$  teže nuli.



Sl. 2.3. Iterativno rješavanje elevacije slobodne površine

Rješenje nelinearnog problema uzastopnim rješavanjem lineariziranog problema vrlo se teško dobiva za općenite slučajeve. Osnovni problem je konvergencija numeričkog rješenja za uobičajene brzine i forme brodova, [28]. Mnogi istraživači [48] različitim metodama i dosjetkama pokušavaju poboljšati konvergenciju s većim ili manjim uspjehom, međutim pri tome se modeli neizbježno dodatno kompliciraju. Radi toga se u velikoj većini metoda problem ne rješava iterativno, već se približno rješenje dobiva pomoću lineariziranog modela.

Osnovni je problem koje rješenje uzeti za početno. U klasičnoj Michellovoj teoriji [3], koja predstavlja osnovu za mnoge radove u ovom području, za osnovno rješenje uzima se paralelno dostrujavanje tekućine  $\Phi = U_\infty x$ , a  $h^o = 0$ . U tom slučaju, da bi se linearizirani model mogao primjenjivati, svi poremećaji uslijed optjecanja broda moraju biti maleni. Međutim, takav pristup nije opravdan za brodove uobičajenih formi. Za te je slučajeve bolji pristup kada se prvo riješi optjecanje broda, pretpostavljajući da se ne pojavljuju valovi na slobodnoj površini. Takav se oblik rješenja može dobiti kada se na podvodni dio broda smješten ispod ravnine  $z = 0$ , zrcaljenjem s obzirom na ovu ravninu, nadoda isti takav dio u prostor iznad ravnine  $z = 0$ . Tada se dobiva tzv. dvostruki model, koji je simetričan s obzirom na ravninu plutanja broda i koji je smješten u neograničenoj tekućini, sl. 2.4. Kod optjecanja oko takvog dvostrukog modela, zbog spomenute simetrije, ravnina  $z = 0$  ponaša se kao kruta stijenka. Linearizaciju primjenom dvostrukog modela predložili su Gadd [21] i Dawson [22] sredinom sedamdesetih godina ovog stoljeća, neovisno jedan od drugog. Kod ovakvog pristupa, veći dio poremećaja zbog optjecanja broda uzima se u obzir već u osnovnom rješenju  $\Phi$ , dok mali poremećaji  $\delta\phi$  predstavljaju utjecaj valovite slobodne površine.



Sl. 2.4. Dvostruki model

Za određivanje osnovnog rješenja elevacija slobodne površine postoje dvije mogućnosti. Slijedeći Dawsonov pristup, kao osnovno rješenje može se uzeti nedeformirana slobodna površina, odnosno  $h^o = 0$ . Međutim, kao osnovno se rješenje također može uzeti i tzv. Bernoullijev val, koji se dobiva iz rješenja optjecanja dvostrukog modela:

$$h^o = \frac{1}{2g} (U_\infty^2 - \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) \quad (2.16)$$

Obje su mogućnosti analizirane, a budući da su dobivene razlike vrlo malene, kao osnovno rješenje za elevacije slobodne površine prihvaćen je Bernoullijev val. Međutim, rubni uvjet na slobodnoj površini zadovoljava se na nedefiniranoj površini  $z = 0$ .

Primjenom izraza (2.15), jednadžba slobodne površine (2.7) poprima oblik:

$$H(x, y, z) = h^o(x, y) + \delta h(x, y) - z = 0. \quad (2.17)$$

Izraz (2.8) se tada može napisati u obliku:

$$\nabla(\Phi + \delta\phi) \cdot \nabla(h^o + \delta h - z) = 0, \quad (2.18)$$

a izraz (2.10) u obliku:

$$g(h^o + \delta h) + \frac{1}{2} \nabla(\Phi + \delta\phi) \cdot \nabla(\Phi + \delta\phi) = \frac{1}{2} U_\infty^2 \quad (2.19)$$

Zanemarivanjem nelinearnih članova od  $\delta\phi$  i  $\delta h$  te sređivanjem gornjih jednadžbi, uz činjenicu da je  $\partial_z \Phi = 0$  na  $z = 0$ , za slobodnu se površinu dobivaju linearizirani kinematički i dinamički rubni uvjeti u obliku:

$$\nabla\Phi \cdot \nabla h^o + \nabla\Phi \cdot \nabla\delta h + \nabla\delta\phi \cdot \nabla h^o - \partial_z \delta\phi = 0, \quad (2.20)$$

$$g\delta h + \nabla\Phi \cdot \nabla\delta\phi = 0. \quad (2.21)$$

Iz izraza (2.21) dobiva se:

$$\nabla\delta h = -\frac{1}{g} \nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\delta\phi), \quad (2.22)$$

što uvršteno u (2.20) daje:

$$\nabla\Phi \cdot \nabla h^o - \frac{1}{g} \nabla\Phi \cdot \nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\delta\phi) + \nabla\delta\phi \cdot \nabla h^o - \partial_z \delta\phi = 0 \quad (2.23)$$

Uvrsti li se  $\delta\phi = \phi - \Phi$  u (2.23) dobiva se:

$$\nabla\Phi \cdot \nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\phi) - g\nabla\phi \cdot \nabla h^o + g\partial_z \phi = \nabla\Phi \cdot \nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi). \quad (2.24)$$

Potencijal brzine  $\phi$  konačno se može izraziti kao suma potencijala paralelnog strujanja koje nailazi iz beskonačnosti i perturbacijskog potencijala  $\phi'$  koji nastaje uslijed optjecanja broda:

$$\phi = U_\infty x + \phi'. \quad (2.25)$$

Iz (2.25) slijedi:



$$\nabla\phi = U_{\infty}\mathbf{i} + \nabla\phi' \quad (2.26)$$

Uvrštavanjem (2.26) u (2.24), nakon sređivanja konačno se dobiva izraz:

$$\nabla\Phi \cdot \nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\phi') - g\nabla\phi' \cdot \nabla h^o + g\partial_z\phi' = \nabla\Phi \cdot \nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi - U_{\infty}\partial_x\Phi) + gU_{\infty}\partial_x h^o, \quad (2.27)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi &= \partial_x\Phi \mathbf{i} + \partial_y\Phi \mathbf{j}, \\ \nabla\phi' &= \partial_x\phi' \mathbf{i} + \partial_y\phi' \mathbf{j} + \partial_z\phi' \mathbf{k}, \\ \nabla h^o &= \partial_x h^o \mathbf{i} + \partial_y h^o \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Uvrštavanjem (2.16) u (2.27), u izrazu (2.27) eliminiraju se članovi povezani s elevacijama slobodne površine te se nakon sređivanja dobiva rubni uvjet na slobodnoj površini u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} \partial_x\phi'(a+c) + \partial_y\phi'(b+d) + (\partial_x\Phi)^2\partial_{xx}\phi' + (\partial_y\Phi)^2\partial_{yy}\phi' + \partial_x\Phi\partial_y\Phi(\partial_{yx}\phi' + \partial_{xy}\phi') + \\ + g\partial_z\phi' = 2\partial_x\Phi(c - U_{\infty}\partial_{xx}\Phi) + \partial_y\Phi[2d - U_{\infty}(\partial_{xy}\Phi + \partial_{yx}\Phi)], \end{aligned} \quad (2.29)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} a &= \partial_x\Phi\partial_{xx}\Phi + \partial_y\Phi\partial_{xy}\Phi, \\ b &= \partial_x\Phi\partial_{yx}\Phi + \partial_y\Phi\partial_{yy}\Phi, \\ c &= \partial_x\Phi\partial_{xx}\Phi + \partial_y\Phi\partial_{yx}\Phi, \\ d &= \partial_x\Phi\partial_{xy}\Phi + \partial_y\Phi\partial_{yy}\Phi. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Izraz (2.27) odnosno (2.29) predstavlja linerizirani rubni uvjet na slobodnoj površini  $z=0$ , koji se zajedno s (2.5), (2.12) i (2.13) mora zadovoljiti da bi se dobilo rješenje Laplaceove jednadžba i odredila vrijednost potencijala  $\phi'$ .

#### 2.4. Integralna formulacija problema

Rješenje problema potencijalnog strujanja oko broda sa slobodnom površinom može se dobiti različitim metodama. Za rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe s odgovarajućim rubnim uvjetima mogu se u načelu koristiti npr. metoda konačnih razlika, konačnih elemenata ili konačnih volumena. Međutim, veliki broj varijabli koje se pojavljuju kod tih metoda, te potreba da se proračunska mreža prilagođava obliku slobodne površine, sugerira da ove metode nisu optimalan izbor za rješavanje potencijalnog modela optjecanja broda sa slobodnom površinom. Kao mnogo efikasnije pokazale su se metode u kojima se problem svodi na integralnu jednadžbu po rubnim površinama. Jedan od načina je da se primjenom Greenova teorema [49]:

$$\iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) d\Omega = \iint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS, \quad (2.31)$$

traženje rješenja u proračunskom području  $\Omega$  svede na traženje rješenja na rubu  $S$ . Osim ovakve izravne primjene Greenovog teorema na potencijal  $\phi'$ , može se primijeniti indirektni pristup u kojem se potencijal  $\phi'$  definira odgovarajućom kontinuiranom razdiobom Greenovih funkcija po rubnim površinama  $S_H$  i  $S_{FS}$ .

$$\phi' = \iint_{S_H \cup S_{FS}} G(P, Q) \sigma(Q) dS, \quad (2.32)$$

gdje  $P$  predstavlja proizvoljnu točku u  $\Omega$ , a  $Q$  točku na rubnoj površini. Točke  $P$  na površini  $S_H$  ili  $S_{FS}$  označene su kao  $P'$ .  $G(P, Q)$  je Greenova funkcija koja zadovoljava Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu te eventualno neki od rubnih uvjeta.  $\sigma(Q)$  je nepoznati intenzitet Greenove funkcije koji se određuje iz rubnih uvjeta. Greenova se funkcija može izabrati na način da integral na određenom dijelu ruba nestane. Očiti je razlog za to smanjenje broja nepoznanica, no u tom je slučaju Greenova funkcija složenijeg oblika te je njezino određivanje teže. Najjednostavniji izbor za Greenovu funkciju je funkcija:

$$G(P, Q) = \frac{1}{r(P, Q)}, \quad (2.33)$$

gdje je

$$r(P, Q) = \left[ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.34)$$

udaljenost između točaka  $Q(x', y', z')$  i  $P(x, y, z)$ . Greenova funkcija ovog oblika je tzv. potencijal Rankineova izvora i predstavlja potencijal brzine koji u točki  $P$  inducira jedinični izvor koji se nalazi u točki  $Q$ . Funkcija (2.33) predstavlja elementarno rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe, prilog I.

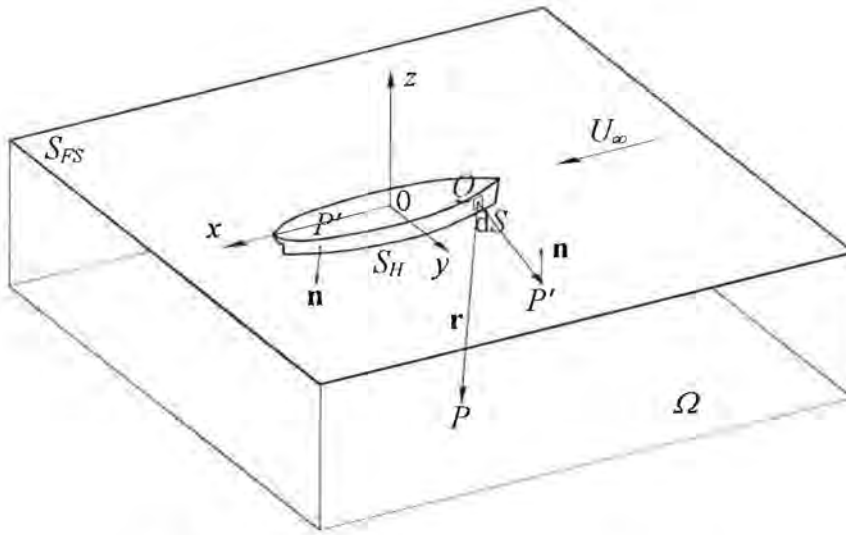
Na taj se način hidrodinamički model zasniva na kontinuiranoj površinskoj razdiobi izvora oblika (2.33) po rubnim površinama koje čine  $S_H$  i  $S_{FS}$ , sl. 2.5. Vrijednost integrala određuje se integriranjem po  $S_H$  i  $S_{FS}$ , za svaku točku površine.

Potencijal brzine u  $P$  koji induciraju izvori na rubnim površinama izvora iznosi:

$$\phi'(P) = \iint_{S_H \cup S_{FS}} \frac{\sigma(Q)}{r(P, Q)} dS, \quad (2.35)$$

a brzina:

$$\nabla \phi'(P) = \iint_{S_H \cup S_{FS}} \nabla \left( \frac{\sigma(Q)}{r(P, Q)} \right) dS \quad (2.36)$$



Sl. 2.5. Prikaz točaka na rubnim površinama

Potencijal brzine (2.35) automatski zadovoljava Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu (2.3) za bilo koju funkciju  $\sigma(Q)$ , osim u točki  $P' = Q$ . Osim toga, potencijal zadovoljava i uvjet (2.12). Na taj se način intenziteti izvora  $\sigma(Q)$  moraju odrediti samo iz rubnih uvjeta (2.5) i (2.27), te je zbog toga potrebno imati razdiobu izvora na oplakivanoj kao i na slobodnoj površini. Premda funkcija brzine (2.36) ima prekid u  $P' = Q$ , granična vrijednost postoji te se pokazuje da u tom slučaju normalna brzina koju inducira izvor iznosi [50]:

$$\partial_n \phi'(P') = -2\pi\sigma(P'). \quad (2.37)$$

Uvrsti li se (2.36) i (2.37) u (2.5) i (2.27), dobiva se rubni uvjet za točke  $P'$  na oplakivanoj površini broda:

$$-2\pi\sigma(P') + \iint_{S_H \cup S_{FS} \setminus P'} \nabla \left( \frac{\sigma(Q)}{r(P', Q)} \right) \cdot \mathbf{n} dS = -U_\infty n_x(P'), \quad \forall Q \in S_H, \quad (2.38)$$

te rubni uvjet za točke  $P'$  na slobodnoj površini tekućine:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_H \cup S_{FS}} \left\{ \nabla \Phi \cdot \nabla \left[ \nabla \Phi \cdot \nabla \left( \frac{\sigma(Q)}{r(P', Q)} \right) \right] - g \nabla \left( \frac{\sigma(Q)}{r(P', Q)} \right) \cdot \nabla h^o \right\} dS - 2\pi g \sigma(P') n_z(P') = \\ & = \nabla \Phi \cdot \nabla (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - U_\infty \partial_x \Phi) + g U_\infty \partial_x h^o, \quad \forall Q \in S_{FS} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Osim ovih rubnih uvjeta, potrebno je na odgovarajući način zadovoljiti i radijacijski uvjet neširenja valnog poremećaja ispred pramca broda. Realna je činjenica da pri plovidbi broda po mirnoj vodi ne nastaju valovi ispred pramca. Međutim, kod primjene modela potencijalnog strujanja mogućnost formiranja valova ispred pramca postoji. Jednom formirani, valovi mogu

ustrajati budući da ne postoji mehanizam prigušenja. Radijacijski se uvjet u modelu zadovoljava numerički, primjenom metode konačnih razlika u kombinaciji s odgovarajućim uvjetima na rubnim dijelovima slobodne površine.

## 2.5. Određivanje vrijednosti tlakova te elevacija slobodne površine

Rješenjem hidrodinamičkog modela, odnosno određivanjem vrijednosti brzina  $\nabla\phi$ , mogu se iz Bernoullijeve jednadžbe (2.4) odrediti vrijednosti tlakova. Vrijednosti tlakova najpogodnije se prikazuju u obliku bezdimenzionalnog koeficijenta tlaka, dobivenog iz Bernoullijeve jednadžbe (2.4) dijeljenjem sa  $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - \left( \frac{|\nabla\phi|}{U_\infty} \right)^2. \quad (2.40)$$

Linearizirani izraz za koeficijent tlaka ima oblik:

$$C_p = 1 - \frac{1}{U_\infty^2} \left[ (\partial_x\Phi)^2 + (\partial_y\Phi)^2 + (\partial_z\Phi)^2 + 2(\partial_x\Phi \partial_x\delta\phi + \partial_y\Phi \partial_y\delta\phi + \partial_z\Phi \partial_z\delta\phi) \right]. \quad (2.41)$$

Elevacije slobodne površine dobivaju se iz lineariziranog dinamičkog rubnog uvjeta (2.11):

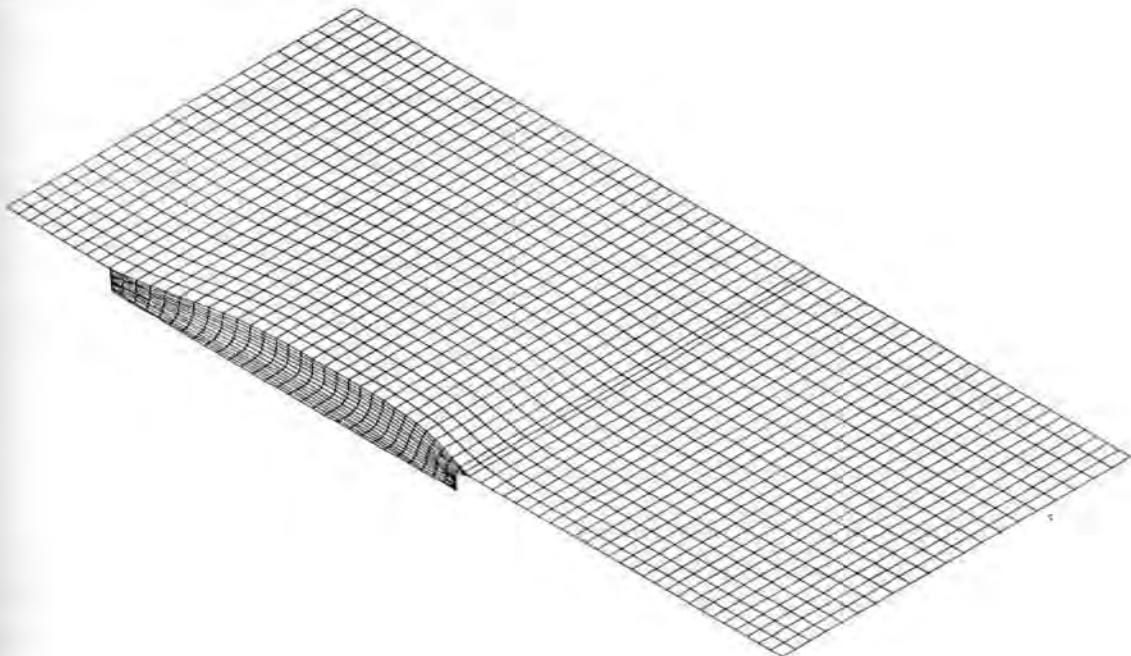
$$h = \frac{1}{2g} \left\{ U_\infty^2 - \left[ (\partial_x\Phi)^2 + (\partial_y\Phi)^2 + 2(\partial_x\Phi \partial_x\delta\phi + \partial_y\Phi \partial_y\delta\phi) \right] \right\}. \quad (2.42)$$

### 3. NUMERIČKO RJEŠENJE HIDRODINAMIČKOG MODELA

Rješenje optjecanja broda može se dobiti pomoću matematičko-hidrodinamičkog modela određenog strujanja oko sustava izvora koji miruje i na koji nailazi paralelno strujanje tekućine brzinom  $U_\infty$ . Sada je potrebno riješiti transformaciju tog modela u numerički model pogodan za programiranje za rad na računalu.

#### 3.1. Diskretizacija rubnih površina

Za realni problem, područje tekućine je stvarno neograničeno u odnosu na dimenzije broda. Međutim, za numerički se proračun proračunsko područje mora uzeti konačne veličine. Numeričko rješenje započinje diskretizacijom rubnih površina. Oplakivana površina dvostrukog modela  $S_H$  i slobodna površina  $S_{FS}$  definirane su točkama koje se nalaze na tim površinama. Točke se povezuju u grupe po tri ili četiri, čime se formiraju trokutni ili četverokutni elementi - paneli. Za diskretizaciju površina prihvaćeni su četverokutni paneli. Za najveći dio površine, svaka točka sudjeluje u formiranju četiri panela, te je broj panela približno jednak broju točaka koje definiraju površine.  $N_H$  je broj panela kojima se diskretizira oplakivana površina, a  $N_{FS}$  je broj panela kojima se diskretizira slobodna površina. Ukupan broj panela tada iznosi  $N_T = N_H + N_{FS}$ . Primjer diskretizacije površina panelima prikazan je na sl. 3.1.



Sl. 3.1. Diskretizacija rubnih površina panelima

Paneli mogu biti zakrivljeni ili ravninski. U metodama prvog reda rabe se ravninski paneli s konstantnim intenzitetom izvora na panelu, dok u metodama višeg reda paneli mogu biti

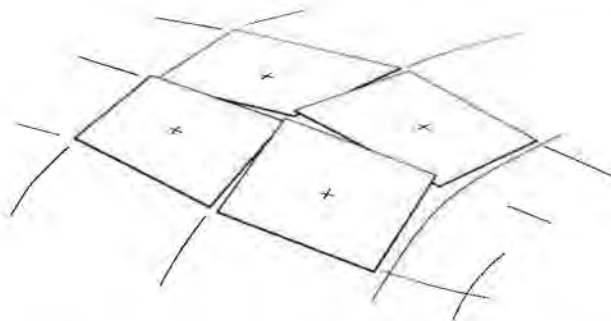


zakrivljeni s promjenljivim intenzitetom izvora po panelu [51]. Prednost metoda višeg reda je ta da je za istu točnost potreban manji broj panela, ali su izrazi tada složeniji te se povećava vrijeme potrebno za proračun. U ovom su radu izabrani ravninski paneli s konstantnim intenzitetom izvora po panelu.

Četiri točke koje definiraju vrhove panela na oplakivanoj površini u općenitom slučaju ne leže u istoj ravnini. Međutim, budući da su primjenjeni ravninski paneli, potrebno je odrediti vrhove panela u istoj ravnini. Radi toga se prvo formiraju dva dijagonalna vektora koji spajaju nasuprotne vrhove panela. Vektorski produkt ovih dijagonalnih vektora daje vektor normale ravninskog panela. Redosljed točaka koje definiraju panel važan je kod vektorskog produkta radi dobivanja vanjskog vektora normale na oplakivanu površinu. Ravnina panela u potpunosti se određuje iz zahtjeva da prolazi kroz točku čije su koordinate srednja vrijednost koordinata polazne četiri točke koje leže na oplakivanoj površini. Te se četiri točke sada paralelno projiciraju u smjeru vektora normale u ravninu panela čime se dobivaju vrhovi ravninskog panela. Ovako definirana ravnina panela jednako je udaljena od sve četiri polazne točke iz kojih se formira panel. Dva vrha koji definiraju prvi dijagonalni vektor leže na jednoj strani ravnine, a druga dva na drugoj strani.

Na površini svakog panela određuje se jedna tzv. kolokacijska točka u kojoj se zadovoljava rubni uvjet. Kolokacijska točka panela određuje se iz uvjeta da u toj točki sam izvor ne inducira nikakve horizontalne komponente brzina u lokalnoj koordinatnoj ravnini u kojoj leži, već samo normalnu brzinu. Unutar površine panela postoji samo jedna točka s tim svojstvom, i ona se nalazi vrlo blizu težišta površine četverokutnog panela.

Osim kolokacijskom točkom, svaki je panel karakteriziran vektorom normale, te odgovarajućim geometrijskim veličinama kao što su površina, težište površine te momenti tromosti površine u odnosu na određenu os. Ovi se podaci koriste pri određivanju brzina koje induciraju izvori.



Sl. 3.2. Raspored ravninskih panela na oplakivanoj površini

Iz načina na koji se formiraju ravninski paneli jasno je da se u općenitom slučaju stranice susjednih panela ne podudaraju, sl. 3.2. Posebno je to izraženo kod diskretizacije dijelova oplakivane površine veće zakrivljenosti. Kod diskretizacije slobodne površine ti se problemi ne pojavljuju. Aproksimacijom zakrivljene oplakivane površine ravninskim panelima ne dobiva se potpuno zatvoreni polieder već postoji određena zračnost uzduž stranica panela. Ove zračnosti nisu od velikog utjecaja, budući da su pogreške zbog tih zračnosti višeg reda te su zanemarive u usporedbi s pogreškama koje nastaju zbog aproksimacije površine ravninskim panelima [52]. Potrebno je samo paziti da zračnosti između panela, odnosno udaljenosti između vrhova zakrivljenog i ravninskog panela budu male u odnosu na dimenzije panela. To se može postići na način da se površine veće zakrivljenosti aproksimiraju većim brojem manjih panela.

### 3.2. Numerički rubni uvjet na oplakivanoj površini

Budući da intenzitet izvora ima konstantnu vrijednost na panelu, potencijal brzine koji u  $i$ -toj kolokacijskoj točki inducira izvor intenziteta  $\sigma_j$  smješten na  $j$ -tom panelu iznosi:

$$\phi_i' = \sigma_j \iint_{A_j} \frac{1}{r_{i,j}} dA, \quad (3.1)$$

gdje je  $r_{i,j}$  udaljenost između kolokacijske točke  $i$ -tog panela i težišta  $j$ -tog panela, a  $A_j$  površina panela. Potencijal brzine koji u  $i$ -toj kolokacijskoj točki induciraju svi izvori iznosi:

$$\phi_i' = \sum_{j=1}^{N_T} \sigma_j \iint_{A_j} \frac{1}{r_{i,j}} dA. \quad (3.2)$$

Međutim, od izravnog je značaja brzina tekućine, a ne potencijal brzine. Brzina koju u  $i$ -toj kolokacijskoj točki induciraju izvori na panelima dvostrukog modela i slobodne površine dobiva se iz:

$$\nabla \phi_i' = -2\pi \sigma_i \mathbf{n}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_T} \sigma_j \iint_{A_j} \nabla \left( \frac{1}{r_{i,j}} \right) dA, \quad (3.3)$$

Vektor  $\mathbf{n}_i = n_{x_i} \mathbf{i} + n_{y_i} \mathbf{j} + n_{z_i} \mathbf{k}$  predstavlja normalu  $i$ -tog panela. Integral

$$\iint_{A_j} \nabla \left( \frac{1}{r_{i,j}} \right) dA = X_{i,j} \mathbf{i} + Y_{i,j} \mathbf{j} + Z_{i,j} \mathbf{k}, \quad (3.4)$$

predstavlja brzinu tekućine s komponentama  $(X_{i,j}, Y_{i,j}, Z_{i,j})$  koju u kolokacijskoj točki  $i$ -tog panela inducira jedinični izvor smješten na  $j$ -tom panelu. Inducirana brzina (3.4) funkcija je geometrijskih veličina panela i udaljenosti između težišta panela i kolokacijske točke. Komponente brzine (3.4) određuju se prema analitičkim izrazima koje su razvili Hess i Smith [52,53]. Metoda je detaljno prikazana u prilogu 2.

Komponente brzine tekućine u kolokacijskoj točki  $i$ -tog panela dobivaju se sumiranjem brzine paralelnog strujanja i brzina koje induciraju svi izvori u obliku:

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_i' &= -2\pi \sigma_i n_{x_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_T} X_{i,j} \sigma_j + U_\infty, \\ \partial_y \phi_i' &= -2\pi \sigma_i n_{y_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_T} Y_{i,j} \sigma_j, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\partial_z \phi_i = -2\pi \sigma_i n_{z_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_T} Z_{i,j} \sigma_j$$

Uvrštavanjem izraza (3.5) u rubni uvjet (2.5) dobiva se:

$$-2\pi \sigma_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_T} (X_{i,j} n_{x_i} + Y_{i,j} n_{y_i} + Z_{i,j} n_{z_i}) \sigma_j = -U_\infty n_{x_i}, \quad \text{za } i = 1, \dots, N_H. \quad (3.6)$$

Izraz (3.6) predstavlja numerički rubni uvjet koji je potrebno zadovoljiti u svim kolokacijskim točkama oplakivane površine dvostrukog modela.

### 3.3. Numerički rubni uvjet na slobodnoj površini

Rubni uvjet na slobodnoj površini složeniji je od rubnog uvjeta na oplakivanoj površini. Za rubni uvjet na slobodnoj površini (2.29) zahtijeva se određivanje drugih derivacija potencijala, tj. prvih derivacija brzina. Derivacije se mogu odrediti analitički ili numerički. Izrazi za analitičko određivanje derivacija mogu se za ravninske panele izvesti prilično jednostavno. Međutim, u metodama gdje se primjenjuju ti izrazi pojavljuje se problem radijacijskog uvjeta (2.13) koji se mora zadovoljiti. Radi zadovoljenja toga uvjeta, primjenjuju se različiti postupci, kao npr. pomak kolokacijskih točaka za određenu vrijednost prema naprijed [30,54], ili postavljanje i uklanjanje određenih rubnih uvjeta na pojedinim rubnim panelima [31]. Međutim, u većini današnjih metoda usvojena je Dawsonova ideja numeričkog određivanja derivacija [22]. Dawson je primjenio metodu konačnih razlika, i to natražnu diferencijsku shemu u kojoj se derivacija funkcije određuje iz vrijednosti funkcije u četiri susjedne točke. Metoda se pokazala vrlo efikasnom za konvekciju valnog poremećaja slobodne površine od pramca dalje iza krme broda, ne dopuštajući širenje vala ispred pramca. Na taj se način omogućilo numeričko zadovoljavanje radijacijskog uvjeta (2.13), koji je jedan od osnovnih uvjeta u modelu. Osim toga, Dawson je bio u mogućnosti da složeni rubni uvjet na slobodnoj površini (2.29) pojednostavi usklađivanjem mreže panela na ravnoj slobodnoj površini sa strujnicama dobivenim iz rješenja optjecanja dvostrukog modela. U tom su se slučaju druge derivacije potencijala brzine mogle približno izraziti derivacijama uzduž strujnice, sa duljinom luka strujnice  $s$  kao varijablom po kojoj se derivira. Rubni uvjet (2.29) tada poprima oblik:

$$\partial_s (\partial_s \Phi^2 \partial_s \phi) + g \partial_z \phi = 2 \partial_s \Phi^2 \partial_{ss} \Phi \quad (3.7)$$

U tom slučaju parcijalna diferencijalna jednadžba (2.29) postaje obična diferencijalna jednadžba. Međutim, mreža panela formirana pomoću oblika strujnica ima određene nedostatke. Prvo, potrebno je odrediti oblik strujnica na slobodnoj površini. Drugo, vrlo često oblici dobivenih strujnica ne slijede oblik plovne vodne linije, posebice za slučaj kada vodna linija na pramcu ili krmi završava pod većim kutem prema simetrali broda. U tim su slučajevima strujnice preblizu središnjem dijelu broda, dok su na pramcu i krmi previše udaljene. Kao



posljedica dobiva se prilično nejednolika mreža panela što može utjecati na točnost rezultata. Nadalje, prilikom izvođenja izraza (3.7), Dawson je uveo aproksimaciju da su gradijent od  $\phi'$  ili  $\partial_x \Phi^2$  i strujnica paralelni. To bi vrijedilo za strujnice vrlo male zakrivljenosti, a točno je samo za strujnicu na vodnoj liniji broda [30,54]. Radi izbjegavanja tih nedostataka i pogrešaka, u ovom se radu proračunska mreža panela na slobodnoj površini formira neovisno o strujnicama, pružajući na taj način mogućnost boljeg prilagođavanja obliku plovne vodene linije. U tom je slučaju potrebno odrediti derivacije u oba smjera koordinatnog sustava. Paneli na slobodnoj površini leže u horizontalnoj ravnini  $xy$ , te je vektor normale panela okomit na tu ravninu. Primjenom izraza (2.37), normalna brzina koju u vlastitoj kolokacijskoj točki inducira izvor iznosi:

$$\partial_z \phi'_i = -2\pi \sigma_i . \quad (3.8)$$

Deriviranjem izraza (3.5) u oba smjera pravokutnog koordinatnog sustava te uvrštavanjem u (2.29) zajedno sa (3.8), nakon sređivanja dobiva se sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_T} [X_{i,j}(a_i + c_i) + Y_{i,j}(b_i + d_i) + (\partial_x \Phi_i)^2 \partial_x X_{i,j} + (\partial_y \Phi_i)^2 \partial_x Y_{i,j} + \\ + \partial_x \Phi_i \partial_y \Phi_i (\partial_x Y_{i,j} + \partial_y X_{i,j})] \sigma_j - 2\pi g \sigma_i = 2 \partial_x \Phi (c_i - U_\infty \partial_{xx} \Phi_i) + \\ + \partial_y \Phi_i [2 d_i - U_\infty (\partial_{xy} \Phi_i + \partial_{yx} \Phi_i)] , \quad \text{za } i = N_H + 1, \dots, N_T , \end{aligned} \quad (3.9)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} a_i &= \partial_x \Phi_i \partial_{xx} \Phi_i + \partial_y \Phi_i \partial_{xy} \Phi_i , \\ b_i &= \partial_x \Phi_i \partial_{yx} \Phi_i + \partial_y \Phi_i \partial_{yy} \Phi_i , \\ c_i &= \partial_x \Phi_i \partial_{xx} \Phi_i + \partial_y \Phi_i \partial_{yx} \Phi_i , \\ d_i &= \partial_x \Phi_i \partial_{xy} \Phi_i + \partial_y \Phi_i \partial_{yy} \Phi_i . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Izraz (3.9) predstavlja numerički rubni uvjet koji je potrebno zadovoljiti u svim kolokacijskim točkama slobodne površine.

Komponente brzine tekućine na slobodnoj površini koje nastaju zbog optjecanja dvostrukog modela dobivaju se iz:

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi_i &= -2\pi \sigma_{0i} n_{xi} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_T} X_{i,j} \sigma_{0j} + U_\infty , \\ \partial_y \Phi_i &= -2\pi \sigma_{0i} n_{yi} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_T} Y_{i,j} \sigma_{0j} , \\ \partial_z \Phi_i &= 0 . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Intenziteti izvora  $\sigma_{0j}$  na slobodnoj površini imaju tada vrijednost jednaku nuli.

### 3.4. Određivanje vrijednosti derivacija primjenom metode konačnih razlika

Slobodna se površina u poprečnom smjeru diskretizira pomoću krivulja  $y = f(x)$ , koje se dobivaju interpolacijom između vanjskog poprečnog ruba slobodne površine i plovne vodne linije broda. U uzdužnom se smjeru za diskretizaciju koriste pravci  $x = \text{konst}$ .

Paneli na slobodnoj površini definirani su krivocrtnim koordinatnim sustavom  $(l, t)$ , gdje su  $l$  i  $t$  dva općenito neortogonalna smjera u ravnini  $xy$ . Navedeni su smjerovi definirani vektorima  $\mathbf{l} = l_x \mathbf{i} + l_y \mathbf{j}$  i  $\mathbf{t} = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j}$ . Za prihvaćenu proračunsku mrežu, sl. 3.3., pravokutne koordinate navedenih vektora iznose:

$$l_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}}, \quad l_y = \frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}},$$

$$t_x = 0, \quad t_y = -1.$$
(3.12)

gdje  $\frac{df}{dx}$  predstavlja derivaciju u točki krivulje  $y = f(x)$  koja spaja kolokacijske točke jednog uzdužnog reda panela na slobodnoj površini.

Iz izraza (3.9) vidi se da je potrebno odrediti derivacije sljedećih veličina:  $\partial_x \Phi$ ,  $\partial_y \Phi$ ,  $X_{i,j}$  i  $Y_{i,j}$ , za oba smjera pravokutnog koordinatnog sustava. Derivacije tih veličina dobivaju se na isti način, primjenom natražne diferencijske sheme u četiri točke za oba smjera krivocrtog koordinatnog sustava. Vrijednosti dobivenih derivacija zatim se transformiraju u vrijednosti za pravokutni koordinatni sustav.

Derivacije  $x$  komponente brzine  $\partial_x \Phi$  u uzdužnom i poprečnom smjeru  $l$  i  $t$  krivocrtog koordinatnog sustava dobivaju se u obliku:

$$\partial_l (\partial_x \Phi) = \partial_{xl} \Phi = \text{grad}(\partial_x \Phi) \cdot \mathbf{l},$$

$$\partial_t (\partial_x \Phi) = \partial_{xt} \Phi = \text{grad}(\partial_x \Phi) \cdot \mathbf{t}.$$
(3.13)

Primjenom navedene metode konačnih razlika te se derivacije za  $i$ -tu kolokacijsku točku na slobodnoj površini dobivaju izrazima:

$$\partial_{xl} \Phi_i = \sum_{m=1}^4 c_{m_i} \partial_x \Phi_{i-m+1}, \quad \partial_{xt} \Phi_i = \sum_{m=1}^4 d_{m_i} \partial_x \Phi_{i-n_L(m-1)}$$
(3.14)

Pri tome su  $c_{m_i}$  i  $d_{m_i}$  koeficijenti diferencijalnog operatora u uzdužnom i poprečnom smjeru, a  $n_L$  je broj panela u jednom uzdužnom nizu na slobodnoj površini. Koeficijenti  $c_{m_i}$  dobivaju se iz udaljenosti između kolokacijskih točaka sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned}
c_{1_i} &= -(c_{2_i} + c_{3_i} + c_{4_i}), \\
c_{2_i} &= \frac{-l_3(l_1 + l_2)^2(l_1 + l_2 + l_3)^2(2l_1 + 2l_2 + l_3)}{D_i}, \\
c_{3_i} &= \frac{l_1^2(l_2 + l_3)(l_1 + l_2 + l_3)^2(2l_1 + 2l_2 + l_3)}{D_i}, \\
c_{4_i} &= \frac{-l_1^2 l_2(l_1 + l_2)^2(2l_1 + l_2)}{D_i},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

gdje je:

$$\begin{aligned}
D_i &= l_1 l_2 l_3 (l_1 + l_2)(l_1 + l_2 + l_3)(l_2 + l_3)(3l_1 + 2l_2 + l_3), \\
l_k &= \sqrt{(x_{i-k+1} - x_{i-k})^2 + (y_{i-k+1} - y_{i-k})^2}, \quad k = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Koordinate četiri kolokacijske točke u uzdužnom smjeru pomoću kojih se određuju koeficijenti  $c_{m_i}$  su  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $(x_{i-2}, y_{i-2})$ ,  $(x_{i-3}, y_{i-3})$ .

Koeficijenti diferencijalnog operatora  $d_{m_i}$  za određivanje vrijednosti derivacija u poprečnom smjeru dobivaju se slično kao (3.15) iz:

$$\begin{aligned}
d_{1_i} &= -(d_{2_i} + d_{3_i} + d_{4_i}), \\
d_{2_i} &= \frac{-t_3(t_1 + t_2)^2(t_1 + t_2 + t_3)^2(2t_1 + 2t_2 + t_3)}{D_i}, \\
d_{3_i} &= \frac{t_1^2(t_2 + t_3)(t_1 + t_2 + t_3)^2(2t_1 + 2t_2 + t_3)}{D_i}, \\
d_{4_i} &= \frac{-t_1^2 t_2(t_1 + t_2)^2(2t_1 + t_2)}{D_i},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

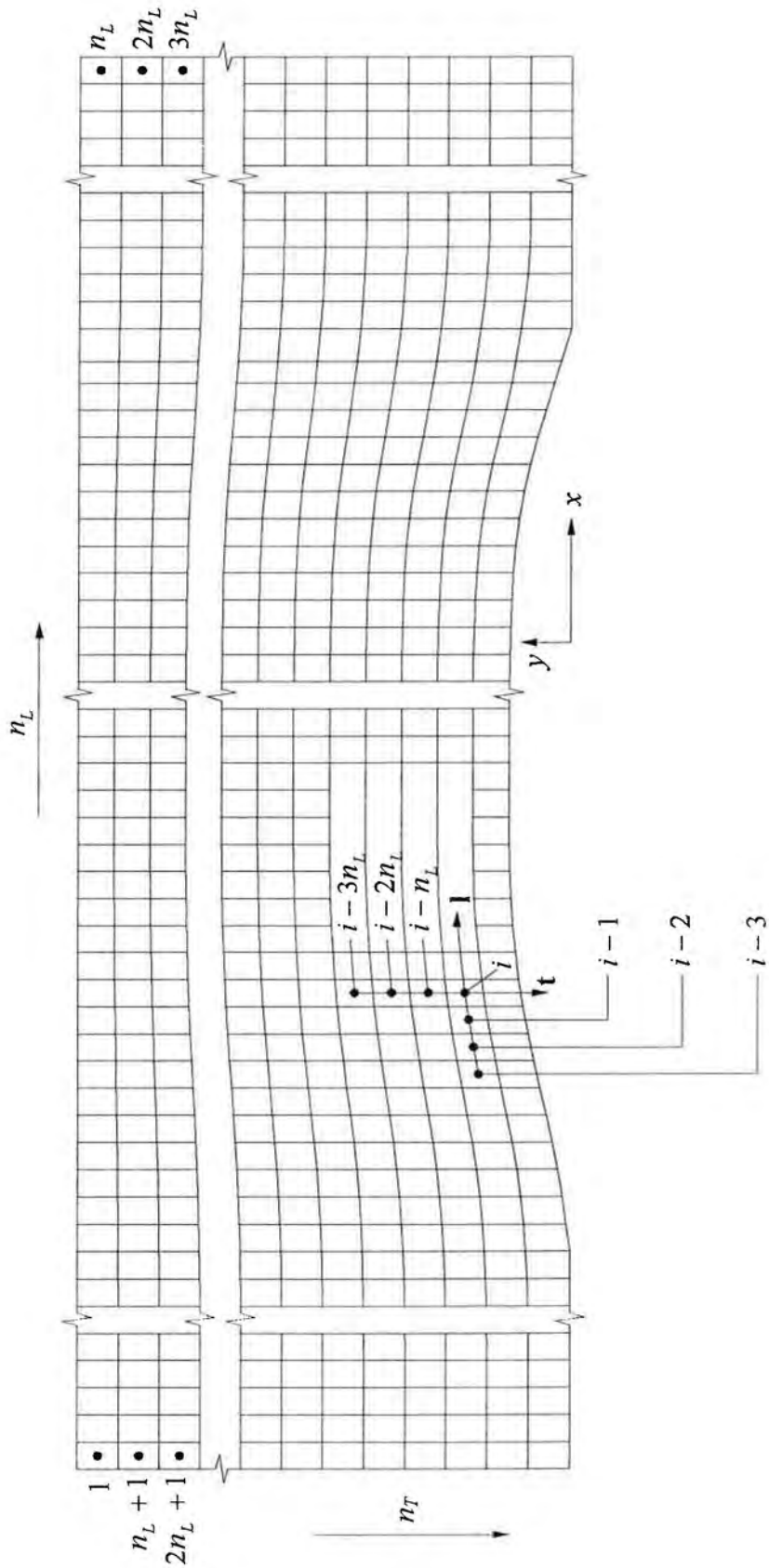
gdje je:

$$\begin{aligned}
D_i &= t_1 t_2 t_3 (t_1 + t_2)(t_1 + t_2 + t_3)(t_2 + t_3)(3t_1 + 2t_2 + t_3), \\
t_k &= \sqrt{(x_{i-n_L(k-1)} - x_{i-n_L k})^2 + (y_{i-n_L(k-1)} - y_{i-n_L k})^2}, \quad k = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Koordinate četiri kolokacijske točke u poprečnom smjeru pomoću kojih se određuju koeficijenti  $d_{m_i}$  su  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i-n_L}, y_{i-n_L})$ ,  $(x_{i-2n_L}, y_{i-2n_L})$ ,  $(x_{i-3n_L}, y_{i-3n_L})$ .

Način numeriranja panela na slobodnoj površini i shema primjenjene metode konačnih razlika prikazana je na sl. 3.3.

Zbog sheme konačnih razlika u četiri točke, derivacija brzine u kolokacijskoj točki određuje se iz vrijednosti brzine u šest susjednih točaka (po tri u oba smjera), te iz brzine u samoj kolokacijskoj točki. Određivanje koeficijenata ovih jednadžbi je radi toga složeno, pa je stoga i rubni uvjet na slobodnoj površini daleko složeniji od rubnog uvjeta na oplakivanoj površini.



Sl. 3.3. Diskretizacija slobodne površine

Za izraz (3.9) potrebno je poznavati derivacije u smjerovima pravokutnog koordinatnog sustava. Vrijednost derivacija za  $i$ -tu kolokacijsku točku u pravokutnom koordinatnom sustavu određuje se pomoću derivacija u krivocrtom sustavu izrazima:

$$\begin{aligned}\partial_{xx}\Phi_i &= k_{lx_i}\partial_{xl}\Phi_i + k_{ly_i}\partial_{xl}\Phi_i, \\ \partial_{xy}\Phi_i &= k_{ly_i}\partial_{xl}\Phi_i + k_{lx_i}\partial_{xl}\Phi_i,\end{aligned}\tag{3.19}$$

gdje su  $k_{lx_i}, k_{ly_i}, k_{lx_i}, k_{ly_i}$  transformacijski koeficijenti između krivocrtog  $(l, t)$  i pravokutnog koordinatnog sustava  $(x, y)$ .

Za prihvaćenu mrežu panela na slobodnoj površini transformacijski koeficijenti imaju oblik:

$$\begin{aligned}k_{lx} &= \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}, & k_{ly} &= \frac{df}{dx}, \\ k_{ly} &= 0, & k_{lx} &= -1.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Koeficijenti  $k_{lx_i}, k_{ly_i}, k_{lx_i}, k_{ly_i}$ , kao i koeficijenti  $c_{m_i}$  i  $d_{m_i}$ , ovise jedino o geometriji mreže panela na slobodnoj površini.

Slično kao u (3.14), dobivaju se derivacije veličina  $\partial_y\Phi$ ,  $X_{i,j}$  i  $Y_{i,j}$  u krivocrtom:

$$\begin{aligned}\partial_{yl}\Phi_i &= \sum_{m=1}^4 c_{m_i}\partial_y\Phi_{i-m+1}, & \partial_{yt}\Phi_i &= \sum_{m=1}^4 d_{m_i}\partial_y\Phi_{i-n_L(m-1)}, \\ \partial_l X_{i,j} &= \sum_{m=1}^4 c_{m_i}\partial_l X_{i-m+1,j}, & \partial_t X_{i,j} &= \sum_{m=1}^4 d_{m_i}\partial_t X_{i-n_L(m-1),j}, \\ \partial_l Y_{i,j} &= \sum_{m=1}^4 c_{m_i}\partial_l Y_{i-m+1,j}, & \partial_t Y_{i,j} &= \sum_{m=1}^4 d_{m_i}\partial_t Y_{i-n_L(m-1),j},\end{aligned}\tag{3.21}$$

odnosno u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\begin{aligned}\partial_{xx}\Phi_i &= k_{lx_i}\partial_{xl}\Phi_i + k_{ly_i}\partial_{xl}\Phi_i, & \partial_{yy}\Phi_i &= k_{ly_i}\partial_{yl}\Phi_i + k_{lx_i}\partial_{yl}\Phi_i, \\ \partial_x X_{i,j} &= k_{lx_i}\partial_l X_{i,j} + k_{ly_i}\partial_t X_{i,j}, & \partial_y X_{i,j} &= k_{ly_i}\partial_l X_{i,j} + k_{lx_i}\partial_t X_{i,j}, \\ \partial_x Y_{i,j} &= k_{lx_i}\partial_l Y_{i,j} + k_{ly_i}\partial_t Y_{i,j}, & \partial_y Y_{i,j} &= k_{ly_i}\partial_l Y_{i,j} + k_{lx_i}\partial_t Y_{i,j}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Na panelima unutar prva tri poprečna niza na vanjskom rubu slobodne površine postavljen je uvjet nulte inducirane brzine te uvjet nultog intenziteta izvora. Isti je uvjet postavljen na panelima prva tri uzdužna niza panela. Ovakav je pristup potreban zbog primjenjene sheme konačnih razlika radi izbjegavanja numeričkih poteškoća na rubu slobodne površine. Pri tome

je potrebno obratiti pozornost da tri niza panela na vanjskom poprečnom rubu slobodne površine budu izvan područja Kelvinova kuta za sustav brodskih valova da bi se izbjegla refleksija valova od tih rubova. Taj se uvjet može zadovoljiti usvajanjem dovoljno velikog područja slobodne površine u poprečnom smjeru.

### 3.5. Rješenje numeričkog modela

Na prethodno prikazani način pomoću  $N_H$  jednadžbi iz numeričkog rubnog uvjeta (3.6) te  $N_{FS}$  jednadžbi iz numeričkog rubnog uvjeta (3.9) formira se sustav od ukupno  $N_T$  linearnih algebarskih jednadžbi sa  $N_T$  nepoznanica  $\sigma_1, \dots, \sigma_{N_T}$ . Sustav se jednadžbi u matričnom obliku može napisati kao:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,N_H} & A_{1,N_H+1} & \dots & A_{1,N_T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N_H,1} & \dots & A_{N_H,N_H} & A_{N_H,N_H+1} & \dots & A_{N_H,N_T} \\ A_{N_H+1,1} & \dots & A_{N_H+1,N_H} & A_{N_H+1,N_H+1} & \dots & A_{N_H+1,N_T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N_T,1} & \dots & A_{N_T,N_H} & A_{N_T,N_H+1} & \dots & A_{N_T,N_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \sigma_{N_H} \\ \sigma_{N_H+1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \sigma_{N_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ B_{N_H} \\ B_{N_H+1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ B_{N_T} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

ili, simbolički:

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B} \quad (3.24)$$

Matrica koeficijenata sustava  $\mathbf{A}$  sastoji se od četiri podmatrice od kojih je svaka povezana s odgovarajućim rubnim uvjetom, sl. 3.4. Članovi podmatrice (1) predstavljaju utjecaj izvora oplakivane površine u kolokacijskim točkama te iste površine, podmatrica (2) utjecaj izvora oplakivane površine u točkama slobodne površine, podmatrica (3) utjecaj izvora slobodne površine u točkama oplakivane površine i podmatrica (4) utjecaj izvora slobodne površine u kolokacijskim točkama slobodne površine.

Dijagonalna dominantnost podmatrice povezane s rubnim uvjetom na oplakivanoj površini gubi se s podmatricama koje su povezane s rubnim uvjetom na slobodnoj površini. Iterativni postupci rješavanja sustava jednadžbi mogu se koristiti, štedeći na taj način potrebnu memoriju računala, posebice za vrlo velike slučajeve. U ovom se slučaju sustav jednadžbi rješava metodom Gaussove eliminacije.

Pri rješavanju problema nije potrebno diskretizirati cijelu oplakivanu površinu dvostrukog modela i slobodne površine. Dvostruki model uvijek posjeduje barem jednu ravninu simetrije koju čini ravnina mirne slobodne površine. Osim toga, dvostruki model obično posjeduje još



jednu ravninu simetrije koju čini simetrala broda. Slobodna površina uvijek ima jednu ravninu simetrije manje od dvostrukog modela. Ove su činjenice vrlo korisne, te je potrebno samo jednu četvrtinu dvostrukog modela i jednu polovicu slobodne površine diskretizirati panelima. Preostali se dijelovi uzimaju u obzir pomoću odgovarajuće refleksije panela i intenziteta izvora na reflektiranim panelima. Na ovaj se način štedi potrebna memorija računala odnosno omogućuje se povećanje broja panela u proračunu.

$$\begin{array}{c}
 \text{K} \\
 \text{O} \\
 \text{L} \\
 \text{O} \\
 \text{K} \\
 \text{T} \\
 \text{O} \\
 \text{Č} \\
 \text{K} \\
 \text{E}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \\
 \text{(1)} \\
 \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \\
 \text{(2)}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{PANELI} \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 j = 1, N_T \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \\
 \text{(3)} \\
 \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \\
 \text{(4)}
 \end{array}$$

Sl. 3.4. Struktura matrice koeficijenata  $A$ 

### 3.6. Određivanje vrijednosti brzina i tlakova te elevacija slobodne površine

Rješenjem sustava jednadžbi, komponente brzina tekućine u kolokacijskim točkama dobivaju se izrazima (3.5), množenjem prethodno određenih vrijednosti (3.4) s intenzitetima izvora  $\sigma_i$ .

Iz tako određenih brzina može se zatim u kolokacijskim točkama na oplakivanoj površini broda odrediti bezdimenzionalni koeficijent tlaka iz izraza (2.41):

$$C_{pi} = 1 - \frac{1}{U_\infty^2} \left[ (\partial_x \Phi_i)^2 + (\partial_y \Phi_i)^2 + (\partial_z \Phi_i)^2 + 2(\partial_x \Phi_i \partial_x \delta \phi_i + \partial_y \Phi_i \partial_y \delta \phi_i + \partial_z \Phi_i \partial_z \delta \phi_i) \right]. \quad (3.25)$$

Iz (2.42) mogu se odrediti elevacije slobodne površine u kolokacijskim točkama na slobodnoj površini:

$$h_i = \frac{1}{2g} \left\{ U_\infty^2 - \left[ (\partial_x \Phi_i)^2 + (\partial_y \Phi_i)^2 + 2(\partial_x \Phi_i \partial_x \delta \phi_i + \partial_y \Phi_i \partial_y \delta \phi_i) \right] \right\}, \quad (3.26)$$

Pri rješavanju problema, od važnosti je određivanje vrijednosti brzina i tlakova u točkama na oplakivanoj i slobodnoj površini. Iz tih vrijednosti određuju se sile i momenti na brod te elevacije slobodne površine. Osim ovih vrijednosti, ponekad može biti od značaja poznavanje brzina i tlakova i u drugim točkama u  $\Omega$ , a koje se ne nalaze na rubnim površinama. Brzine i tlakovi u tim se točkama tada mogu odrediti pomoću izraza (3.3), iz sada poznatih intenziteta

izvora. Brzine u točkama koje nisu kolokacijske, a nalaze se na rubnim površinama, ne mogu se odrediti na isti način budući da inducirana brzina poprima beskonačnu vrijednost u točkama koje su u blizini ruba panela. Brzine u tim točkama mogu se dobiti interpolacijom iz vrijednosti brzina u najbližim kolokacijskim točkama.



#### 4 ODREĐIVANJE HIDRODINAMIČKIH SILA I MOMENATA

Sile i momenti koji djeluju na brod mogu se odrediti iz numeričkog rješenja hidrodinamičkog modela. Sile i momente je najpogodnije prikazati u obliku odgovarajućih bezdimenzionalnih koeficijenata. Pri određivanju sila od najveće je važnosti određivanje sile otpora valova. U okviru teorije potencijalnog strujanja, otpor valova broda može se odrediti pomoću nekoliko različitih metoda. Otpor valova se uobičajeno određuje integracijom sila tlakova po oplakivanoj površini broda. Kao druga mogućnost, otpor valova se može odrediti i primjenom Lagallyevog teorema na sustav izvora kojim se modelira problem. Obje ove metode uključene su u numerički model. Otpor valova se također može odrediti i metodama u kojima se analizira valovita slobodna površina. Te metode nisu uključene u postojeći numerički model, već je dan samo vrlo kratki prikaz.

##### 4.1. Određivanje sila i momenata integracijom tlakova po oplakivanoj površini

Sile i momenti koji djeluju na oplakivanu površinu broda mogu se odrediti integracijom vrijednosti tlakova po oplakivanoj površini izrazima:

$$\mathbf{F} = - \iint_{S_H} p \mathbf{n} dS, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{M} = - \iint_{S_H} p (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS \quad (4.2)$$

Pri gibanju broda u idealnoj tekućini sa slobodnom površinom u smjeru napredovanja broda pojavljuje se samo sila otpora valova:

$$R_w = - \iint_{S_H} p n_x dS \quad (4.3)$$

Bezdimenzionalni koeficijent otpora valova određuje se iz:

$$C_w = \frac{R_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S_H} = - \frac{1}{S_H} \iint_{S_H} C_p n_x dS, \quad (4.4)$$

gdje je  $C_p$  bezdimenzionalni koeficijent tlaka definiran izrazom (2.40). U skladu s aproksimacijom oplakivane površine ravnim panelima, vektori normala i vrijednosti tlakova konstantni su za pojedini panel. Integracija se tada zamjenjuje sumiranjem po svim panelima pa se bezdimenzionalni koeficijent otpora valova za diskretizirani problem određuje izrazom:

$$C_w = - \frac{1}{S_H} \sum_{i=1}^{N_H} C_{p_i} n_{x_i} A_i \quad (4.5)$$

Veličina diskretizirane oplakivane površine  $S_H$  broda u stanju mirovanja određuje se iz:

$$S_H = \sum_{i=1}^{N_H} A_i, \quad (4.6)$$

gdje je  $A_i$  površina  $i$  – tog panela.

Za konačni broj panela koji se u praktičnim proračunima primjenjuje, te zbog ponekad neadekvatne diskretizacije panelima, vrijednosti koeficijenta tlakova  $C_{p_i}$  susjednih panela mogu se značajno razlikovati. Zbog toga određivanje otpora valova na ovaj način može ponekad biti nepouzđano. Uzrok numeričkih pogrešaka nije sama metoda integracije tlakova, već su uzrok pogreške u vrijednostima tlakova i ostalih veličina do kojih dolazi zbog neadekvatne diskretizacije panelima. Budući da se otpor valova dobiva kao rezultat razlike tlakova na pramčanom i krmenom dijelu broda, male numeričke netočnosti u vrijednosti ovih tlakova mogu uzrokovati veću pogrešku u vrijednosti otpora valova. Radi izbjegavanja ovih problema, obavlja se ispravak izračunatog  $C_W$ . U tu se svrhu koristi poznata činjenica da nikakva hidrodinamička sila ne djeluje na potpuno uronjeno tijelo koje se giba jednolikom brzinom u neograničenoj idealnoj tekućini (d'Alembertov paradoks). Potrebno je odrediti veličinu:

$$\Delta C_{p0} = -\frac{1}{S_H} \sum_{i=1}^{N_H} C_{p0_i} n_{x_i} A_i, \quad (4.7)$$

gdje  $C_{p0_i}$  predstavlja vrijednost bezdimenzionalnog koeficijenta tlaka na  $i$  – tom panelu koja se dobiva iz rješenja optjecanja samo dvostrukog modela. U idealnom bi slučaju vrijednost  $\Delta C_{p0}$  trebala biti jednaka nuli, međutim zbog primjenjene diskretizacije vrlo često nije. Pretpostavljajući sličnost između optjecanja dvostrukog modela sa i bez slobodne površine, opravdano je očekivati da vrijednost  $\Delta C_{p0}$  predstavlja dobru aproksimaciju numeričkih pogrešaka pri integraciji tlakova. Ispravljeni koeficijent otpora valova tada se dobiva iz:

$$C_{W_{kor}} = C_W - \Delta C_{p0}. \quad (4.8)$$

Kao posljedica promjene tlaka uzduž većeg dijela oplakivane površine zbog promjene brzine strujanja, pojavljuje se promjena urona i trima u odnosu na stanje mirovanja broda. Ove se veličine mogu dobiti iz vertikalne sile te momenta sila oko poprečne osi, na sličan način kao i otpor valova.

Vertikalna sila se dobiva iz:

$$R_z = -\iint_{S_H} p n_z dS \quad (4.9)$$

a bezdimenzionalni koeficijent vertikalne sile iz:

$$C_z = \frac{R_z}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S_H} = -\frac{1}{S_H} \iint_{S_H} C_p n_z dS \quad (4.10)$$

Za diskretizirani problem bezdimenzionalni koeficijent vertikalne sile dobiva se iz:

$$C_z = -\frac{1}{S_H} \sum_{i=1}^{N_H} C_{p_i} n_{z_i} A_i \quad (4.11)$$

Hidrodinamički uron može se tada dobiti iz:

$$\Delta T = \frac{S_H U_\infty^2 C_z}{2 g A_{WL}} \quad (4.12)$$

Moment sila oko poprečne osi koja prolazi težištem istisnine broda dobiva se iz:

$$M = -\iint_{S_H} p [n_x(z - Z_{CB}) - n_z(x - X_{CB})] dS \quad (4.13)$$

a bezdimenzionalni koeficijent momenta sila iz:

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S_H L} = -\frac{1}{S_H L} \iint_{S_H} C_p [n_x(z - Z_{CB}) - n_z(x - X_{CB})] dS \quad (4.14)$$

Za diskretizirani problem bezdimenzionalni koeficijent momenta sila dobiva se iz:

$$C_M = -\frac{1}{S_H L} \sum_{i=1}^{N_H} C_{p_i} [n_{x_i}(z_i - Z_{CB}) - n_{z_i}(x_i - X_{CB})] A_i \quad (4.15)$$

Hidrodinamički trim se tada može dobiti iz:

$$\Delta t = \frac{C_M S_H U_\infty^2 L^2}{2 g \nabla R} \quad (4.16)$$

Iz promjene hidrodinamičkog urona i trima može se zatim odrediti kut trima  $\theta$  te promjena gaza na pramcu  $\Delta T_p$  i krmi broda  $\Delta T_k$ .

#### 4.2. Određivanje sila primjenom Lagallyevog teorema

Osim integracijom tlakova, sile na tijelo koje se kreće jednoliko kroz idealnu tekućinu mogu se odrediti i na drugi način, pomoću Lagallyevog teorema [55,56]. Lagallyevim teoremom određuju se sile kojima singulariteti djeluju jedan na drugog u potencijalnom strujanju, te se

moгу za poznate intenzitete izvora izravno odrediti sile bez poznavanja vrijednosti tlakova. Lagallyev teorem za izvore mođe se riječima formulirati na sljedeći naćin [55]: sila koja djeluje na izvor jednaka je negativnoj vrijednosti umnoška gustoće tekućine, intenziteta izvora te inducirane brzine na mjestu gdje se izvor nalazi. Prilikom određivanja inducirane brzine potrebno je uzeti u obzir sve utjecaje, osim utjecaja samog izvora. Pravac djelovanja sile prolazi kroz izvor, a smjer djelovanja sile jednak je smjeru inducirane brzine. Sila se mođe napisati u obliku:

$$\mathbf{F} = -\rho \sigma_{iz} \mathbf{V}, \quad (4.17)$$

gdje  $\sigma_{iz}$  predstavlja intenzitet izvora, a  $\mathbf{V}$  induciranu brzinu. Za slućaj hidrodinamićkog modela optjecanja broda, potrebno je promatrati silu na dvostrukom modelu na koji paralelno nastrujava tekućina, a također je potrebno uzeti u obzir i utjecaj izvora slobodne površine. Paralelno strujanje tekućine daje doprinos  $-\rho \sigma_{iz}^{tot} U_\infty$ , gdje je  $\sigma_{iz}^{tot}$  ukupni intenzitet izvora na dvostrukom modelu. Za potpuno zatvorena tijela (dvostruki model) ukupni intenzitet izvora jednak je nuli te je u tom slućaju potrebno uzeti u obzir jedino brzinu  $V_{FS}$  koju induciraju izvori slobodne površine [54]. U tom se slućaju otpor valova dobiva kao polovica sile na dvostruki model:

$$R_w = -\rho \iint_{S_H} V_{FSx} \sigma \, dS, \quad (4.18)$$

gdje  $V_{FSx}$  predstavlja  $x$  komponente brzina koje u toćkama dvostrukog modela induciraju izvori slobodne površine. Bezdimezionalni koeficijent otpora valova za diskretizirani problem dobiva se u obliku:

$$C_w = \frac{4\pi}{U_\infty^2 S_H} \sum_{i=1}^{N_H} V_{FSx_i} \sigma_i A_i. \quad (4.19)$$

Ukupna sila koja djeluje na sustav izvora dvostrukog modela i slobodne površine na koji jednoliko nastrujava tekućina brzinom  $U_\infty$  mođe se prikazati u obliku:

$$F_{uk} = -\rho U_\infty \left( \iint_{S_H} \sigma \, dS + \iint_{S_{FS}} \sigma \, dS \right) \quad (4.20)$$

Budući da je ova ukupna sila jednaka nuli [54], sila kojom izvori slobodne površine djeluju na izvore dvostrukog modela, te sila kojom izvori dvostrukog modela djeluju na izvore slobodne površine, predstavljaju "unutarnje sile" koje se poništavaju, budući da su jednakog intenziteta, ali suprotnog smjera. U tom se slućaju otpor valova također mođe odrediti kao negativna vrijednost druge spomenute sile u obliku:

$$R_w = \frac{1}{2} \rho \iint_{S_{FS}} V_{Hx} \sigma \, dS, \quad (4.21)$$

gdje  $V_{Hx}$  predstavlja  $x$  komponente brzina koje u točkama slobodne površine induciraju izvori dvostrukog modela. Za diskretizirani problem, ukupna sila jednaka je nuli ako se izvori na slobodnoj površini protežu dovoljno daleko. Bezdimenzionalni koeficijent otpora valova za diskretizirani problem tada se dobiva u obliku:

$$C_w = -\frac{4\pi}{U_\infty^2 S_H} \sum_{i=1}^{N_{FS}} V_{Hx_i} \sigma_i A_i \quad (4.22)$$

#### 4.3. Određivanje otpora valova analizom valovite slobodne površine

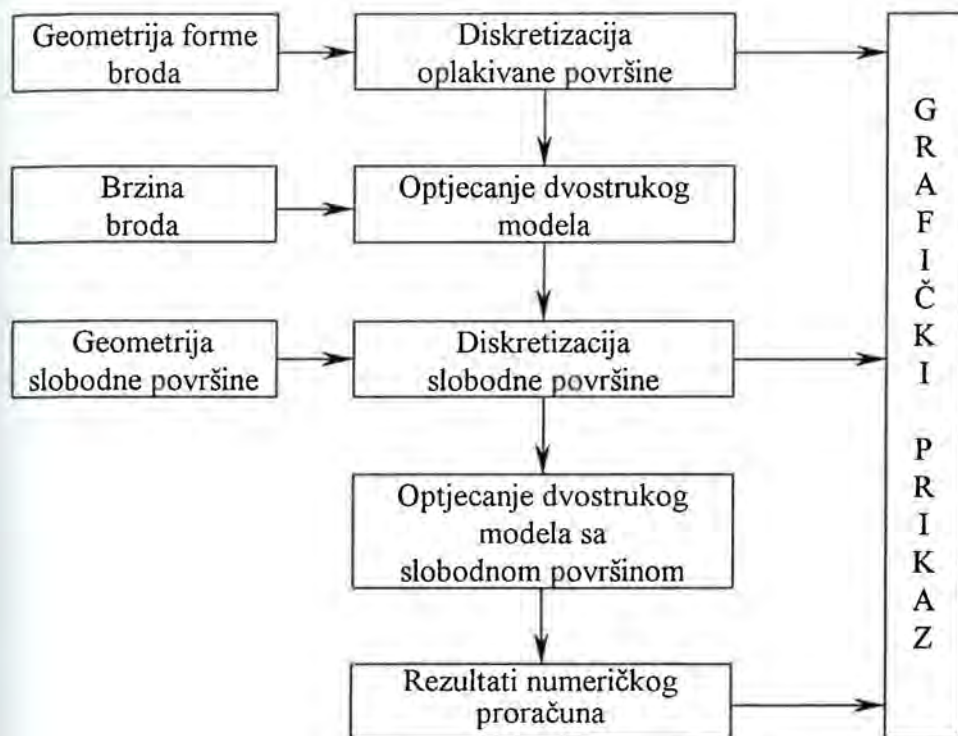
Otpor valova se također može odrediti metodama u kojima se analizira valovita slobodna površina. Kod tih se metoda otpor valova određuje pomoću spektra valnih komponenti određenih mjerenjem elevacija slobodne površine na određenoj udaljenosti od broda. Metode su izvorno razvijene za primjenu kod ispitivanja modela brodova u bazenima [57,58,59], a ovdje bi se mogle primijeniti na numerički određene elevacije slobodne površine.

Metode koje se mogu primijeniti su metoda uzdužnog i metoda poprečnog presjeka. Metode se razlikuju u smjeru u kojem se uzimaju podaci o elevacijama slobodne površine. Kod metode uzdužnog presjeka mjerenjem se određuje oblik jednog ili više profila valova na slobodnoj površini u smjeru paralelnim sa smjerom gibanja broda, dok se kod metode poprečnog presjeka mjerenjem određuje oblik dva ili više profila valova u smjeru okomitom na smjer gibanja broda. Pri tome udaljenosti između presjeka i broda moraju biti dovoljno velike da bi lokalne pojave optjecanja bile zanemarive. Osim toga, za preciznu analizu presjek valovite površine mora biti dovoljne duljine. Za metodu uzdužnog presjeka, područje slobodne površine koje je potrebno uzeti u obzir moralo bi se protezati nekoliko duljina broda, što bi bilo vrlo nepraktično s obzirom na potrebni broj panela koji bi se pojavljivao u proračunu. Za metodu poprečnog presjeka, položaj presjeka mora biti udaljen od krme najmanje jednu duljinu, a presjeci bi morali pokrivati cijelo područje unutar Kelvinova kuta za sustav brodskih valova na slobodnoj površini. Oba ova zahtjeva mogla bi se zadovoljiti usvajanjem nešto većeg područja slobodne površine nego obično te bi metoda poprečnog presjeka stoga predstavljala povoljniji izbor.



## 5. RAČUNALNI PROGRAMI

Shema proračunskog postupka za rješavanje problema potencijalnog strujanja oko broda prikazana je na sl. 5.1. Praktična primjena proračunskog postupka izloženog u prethodnim poglavljima omogućena je izrađenim računalnim programima.



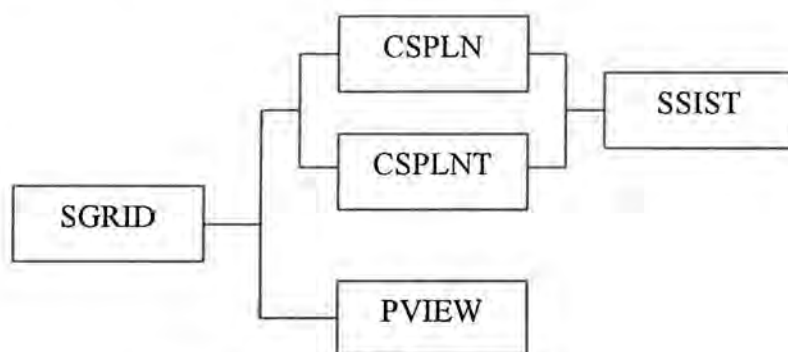
Sl. 5.1. Shema proračunskog postupka

Izrađena su dva računalna programa: program SGRID (Ship GRID) koji služi za formiranje mreže panela, i program FSFLOW (Free Surface FLOW) koji služi za numeričko rješavanje optjecanja broda na slobodnoj površini. Izvorni kod programa napisan je u FORTRAN programskom jeziku, za primjenu na osobnom računalu. S obzirom na univerzalnost i široku rasprostranjenost programskog jezika FORTRAN, programi se vrlo jednostavno mogu prilagoditi i izvršavati na računalima s drugim operacijskim sustavima. Programi su sastavljeni tako da nije predviđen interaktivni rad s njima, već se potrebni podaci uzimaju iz prethodno pripremljenih datoteka.

### 5.1. Računalni program SGRID

Mrežu panela potrebno je formirati na oplakivanoj površini broda te na slobodnoj površini. Radi potrebe za mijenjanjem broja, gustoće i veličine panela te dobivanja željene mreže, potrebno je imati mogućnost automatskog formiranja mreže. U tu se svrhu kao osnova računalnog programa SGRID primjenjuje obični i parametarski kubični *spline*. Teorija

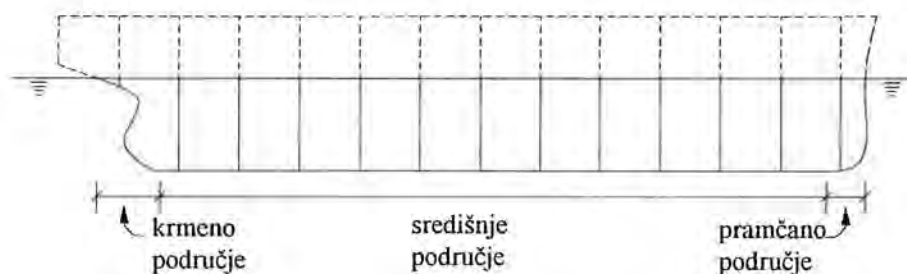
kubičnog *spline*-a te njegova primjena za opisivanje forme broda prikazana je u prilogu 3. Na sl. 5.2 prikazana je struktura programa SGRID. Program sadrži potprograme CSPLN i CSPLNT, koji služe za aproksimaciju krivulja običnim odnosno parametarskim kubičnim *spline*-om. Potprogramom SSIST rješava se linearni sustav jednažbi, a potprogram PVIEW služi za grafički prikaz rezultata.



Sl. 5.2. Struktura programa SGRID

Podaci o formi broda najčešće su dani nacrtom brodskih linija, ili su sadržani u nekim datotekama posebnog formata. Te je podatke potrebno preraditi i pripremiti za ulaznu datoteku programa. Za ulazne je podatke potrebno zadati sljedeće: glavne dimenzije (duljina vodne linije, duljina između okomica, širina, gaz), koeficijente forme (koeficijent punoće istisnine, prizmatički koeficijent), broj zadanih rebara, za svako zadano rebro uzdužni položaj te koordinate točaka (vodna linija, poluširina), broj rebara koje će se dobiti interpolacijom. Također je potrebno navesti koordinate točaka kojima su definirane pramčana i krmena kontura.

Programom se prvo formiraju paneli oplakivane površine. Osnovu za formiranje mreže tih panela čine zadane točke pojedinih rebara te točke pramčane i krmene konture. Vrhovi zakrivljenih panela koji će se formirati leže u ravninama ovih krivulja. Radi formiranja panela, oplakivana se površina dijeli na tri područja: pramčano, središnje i krmeno, sl. 5.3.

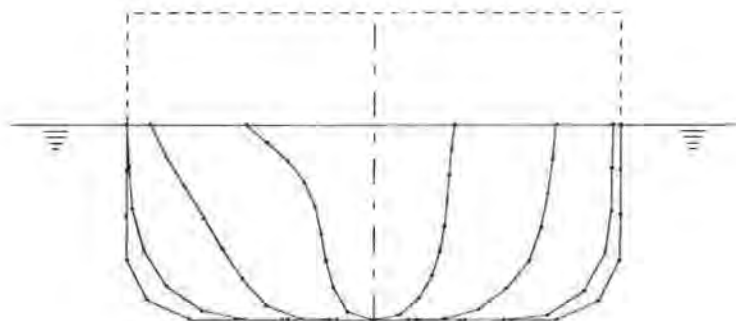


Sl. 5.3. Područja oplakivane površine

Vrhovi budućih panela u središnjem se području dobivaju na način da se svako pojedino rebro od simetrale broda na kobilici do vodne linije podijeli na zadani broj segmenata. Premda se može posebno za svako rebro zadati različiti broj točaka  $M$ , prihvaćeno je da taj broj bude za sva rebra jednak, osim eventualno za krajnja rebra na pramcu ili krmu. Primjenom

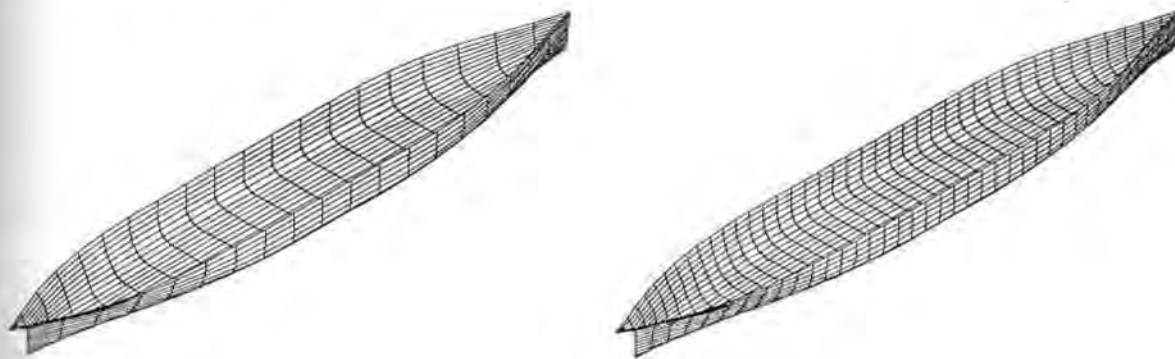
parametarskog kubičnog *spline*-a svako se rebro dijeli na  $(M - 1)$  segmenata jednakih duljina koji predstavljaju osnovu budućih panela, sl. 5.4. Odgovarajućim povezivanjem točaka u grupe po četiri između susjednih rebara formiraju se zakrivljeni paneli.

U pramčanom i krmenom području primjenjuje se sličan postupak kao u središnjem području. Razlika se sastoji u tome što je vrhove pojedinih panela potrebno definirati na pramčanoj i krmenoj konturi da bi se zatvorila oplakivana površina. Radi toga postoji određena deformacija tih panela što ovisi o formi broda. Vrhove tih panela moguće je na odgovarajući način "ručno" uskladiti. Potpuna automatizacija postupka formiranja panela potrebna je u metodama koje uzimaju u obzir novi položaj broda (hidrodinamički uron i trim) te u nelenearnim metodama kada se zahtijeva stalno usklađivanje panela oplakivane površine prema obliku valovite slobodne površine.



Sl. 5.4. Podjela rebra na segmente

Najčešće je broj zadanih rebara nedostatan za formiranje adekvatnog broja panela, pa se radi toga vodne linije aproksimiraju običnim kubičnim *spline*-om i zatim se interpolacijom dobiva željeni broj novih rebara. Radi što bolje prilagodbe panela oplakivanoj površini i dobivanja željene konfiguracije, program pruža mogućnost različitih kombinacija broja interpoliranih rebara i broja čvorova na jednom rebro. Na sl. 5.5. prikazani su određeni primjeri za formu iz Serije 60 sa  $C_B = 0.70$ .



Sl. 5.5. Primjeri diskretizacije oplakivane površine

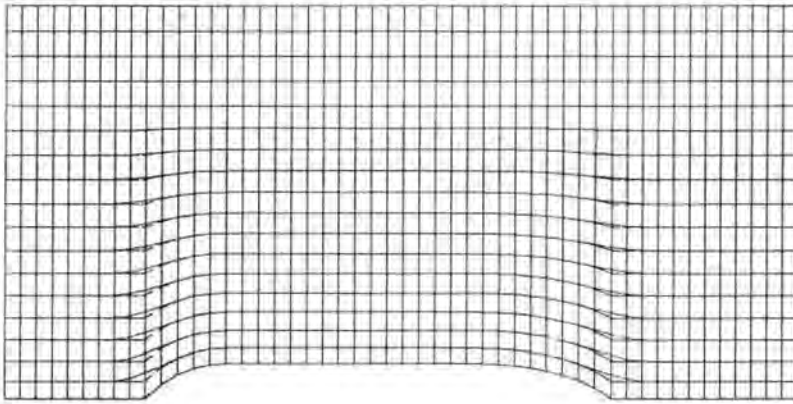
Općenito se paneli moraju više zgusnuti u područjima većih zakrivljenosti oplakivane površine te u područjima gdje se očekuje da će strujanje naglo mijenjati značajke. U područjima gdje se



geometrija oplakivane površine ne mijenja naglo, opravdano je pretpostavljati da se niti značajke strujanja neće mijenjati naglo, pa se mogu primijeniti paneli većih dimenzija. Za definiranje broja, veličine i načina rasporeda panela svakako je potrebno određeno iskustvo korisnika.

Diskretizacija slobodne površine slijedi automatski nakon diskretizacije oplakivane površine. Veličina slobodne površine koja će se uzeti u obzir kod proračuna zadaje se unaprijed, a mora biti dovoljna da refleksija valova od vanjskih rubova nema utjecaj na rezultate. Općenito se prihvaća proračunska mreža koja započinje na udaljenosti  $0.25L - 0.50L$  ispred pramca i završava na  $0.75L - 1.50L$  iza krme broda. U poprečnom se smjeru prihvaća širina područja od  $0.75L - 1.0L$ .

Broj panela slobodne površine slijedi na osnovi veličine slobodne površine i zadanih dimenzija panela. Pri definiranju dimenzija panela moguće je zadati željeni omjer stranica, a moguće je i variranje dimenzija panela. Radi izbjegavanja oštrijih prijelaza, oblik panela u području pramca i krme prilagođava se na odgovarajući način primjenom kubičnog *spline*-a, sl. 5.6.



Sl. 5.6. Smanjenje oštih prijelaza mreže na slobodnoj površini

Broj i veličina panela slobodne površine ovisi o konkretnom problemu koji se rješava. Općenito je za veće Froudeovog broja potrebno uzeti u obzir veći dio slobodne površine, dok se za manje vrijednosti Froudeovog broja koristi veći broj manjih panela radi boljeg razlučivanja valovite slobodne površine.

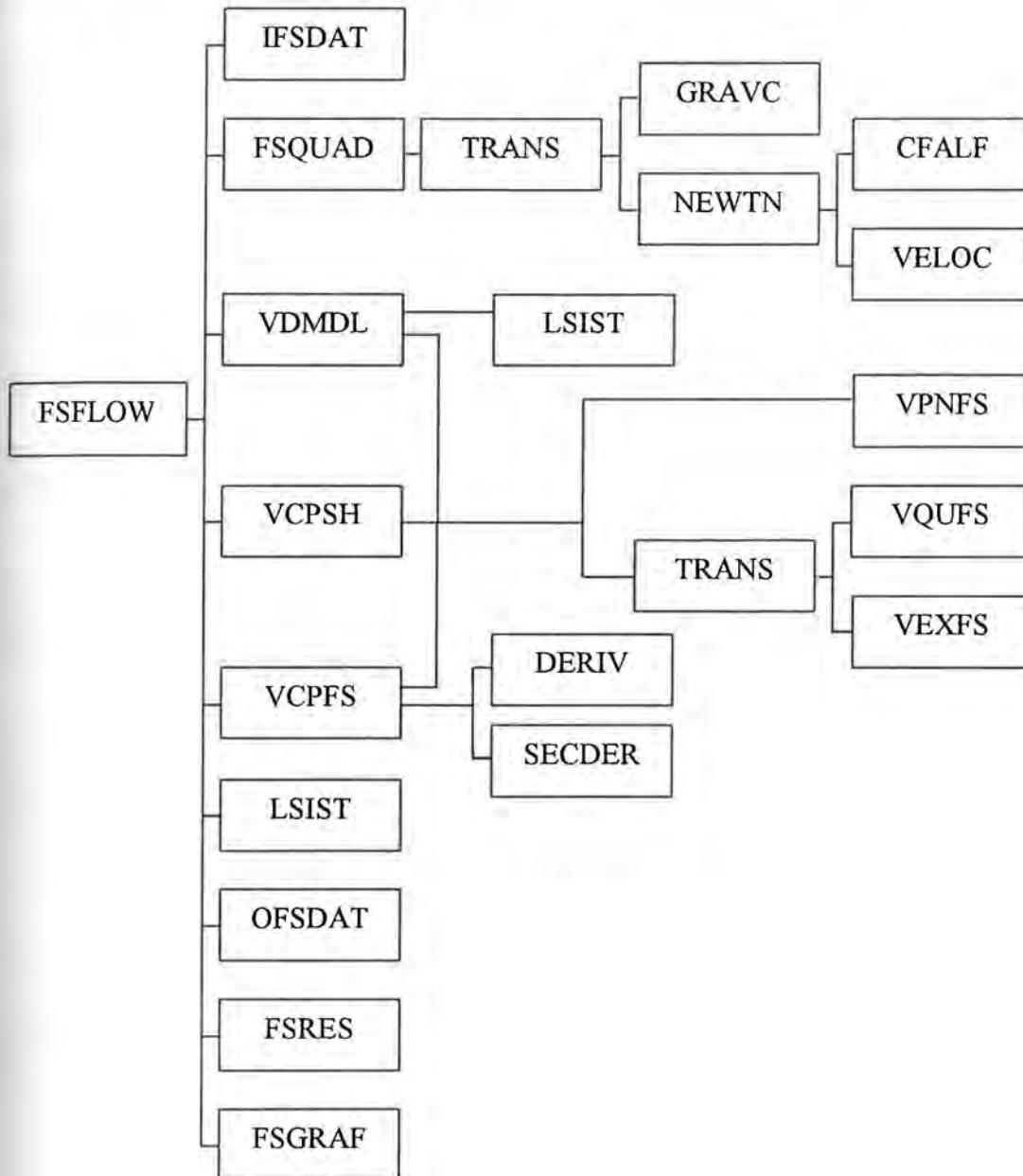
Programom SGRID formiraju se dvije izlazne datoteke. Jedna datoteka sadrži podatke o zakrivljenim panelima oplakivane površine, a druga podatke o panelima slobodne površine. Datoteke se u neizmjenjenom obliku koriste kao ulazne za računalni program FSFLOW koji rješava potencijalno optjecanje broda.

## 5.2. Računalni program FSFLOW

Računalnim programom FSFLOW rješava se potencijalno optjecanje broda s uključenim utjecajem slobodne površine. Kao ulazne datoteke programa FSFLOW služe dvije izlazne iz programa SGRID te još jedna posebno propremljena u kojoj se navode geometrijske značajke broda (duljina, širina, gaz, volumen istisnine, koordinate težišta istisnine, površina vodne linije,

koordinate težišta vodne linije, uzdužni metacentarski radijus), gustoća tekućine te Froudeov broj za koji će se obaviti proračun.

Pojedini dijelovi proračuna smješteni su u potprograme, koje zavisno o redosljedu proračuna poziva glavni program. Struktura programa FSFLOW prikazana je na sl. 5.7.



Sl. 5.7. Struktura programa FSFLOW

U potprogramima se obavlja sljedeće:

- CFALF - Određivanje koeficijenta koji se koriste pri određivanju koordinata kolokacijskih točaka;
- DERIV - Određivanje vrijednosti derivacije u točki ravninske krivulje;



- FSGRAF - Formiranje datoteka za grafičke prikaze;
- FSQUAD - Formiranje ravninskih panela na oplakivanoj površini. Određivanje geometrijskih značajki panela (površina, moment tromosti, težište, kolokacijska točka, vektor normale);
- FSRES - Računanje sila i momenata te određivanje otpora valova, hidrodinamičkog urona i trima;
- GRAVC - Određivanje položaja težišta panela;
- IFSDAT - Učitavanje podataka iz ulaznih datoteka;
- LSIST - Rješavanje sustava linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije. Potprogram je preuzet iz [60]. Varijable koje se pojavljuju u potprogramu deklarirane su kao varijable s dvostrukom točnošću (*Double Precision*).
- NEWTN - Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi Newtonovom metodom. Potprogram se koristi pri određivanju položaja kolokacijskih točaka;
- OFSDAT - Određivanje vrijednosti brzina i tlakova te elevacija slobodne površine. Formiranje izlaznih datoteka;
- SECDER - Određivanje transformacijskih koeficijenata i koeficijenata diferencijalnog operatora;
- TRANS - Transformacija veličina iz globalnog u lokalni koordinatni sustav i obrnuto;
- VCPFS - Formiranje podmatrica sustava jednadžbi iz numeričkog rubnog uvjeta na slobodnoj površini;
- VCPSH - Formiranje podmatrica sustava jednadžbi iz numeričkog rubnog uvjeta na oplakivanoj površini;
- VDMDL - Rješavanje optjecanja dvostrukog modela bez slobodne površine;
- VELOC - Računanje induciranih brzina. Potprogram se koristi pri određivanju položaja kolokacijskih točaka;
- VEXFS - Računanje induciranih brzina pomoću egzaktnih formula (Prilog 2);
- VPNFS - Računanje induciranih brzina pomoću formula za točkasti izvor (Prilog 2);
- VQUFS - Računanje induciranih brzina pomoću formula za točkasti kvadrupol (Prilog 2);

### 5.3. Grafički prikaz rezultata

Prilikom praktičnog izvođenja računalnih programa od velike je važnosti mogućnost grafičkog prikaza rezultata čime se osigurava djelotvorna kontrola rada programa.

Prije nego se pristupi izvršenju računalnog programa FSFLOW, preventivni grafički prikaz panela formiranih programom SGRID pruža mogućnost jednostavnog otkrivanja mogućih grešaka. Određene nepravilnosti (npr. paneli ne slijede formu broda, prisutna je deformacija određenih panela, postoji prevelika razlika u veličini susjednih panela, itd.) mogu se odmah uočiti i pravovremeno ispraviti. U programima je dana mogućnost grafičkog prikaza zakrivljenih i ravninskih panela, vektora normala, težišta i kolokacijskih točaka panela, kako za oplakivanu, tako i za slobodnu površinu. Grafički prikazi imaju veliku važnost i kod predstavljanja rezultata numeričkog rješenja. Iako je vrijednost otpora valova možda najinteresantniji podatak koji se dobiva iz proračuna, i ostali su podaci od značaja (npr. vrijednosti brzina i tlakova, oblik valovite deformirane slobodne površine, profil vala uz oplakivanu površinu, itd.). Budući da su ti podaci prikazani u numeričkom obliku vrlo nepregledni, mogućnost grafičkog prikaza ovih rezultata vrlo je bitna za procjenu analiziranog

slučaja. Grafički su prikazi omogućeni primjenom programskog paketa AutoCAD [61], pomoću \*.DXF datoteka (*Drawing Interchange File*). Određeni primjeri grafičkih prikaza dani su u pojedinim poglavljima ovog rada.

## 6. POTVRĐIVANJE VALJANOSTI NUMERIČKOG MODELA

Radi provjere računalnog programa FSFLOW te potvrde valjanosti numeričkog modela, obavljen je veći broj numeričkih proračuna. Za rezultate dobivene tim proračunima obavljena je usporedba s eksperimentalnim rezultatima koje je prikupio i objavio *ITTC*. Također je obavljena usporedba s eksperimentima obavljenim u hidrodinamičkom laboratoriju Sveučilišta u Trstu. Svi su rezultati numeričkih proračuna dobiveni za nepomične uvjete, odnosno nije postojala mogućnost promjene urona i trima broda. Dobiveni rezultati prikazani su u bezdimenzionalnom obliku, pomoću koeficijenata ili drugih bezdimenzionalnih linearnih veličina (duljina broda, elevacije valova, itd.) dobivenih dijeljenjem sa  $(L/2)$ . Na taj su način duljine svih razmatranih formi jednake  $L^* = L/(L/2) = 2$ , tako da se pramčana okomica broda nalazi na  $x^* = -1$ , a krmena na  $x^* = 1$ .

### 6.1. Usporedba s *ITTC* eksperimentalnim rezultatima

Kao završna napomena u izvješću Komiteta za otpor sa 15-tog *ITTC* istaknuto je da nedostaju dobro potkrijepljeni eksperimentalni podaci za potvrdu valjanosti računalnih metoda za rješavanje optjecanja brodova. Zbog toga je predloženo da se do 16-tog *ITTC* organizira suradnja između članica *ITTC* (instituti, sveučilišta) radi formiranja opsežne i svima dostupne baze podataka, koja bi služila za procjenu vrijednosti računalnih metoda kojima se rješavaju problemi strujanja i određuju komponente otpora brodova. Mjerenja su se trebala obaviti za forme izabrane od strane *ITTC*. Nakon početnih prijedloga i nedoumica konačno su prihvaćene četiri forme: Wigleyeva matematička forma, forma iz Serije 60 sa  $C_B = 0.60$  (osnovni model), forma *Athena* kao predstavnik brzih brodova s krmnim zrcalom, te forma *HSVA* tankera kao predstavnika sporih brodova velike punoće. Zbog velikog obima, program prikupljanja podataka se produžio te je konačno izvješće dano na 17-tom *ITTC* [62]. Za Wigleyevu formu i formu iz Serije 60 ( $C_B = 0.60$ ) predstavljeni su sveobuhvatni rezultati, dok su za formu *Athena* rezultati ograničenog obima. Od svih tih podataka za vrednovanje modela potencijalnog strujanja mogu se koristiti podaci o otporu valova i spektru valova, podaci o vrijednosti tlakova na oplakivanoj površini te podaci o profilu valova uzduž trupa modela. Mjerenja obavljena za formu *HSVA* tankera pretežno su povezana s vrednovanjem numeričkih modela koji uključuju viskozne utjecaje.

Iako su sva ta ispitivanja i mjerenja obavljena za iste uvjete koje daje *ITTC*, postoji određeno odstupanje rezultata izmjerenih na institutima i sveučilištima. Odstupanja rezultata uglavnom nastaju zbog uvjeta izvođenja eksperimenata i samih mjerenja, ispitivanja modela različitih dimenzija, mogućnosti da model tijekom ispitivanja mijenja uron i trim, itd. Premda su rezultati mjerenja u materijalima *ITTC* dani odvojeno prema mjestima gdje su mjerenja obavljena, u dijagramima prikazanim u ovom radu ti su rezultati radi bolje preglednosti predstavljeni u obliku jednog područja.

Proučavanje pouzdanosti računalnih metoda *ITTC* je uvidio kao prirodno proširenje ranijih aktivnosti te u tom smislu daje preporuke u vezi s numeričkim modeliranjem. Pri tome se pravi određena razlika između postupka potvrđivanja valjanosti (*validation*) i postupka provjeravanja (*verification*) [63]. Postupak provjeravanja numeričkog modela predstavlja ispitivanje rezultata računalnog programa, koji primijenjen za diskretizirani model, mora

ispravno prikazivati kontinuirani matematički model na temelju kojeg je razvijen. S druge strane, postupak potvrđivanja valjanosti daje dokaz da provjereni računalni program primijenjen za navedene modele na odgovarajući način predstavlja problem u stvarnosti. Postupak potvrđivanja valjanosti šira je djelatnost koja uključuje i postupak provjeravanja i usporedbu s eksperimentalnim rezultatima.

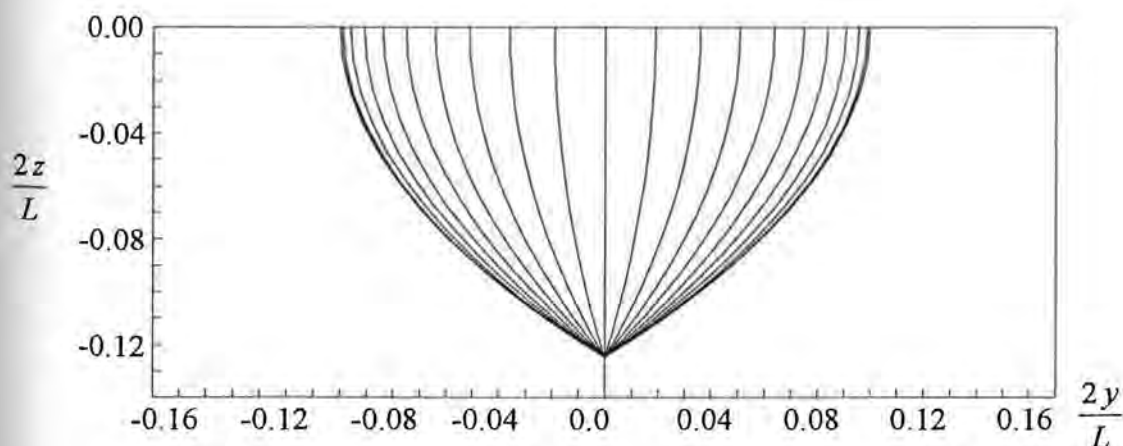
U ovom je radu dana usporedba numeričkih rezultata za Wigleyevu formu i formu iz Serije 60 ( $C_B = 0.60$ ). Numerički proračuni za formu *Athena* nisu obavljani budući da ta forma ima krmeno zrcalo. Naime, za dovoljno velike Froudeove brojeve ( $F_n > 0.35$ ), na donjem dijelu krmenog zrcala dolazi do tangencijalnog odvajanja strujanja tekućine ostavljajući krmeno zrcalo suhim. Ta lokalna pojava ima znatan utjecaj na otpor i ostale veličine te se ne može jednostavno zanemariti. Budući da ta pojava nije uključena u numerički model, proračuni za tu formu nisu obavljani. Optjecanje forme s krmenim zrcalom može se na odgovarajući način numerički modelirati primjenom metode prikazane u [39].

### 6.1.1. Wigleyeva matematička forma

Wigleyeva matematička forma ima parabolička rebra i vodne linije, a definirana je formulom:

$$y = \frac{B}{2} \left( 1 - \frac{4x^2}{L^2} \right) \left( 1 - \frac{z^2}{T^2} \right), \quad \text{za } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \quad \text{i} \quad 0 \leq z \leq T, \quad (6.1)$$

gdje je  $B/L = 0.1$  i  $T/L = 0.0625$ . Forma ima oštre rubove na pramcu, krmi i kobilici, i okomitu pramčanu i krmenu konturu, sl. 6.1. Koeficijent punoće istisnine iznosi  $C_B = 0.44$ , a prizmatički koeficijent  $C_p = 0.6667$ . Za numerički je proračun izabrano:  $L = 20$  m,  $B = 2$  m i  $T = 1.25$  m.

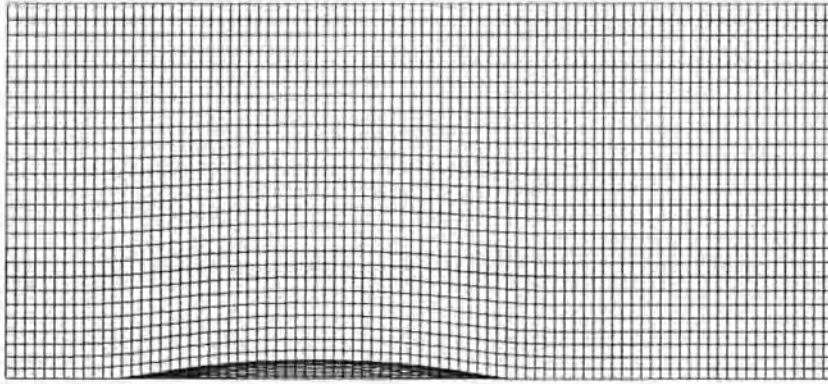


Sl. 6.1. Wigleyeva matematička forma

Za proračun je primjenjena vrlo pravilna mreža sa 520 panela na oplakivanoj i 2236 panela na slobodnoj površini, sl. 6.2. Budući da su proračuni obavljani za vrijednosti Froudeovih brojeva

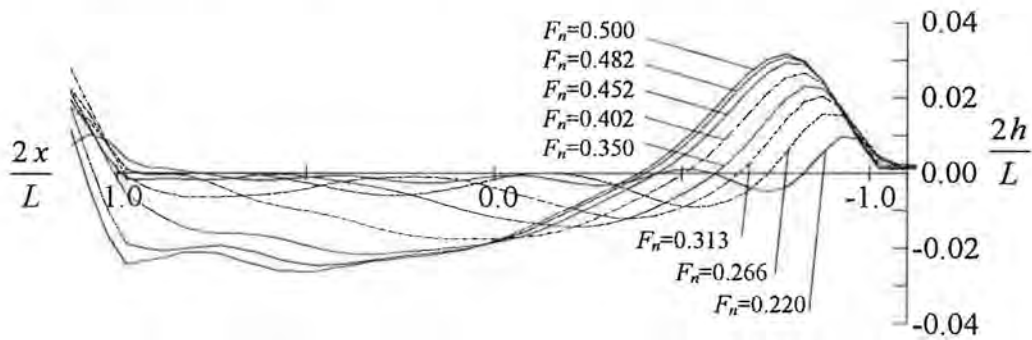


od 0.20 do 0.50, uzet je u obzir prilično veliki dio slobodne površine sa panelima relativno manjih dimenzija. Svi paneli imaju iste dimenzije u uzdužnom smjeru, dok se dimenzije panela u poprečnom smjeru udaljavanjem od broda povećavaju. Ista je mreža primjenjena u proračunima za sve Froudeove brojeve.

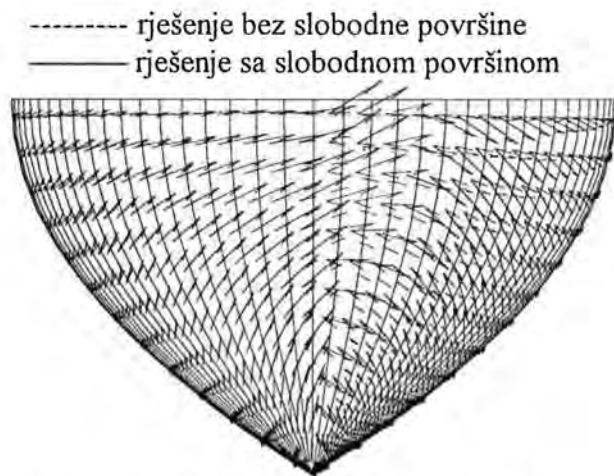


Sl. 6.2. Raspored panela za Wigleyevu matematičku formu

Na sl. 6.3. i 6.4. prikazani su određeni rezultati dobiveni numeričkim proračunima.



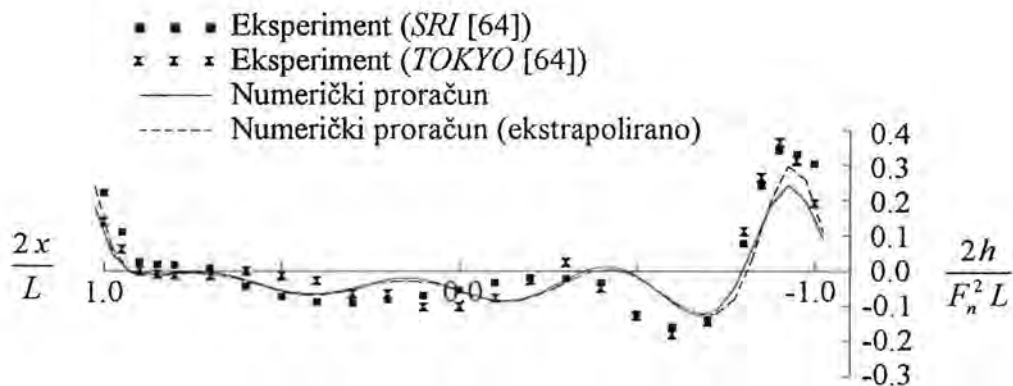
Sl. 6.3. Profili valova uz oplakivanu površinu Wigleyeve matematičke forme



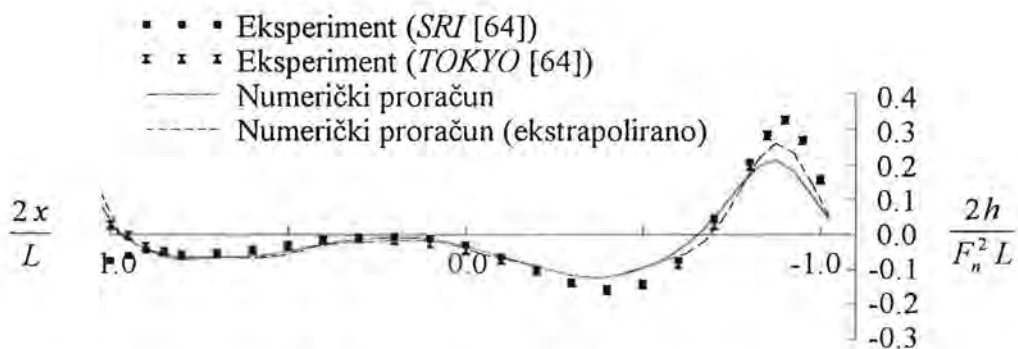
Sl. 6.4. Vektori brzina za Wigleyevu matematičku formu,  $F_n = 0.350$



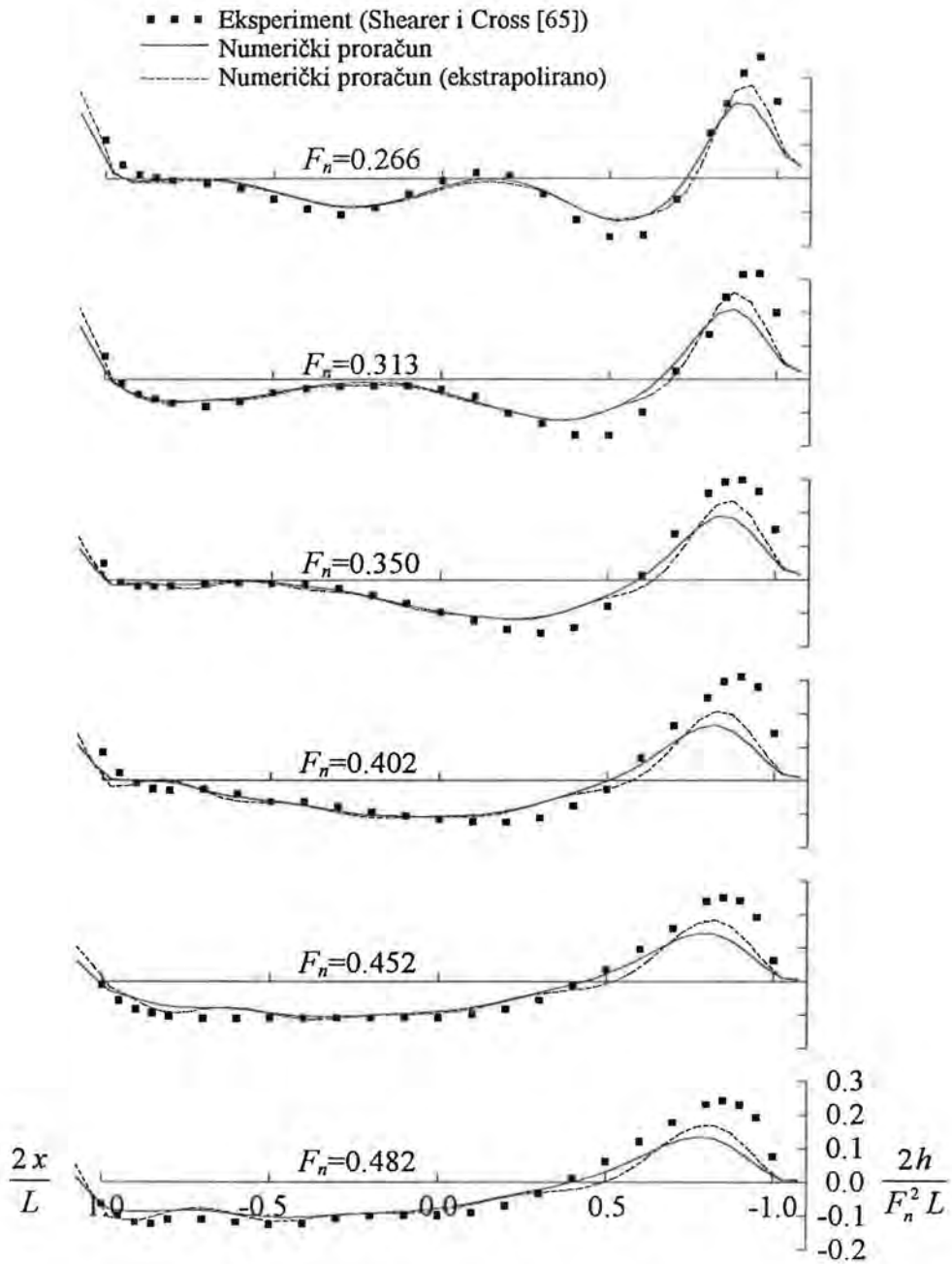
Na sl. 6.5. i 6.6. prikazana je usporedba izračunatih sa eksperimentalno određenim profilima valova za  $F_n = 0.22$  i  $0.31$  [64]. Podudaranje profila je zadovoljavajuće. Za slučaj kad je  $F_n = 0.31$ , faze valnog profila su skoro iste, ali je elevacija prvog valnog brijega i dola manja. Za slučaj kad je  $F_n = 0.22$  postoji i određeni fazni pomak. Međutim, za  $F_n = 0.22$  prisutna je i određena razlika između samih eksperimentalnih vrijednosti. Na sl. 6.7. prikazana je usporedba profila valova za različite Froudeove brojeve [64]. Profili valova se vrlo dobro podudaraju u veličini i fazi. Podudaranje je u središnjem dijelu bolje nego na pramčanom dijelu gdje se dobivaju manje vrijednosti. Jedan od razloga da je izračunati pramčani val manji od izmjenjenog leži u činjenici da je taj profil vala određen na panelima uz oplakivanu površinu. Kolokacijske točke tih panela nalaze se izvan same oplakivane površine, pa zbog strmine pramčanog vala u poprečnom smjeru dolazi do razlika u visini. Da bi se to ispitalo, elevacije valova su linearno ekstrapolirane na oplakivanu površinu, sl. 6.8. Podudaranje profila u pramčanom je dijelu u tom slučaju poboljšano, premda su razlike još uvijek prisutne. U središnjem se dijelu profil ekstrapoliranog vala ne mijenja značajnije. Manje vrijednosti pramčanog vala općenito se dobivaju svim lineariziranim metodama budući da ne modeliraju nelinearne pojave koje se pojavljuju u pramčanom dijelu. Za Wigleyevu su formu te nelinearne pojave vrlo izražene.



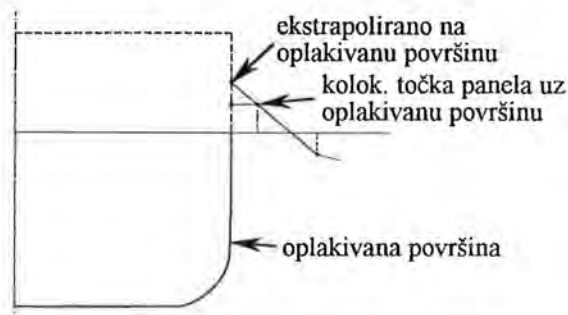
Sl. 6.5. Profil vala za Wigleyevu matematičku formu,  $F_n = 0.22$



Sl. 6.6. Profil vala za Wigleyevu matematičku formu,  $F_n = 0.31$



Sl. 6.7. Profili valova za Wigleyevu matematičku formu



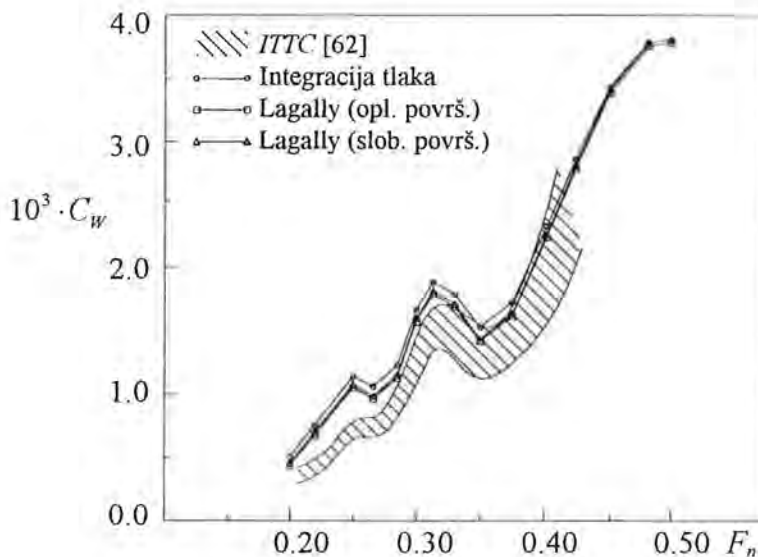
Sl. 6.8. Ekstrapolacija vala na oplakivanu površinu

Prilikom eksperimentalnog određivanja profila vala uzduž trupa modela pojavljuju se određeni problemi. Kada se valni profil određuje na osnovi fotografije snimljene za vrijeme ispitivanja modela u bazenu, bistra voda i jaka rasvjeta radi fotografiranja sprječavaju da se točno razluči crta dodira vode i trupa modela. Osim toga, na pramcu često postoji vrlo tanki film vode koji prijanja uz trup, dok se na krmi trup vrlo često naglo proširuje te je strujanje vrlo promjenljivo [66]. Uz to, mogućnost promjene urona i trima modela za vrijeme ispitivanja također utječe na rezultate.

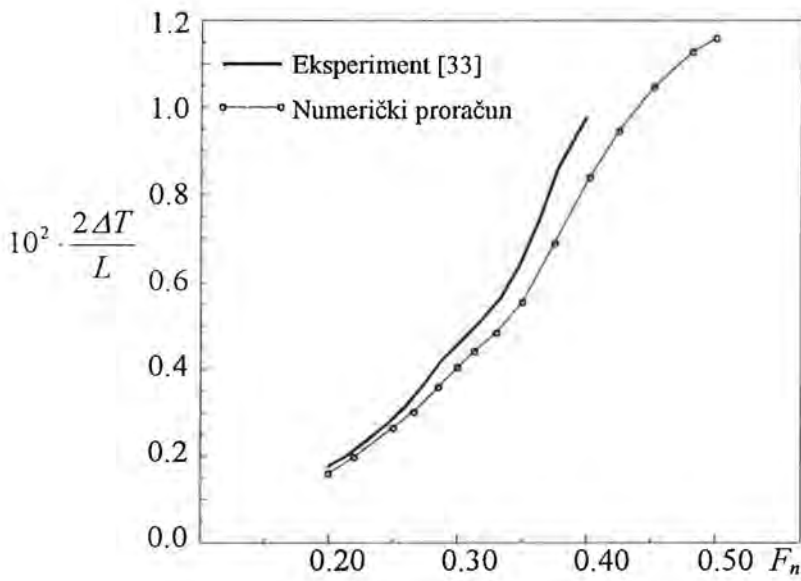
Rezultati numeričkih proračuna za Wigleyevu formu dobivenih programom FSFLOW dani su u tab. 6.1., te su prikazani na sl. 6.9. do 6.12.

$F_n$	$C_w \cdot 10^3$ Integracija tlaka	$C_w \cdot 10^3$ Lagally (opl.površ.)	$C_w \cdot 10^3$ Lagally (slob.površ.)	$\frac{2\Delta T}{L} \cdot 10^2$	$\theta \cdot 10^2$	$\frac{2\Delta T_p}{L} \cdot 10^2$	$\frac{2\Delta T_k}{L} \cdot 10^2$
0.200	0.5008	0.4350	0.4541	0.1593	-0.0049	0.1544	0.1643
0.220	0.7535	0.6771	0.7015	0.1969	-0.0101	0.1868	0.2070
0.250	1.1351	1.0486	1.0768	0.2642	-0.0316	0.2326	0.2958
0.266	1.0568	0.9614	0.9827	0.3007	-0.0281	0.2726	0.3287
0.285	1.2267	1.1254	1.1485	0.3578	-0.0852	0.2726	0.4429
0.300	1.6657	1.5685	1.5959	0.4033	-0.1341	0.2692	0.5374
0.313	1.8818	1.7873	1.8154	0.4400	-0.1411	0.2989	0.5811
0.330	1.7868	1.6875	1.7105	0.4827	-0.1219	0.3608	0.6046
0.350	1.5237	1.4120	1.4284	0.5527	-0.1669	0.3858	0.7196
0.375	1.7214	1.6112	1.6319	0.6888	-0.4349	0.2539	1.1236
0.402	2.3271	2.2346	2.2578	0.8393	-0.8978	-0.0585	1.7372
0.425	2.8554	2.7787	2.8033	0.9453	-1.3323	-0.3870	2.2776
0.452	3.4327	3.3807	3.4100	1.0463	-1.8047	-0.7585	2.8510
0.482	3.7817	3.7537	3.7803	1.1274	-2.2122	-1.0848	3.3396
0.500	3.8039	3.7800	3.8020	1.1583	-2.3942	-1.2358	3.5525

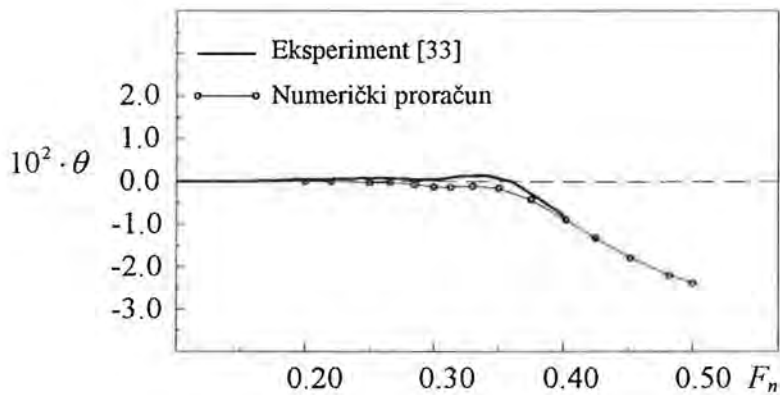
Tab. 6.1. Rezultati numeričkog proračuna za Wigleyevu matematičku formu



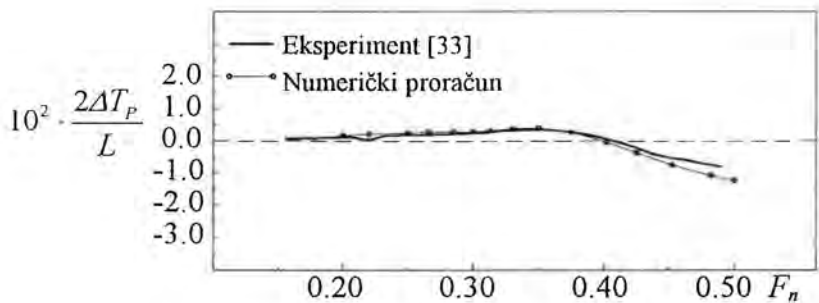
Sl. 6.9. Koeficijent otpora valova za Wigleyevu formu



Sl. 6.10. Hidrodinamički uron za Wigleyevu formu



Sl. 6.11. Hidrodinamički trim za Wigleyevu formu

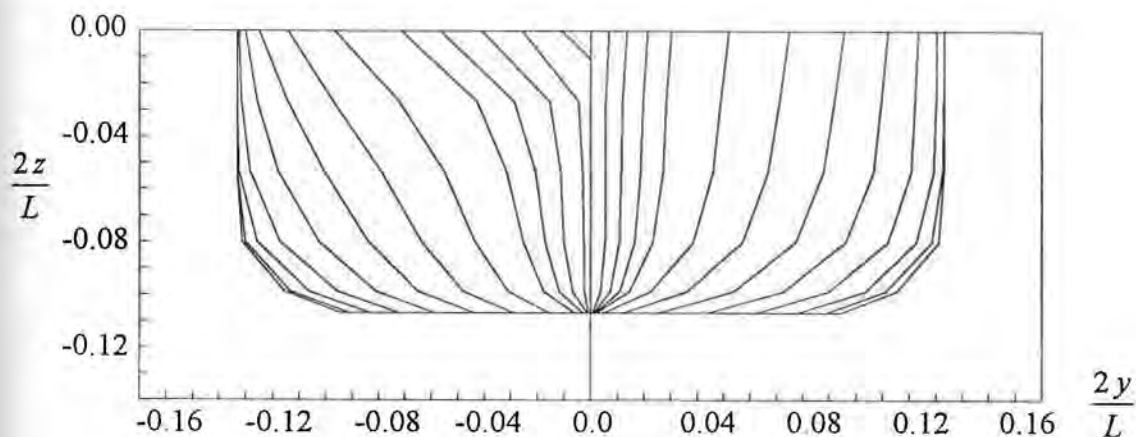


Sl. 6.12. Promjena gaza na pramcu za Wigleyevu formu

Vrijednosti koeficijenta otpora valova izračunatih integracijom tlakova po oplakivanoj površini te primjenom Lagallyevog teorema na oplakivanoj i slobodnoj površini međusobno se vrlo malo razlikuju. Usporedba s eksperimentima pokazuje vrlo dobro podudaranje oblika krivulja s oblikom područja eksperimentalnih rezultata. Proračunom su dobivene veće vrijednosti za  $F_n < 0.30$ , dok se za  $F_n > 0.30$  vrijednosti koeficijenta podudaraju sa gornjom granicom područja eksperimentalnih rezultata. Za hidrodinamički uron i trim te promjenu gaza na pramcu podudaranje oblika krivulja kao i samih vrijednosti je također vrlo dobro.

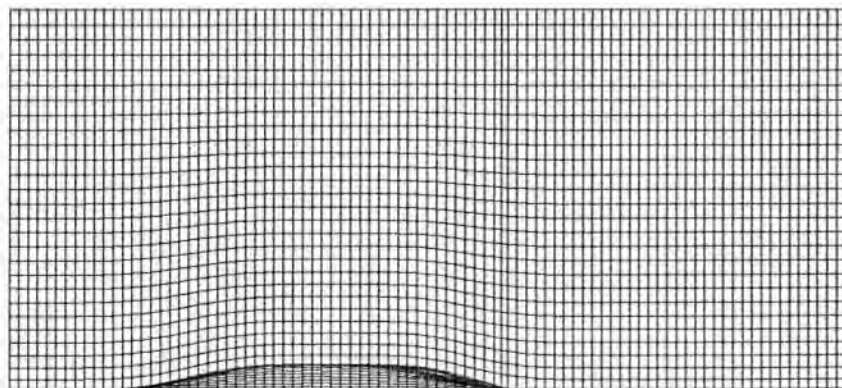
### 6.1.2. Serija 60, $C_B = 0.60$

Drugi primjer za usporedbu bila je osnovna forma iz Serije 60,  $C_B = 0.60$ , sl. 6.13. Glavne dimenzije forme iznose:  $L = 121.920$  m,  $B = 16.256$  m i  $T = 6.502$  m.



Sl. 6.13. Serija 60,  $C_B = 0.60$

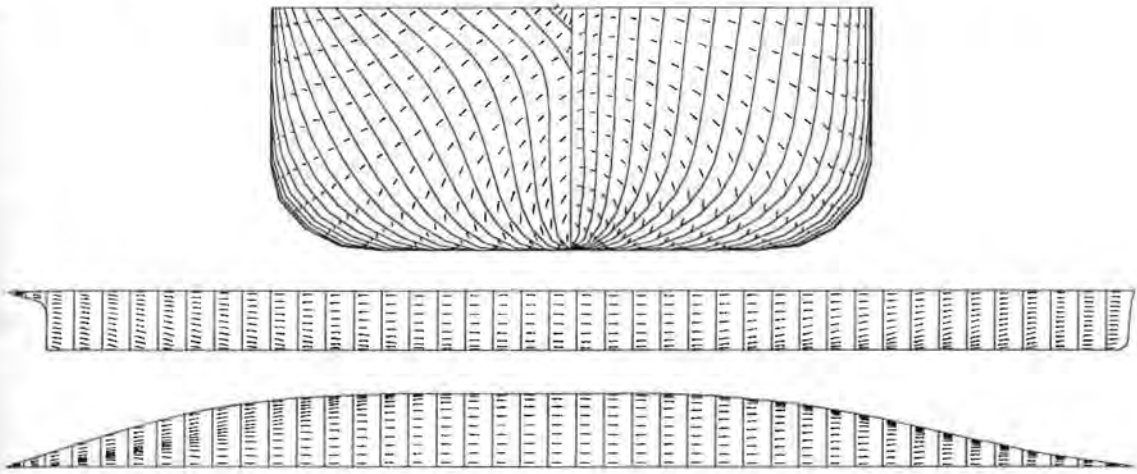
Za numerički je proračun primjenjena pravilna mreža sa 515 panela na oplakivanoj i 2403 panela na slobodnoj površini, sl. 6.14. Numerički su proračuni obavljani za Froudeove brojeve od 0.20 do 0.40.



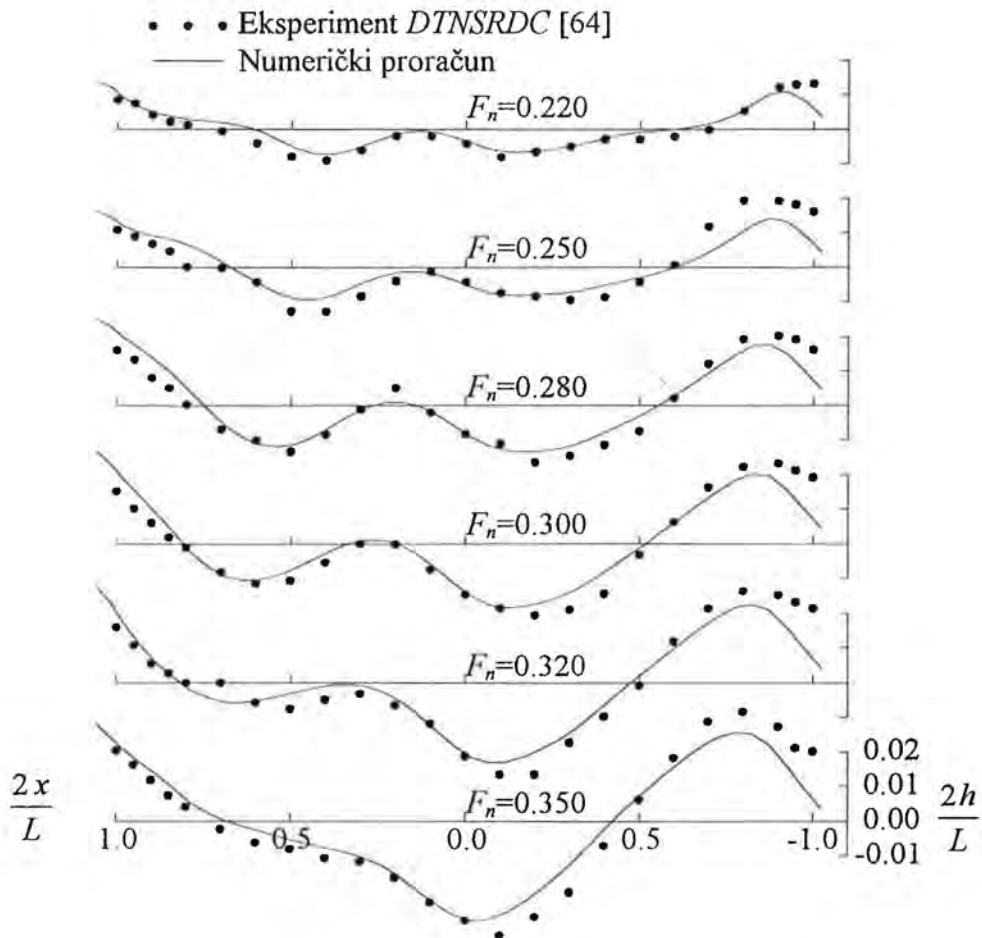
Sl. 6.14. Raspored panela za formu iz Serije 60



Na sl. 6.15. prikazani su vektori brzina na oplakivanoj površini dobiveni za  $F_n = 0.289$ .



Sl. 6.15. Vektori brzina, Serija 60  $C_B = 0.60$ ,  $F_n = 0.289$

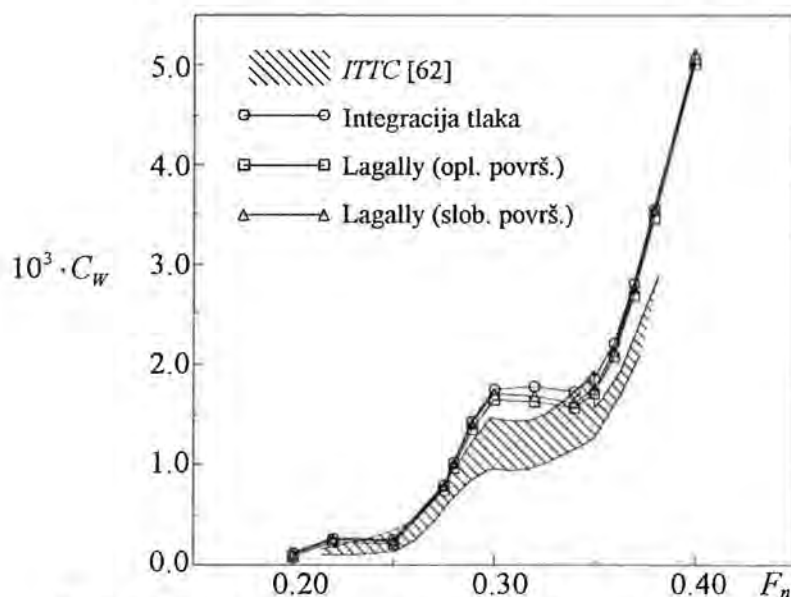


Sl. 6.16. Profili valova za formu iz Serije 60,  $C_B = 0.60$

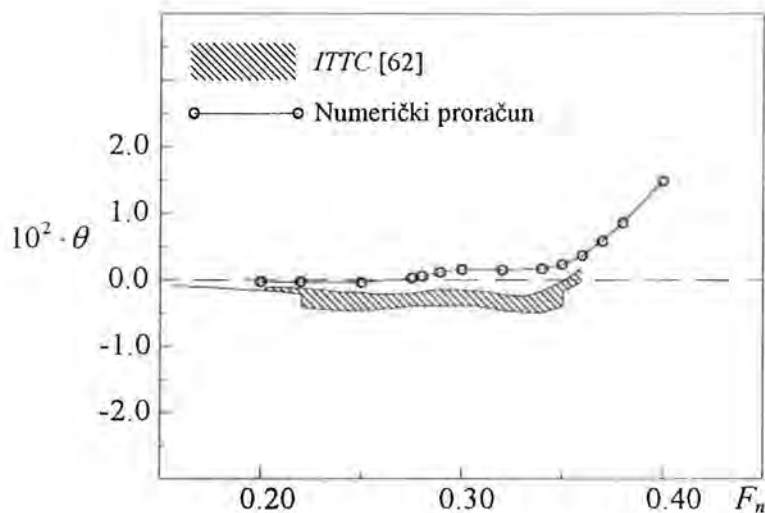
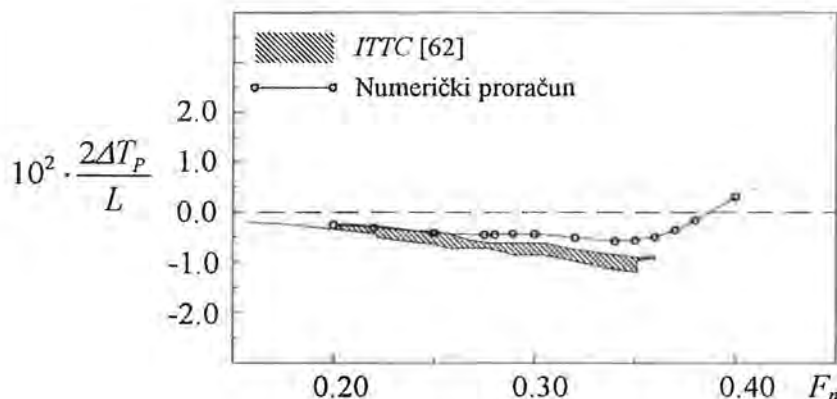
Na sl. 6.16. prikazana je usporedba izračunatih i eksperimentalno određenih profila valova [64] za različite vrijednosti Froudeovih brojeva. Prikazani izračunati valni profil odnosi se na kolokacijske točke izvan same oplakivane površine. Uočljivo je vrlo dobro podudaranje u obliku, vrijednostima i fazama profila valova. Podudaranje je u središnjem dijelu bolje nego na krajevima. Na pramcu se uobičajeno dobivaju manje vrijednosti dok se na krmi dobivaju veće vrijednosti. Kao što je već rečeno, razlika na pramčanom dijelu nastaju zbog strmine vala. Te razlike nisu izrazite kao za Wigleyevu formu budući da za formu iz Serije 60 sa  $C_B = 0.60$  nelinearne pojave na pramcu nisu tako izražene. Za razliku od pramčanog, izračunati krmeni val veći je nego izmjereni, a razlog je zanemarivanje viskoznih utjecaja odnosno graničnog sloja u modelu potencijalnog strujanja. Rezultati numeričkih proračuna dobivenih programom FSFLOW dani su u tab. 6.2., te su prikazani na sl. 6.17. do 6.19.

$F_n$	$C_w \cdot 10^3$ Integracija tlaka	$C_w \cdot 10^3$ Lagally (opl. površ.)	$C_w \cdot 10^3$ Lagally (slob. površ.)	$\frac{2\Delta T}{L} \cdot 10^2$	$\theta \cdot 10^2$	$\frac{2\Delta T_p}{L} \cdot 10^2$	$\frac{2\Delta T_k}{L} \cdot 10^2$
0.200	0.1159	0.0805	0.1013	0.2256	0.0285	0.2563	0.1987
0.220	0.2638	0.2244	0.2500	0.2786	0.0294	0.3103	0.2509
0.250	0.2507	0.2086	0.2309	0.3701	0.0412	0.4145	0.3314
0.275	0.7967	0.7447	0.7862	0.4807	-0.0233	0.4555	0.5026
0.280	1.0239	0.9634	1.0119	0.5063	-0.0535	0.4485	0.5567
0.289	1.4312	1.3507	1.4087	0.5503	-0.1088	0.4328	0.6527
0.300	1.7549	1.6478	1.7084	0.5977	-0.1515	0.4341	0.7403
0.320	1.7824	1.6290	1.6867	0.6680	-0.1452	0.5112	0.8047
0.340	1.7297	1.5665	1.6150	0.7501	-0.1613	0.5760	0.9019
0.350	1.8611	1.7092	1.7562	0.8091	-0.2254	0.5658	1.0214
0.360	2.2133	2.0770	2.1320	0.8867	-0.3589	0.4993	1.2246
0.370	2.8060	2.6867	2.7565	0.9825	-0.5726	0.3645	1.5217
0.380	3.5576	3.4580	3.5427	1.0893	-0.8514	0.1704	1.8910
0.400	5.0589	5.0112	5.1089	1.2953	-1.4791	-0.3011	2.6880

Tab. 6.2. Rezultati numeričkog proračuna za Seriju 60,  $C_B = 0.60$



Sl. 6.17. Koeficijent otpora valova za formu iz Serije 60,  $C_B = 0.60$

Sl. 6.18. Hidrodinamički trim za formu iz Serije 60,  $C_B = 0.60$ Sl. 6.19. Promjena gaza na pramcu za formu iz Serije 60,  $C_B = 0.60$ 

Usporedba koeficijenata otpora valova pokazuje vrlo dobro podudaranje oblika krivulja s oblikom područja eksperimentalnih rezultata. Podudaranje vrijednosti bolje je za  $F_n < 0.30$ , dok su za  $0.30 < F_n < 0.34$  razlike najveće. Oblici krivulja hidrodinamičkog trima i promjene gaza na pramcu se dobro podudaraju, premda također postoji određena razlika u vrijednostima.

## 6.2. Eksperimenti u hidrodinamičkom laboratoriju Sveučilišta u Trstu

Tri osnovna modela iz Serije 60 ( $C_B = 0.60, 0.70, 0.80$ ) [67] sa značajkama danim u tab. 6.3 ispitani su na Sveučilištu u Trstu, u bazenu hidrodinamičkog laboratorija Odjela za brodogradnju (*Dipartimento di Ingegneria Navale, del Mare e per l'Ambiente*). Bazen za ispitivanje modela brodova dug je 50 m, širok 3.1 m i dubok 1.6 m. Pokusi u bazenu obavljani su radi određivanja otpora modela, a ujedno su mjerene elevacije valova na temelju kojih je

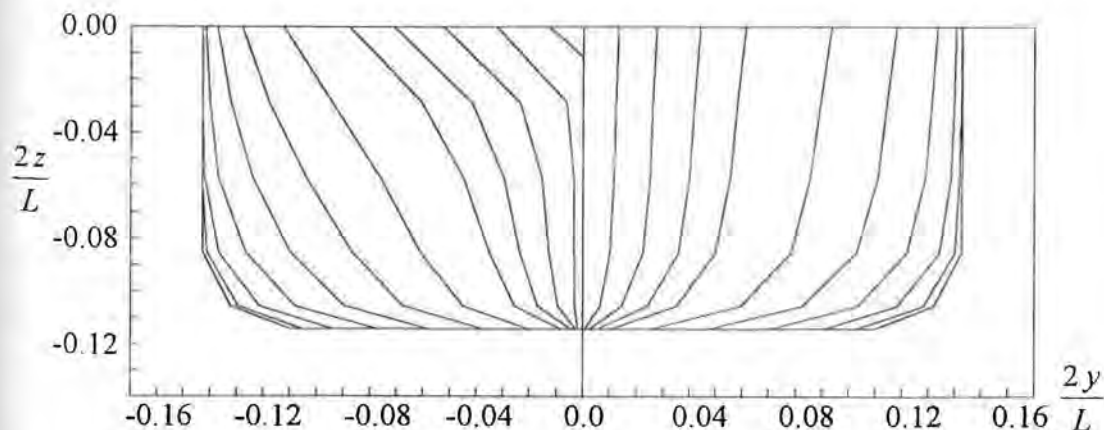
određen otpor valova. Otpor valova je određen metodom uzdužnog presjeka [57]. Mjerenje elevacija valova obavljeno je pomoću nekoliko kapacitetnih sondi, od kojih je najbliža modelu bila postavljena na udaljenosti  $0.2L_{WL}$  od simetrale modela. Ta je udaljenost u skladu s preporukama koje daje *ITTC*, a potrebna je radi izbjegavanja utjecaja graničnog sloja modela na rezultate. Zbog relativno malih dimenzija bazena, modeli su tegljeni nesimetrično u odnosu na simetralu bazena, s pomakom od  $0.1L_{WL}$  od simetrale bazena. Pri ispitivanju modeli su bili slobodni za promjenu urona i trima.

	Model 1	Model 2	Model 3
$C_B$	0.60	0.70	0.80
$L_{PP}$ , m	1.875	1.750	1.625
$L_{WL}$ , m	1.906	1.779	1.652
$B$ , m	0.250	0.250	0.250
$T$ , m	0.100	0.100	0.100
$S$ , m <sup>2</sup>	0.6076	0.6107	0.6162
$\nabla$ , m <sup>3</sup>	0.0281	0.0306	0.0325

Tab. 6.3. Značajke ispitanih modela

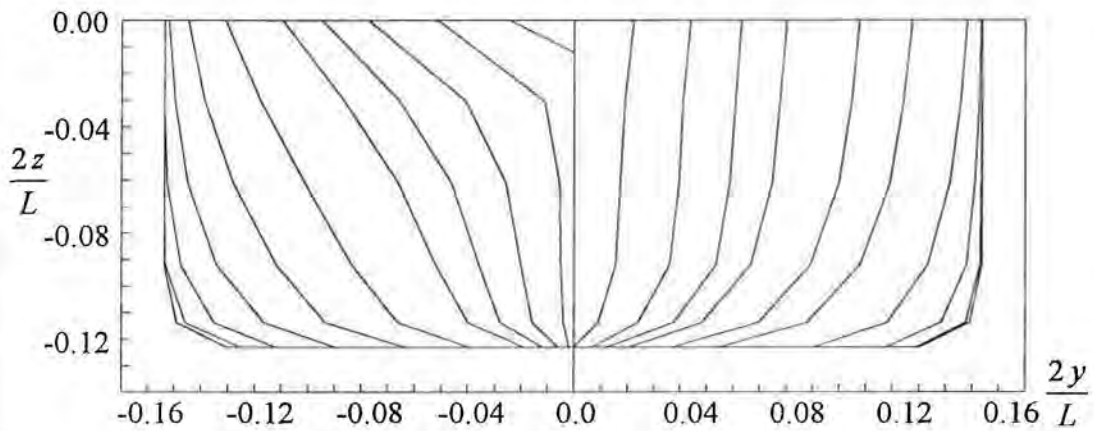
Od izmjerenih podataka, autoru su bili dostupni podaci o vrijednostima otpora valova, pa su te usporedbe i prikazane. Numerički su proračuni obavljeni za  $F_n = 0.20$  do  $0.40$  za formu sa  $C_B = 0.70$  te  $F_n = 0.20$  do  $0.34$  za  $C_B = 0.80$ . Za sve je proračune primjenjena pravilna mreža sa 515 panela na oplakivanoj i 2403 panela na slobodnoj površini slična onoj prikazanoj na sl. 6.14.

Osnovna forma iz Serije 60 sa  $C_B = 0.70$  prikazana je na sl. 6.20. Glavne dimenzije forme iznose:  $L = 121.920$  m,  $B = 17.416$  m i  $T = 6.968$  m.



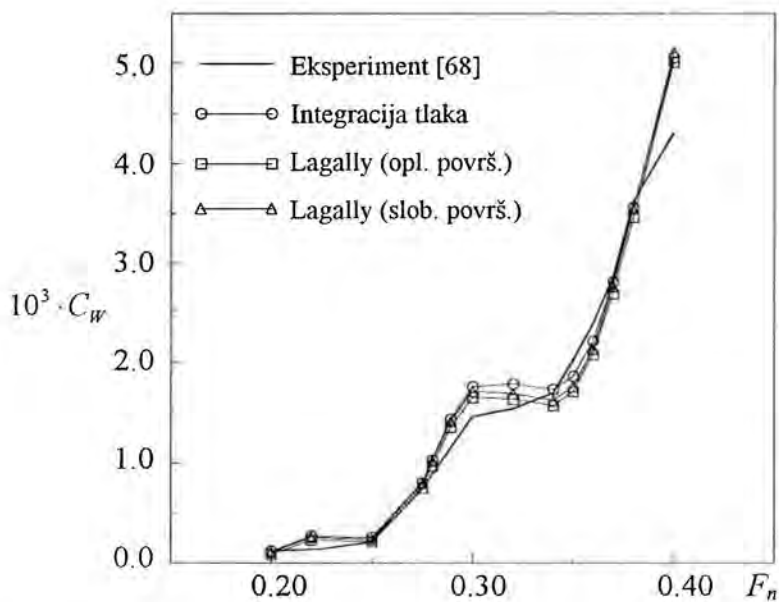
Sl. 6.20. Serija 60,  $C_B = 0.70$

Osnovna forma sa  $C_B = 0.80$  prikazana je na sl. 6.21. Glavne su dimenzije forme:  $L = 121.920$  m,  $B = 18.757$  m i  $T = 7.495$  m.



Sl. 6.21. Serija 60,  $C_B = 0.80$

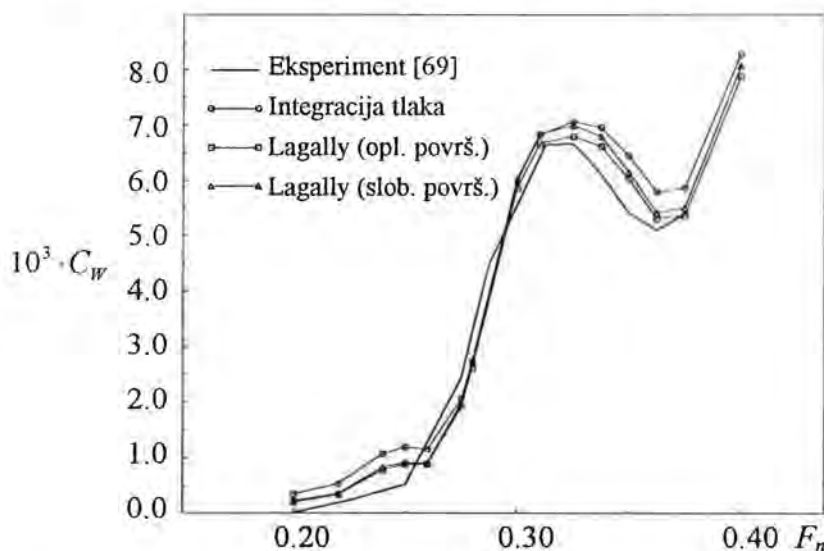
U tab. 6.4. i 6.5. dani su rezultati numeričkih proračuna, a na sl. 6.22. do 6.24. prikazane su usporedbe s eksperimentalno određenim koeficijentima otpora valova navedenih formi.



Sl. 6.22. Koeficijent otpora valova za formu iz Serije 60,  $C_B = 0.60$

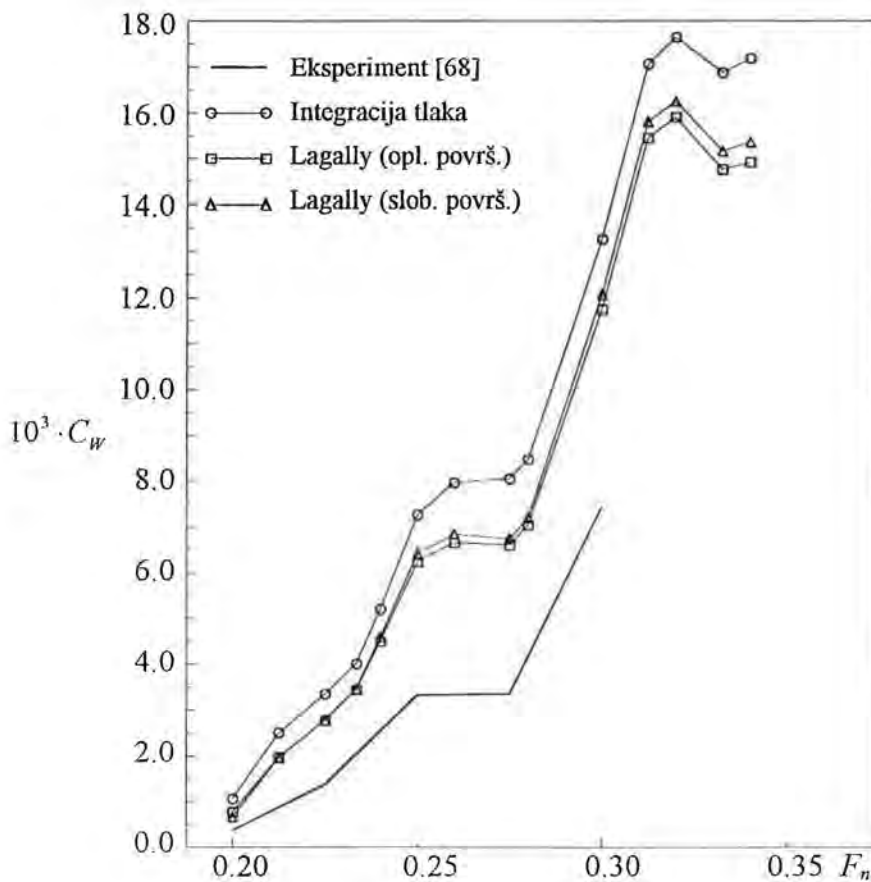


$F_n$	$C_w \cdot 10^3$ Integracija tlaka	$C_w \cdot 10^3$ Lagally (opl. površ.)	$C_w \cdot 10^3$ Lagally (slob. površ.)	$\frac{2\Delta T}{L} \cdot 10^2$	$\theta \cdot 10^2$	$\frac{2\Delta T_p}{L} \cdot 10^2$	$\frac{2\Delta T_k}{L} \cdot 10^2$
0.200	0.3454	0.2027	0.2225	0.2803	0.1373	0.4277	0.1503
0.220	0.5237	0.3296	0.3516	0.3445	0.1670	0.5238	0.1864
0.240	1.0615	0.7762	0.8196	0.4217	0.1746	0.6091	0.2563
0.250	1.1826	0.8717	0.9101	0.4576	0.1960	0.6681	0.2720
0.260	1.1534	0.8784	0.9079	0.4906	0.2327	0.7405	0.2703
0.275	2.0524	1.9013	1.9615	0.5738	0.1970	0.7853	0.3872
0.280	2.7293	2.6063	2.6916	0.6104	0.1448	0.7659	0.4733
0.300	5.9820	5.8553	6.0264	0.7608	-0.1578	0.5913	0.9103
0.310	6.8214	6.6617	6.8420	0.8161	-0.2414	0.5568	1.0447
0.325	7.0543	6.7923	6.9864	0.8687	-0.2677	0.5812	1.1222
0.3375	6.9530	6.6102	6.7904	0.9147	-0.2900	0.6032	1.1893
0.350	6.4400	6.0235	6.1503	0.9545	-0.2811	0.6526	1.2208
0.3625	5.7847	5.3043	5.4058	0.9902	-0.2643	0.7064	1.2405
0.375	5.8630	5.3619	5.4981	1.0700	-0.3995	0.6410	1.4484
0.400	8.2777	7.8682	8.0678	1.3930	-1.3435	0.0577	2.5707

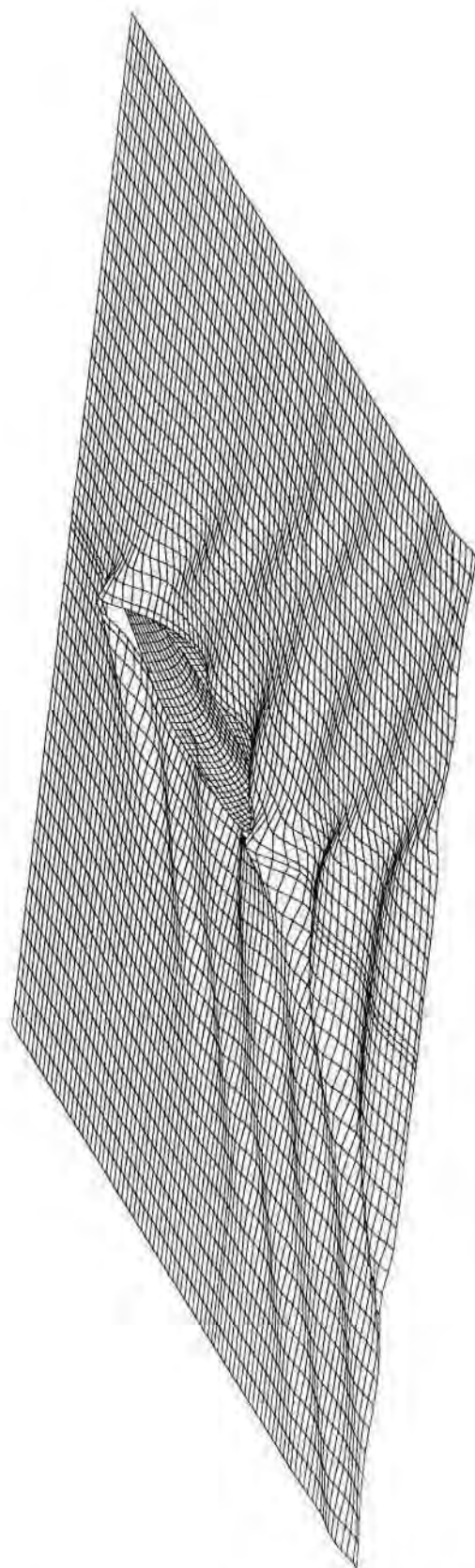
Tab. 6.4. Rezultati numeričkog proračuna za Seriju 60,  $C_B = 0.70$ Sl. 6.23. Koeficijent otpora valova za formu iz Serije 60,  $C_B = 0.70$ 

Iz priloženih se dijagrama može uočiti značajno povećanje koeficijenta otpora valova s povećanjem koeficijenta punoće istisnine. Za sve je forme vidljivo međusobno dobro podudaranje oblika numeričkih i eksperimentalnih krivulja otpora. Grbe i dolovi u tim se krivuljama pojavljuju za približno iste vrijednosti Froudeovih brojeva. Osim toga, za forme sa  $C_B = 0.60$  i  $C_B = 0.70$  podudaranje samih vrijednosti je zadovoljavajuće skoro za sve vrijednosti Froudeovih brojeva. Međutim, za formu sa  $C_B = 0.80$  pojavljuju se velike razlike između vrijednosti izračunatih i eksperimentalno određenih koeficijenata otpora valova. Integracijom tlaka dobivaju se veće vrijednosti koeficijenta otpora valova, dok se pomoću Lagallyevog teorema dobivaju manje vrijednosti.

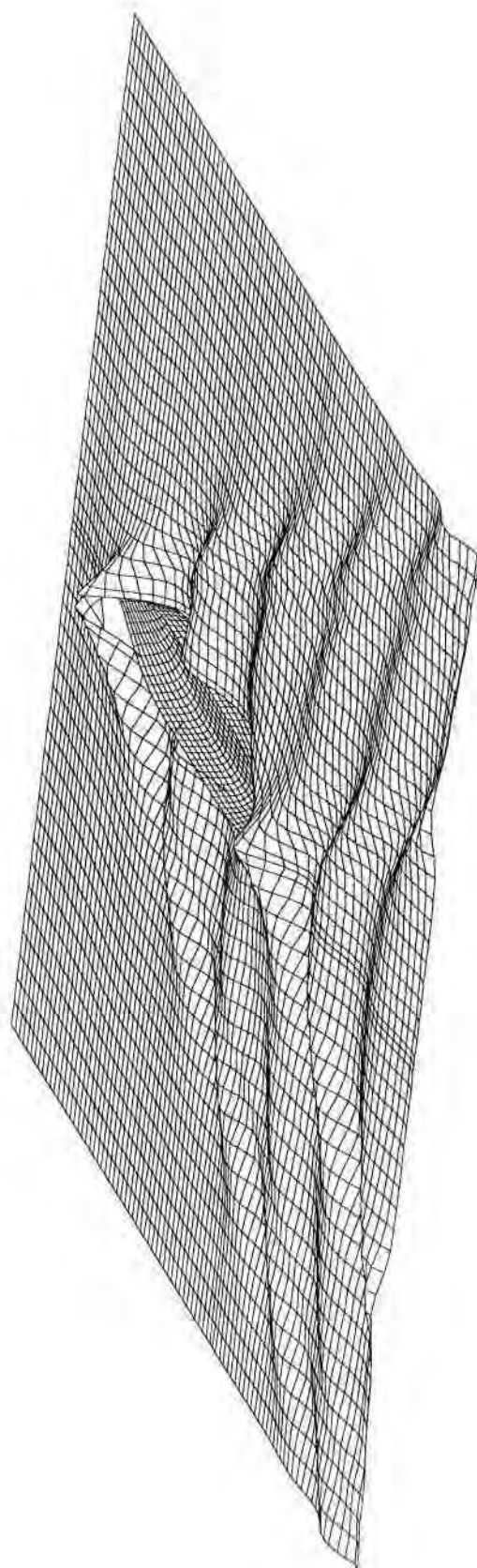
$F_n$	$C_w \cdot 10^3$ Integracija tlaka	$C_w \cdot 10^3$ Lagally (opl. površ.)	$C_w \cdot 10^3$ Lagally (slob. površ.)	$\frac{2\Delta T}{L} \cdot 10^2$	$\theta \cdot 10^2$	$\frac{2\Delta T_p}{L} \cdot 10^2$	$\frac{2\Delta T_k}{L} \cdot 10^2$
0.200	1.0545	0.7670	0.6558	0.3349	0.2538	0.5863	0.0734
0.2125	2.5026	1.9681	1.9546	0.3795	0.2589	0.6359	0.1128
0.225	3.3484	2.7811	2.7793	0.4173	0.2962	0.7107	0.1121
0.2335	4.0107	3.4386	3.4679	0.4445	0.3138	0.7554	0.1212
0.240	5.1973	4.4992	4.5952	0.4714	0.2840	0.7528	0.1788
0.250	7.2637	6.2306	6.4153	0.5223	0.2051	0.7255	0.3110
0.260	7.9575	6.6485	6.8403	0.5495	0.2012	0.7488	0.3423
0.275	8.0409	6.5933	6.7419	0.5801	0.2455	0.8232	0.3271
0.280	8.4662	7.0380	7.1958	0.5998	0.2259	0.8236	0.3670
0.300	13.2494	11.7382	12.0648	0.7375	-0.1621	0.5770	0.9045
0.3125	17.0634	15.4469	15.8044	0.8823	-0.5693	0.3184	1.4689
0.320	17.6437	15.9059	16.2511	0.9139	-0.6390	0.2810	1.5723
0.3325	16.8732	14.7592	15.1541	0.8848	-0.5506	0.3394	1.4522
0.340	17.1833	14.9159	15.3592	0.9150	-0.6322	0.2887	1.5664

Tab. 6.5. Rezultati numeričkog proračuna za Seriju 60,  $C_B = 0.80$ Sl. 6.24. Koeficijent otpora valova za formu iz Serije 60,  $C_B = 0.80$ 

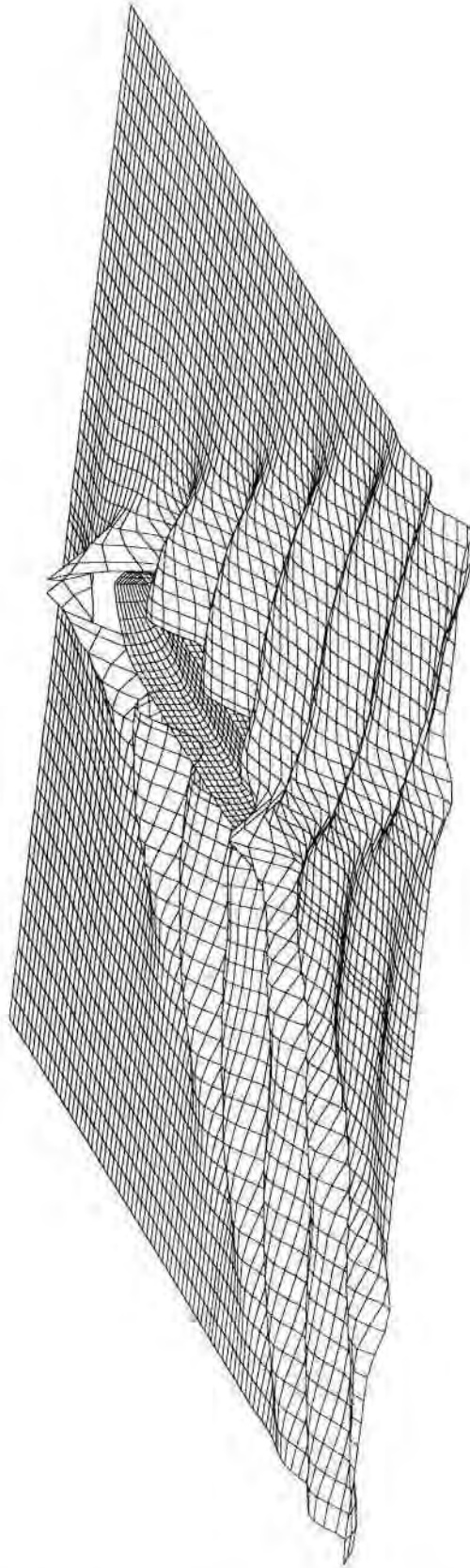
Na sl. 6.25., 6.26 i 6.27 prikazana je valovita slobodna površina za navedene forme.



Sl. 6.25 Serija 60,  $C_B = 0.60$ ,  $F_n = 0.250$  (val uvećan 5 puta)



Sl. 6.26. Serija 60,  $C_B = 0.70$ ,  $F_n = 0.250$  (val uvećan 5 puta)



Sl. 6.27. Serija 60,  $C_B = 0.80$ ,  $F_n = 0.225$  (val uvećan 5 puta)



## 7. OPTIMIZIRANJE FORME BRODA PRIMJENOM GENETSKOG ALGORITMA

### 7.1. Optimiziranje forme broda

Svaki problem optimiziranja ima za cilj optimizirati odnosno odrediti maksimum ili minimum određene funkcije  $f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  koja se naziva funkcijom cilja. Teorija optimiziranja razvija metode za nalaženje vrijednosti varijabli  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  koje daju optimalnu vrijednost (minimum ili maksimum) funkcije cilja. Za većinu problema, područje vrijednosti tih varijabli nije proizvoljno, već je određeno ograničenjima, odnosno dodatnim uvjetima koji proizlaze iz prirode problema te samih varijabli.

Optimiziranje forme broda nije jednostavan postupak, budući da postoji cijeli niz često proturječnih zahtjeva koje ta forma mora zadovoljiti. Zbog toga se vrlo često forma optimizira na osnovi manjeg broja ili čak i samo jednog kriterija. No, i u tim je slučajevima optimiziranje vrlo složeno. U teorijskim se istraživanjima vrlo često pojavljuje hidrodinamički kriterij minimalnog otpora valova [70]. Ovakva teorijska istraživanja mogu pružiti prikladnu teorijsku potporu stalnim naporima za optimiziranje hidrodinamičkih značajki brodova. Otpor valova općenito sudjeluje sa 20% do 80% u ukupnom otporu broda u mirnoj vodi. Iskustvo pokazuje da je ova komponenta otpora vrlo osjetljiva na promjene u formi broda, te se značajna smanjenja otpora valova često mogu dobiti bez značajnijeg utjecaja na istisninu, a tipičan je primjer pramčani bulb.

Uz glavne dimenzije, otpor valova broda prvenstveno ovisi o geometriji forme koja je definirana poluširinama rebara na vodnim linijama i opisom pramčane i krmene konture. Iz toga proizlazi da je prirodno za optimiziranje forme ove poluširine rebara izabrati kao varijable problema [71]. Kao i u većini problema optimiziranja, i u ovom slučaju odgovarajuća ograničenja igraju važnu ulogu. Ta se ograničenja odnose na granične vrijednosti unutar kojih se dopušta variranje poluširina kao i odgovarajućih hidrostatskih veličina forme. Hidrostatske veličine koje mogu biti od značaja su:

- površina vodne linije odnosno koeficijent površine vodne linije,
- površina glavnog ili pojedinog rebra odnosno koeficijent punoće rebra,
- volumen istisnine odnosno koeficijent punoće istisnine,
- uzdužni i vertikalni položaj težišta istisnine, itd.

Istovremeno uključivanje svih ovih ograničenja u optimizacijski proces vrlo je složeno te se radi toga forma koja se optimizira sa stajališta minimalnog otpora valova podvrgava pojedinom ili kombinaciji nekoliko ograničenja. Za uključivanje ograničenja hidrostatskih veličina potrebno je imati mogućnost određivanja istih.

### 7.2. Genetski algoritam

Genetski algoritmi su računalne simulacije evolucijskih procesa u prirodi, koje se temelje na načelima prirodnog odabira i genetike. Genetskim se algoritmima simuliraju procesi koji slijede Darwinovo načelo prirodnog odabira i preživljavanja najprilagođenijih jedinki. U prirodi, u nastajanju novih naraštaja najuspješnije jedinke imaju najveći udio, te se tako iz naraštaja u

naraštaj populaciji koja je izložena stalnim uvjetima povećava prilagođenost. Slično kao u prirodi, i u genetskom algoritmu jedinke žive u populacijama unutar definirane okoline te se za svaku jedinku može odrediti koliko je dobro prilagođena uvjetima življenja u toj okolini. Oponašajući procese u prirodi, operatorima genetskog algoritma djeluje se na naraštaje umjetnih populacija stvarajući bolje prilagođene jedinke sve dok se konačno ne dobije jedinka s najboljom prilagođenosti.

Osnovni operatori genetskog algoritma koji su dovoljni za uspješno rješavanje različitih praktičnih problema optimiziranja su odabir roditelja, križanje i mutacija, sl. 7.1.



Sl. 7.1. Umjetne jedinke u populaciji i operatori genetskog algoritma

Jasno je da ovi operatori tek vrlo pojednostavljeno oponašaju prirodne procese razvoja, prilagodbe i razmnožavanja živih bića. Priroda vrlo uspješno stvara sve savršenije i savršenije oblike života pa slijedeći logiku da je u postupcima optimiziranja treba samo što vjernije oponašati, razvijeni su i brojni napredni operatori genetskih algoritama kao npr. diploidnost i dominantni geni, inverzije, redukcija incesta, određivanja spola, migracije između subpopulacija, itd.

Za razliku od prirodnog procesa evolucije, genetskom algoritmu nisu potrebni milijuni godina za dobivanje rezultata. Međutim, proračuni su vrlo često dugotrajni i potreban je veći broj sati ili dana. Stoga se za velike i složene probleme zahtijevaju brza računala radi dobivanja optimalnih rješenja u razumnom vremenu.

### 7.2.1. Kodiranje varijabli u oblik umjetnog kromosoma

Kao što je rečeno, zadatak optimiziranja nekog problema sastoji se u odabiru skupa varijabli  $\mu_1, \dots, \mu_n$ . Za određene vrijednosti varijabli dobiva se točno određena vrijednost funkcije cilja. Vrijednosti skupa varijabli čine fenotip neke jedinke. Međutim, budući da genetski algoritam djeluje na razini gena, potrebno je poznavati genotip svake jedinke pa je osnovni problem preslikavanje između fenotipa i genotipa, odnosno kodiranje skupa varijabli u oblik umjetnog kromosoma.

Umjetni je kromosom niz gena. Problem kodiranja varijabli je problem odabira duljine kromosoma te onoga što se u genetskom algoritmu naziva abecedom gena. U rješavanju tog problema koriste se dva temeljna načela: načelo najmanje abecede i načelo smislenih graditeljskih blokova [72]. Zbog toga se pri kodiranju koristi binarna abeceda. Gene koji predstavljaju jednu varijablu drži se u nizu od  $l$  uzastopnih položaja, a cjeline gena koji pripadaju različitim varijablama slaže se jedne iza drugih te se dobiva kromosom duljine  $nl$ . Kromosom jedne jedinke može se prikazati u obliku:

$$a_1 a_2 \dots a_1 \dots a_{(i-1)l+1} a_{(i-1)l+2} \dots a_{il} \dots a_{(n-1)l+1} a_{(n-1)l+2} \dots a_{nl}, \quad (7.1)$$

gdje je svaki pojedini gen iz binarne abecede:

$$a_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, nl. \quad (7.2)$$

Dio kromosoma (7.1)

$$a_{(i-1)l+1} a_{(i-1)l+2} \dots a_{il} \quad (7.3)$$

predstavlja binarni zapis prirodnoga broja:

$$n_i = a_{(i-1)l+1} 2^0 + a_{(i-1)l+2} 2^1 + \dots + a_{il} 2^{l-1} \quad (7.4)$$

koji leži u intervalu  $[0, 2^l - 1]$ . Kod zadatka optimiziranja  $i$ -ta varijabla je realni broj koji ima smisao samo ako poprima vrijednost između neke najmanje i najveće moguće vrijednosti  $[\mu_{i,min}, \mu_{i,maks}]$ . Na taj način ako se obavi bijektivno afino preslikavanje intervala  $[0, 2^l - 1]$  na interval  $[\mu_{i,min}, \mu_{i,maks}]$  dobiva se smisljena vrijednost  $i$ -te varijable:

$$\mu_i = \frac{\mu_{i,maks} - \mu_{i,min}}{2^l - 1} n_i + \mu_{i,min}. \quad (7.5)$$

Kada se ovaj postupak ponovi za sve dijelove kromosoma  $i = 1, \dots, n$ , za jedinku je iz genotipa pročitana fenotip. Obrnuti postupak uz zaokruživanje predstavlja kodiranje skupa varijabli.

### 7.2.2. Prilagođenost jedinke

U prirodi je neka jedinka više ili manje uspješna od drugih, ovisno kako joj genotip preslikan u fenotip omogućava da odgovori na uvjete u kojima živi. Za svaku se jedinku u genetskom algoritmu iz pripadnog skupa varijabli može izračunati vrijednost funkcije cilja te zaključiti kako u usporedbi s drugim jedinkama zadovoljava postavljene kriterije. Radi uspoređivanja jedinki, nužno je imati mjeru prilagođenosti, koja mora uvijek poprimati nenegativne vrijednosti. Za razliku od toga, funkcija cilja općenito može poprimati i pozitivne i negativne vrijednosti, a optimalna vrijednost može biti najveća ili najmanja vrijednost te funkcije, ovisno

o problemu koji se razmatra. Stoga nije moguće jednostavno izjednačiti funkciju cilja i mjeru prilagođenosti.

Ako se zadatak optimiziranja sastoji u nalaženju skupa varijabli za koje je vrijednost funkcije cilja  $g(x)$  najmanja, mogući problem pojave negativnih vrijednosti rješava se dodavanjem dovoljno velikog pozitivnog broja  $C_{maks}$ :

$$f(x) = \begin{cases} C_{maks} - g(x), & \text{za } g(x) < C_{maks}; \\ 0; & \end{cases} \quad (7.6)$$

Ako se zadatak optimiziranja sastoji u nalaženju skupa varijabli za koje je vrijednost funkcije cilja  $u(x)$  najveća, tada se rješenje dobiva izravno iz vrijednosti funkcije. Međutim, i u ovom se slučaju može pojaviti problem negativnih vrijednosti funkcije  $u(x)$ , pa se pogodna mjera prilagođenosti dobiva dodavanjem dovoljno velikog pozitivnog broja  $C_{min}$ :

$$f(x) = \begin{cases} u(x) + C_{min}, & \text{za } u(x) + C_{min} > 0; \\ 0; & \end{cases} \quad (7.7)$$

Prilagođenost dobivena na ovaj način naziva se sirova prilagođenost. U genetskom algoritmu jedinke ovisno o prilagođenosti sudjeluju u stvaranju novih naraštaja. Kako je u prvom naraštaju neke populacije velika većina jedinki slabo prilagođena i samo nekoliko jedinki izrazito odskače od prosjeka, već u idućoj generaciji dominirali bi njihovi potomci te bi se prerano izgubio genetski materijal. S druge strane, u kasnijim se naraštajima pojavljuje potpuno različit problem. Razlika između prilagođenosti jedinki se smanjuje te i osrednje i bolje jedinke dobivaju sličan udio u potomstvu čime se napredovanje populacije usporava. U oba je slučaja problem u prevelikoj, odnosno premaloj razlici između najveće i prosječne prilagođenosti u nekoj populaciji, a koji se može riješiti uvođenjem skalirane prilagođenosti. Jedan od uspješnih načina skaliranja je linearno skaliranje, sl. 7.2.

Ako je  $f$  sirova, a  $f'$  skalirana prilagođenost, tada linearno skaliranje zahtijeva linearnu zavisnost između  $f$  i  $f'$ :

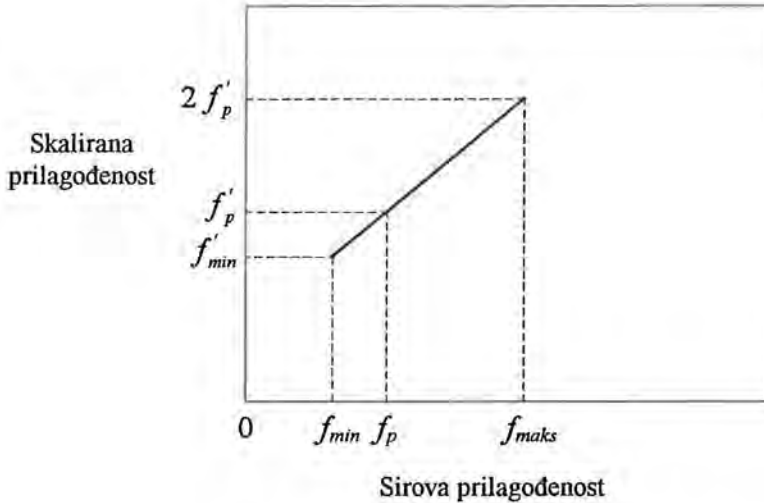
$$f' = a f + b. \quad (7.8)$$

Koeficijenti  $a$  i  $b$  mogu se odrediti na različite načine. Međutim, uvijek se zahtijeva da prosječna skalirana prilagođenost  $f'_p$  bude jednaka prosječnoj sirovoj prilagođenosti  $f_p$  budući da će naredni postupci odabira osigurati da svaka prosječna jedinka sudjeluje u stvaranju jednog potomka u sljedećem naraštaju. Radi mogućnosti kontrole broja potomaka jedinke s najvećom sirovom prilagođenosti, usvaja se drugi odnos za dobivanje najveće skalirane prilagođenosti:

$$f'_{maks} = C_{mult} f_p, \quad (7.9)$$

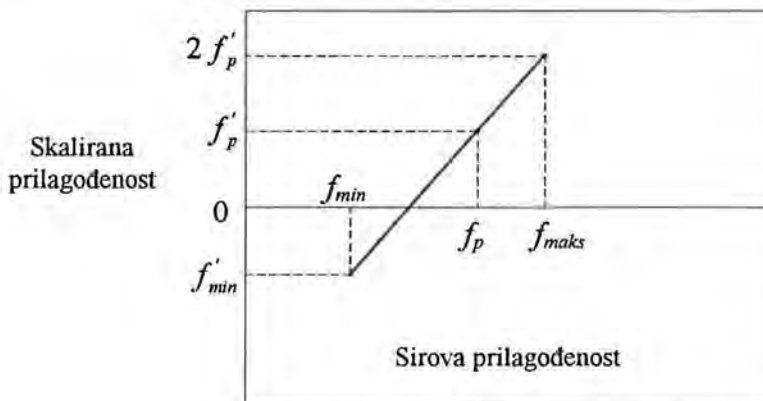


gdje je  $C_{mult}$  željeni broj očekivanih potomaka najbolje jedinke. Za tipično male populacije (50 do 100 jedinki), uspješno se primjenjuju vrijednosti  $C_{mult} = 1.2$  do 2.



Sl. 7.2. Linearno skaliranje u normalnim uvjetima

Na sl. 7.3. prikazana je situacija koja se može pojaviti u kasnijim naraštajima kada je nekoliko jedinki daleko ispod najveće i prosječne prilagođenosti populacije, koje poprimaju slične vrijednosti. Ako se za ovakav slučaj primjeni linearno skaliranje, može se dogoditi da  $f'_{min}$  poprimi negativnu vrijednost. Da bi se to izbjeglo, u tim se slučajevima sirova prilagođenost  $f_{min}$  mora preslikati u  $f'_{min} = 0$ .



Sl. 7.3. Problemi sa skaliranjem u kasnijim naraštajima



## 7.2.3. Operatori genetskog algoritma

### 7.2.3.1. Odabir roditelja

Odabir roditelja je operator genetskog algoritma kojim se definira koliko će puta neka jedinka biti birana za roditelja. U prirodi bolje prilagođene jedinke žive dulje i imaju više potomaka. Kao u prirodi, i u genetskom algoritmu jedinke s većom prilagođenosti imaju veću vjerojatnost da budu više puta izabrane za roditelja. Budući da se ne zna što je apsolutno najbolja prilagođenost, jedinke se međusobno uspoređuju unutar jedne populacije. Operator odabira roditelja u genetskom se algoritmu može primjeniti na različite načine. Jedan od najjednostavnijih je stohastički odabir sa zamjenom koji se naziva i odabirom pomoću kotača ruleta. Za svaku se jedinku može odrediti relativna prilagođenost koja se dobiva iz omjera prilagođenosti  $i$ -te jedinke i zbroja prilagođenosti svih jedinki. Relativna prilagođenost izražena u postocima dobiva se iz:

$$\frac{f_i}{\sum_{k=1}^N f_k} \cdot 100\%, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.10)$$

gdje je  $N$  broj jedinki u populaciji. Zatim se svakoj jedinki pridružuje isječak kotača ruleta čija je površina u postocima jednaka relativnoj prilagođenosti te jedinke. Za odabir roditelja potrebno je zavrtnuti kotač ruleta i uzima se ona jedinka kojoj pripada isječak na kojem se rulet slučajno zaustavio. Ovaj je odabir stohastički te je vjerojatnost da neka jedinka bude odabrana kao roditelj jednaka njezinoj relativnoj prilagođenosti.

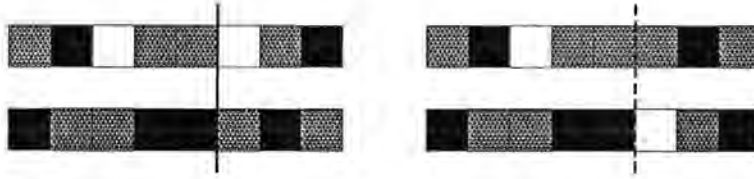
Osim ovog načina za odabir roditelja, u genetskom algoritmu postoje i druge mogućnosti (npr. deterministički odabir, stohastički odabir ostatka bez zamjene, stohastički odabir ostatka sa zamjenom, stohastički univerzalni odabir, linearno rangiranje sa stohastičkim univerzalnim odabirom, itd.) čime se povećava djelotvornost primjene genetskog algoritma u optimiziranju različitih problema.

### 7.2.3.2. Križanje

U genetskom se algoritmu operator križanja uobičajeno definira na način da dva roditelja imaju dva potomka. Pri tome se postavlja pitanje kako prenijeti genetski materijal sa starih na nove jedinke. Križanje se događa s nekom odabranom vjerojatnošću, te se može dogoditi da do križanja uopće ne dođe. U tom slučaju stare jedinke neizmjenjene ulaze u novi naraštaj populacije. U slučaju kada se križanje događa, jedan potomak nasljeđuje jedan dio gena od jednog, a drugi dio gena od drugog roditelja. Drugi potomak nasljeđuje preostale dijelove kromosoma. U genetskom se algoritmu može primjeniti križanje s jednim rezom, križanje s više rezova te uniformno križanje.

Kod križanja s jednim rezom, mjesto reza u kromosomu bira se slučajno, sl. 7.4. Zatim sve gene od početka kromosoma do odabranog mjesta u kromosomu prvog roditelja te sve gene

od odabranog mjesta do kraja kromosoma drugog roditelja nasljeđuje prvi potomak. Preostale gene prvog i drugog roditelja nasljeđuje drugi potomak.



Sl. 7.4. Križanje s jednim rezom

Kod križanja s više rezova, također se mjesta rezova kromosoma određuju slučajno. Ako se radi križanje s parnim brojem rezova, zamišlja se da je spajanjem prvog i zadnjeg gena kromosom zatvoren u obliku prstena. Parnim brojem rezova kromosomi roditelja odvajaju se u dijelove, pa prvi potomak dobiva naizmjenično dijelove od prvog i drugog roditelja, a drugi potomak preostali genetski materijal. Križanje s neparnim brojem rezova svodi se na križanje s parnim brojem dodavanjem početka kromosoma kao obaveznog mjesta reza. Kod uniformnoga križanja svaki se gen promatra neovisno od drugih. Pojedini gen prvi potomak nasljeđuje od prvog roditelja s vjerojatnošću 0.5, pa ako se to ne dogodi nasljeđuje ga od drugog roditelja. Drugo dijete dobiva isti gen od roditelja koji nije darovao taj gen prvom potomku. Za većinu se primjena preporučuje križanje s dva reza, budući da križanje s većim brojem rezova razbija uspješne shemate. Preporuča se da vjerojatnost križanja iznosi 0.6.

### 7.2.3.3. Mutacija

Operatori odabira roditelja i križanja rade samo s postojećim genetskim materijalom neke populacije. Ako za neki gen u početnoj populaciji nema niti jedne jedinke koja bi imala vrijednost tog gena jednaku nekoj vrijednosti iz odabrane genetske abecede tako ostaje i u svim budućim naraštajima te populacije. Osim toga, napredovanjem kroz naraštaje smanjuje se raznolikost genetskog materijala. To može dovesti do usporavanja konvergencije genetskog algoritma i nagomilavanja populacije oko nekog lažnog optimuma. Da se to izbjegne, u genetskom se algoritmu oponašajući prirodu uvode mutacije povećavajući na taj način raznolikost ukupnog genetskog materijala populacije. Kao i u prirodi, ako mutacijom neka jedinka postane slabije prilagođena, ta će jedinka biti uklonjena prirodnim odabirom. Međutim, ponekad se može dogoditi da upravo zahvaljujući mutaciji neki gen poprimi vrijednost koje prije nije bilo u populaciji, a koja bitno poboljšava prilagođenost i pospješuje nalaženje globalnog optimuma postavljenog problema.



Sl. 7.5. Mutacija

U primjeni genetskog algoritma pogodne su dvije vrste mutacije: jednogenska i višegenska mutacija. Jednogenska mutacija djeluje tako da za svaku jedinku novog naraštaja pripadni operator prelazi preko svih gena, ali djeluje slučajno i to s vrlo malom vjerojatnosti, sl. 7.5. Kada djeluje, vrijednost danog gena mijenja se u neku drugu slučajno odabranu vrijednost iz dozvoljene abecede genetskog materijala. Višegenska mutacija razlikuje se od jednogenske samo po tome što kada pripadni operator djeluje zahvaća mutacijom više susjednih gena. Mutacije na rubu kromosoma rješavaju se zamišljajući kromosom u obliku prstena. Kod mutacije je najvažnije birati vrlo malu vjerojatnost, obično je to oko vrijednosti 0.0333.

### 7.3. Primjena genetskog algoritma za optimiziranje forme broda

U primjeni genetskog algoritma na problem optimiziranja brodske forme sa stajališta minimalnog otpora valova, svaka pojedina forma predstavlja jedinku. Varijable problema su poluširine rebara koje definiraju oblik forme. Postavljeni kriterij minimalnog otpora valova predstavlja stalne vanjske uvjete pod kojima jedinke žive. Za svaku se formu može izračunati vrijednost funkcije cilja, odnosno za svaku se jedinku može znati koliko je dobro prilagođena uvjetima življenja. Operatori genetskog algoritma djeluju nad naraštajima umjetnih populacija stvarajući nakon dovoljnog broja naraštaja najuspješniju jedinku, odnosno formu broda s minimalnim otporom valova.

Genetski algoritam primjenjen u ovom radu razvijen je na *Michigan State University* u SAD, i dostupan je putem Interneta [73]. Napisan je u 'C' programskom jeziku, i može se izvršavati na računalima sa DOS i Windows kao i UNIX operacijskim sustavima.

Ovaj je genetski algoritam povezan u jednu cjelinu s računalnim programima SGRID i FSFLOW čime je omogućena praktična primjena prikazanog optimizacijskog postupka.

## 8. REZULTATI OPTIMIZIRANJA FORME PRIMJENOM GENETSKOG ALGORITMA

### 8.1. Izbor osnovne forme broda

Postupak optimiziranja započinje izborom odgovarajuće osnovne forme broda kojoj će se oblik mijenjati. Nakon toga potrebno je odrediti varijable problema odnosno definirati parametre forme koji će se uključiti u postupak te odrediti područje vrijednosti za variranje tih parametara. Forma iz Serije 60 sa  $C_B = 0.60$  standardna je forma jednovijčanog trgovačkog broda koja se radi povoljnih hidrodinamičkih značajki često koristila kao polazna za kreiranje drugih formi. Za tu formu postoje opsežna eksperimentalna mjerenja te budući da je u obitelji Serije 60 najvitkija, ovdje je izabrana kao osnovna forma. Udio komponente otpora valova u ukupnom otporu te forme iznosi od 20% za  $F_n = 0.24$  do 60% za  $F_n = 0.36$ , [68]. Za projektnu brzinu (19.42 čv) kojoj odgovara  $F_n = 0.289$ , udio otpora valova u ukupnom otporu iznosi približno 50%. To je relativno veliki udio pa optimiziranje te forme sa stajališta minimalnog otpora valova ima osnovu. Osnovni hidrostatski podaci te forme dani su u tab. 8.1. Forma je bez paralelnog srednjaka i nema pramčani bulb, sl. 6.13.

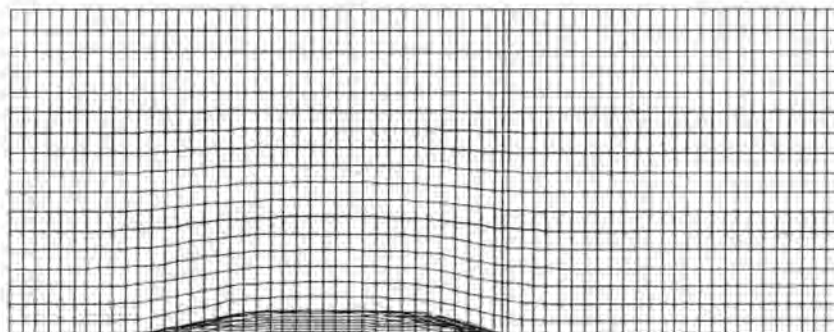
$L, m$	121.920
$L_{WL}, m$	123.962
$B, m$	16.256
$T, m$	6.502
$A_M, m^2$	103.265
$\nabla, m^3$	7734.000
$S_H, m^2$	2534.390
$C_B$	0.600
$C_M$	0.977
$C_P$	0.614
$C_{VP}$	0.850
$X_{CB}, m$	1.824
$Z_{CB}, m$	-3.011

Tab. 8.1. Hidrostatski podaci forme iz Serije 60 sa  $C_B = 0.60$ , [67]

Prilikom mijenjanja oblika osnovne forme prihvaćeno je da se duljina i gaz broda ne mijenjaju. Osim toga, oblik i površina nulte vodne linije (ravno dno), oblik i površina konstrukcijske vodne linije te oblik pramčane i krmene konture također su zadržani isti kao kod osnovne forme. U postupku optimiziranja forme varirane su samo poluširine rebara unutar zadanih graničnih vrijednosti, dok hidrostatske veličine forme nisu izravno bile uključene u optimizacijski postupak.

U numeričkom proračunu u postupku optimiziranja forme vrijednost otpora valova određena je prema izrazu (4.8). U proračunima je primjenjen manji broj panela, 372 na oplakivanoj površini i 1054 na slobodnoj površini, sl. 8.1. Manji je broj panela primjenjen radi smanjenja vremena izvršavanja programa na računalu.





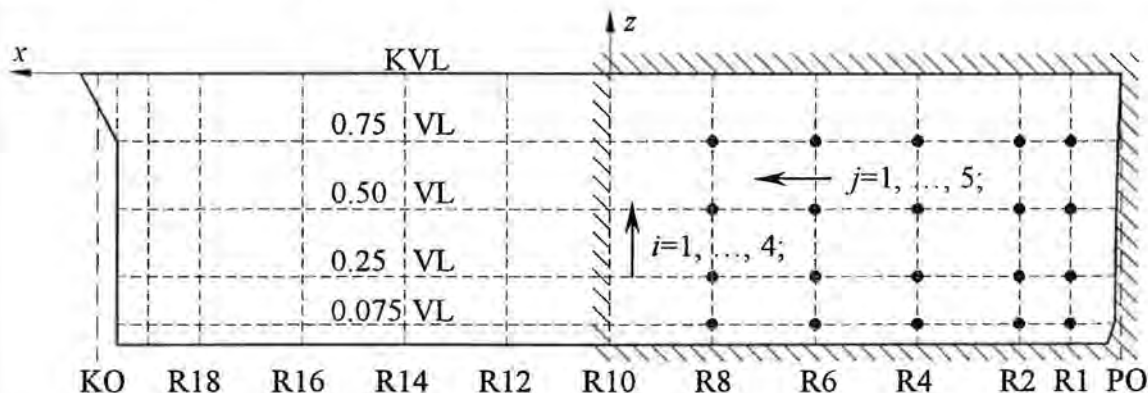
Sl. 8.1. Raspored panela za postupak optimiziranja

Optimiziranje forme obavljeno je za dva slučaja. U prvom je slučaju mijenjan samo oblik pramčanog dijela od pramčane okomice do glavnog rebra, dok je u drugom slučaju mijenjan oblik kompletne forme. Za oba su ova slučaja izvedene odgovarajuće forme, ovisno o graničnim vrijednostima unutar kojih je dopušteno variranje poluširina rebara.

Za svaku je izvedenu formu prikazana usporedba oblika rebara sa osnovnom formom. Osim toga, prikazana je i usporedba izračunatog profila vala uzduž oplakivane površine. Premda je optimiziranje obavljeno za projektni Froudeov broj ( $F_n = 0.289$ ), za sve tako dobivene forme obavljani su i numerički proračuni za Froudeove brojeve različite od projektnog ( $0.22 \leq F_n \leq 0.37$ ). Rezultati su prikazani dijagramski. Da bi se mogla obaviti usporedba, ovi naknadni proračuni obavljani su s istim brojem panela kao proračuni kojih su rezultati dani u šestom poglavlju (515 panela na oplakivanoj i 2403 panela na slobodnoj površini). Konačno, za sve su dobivene forme izračunati hidrostatski podaci i prikazane su krivulje areala rebara. Ovi su podaci određeni za panelizirane forme.

## 8.2. Mijenjanje oblika pramčane polovice

Postupak optimiziranja primjenjen je na pramčani dio osnovne forme od pramčane okomice do glavnog rebra (R10). Taj pramčani dio definiran je s ukupno 20 poluširina (5 rebara, 4 vodne linije), sl. 8.2. Na istoj je slici šrafirano istaknut dio koji je zadržan isti kao kod osnovne forme. U genetskom je algoritmu primjenjena populacija od 30 jedinki kroz 30 naraštaja.

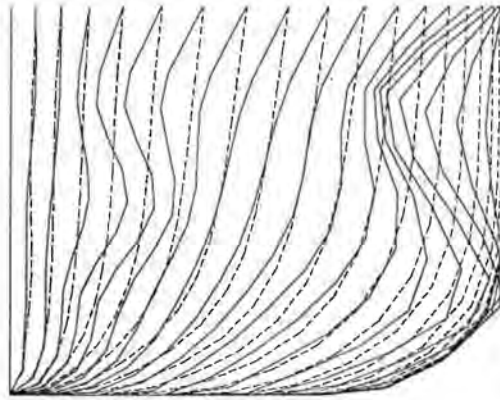


Sl. 8.2. Mreža za definiranje parametara

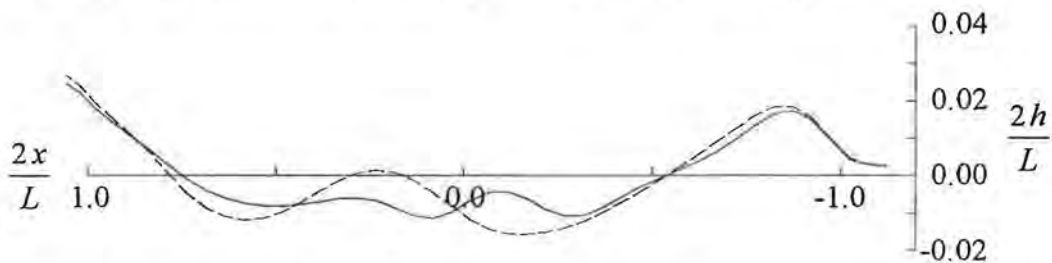


- Forma P1

Forma P1 dobivena je za ograničenja:  $0.8 y_{i,j}^{(60)} \leq y_{i,j} \leq 1.2 y_{i,j}^{(60)}$ . Vrijednost koeficijenta otpora valova za  $F_n = 0.289$  iznosi  $C_w = 0.9305 \cdot 10^{-3}$ .



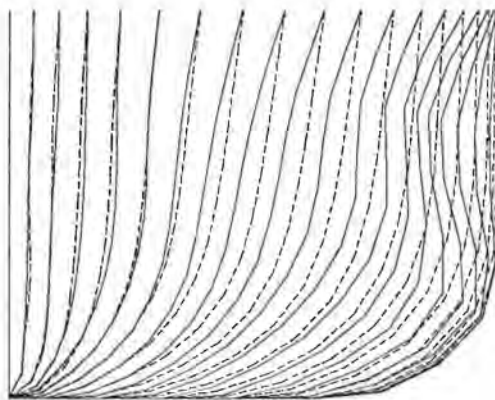
Sl. 8.3. Pramčana rebra forme P1 (—) i osnovne forme (---)



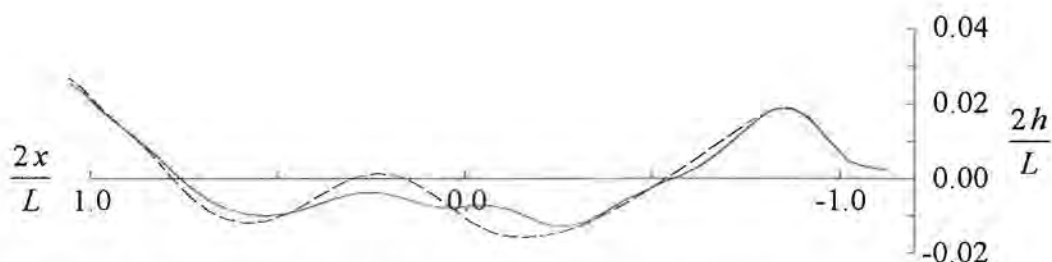
Sl. 8.4. Profil vala forme P1 (—) i osnovne forme (---)

- Forma P2

Forma P2 dobivena je za ograničenja:  $0.9 y_{i,j}^{(60)} \leq y_{i,j} \leq 1.1 y_{i,j}^{(60)}$ . Vrijednost koeficijenta otpora valova za  $F_n = 0.289$  iznosi  $C_w = 1.1114 \cdot 10^{-3}$ .



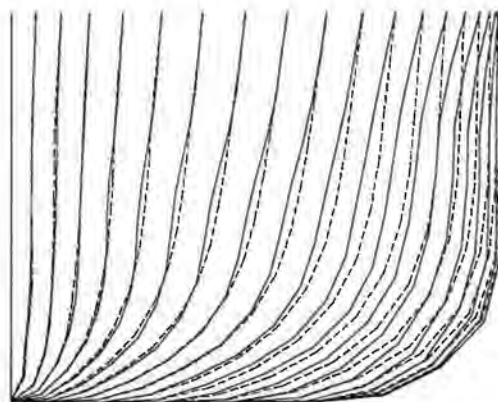
Sl. 8.5. Pramčana rebra forme P2 (—) i osnovne forme (---)



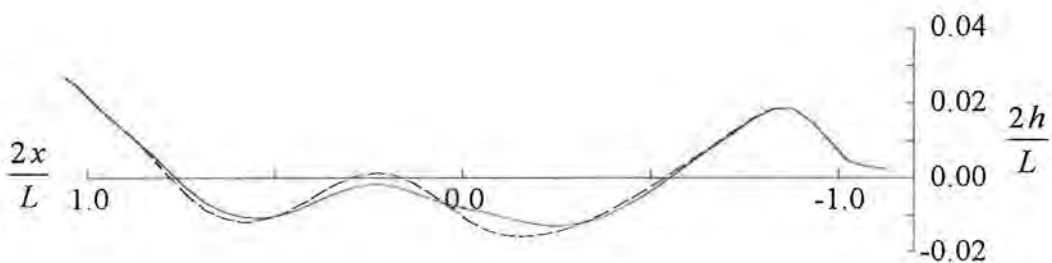
Sl. 8.6. Profil vala forme P2 (—) i osnovne forme (---)

- Forma P3

Forma P3 dobivena je za ograničenja:  $0.95 y_{i,j}^{(60)} \leq y_{i,j} \leq 1.05 y_{i,j}^{(60)}$ . Vrijednost koeficijenta otpora valova za  $F_n = 0.289$  iznosi  $C_w = 1.2240 \cdot 10^{-3}$ .



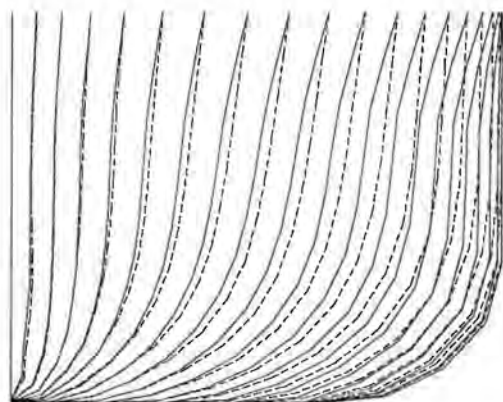
Sl. 8.7. Pramčana rebra forme P3 (—) i osnovne forme (---)



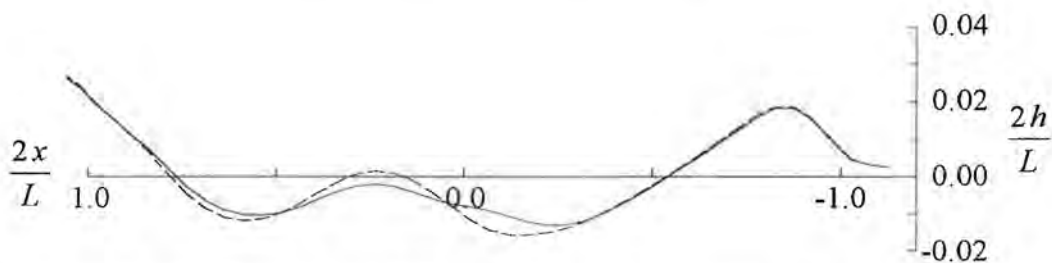
Sl. 8.8. Profil vala forme P3 (—) i osnovne forme (---)

- Forma P4

Forma P4 dobivena je za ograničenja:  $0.95 y_{i,j}^{(60)} \leq y_{i,j} \leq 1.0 y_{i,j}^{(60)}$ . Vrijednost koeficijenta otpora valova za  $F_n = 0.289$  iznosi  $C_w = 1.1866 \cdot 10^{-3}$ .



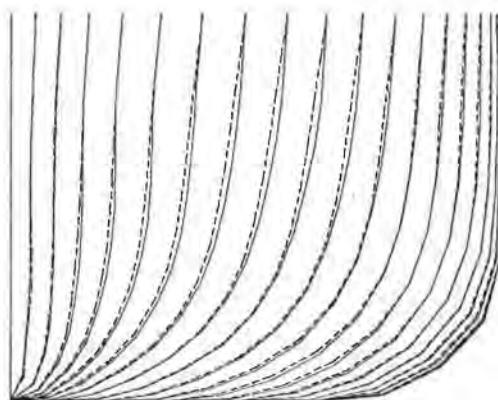
Sl. 8.9. Pramčana rebra forme P4 (—) i osnovne forme (---)



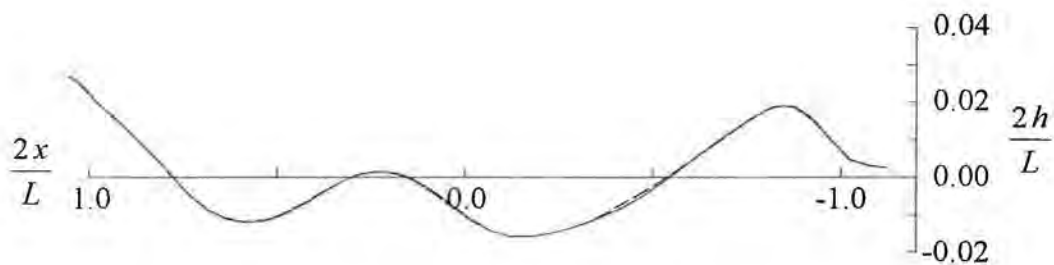
Sl. 8.10. Profil vala forme P4 (—) i osnovne forme (---)

- Forma P5

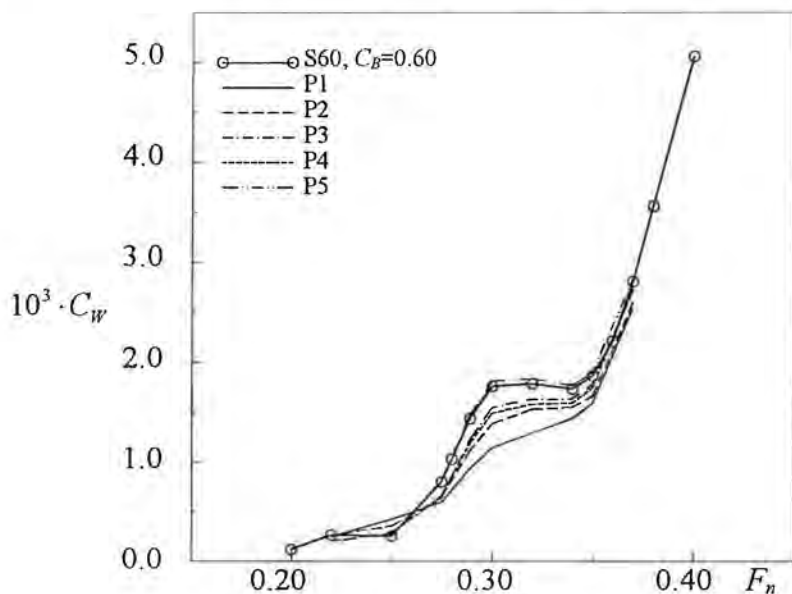
Forma P5 dobivena je za ograničenja:  $1.0 y_{i,j}^{(60)} \leq y_{i,j} \leq 1.05 y_{i,j}^{(60)}$ . Vrijednost koeficijenta otpora valova za  $F_n = 0.289$  iznosi  $C_w = 1.4642 \cdot 10^{-3}$ .



Sl. 8.11. Pramčana rebra forme P5 (—) i osnovne forme (---)



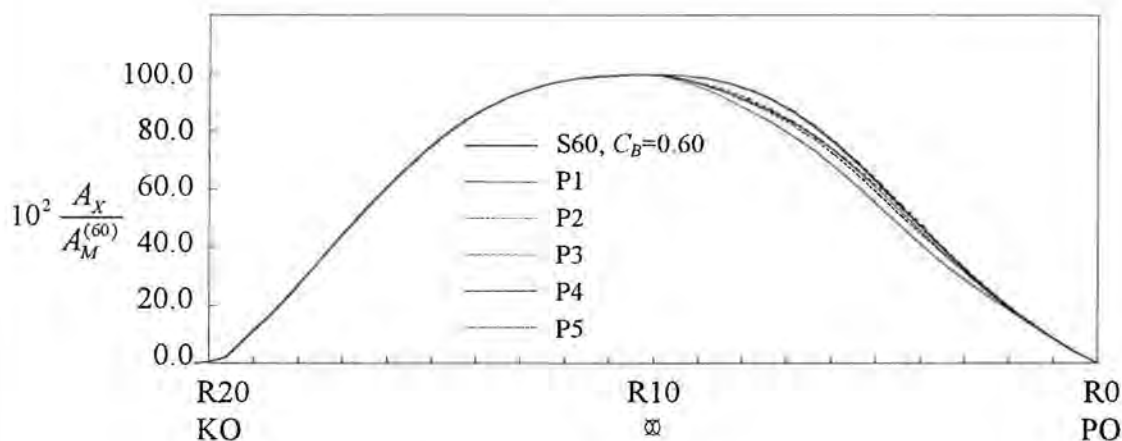
Sl. 8.12. Profil vala forme P5 (—) i osnovne forme (---)



Sl. 8.13. Koeficijenti otpora valova

	P1	P2	P3	P4	P5
$B_{maks.}, m$	16.365	16.256	16.256	16.256	16.256
$A_X, m^2$	102.527	102.630	102.691	102.735	102.660
$\nabla, m^3$	7408.581	7555.584	7615.158	7577.201	7718.127
$S_H, m^2$	2550.847	2529.669	2526.646	2521.603	2539.677
$C_B$	0.571	0.586	0.591	0.588	0.599
$C_X$	0.964	0.971	0.972	0.972	0.971
$C_P$	0.593	0.604	0.608	0.605	0.617
$C_{VP}$	0.811	0.827	0.834	0.830	0.845
$X_{CB}, m$	2.808	2.208	2.005	2.170	1.686
$Z_{CB}, m$	-3.012	-3.008	-3.004	-3.003	-3.008

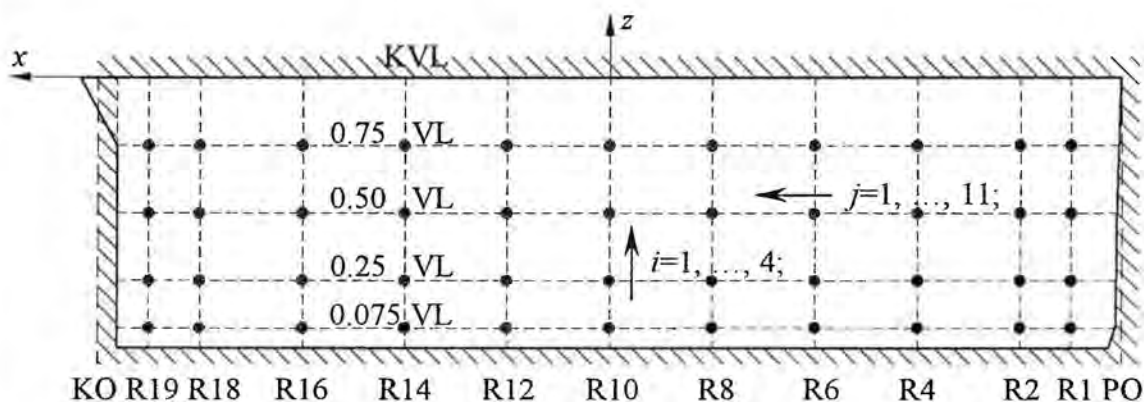
Tab. 8.2. Hidrostatski podaci



Sl. 8.14. Areale rebara

8.3. Mijenjanje oblika kompletne forme

Za optimiziranje kompletne forme nužno je bilo primijeniti veći broj parametara. Oplakivana je površina definirana s ukupno 44 poluširine (11 rebara, 4 vodne linije), sl. 8.15. Za ovaj je slučaj u genetskom algoritmu obrađena populacija od 80 jedinki kroz 20 naraštaja.

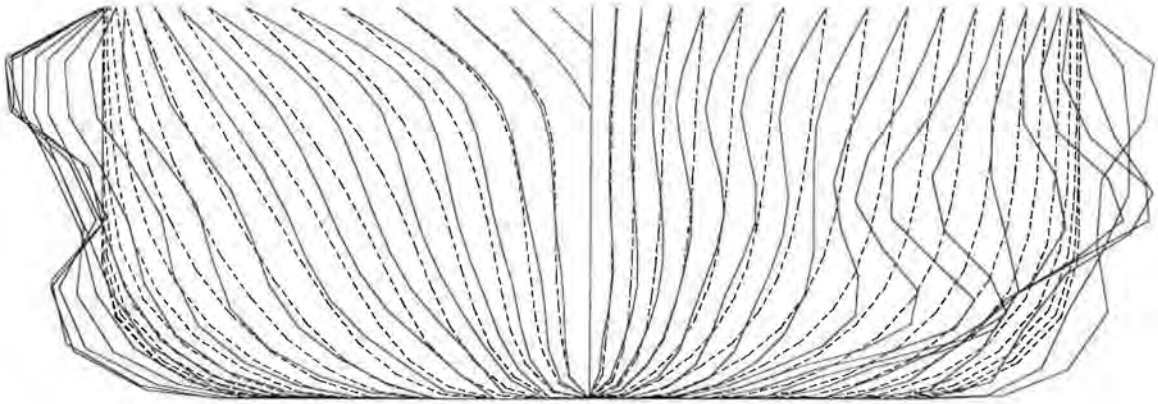


Sl. 8.15. Mreža za definiranje parametara

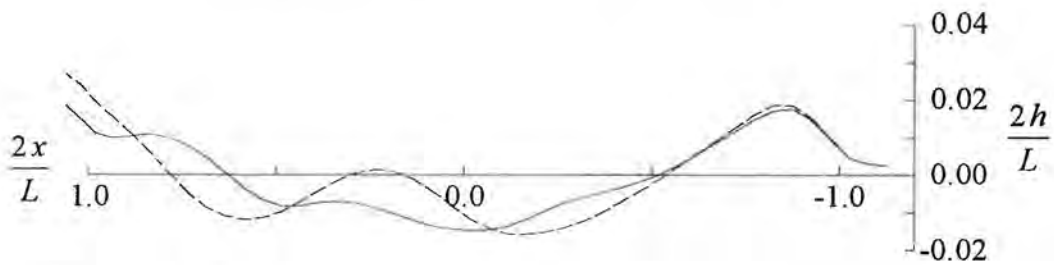
• Forma K1

Forma K1 dobivena je za ograničenja:  $0.8 y_{i,j}^{(60)} \leq y_{i,j} \leq 1.2 y_{i,j}^{(60)}$ . Vrijednost koeficijenta otpora valova za  $F_n = 0.289$  iznosi  $C_w = 0.4641 \cdot 10^{-3}$ .





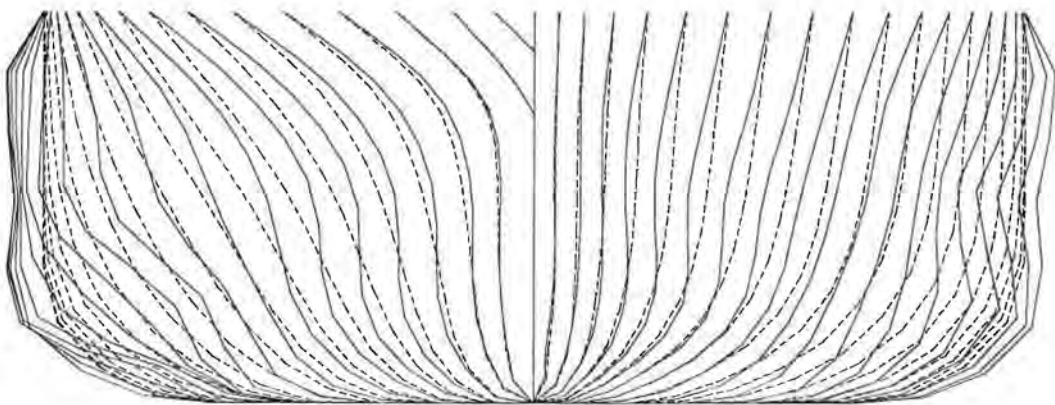
Sl. 8.16. Rebra forme K1 (—) i osnovne forme (---)



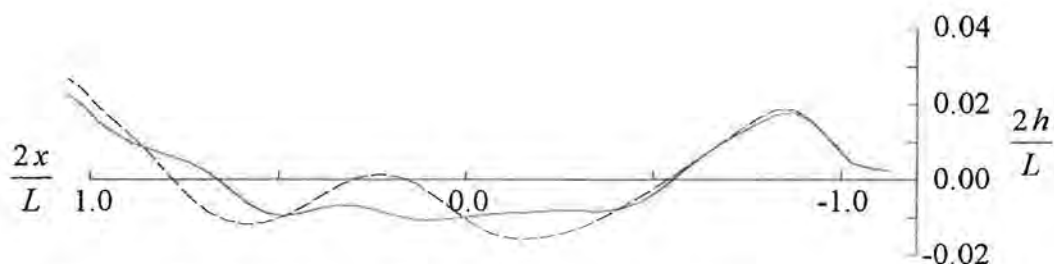
Sl. 8.17. Profil vala forme K1 (—) i osnovne forme (---)

- Forma K2

Forma K2 dobivena je za ograničenja:  $0.9 y_{i,j}^{(60)} \leq y_{i,j} \leq 1.1 y_{i,j}^{(60)}$ . Vrijednost koeficijenta otpora valova za  $F_n = 0.289$  iznosi  $C_w = 0.7239 \cdot 10^{-3}$ .



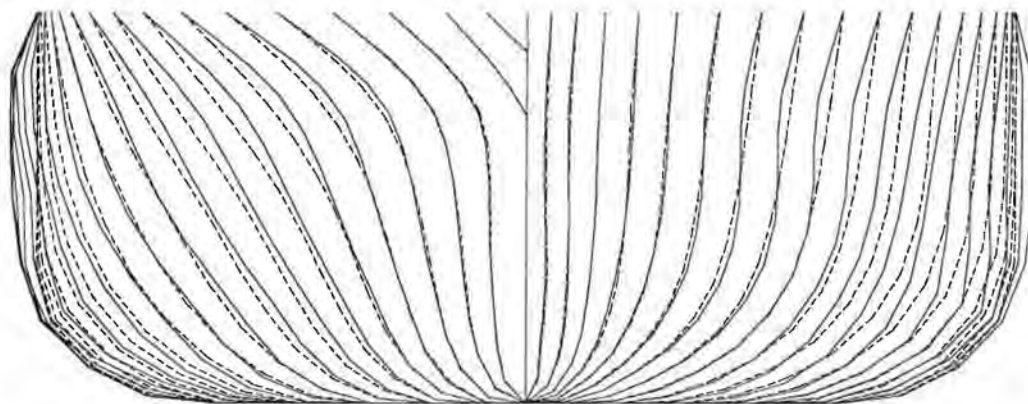
Sl. 8.18. Rebra forme K2 (—) i osnovne forme (---)



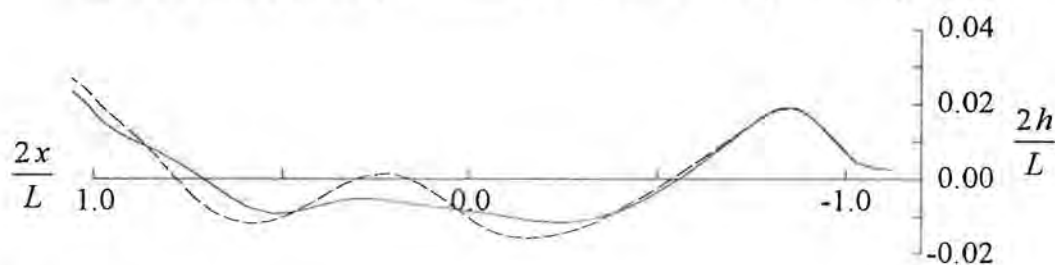
Sl. 8.19. Profil vala forme K2 (—) i osnovne forme (---)

- Forma K3

Forma K3 dobivena je za ograničenja:  $0.95 y_{i,j}^{(60)} \leq y_{i,j} \leq 1.05 y_{i,j}^{(60)}$ . Vrijednost koeficijenta otpora valova za  $F_n = 0.289$  iznosi  $C_W = 0.9304 \cdot 10^{-3}$ .



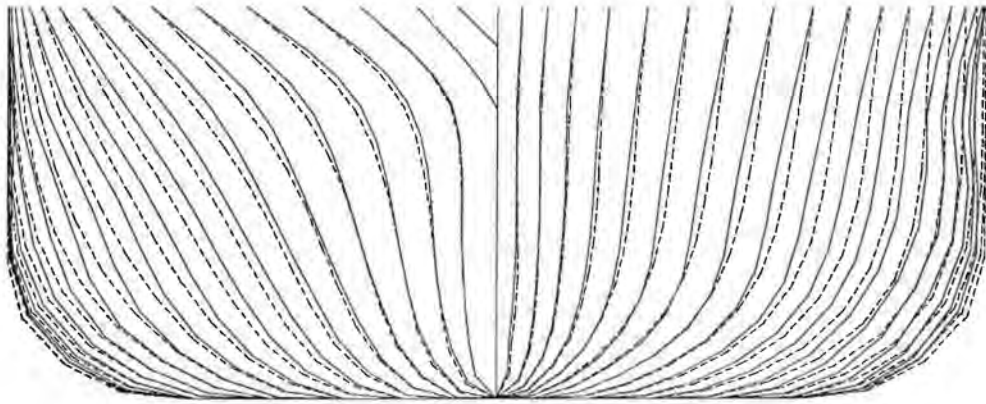
Sl. 8.20. Rebra forme K3 (—) i osnovne forme (---)



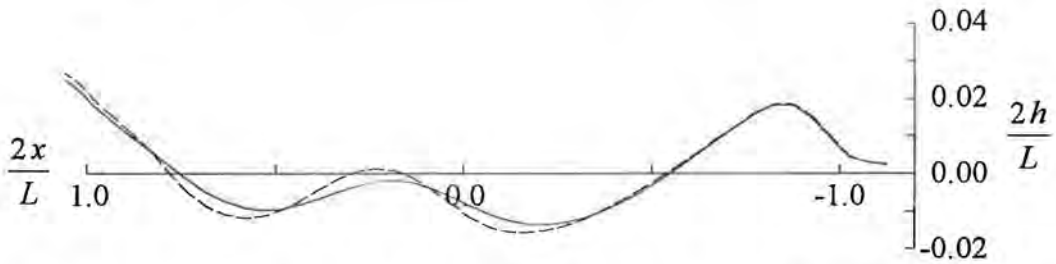
Sl. 8.21. Profil vala forme K3 (—) i osnovne forme (---)

- Forma K4

Forma K4 dobivena je za ograničenja:  $0.95 y_{i,j}^{(60)} \leq y_{i,j} \leq 1.0 y_{i,j}^{(60)}$ . Vrijednost koeficijenta otpora valova za  $F_n = 0.289$  iznosi  $C_W = 1.1322 \cdot 10^{-3}$ .



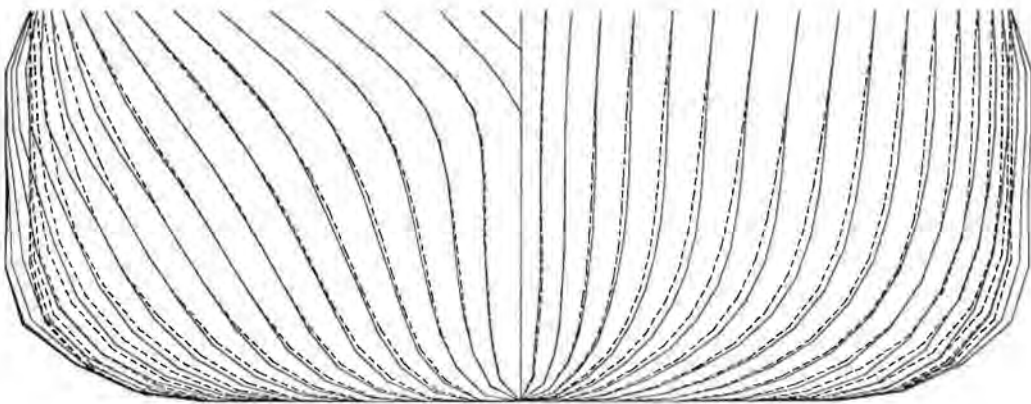
Sl. 8.22. Rebra forme K4 (—) i osnovne forme (---)



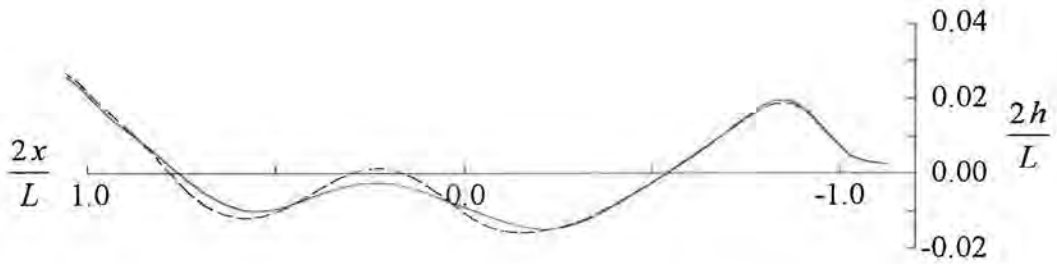
Sl. 8.23. Profil vala forme K4 (—) i osnovne forme (---)

- Forma K5

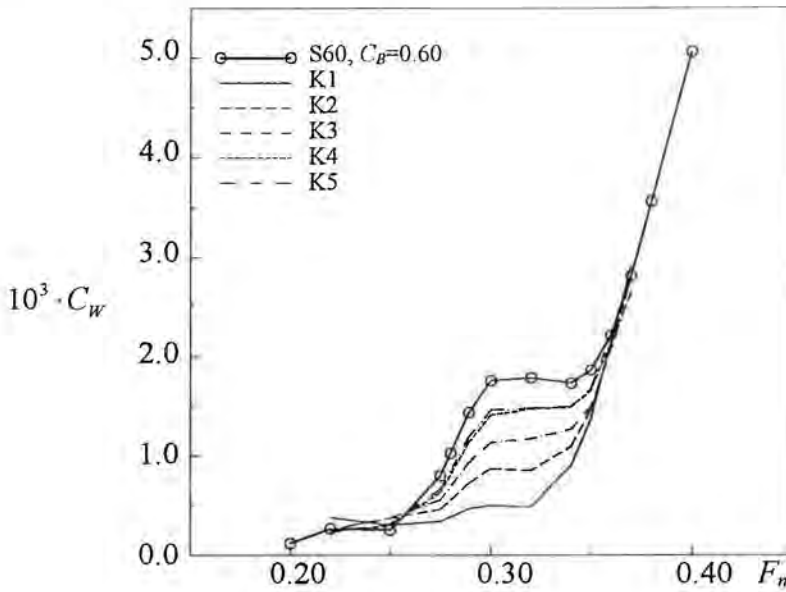
Forma K5 dobivena je za ograničenja:  $1.0y_{i,j}^{(60)} \leq y_{i,j} \leq 1.05y_{i,j}^{(60)}$ . Vrijednost koeficijenta otpora valova za  $F_n = 0.289$  iznosi  $C_w = 1.1883 \cdot 10^{-3}$ .



Sl. 8.24. Rebra forme K5 (—) i osnovne forme (---)



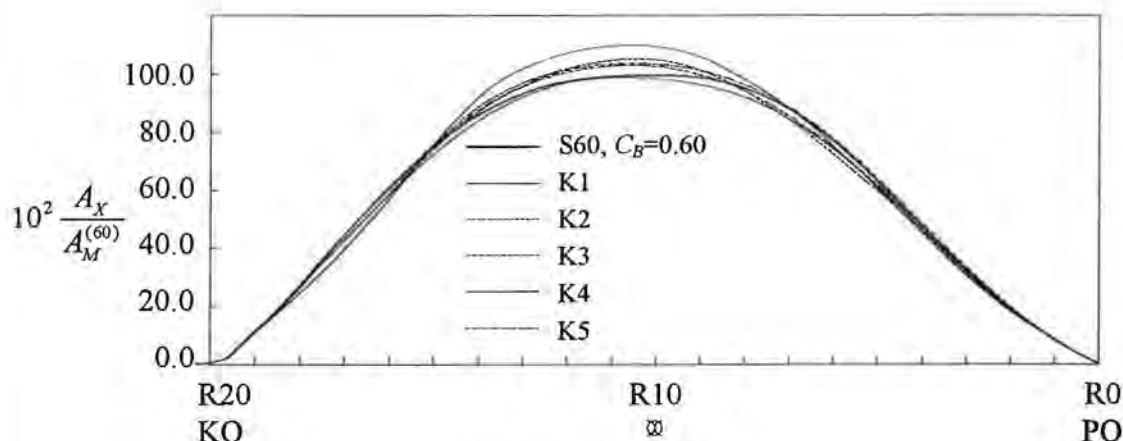
Sl. 8.25. Profil vala forme K5 (—) i osnovne forme (---)



Sl. 8.26. Koefficienti otpora valova

	K1	K2	K3	K4	K5
$B_{maks.}, m$	19.508	17.472	17.068	16.256	17.068
$A_X, m^2$	113.229	108.539	106.083	101.873	106.887
$\nabla, m^3$	7907.181	7711.006	7708.692	7514.819	7867.636
$S_H, m^2$	2714.120	2588.799	2550.231	2516.519	2568.986
$C_B$	0.511	0.557	0.570	0.583	0.581
$C_X$	0.893	0.955	0.956	0.964	0.963
$C_P$	0.573	0.583	0.596	0.605	0.604
$C_{VP}$	0.866	0.845	0.844	0.823	0.861
$X_{CB}, m$	1.982	2.181	1.890	1.862	1.786
$Z_{CB}, m$	-3.027	-3.028	-3.013	-2.999	-3.016

Tab. 8.3. Hidrostatski podaci



Sl. 8.27. Areale rebara

#### 8.4. Analiza dobivenih rezultata

Dobiveni rezultati omogućavaju određene zaključke, premda postupak nije primjenjen za veći broj primjera. Osnovni je zaključak da forma minimalnog otpora valova poprma valoviti oblik. Veličina valovitosti ovisi o primjenjenim ograničenjima te je za manja ograničenja valovitost veća i obrnuto. Ako ograničenja dopuštaju veće izmjene oblika forme, to može rezultirati potpuno nepraktičnim rezultatima kao npr. forme P1 ili K1. Izbor ograničenja ima veliki utjecaj na oblik forme.

Za izvedene forme dobiven je manji koeficijent otpora valova u usporedbi s osnovnom formom. Smanjenje otpora valova ovisi o primjenjenim ograničenjima, pa se strožim ograničenjima dobivaju manja smanjenja i obrnuto. Osim toga, veće smanjenje otpora valova postiže se mijenjanjem oblika kompletne forme, nego samo pramčane polovice. Premda je optimiziranje obavljeno za projektni Froudeov broj, pokazuje se da dobivene forme imaju povoljne hidrodinamičke značajke za cijelo područje Froudeovih brojeva od 0.275 do 0.350, sl.8.13. i 8.26. Za  $F_n > 0.350$  povoljne se značajke gube. Od svih izvedenih formi, jedino forma P5 nije povoljnija od osnovne budući da je to bilo onemogućeno primjenjenim ograničenjima. Forma P5 se vrlo malo razlikuje od osnovne, pa su i rezultati približno identični. U tab. 8.2.i 8.3. dane su vrijednosti hidrostatskih veličina određenih za panelizirane izvedene forme. Ne uzimajući u obzir forme P1 i K1, vrijednosti hidrostatskih veličina ostalih formi ne razlikuju se značajno u odnosu na osnovnu formu, a posebno je to izraženo za veličine oplakivanih površina koje su vrlo slične. Iz toga bi se moglo očekivati da se niti otpor trenja forme ne bi trebao značajnije mijenjati. Međutim, zbog valovitosti forme prvenstveno u uzdužnom smjeru na pojedinim bi se mjestima moglo pojaviti odvajanje strujanja mijenjajući na taj način viskozni otpor forme. Ove pojave treba svakako uzimati u obzir prilikom postavljanja ograničenja.

Širina forme je jedina glavna dimenzija koja se mijenjala. Promjena širine veća je kod mijenjanja oblika kompletne forme te je u tim slučajevima najveća širina jednaka najvećoj vrijednosti poluširine rebara koju su dopuštala ograničenja. Povećanjem širine općenito se povećava otpor, međutim za veću širinu smanjenjem vrijednosti prizmatičkog koeficijenta može se dobiti manji



otpor kao što je ovdje slučaj. To se jasno može vidjeti iz vrijednosti u tab. 8.3.

Za oblik dobivenih rebara moglo bi se općenito zaključiti da je za većinu izvedenih formi dobiven U-oblik rebara. Posebno je to izraženo za pramčani dio forme. U-oblikom rebara pomiče se istisnina dalje od slobodne površine, smanjujući na taj način otpor valova.

Za niti jednu formu nije formiran pramčani bulb. Jedan od razloga tome je činjenica da niti osnovna forma nema pramčani bulb. Pramčani dio osnovne forme vrlo je uzak, a postavljena ograničenja nisu dopuštala veće širine. No, formiranje bulba bilo bi upitno i da su ograničenja dopuštala veće širine. Naime, uslijed manjeg broja panela primjenjenih u postupku optimiziranja te metode određivanja otpora valova integracijom tlakova, za eventualno veće širine pramčanog dijela forme položaj panela na pramcu bio bi neadekvatan. U tom bi slučaju izračunati otpor valova poprimio nerealne vrijednosti, a takva bi rješenja zbog neprilagođenosti sigurno otpala u postupku optimiziranja primjenom genetskog algoritma.

Oblici dobivenih profila valova uzduž oplakivane površine također omogućavaju određene zaključke. Najuočljivije razlike između profila osnovne i izvedenih formi pojavljuju se u središnjem dijelu pri čemu je profil vala izvedenih formi znatno ublažen. Promjena profila krmenog vala značajnija je u slučaju mijenjanja oblika kompletne forme, nego samo pramčane polovice. Mijenjanje oblika samo pramčane polovice utječe na promjenu profila uzduž cijele oplakivane površine, a ne samo pramčanog dijela. Pramčani se val niti u jednom slučaju nije značajnije promjenio, a razlog tome leži u činjenici da uzak pramac ne dopušta značajnije promjene forme na tom dijelu. Osim toga, na konstantnost oblika pramčanog vala utječe i činjenica da je pramčana kontura zadržana nepromijenjena.

Oblik areala rebara razlikuje se u odnosu na oblik areale osnovne forme. Za slučaj mijenjanja oblika pramčanog dijela, najveća promjena je u području pramčanog ramena, dok su prema pramcu te promjene neznatne. Za slučaj mijenjanja oblika kompletne forme, najveće razlike su dobivene u središnjem dijelu.

## 9. ZAKLJUČAK

U radu je predstavljen matematičko-numerički model koji pripada skupini metoda računalne dinamike fluida kojim se omogućava rješavanje trodimenzionalnog modela potencijalnog strujanja oko broda koji plovi mirnom slobodnom površinom. Razvijeni numerički model temelji se na metodi rubnih elemenata, pri čemu se koristi razdioba Rankineovih izvora po rubnim površinama proračunskog područja. Rubni uvjet na slobodnoj površini lineariziran je pomoću rješenja optjecanja oko dvostrukog modela. Numerička primjena lineariziranog rubnog uvjeta na slobodnoj površini sastoji se u uključivanju Dawsonove sheme konačnih razlika kojom se isključuje mogućnost nastajanja valova ispred pramca broda.

Praktično izvođenje numeričkog proračuna omogućeno je izrađenim računalnim programima. Obavljena je provjera računalnog programa i potvrđena je valjanost numeričkog modela nizom usporedbi s eksperimentalnim rezultatima. Pokazuje se da numerička metoda i izrađeni računalni program omogućavaju određivanje rasporeda tlakova i brzina po oplakivanoj površini broda, profila vala uzduž broda, oblika nastalih valova na slobodnoj površini, vrijednosti hidrodinamičkog urona i trima te konačno otpora valova. Pažljivom analizom ovih veličina može se uspješno dobiti odgovarajući uvid u lokalne značajke strujanja oko brodske forme. Ovi se podaci mogu uspješno koristiti pri određivanju hidrodinamičkih značajki forme broda te je moguća primjena na optimiziranje forme s hidrodinamičkog stajališta. Opravdanost numeričkog pristupa je zbog toga nedvojbeno, budući da bi se navedeni podaci mogli eksperimentalno dobiti samo s vrlo visokom cijenom, uz problematiku prisutnu pri ispitivanju modela brodova.

Rezultati dobiveni u radu omogućavaju donošenje određenih zaključaka. Usporedbom s eksperimentima pokazuje se da se navedenim numeričkim modelom oblik profila vala uzduž broda može vrlo dobro odrediti. Za pramčani se val uobičajeno dobivaju manje vrijednosti od stvarnih, a razlike su to veće što su nelinearne pojave na pramcu broda izrazitije. Ove nelinearne pojave nisu podržane lineariziranim modelom. Za razliku od pramčanog, krmeni je val veći od stvarnog zbog zanemarivanja viskozniht utjecaja odnosno graničnog sloja u modelu potencijalnog strujanja.

Numerički model omogućava određivanje otpora valova. Za brodove koji imaju manji koeficijent punoće forme, za brzine koje odgovaraju vrijednostima Froudeovih brojeva od 0.20 do 0.40 otpor valova se može dovoljno točno prognozirati. Za ove slučajeve, veličina otpora valova dobivena metodom integracije tlakova te metodom integracije Lagallyjevih sila po oplakivanoj ili slobodnoj površini, poprma vrlo slične vrijednosti. Za brodove s većim koeficijentom punoće forme procjene veličine otpora valova ovim metodama postaju nepouzdana, premda se grbe i dolovi u krivulji otpora valova pojavljuju za slične vrijednosti Froudeovih brojeva. Pouzdanije određivanje otpora valova dobilo bi se metodama u kojima se analizira oblik valovite slobodne površine. Naime, vrijednost otpora valova određena metodom integracije tlakova osjetljiva je na raspored panela na oplakivanoj površini. S druge strane, oblik valovite slobodne površine nije toliko ovisan o rasporedu i veličini panela, pa bi određivanje otpora valova na ovaj način omogućilo točnije rezultate. Pri tome bi metoda

poprečnog presjeka predstavljala povoljniji izbor s obzirom na manje područje slobodne površine koje se pri tome mora uključiti u proračun.

Pri korištenju numeričkih rezultata za određivanje hidrodinamičkih značajki forme za praktičnu primjenu potrebno je imati jasnu spoznaju o formulaciji samog modela i uvedenim pretpostavkama. Linearizirani rubni uvjet na slobodnoj površini vrijedi za male poremećaje slobodne površine koji u slučaju plovidbe vitkog broda većom brzinom ili pak sporog broda većeg koeficijenta punoće nisu više ispunjeni. Osim toga, lineariziranim se modelom ne može uzimati u obzir utjecaj forme iznad ravne slobodne površine. To znači da se pojedine izvedbe forme kao npr. izbačena forma pramca iznad vodne linije (*bow flare*) ili prevjesna krma ne mogu analizirati. Slično tome, izrazito nelinearne pojave koje nastaju oko pramčanog bulba kojemu je volumen smješten bliže slobodnoj površini te pojave oko djelomično uronjenih bulbova linearizirani model ne podržava. Utjecaj forme iznad ravne vodne linije mogao bi se ispravno uključiti u model kada bi se u izrazima za rubne uvjete zadržali i nelinearni članovi te rubni uvjeti primjenili za stvarnu vodnu liniju i slobodnu površinu što dovodi do potrebe za razvojem nelinearnog modela.

Razvijena numerička metoda primjenjena je za optimiziranje brodske forme sa stajališta minimalnog otpora valova. Svako rješenje problema optimiziranja zahtijeva odabir određene metode za nalaženje vrijednosti parametara koji daju optimalnu vrijednost funkcije cilja. U tu je svrhu u ovom radu primjenjen genetski algoritam. Za razliku od pojedinih drugih metoda, genetski algoritam ne zahtijeva nekakva posebna svojstva funkcije cilja ili parametara. Također ne ovisi o početnoj procjeni ekstrema koja mu nije niti potrebna, te uspješno nalazi globalne, a ne lokalne ekstreme funkcije cilja. Genetski algoritam je izuzetno učinkovit već i u najjednostavnijem obliku s tri osnovna operatora: odabir roditelja, križanje i mutacija. Premda matematička teorija nije u potpunosti razjasnila razloge zbog kojih genetski algoritam tako dobro radi, primjena svakodnevno raste budući da ne postoje ograničenja na područja i probleme optimiziranja koji se njime mogu riješiti. Iz tih je razloga genetski algoritam odabran kao metoda optimiziranja u ovome radu. Povezivanjem genetskog algoritma s izrađenim računalnim programima u jednu cjelinu omogućena je praktična primjena postupka optimiziranja. Pokazuje se da se primjenom genetskog algoritma mogu dobiti forme sa smanjenim otporom valova. Smanjenje ovisi o primjenjenim ograničenjima varijabli u problemu optimiziranja. Izvedene forme s minimalnim otporom valova imaju valoviti oblik forme, a veličina valovitosti ovisi o primjenjenim ograničenjima. Dopuštanje većih izmjena forme rezultira potpuno nepraktičnim oblicima. Zbog toga je osnovno da se odgovarajuća ograničenja ispravno formuliraju radi nalaženja forme broda koja bi mogla biti primjenljiva sa praktičnog stajališta.

Nastavak istraživanja, temeljen na postignutim rezultatima mogao bi se odvijati u nekoliko smjerova. Prije svega, u linearizirani model bi se mogla uključiti mogućnost promjene hidrodinamičkog urona i trima. Naime, za veće Froudeove brojeve ove veličine poprimaju značajne vrijednosti i ne smiju se zanemarivati, a nemogućnost promjene položaja broda utječe na točnost rezultata. Daljnji naponi u razradi i usavršavanju numeričkog modela mogu se usmjeriti na proširenja modela za primjenu na različite brodske forme kao npr. forme s krmenim zrcalom te višetrupne forme (katamarani, trimarani, SWATH). Mogućnost proširenja postoji za primjenu na brodove na zračnom jastuku kao i na jedrilice za koje je neophodno u model uključiti i uzgonske plohe (kobilica i kormilo jedrilice). Ove se uzgonske plohe mogu

matematički modelirati odgovarajućim rasporedom vrtloga. Pri tome je potrebno zadovoljiti Kutta uvjet na izlaznom bridu kobilice ili kormila. Nadalje, model se može proširiti za slučajeve kada je plovidbeni put ograničene dubine ili širine. U tim je slučajevima potrebno u model uključiti i utjecaje dna i bočnih stijenki. Za sve je ove slučajeve prethodno potrebno na odgovarajući način preinačiti i prilagoditi računalni program za formiranje mreže panela.

Numerička djelotvornost računalnog programa također bi se mogla unaprijediti. Posebice se to odnosi na dio za rješavanje sustava jednadžbi. Najveći dio vremena tijekom izvršavanja programa zahtijeva rješavanje sustava jednadžbi Gaussovom metodom. Primjenom drugih metoda moglo bi se smanjiti vrijeme računanja kao i potrebna memorija računala čime bi se u proračunima mogao uzeti u obzir veći broj panela, a samim tim bi se povećala točnost rezultata.

Postupak optimiziranja brodske forme primjenom genetskog algoritma također pruža široke mogućnosti za nastavak istraživanja. Jedna od mogućnosti je primjena za optimiziranje pramčanog dijela forme s bulbom, budući da se modelom potencijalnog strujanja mogu dobro simulirati pojave na pramčanom dijelu gdje viskozni utjecaji nisu previše izraženi. U tom je slučaju kao osnovnu formu broda potrebno izabrati formu s pramčanim bulbom.

Za kvalitetniju primjenu numeričkih proračuna nužne su daljnje usporedbe s rezultatima modelskih ispitivanja radi stjecanja iskustva za rješavanje konkretnih problema.



## POPIS LITERATURE

- [1] Sclavounos, P. D., Kring, D.C., Huang, Y., Mantzaris, A. D., Kim, S., Kim, Y., *A Computational Method as an Advanced Tool of Ship Hydrodynamic Design*, SNAME Transactions, Vol. 105, 1997.
- [2] Eggert, E. F., *Further Form Resistance Experiments*, SNAME Transactions, Vol. 47, 1939.
- [3] Michell, W. H., *The Wave Resistance of a Ship*, Philosophical Magazine, London, 1889.
- [4] Vossers, G. *Wave Resistance of Slender Ships*, Schifftechnik 9, 1962.
- [5] Kotik, J., Thomsen, P., *Various Wave Resistance Theories for Slender Ships*, Schifftechnik 10, 1963.
- [6] Brard, R., *Research in Ship Hydrodynamics*, Schifftechnik 14, 1967.
- [7] Havelock, T. H., *Wave Patterns and Wave Resistance*. Transactions INA, Vol.76, 1934.
- [8] Havelock, T. H., *Wave Resistance Theory and Its Application to Ships Problems*, SNAME Transactions, Vol.59, 1951.
- [9] Lunde, J. K., *Wave Resistance Calculations at High Speeds*, Transactions INA, Vol.91, No.2, 1949.
- [10] Wigley, C. *Ship Wave Resistance*, Trans. NECI, Vol.47, 1931.
- [11] Guilloton, R., *Potential Theory of Wave Resistance of Ships with Tables for Its Calculation*, Transactions SNAME, Vol.59, 1951.
- [12] Inui, T., *Wave-Making Resistance of Ships*, SNAME Transactions, Vol.70, 1962.
- [13] Gadd, G. E., *Ship Wavemaking in Theory and Practice*, Quarterly Transactions of RINA, Vol. 111, No. 4, 1969.
- [14] Jinaka, T., Tsutsumi, T., Ogivara, S., *Hull Form Derived From Wave Analysis*, International Seminar on Wave Resistance, Tokio, 1976.
- [15] Inui, T., Kajitani, H. *Hull Form Design, Its Practice and Theoretical Background*, International Seminar on Wave Resistance, Tokio, 1976.
- [16] Newman, J. N., *Linearised Wave Resistance Theory*, Proceedings of International Seminar on Wave Resistance, Tokio, 1976.
- [17] Doctors, L. J., Beck, R. F., *Numerical Aspects of the Neumann-Kelvin Problem*, Journal of Ship Research, Vol. 31, No. 1, 1987.
- [18] Newman, J. N., *Evaluation of the Wave Resistance Green Function, Part I-The Double Integral*, Journal of Ship Research, Vol. 31, No. 2, 1987.
- [19] Newman, J. N., *Evaluation of the Wave Resistance Green Function, Part II*, Journal of Ship Research, Vol. 31, No. 3, 1987.
- [20] Hendrix, D., Noblesse, F., *Recipes for Computing the Steady Free-Surface Flow Due to a Source Distribution*. Journal of Ship Research, Vol. 36, No. 4, 1992.
- [21] Gadd, G. E., *A Method for Computing the Flow and Surface Wave Pattern Around Full Forms*. Transactions RINA, Vol.118, 1976.
- [22] Dawson, C. W., *A Practical Computer Method for Solving Ship-Wave Problems*, 2<sup>nd</sup>International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, University of California, Berkeley, 1977.
- [23] Larsson, L., Broberg, L., Kim, K. J., Zhang D. H., *A Method for Resistance and Flow Prediction in Ship Design*, Transactions SNAME, Vol.98, 1990.



- [24] van den Berg, W., Valkhof, H. H., Raven, H. C., *Free-Surface Potential Flow Calculations for Merchant Vessels*, Proceedings of the International Symposium on CFD and CAD in Ship Design, Wageningen, 1990.
- [25] Raven, H. C., *Adequacy of Free-Surface Conditions for the Wave Resistance Problem*, 18<sup>th</sup> Symp. on Naval Hydrodynamics, Ann Arbor, 1991.
- [26] Ligtelijn, J. Th., Raven, H. C., Valkhof H. H., *Ship Design Today: Practical Applications of Computational Fluid Dynamics*, International Symposium on Hydro and Aerodynamics in Marine Engineering, HADMAR '91, Varna, 1991.
- [27] Raven, H. C., *A Practical Nonlinear Method for Calculating Ship Wavemaking and Wave Resistance*, 19<sup>th</sup> Symp. on Naval Hydrodynamics, Seoul, 1992.
- [28] Raven, H. C., *Nonlinear Ship Wave Calculations Using the RAPID Method*, 7<sup>th</sup> International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Iowa City, 1993.
- [29] Daube, O., Dulieu, A., *A Numerical Approach of the Non-Linear Wave Resistance Problem*, 3<sup>rd</sup> International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Paris, 1981.
- [30] Jensen, G., Söding, H., Mi, Z. X., *Rankine Source Methods for Numerical Solutions of the Steady Wave Resistance Problem*, 16<sup>th</sup> Symposium on Naval Hydrodynamics, Berkeley, 1986.
- [31] Jensen, P. S., *On the Numerical Radiation Condition in the Steady-State Ship Wave Problem*, Journal of Ship Research, Vol. 31, No. 1, 1987.
- [32] Jensen, P. S., *Automatic Panel Generation for Seakeeping and Wave Resistance Calculations*, International Symposium on CFD and CAD in Ship Design, Wageningen, 1990.
- [33] Delhommeau, G., Maissoneuve, J.J., *Application de la méthode des singularités de Rankine au calcul de la résistance de vagues de différents types de carènes*. Bulletin de l'ATMA, No. 86, Paris, 1986.
- [34] Bruzzone, D., *Calcolo del Moto a Potenziale Attorno a una Carena con l'Effetto della Superficie Libera*. Istituto Policattedra di Ingegneria Navale, Università degli Studi di Genova, Rapporto No. 8801, Genova, 1988.
- [35] Bruzzone, D., *Un Metodo a Pannelli per il Calcolo Del Flusso in Presenza di Superficie Libera*, Istituto Policattedra di Ingegneria Navale, Università degli Studi di Genova, Rapporto No. 9016, Genova, 1990.
- [36] Bruzzone, D., Ferrando, M., Martinelli, L., *Experience with the Use of a Rankine-Source Based Procedure for the Steady Free Surface Calculations*, in *Design of Marine and Offshore Structures*, Proc. CADMO '92, Elsevier, Madrid, 1992.
- [37] Chen, C. Y., Noblesse, F., *Comparison Between Theoretical Predictions of Wave Resistance and Experimental Data for the Wigley Hull*, Journal of Ship Research, Vol. 27, No.4, 1983.
- [38] Sclavounos, P. D., Nakos, D. E., *Stability Analysis of Panel Methods for Free-Surface Flows with Forward Speed*, 17<sup>th</sup> Symposium on Naval Hydrodynamics, L'Aia, 1988.
- [39] Cheng, B. H., *Computations of 3D Transom Stern Flows*, Proceedings of the 5<sup>th</sup> Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Hiroshima, 1989.
- [40] Bruzzone, D., Ferrando, M., *Numerical Evaluation of the Steady Free Surface Flow for Catamaran Hull Forms*, III Symposium on High Speed Marine Vehicles, Napoli, 1997.
- [41] Lalli, F., Marcolini, R., Penna, R., Zotti, I., *Applicazione di Metodologie Sperimentali e Numeriche nella Progettazione Navale*. Tecnica Italiana, Anno LX, 1995.

- [42] Delhommeau, G., Maissoneuve, J. J., *Application de la methode des singularites de Rankine au calcul de l'ecoulement autour de navires non conventionnels*, Bulletin de l'ATMA, No. 90, Paris, 1990.
- [43] Adee, H. B., *Calculation of the Streamlines About a Ship Assuming a Linearised Free-Surface Boundary Condition*, Journal of Ship Research, Vol.17, No.3, 1973.
- [44] Jonk, A., *The Use of Non-Viscous Flow Calculations in Hull Form Optimization*. Workshop on Developments in Hull Form Design, Wageningen, 1985.
- [45] Hoyle, J. W., Cheng, B.H., Hays, B., Johnson, B., Nehrling, B., *A Bulbous Bow Design Methodology for High-Speed Ships*, SNAME Transactions, Vol. 94, 1986.
- [46] Delhommeau, G., Maissoneuve, J.J., *Application de programme REVA au calcul des appendices*, Bulletin de l'ATMA, No. 89, Paris, 1989.
- [47] Valkhof, H. H., Minguito, E., *Shuttle Tanker Design Problems Solved by CFD-Code Dawson*, SNAME Transactions, Vol. 102, 1994.
- [48] ..., *Advances in Marine Hydrodynamics*, Computational Mechanics Publication, Volume 5, Southampton, Boston, 1996.
- [49] Newman, J. N., *Marine Hydrodynamics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1977.
- [50] Kellog, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Dover Publications, New York, 1953.
- [51] Ni, S. Y., *Higher Order Panel Methods for Potential Flows with Linear or Non-linear Free Surface Boundary Conditions*, Chalmers University of Technology, Division of Marine Hydrodynamics, Gotheborg, 1987.
- [52] Hess, J. L., Smith, A. M. O., *Calculation of Non-Lifting Potential Flow About Arbitrary Three-Dimensional Bodies*, Journal of Ship Research, 1964.
- [53] Hess, J. L., Smith, A. M. O., *Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies*, Douglas Aircraft Company, Aircraft Division, Long Beach, California, 1962.
- [54] Raven, H. C., *Variations on a Theme by Dawson; Recent Improvements of a Potential Flow Calculation Method for Ships*, ONR Symposium, The Hague, 1988.
- [55] Robertson, J. M., *Hydrodynamics In Theory and Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
- [56] ..., *Advanced Mechanics of Fluids*, John Wiley & Sons, New York, 1965.
- [57] Eggers, K. W. H., Sharma, S. D., Ward, L. W., *An Assessment of Some Experimental Methods for Determining the Wavemaking of a Ship Form*, SNAME Transactions, Vol.74, 1967.
- [58] Hogben, N., *Automated Recording and Analysis of Wave Pattern Behind Towed Models*, RINA Transactions, Vol. 114, 1972.
- [59] Hogben, N., Standing, R. G., *Wave Pattern Resistance from Routine Model Tests*, RINA Transactions, Vol. 116, 1974.
- [60] Hinton, E., Owen, D. R. J., *An Introduction to Finite Element Computations*, Pineridge Press Limited, Swansea, 1980.
- [61] Prevarek, A., *AutoCAD u profesionalnoj primjeni*, Znak, Zagreb, 1995.
- [62] ..., 17<sup>th</sup> ITTC, Report of the Resistance Committee, Goteborg, 1984.
- [63] ..., 19<sup>th</sup> ITTC Report of the Panel on Validation Procedures, Madrid, 1990.
- [64] Xia, F., *Calculation of Potential Flow with a Free Surface*, Chalmers University of Technology, Department of Ship Hydrodynamics, Report no. 65, Gothenburg, 1986.
- [65] Daube, O., *Contribution au Calcul Non Linéaire de la Résistance de Vagues d'un Navire*, These de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.
- [66] ..., 18<sup>th</sup> ITTC, Report of the Resistance Committee, Kobe, 1987.

- [67] Todd, F. H., *Some Further Experiments on Single-Screw Merchant Ship Forms – Series 60*, SNAME Transactions, Vol.61., 1953.
- [68] Bruzzone, D., Casella, P., Miranda, S., Pensa, C., Zotti, I., *Scale Effect on Wave Resistance Obtained by Longitudinal Cut. Experimental Results and Numerical Calculations*, 6<sup>th</sup> International Symposium on Practical Design of Ships and Mobile Units, Seoul, 1995.
- [69] Bruzzone, D., Casella, P., Miranda, S., Pensa, C., Zotti, I. *Steady Waves of Series 60  $C_B=0.7$  Hull, Numerical Results and Experiment on Geosims*, Proceedings of the First International Conference on Marine Industry, Vol.1, Varna, 1996.
- [70] Hsiung, C. C., *Optimal Ship Forms for Minimum Wave Resistance*, Journal of Ship Research, Vol. 25, No.2, 1981.
- [71] Wyatt, D. C., Chang, P. A., *Development and Assessment of a Total Resistance Optimized Bow for the AE 36*, Marine Technology, Vol. 31, No. 2, 1994.
- [72] Goldberg, D., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.
- [73] Goodman, E. D., *An Introduction to GALLOPS, The "Genetic Algorithm Optimized for Portability and Parallelism" System, Release 3.2*, Technical Report #96-07-01, Michigan State University, East Lansing, 1996.
- [74] Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley&Sons, New York, 1993.
- [75] Chapra, C. S, Canalle, R. P., *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1990.
- [76] Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., Mastin, C. W., *Numerical Grid Generation*, Elsevier Science Publishing Co. Inc, New York, 1985.
- [77] Qiulin, D., Davies, B. J., *Surface Engineering Geometry for Computer-Aided Design and Manufacture*, Ellis Horwood Mechanical Engineering Series, Chichester, 1988.

## POPIS OZNAKA I SIMBOLA

$A$	površina panela, $m^2$
$A_{i,j}$	koeficijent sustava linearnih jednadžbi
$A_M$	površina glavnog rebra, $m^2$
$A_{WL}$	površina vodne linije broda, $m^2$
$A_X$	površina poprečnog presjeka broda, $m^2$
$B$	širina broda, m
$B_i$	slobodni član sustava linearnih jednadžbi
$B_{maks.}$	najveća širina broda, $m^2$
$C_B$	koeficijent punoće istisnine broda
$C_M$	bezdimenzionalni koeficijent hidrodinamičkog momenta
$C_P$	prizmatički koeficijent broda
$C_p$	bezdimenzionalni koeficijent tlaka
$C_{p0}$	bezdimenzionalni koeficijent tlaka uslijed optjecanja dvostrukog modela
$C_{VP}$	vertikalni prizmatički koeficijent broda
$C_W$	bezdimenzionalni koeficijent otpora valova
$C_X$	koeficijent punoće najvećeg poprečnog presjeka broda
$C_Z$	bezdimenzionalni koeficijent vertikalne sile
$c_m$	operator konačnih razlika u uzdužnom smjeru
$d_m$	operator konačnih razlika u poprečnom smjeru
$F$	vektor sile
$F_n$	Froudeov broj
$G$	Greenova funkcija
$g$	ubrzanje sile gravitacije, $m\ s^{-2}$
$H$	funkcija slobodne površine, m
$h$	elevacija slobodne površine, m
$h^o$	elevacija slobodne površine uslijed optjecanja dvostrukog modela, m
$i$	indeks kolokacijske točke
$j$	indeks panela
$i, j, k$	jedinični vektori pravokutnog koordinatnog sustava
$k_{ix}, k_{iy}, k_{ix}, k_{iy}$	transformacijski koeficijenti za derivacije
$L, L_{PP}$	duljina broda između okomica, m
$l, t$	krivocrtne koordinate
$l, t$	vektori krivocrtnog koordinatnog sustava
$L_{WL}$	duljina broda na vodnoj liniji, m
$M$	vektor momenta sile
$M$	hidrodinamički moment sila oko poprečne osi broda, Nm
$n$	jedinični vektor normale



$n_x, n_y, n_z$	komponente jediničnog vektora normale
$N_{FS}$	broj panela na slobodnoj površini
$N_H$	broj panela na oplakivanoj površini
$N_T$	ukupni broj panela
$n_L$	broj panela u jednom uzdužnom redu na slobodnoj površini
$n_T$	broj panela u jednom poprečnom redu na slobodnoj površini
$p$	tlak u tekućini, Pa
$p_\infty$	tlak u tekućini na beskonačnoj udaljenosti, Pa
$P$	točka u $\Omega$
$P^i$	točka na rubnoj površini u kojoj se određuje brzina
$Q$	točka na rubnoj površini u kojoj je smješten izvor
$\mathbf{r}$	vektor između dviju točaka rubnih površina
$r_{i,j}$	udaljenost između kolokacijske točke $i$ -tog panela i težišta $j$ -tog panela, m
$r(P, Q)$	udaljenost između točaka $P$ i $Q$ , m
$R$	uzdužni metacentarski radijus broda, m
$R_W$	otpor valova broda, N
$R_Z$	vertikalna hidrodinamička sila na brod, N
$S_H$	oplakivana površina broda, m <sup>2</sup>
$s$	duljina luka strujnice, m
$S_B$	dodatne rubne površine proračunskog područja, m <sup>2</sup>
$S_{FS}$	slobodna površina, m <sup>2</sup>
$T$	gaz broda, m
$U_\infty$	brzina broda, m s <sup>-1</sup>
$\mathbf{V}$	vektor brzine tekućine
$V_x, V_y, V_z$	komponente brzine tekućine, m s <sup>-1</sup>
$X_{i,j}, Y_{i,j}, Z_{i,j}$	$x, y, z$ – komponente brzine koju u $i$ -toj točki inducira izvor jediničnog intenziteta na $j$ -tom panelu
$Z_{CB}$	vertikalni položaj težišta istisnine broda, m
$x, y, z$	pravokutne koordinate, m
$X_{CB}$	uzdužni položaj težišta istisnine broda, m
$\Delta T$	hidrodinamički uron, m
$\Delta t$	hidrodinamički trim, m
$\Delta T_K$	promjena gaza na krmenoj okomici, m
$\Delta T_P$	promjena gaza na pramčanoj okomici, m
$\phi$	ukupni potencijal brzine tekućine, m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
$\Phi$	potencijal brzine uslijed optjecanja dvostrukog modela, m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
$\delta h$	elevacija slobodne površine uslijed valnog poremećaja slobodne površine, m
$\delta\phi$	potencijal brzine uslijed valnog poremećaja slobodne površine, m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
$\phi^i$	potencijal brzine uslijed optjecanja broda, m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
$\gamma(x, z)$	lokalna poluširina oplakivane površine, m
$\Gamma$	funkcija oplakivane površine, m



$\Omega$	proračunsko područje tekućine
$\theta$	kut hidrodinamičkog trima, rad
$\rho$	gustoća tekućine, $\text{kg m}^{-3}$
$\sigma$	intenzitet izvora po jedinici površine, $\text{m s}^{-1}$
$\sigma_0$	intenzitet izvora po jedinici površine uslijed optjecanja samo dvostrukog modela, $\text{m s}^{-1}$
$\sigma_{iz}$	intenzitet točkastog izvora, $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$\xi, \eta$	koordinate vrhova panela u lokalnom koordinatnom sustavu, m
$\nabla$	volumen istisnine broda, $\text{m}^3$

## POPIS KRATICA

<i>DTNSRDC</i>	David Taylor Naval Ship Research and Development Center
<i>HSVA</i>	Hamburg Ship Model Basin
<i>ITTC</i>	International Towing Tank Conference
KO	krmena okomica
KVL	konstrukcijska vodna linija
PO	pramčana okomica
R	rebro
<i>SRI</i>	Ship Research Institute, Tokyo
<i>TOKYO</i>	University of Tokyo, Tokyo
VL	vodna linija

## POPIS SLIKA

	Str.
Sl. 2.1. Proračunsko područje i koordinatni sustav .....	6
Sl. 2.2. Rubni uvjeti za potencijalno strujanje .....	8
Sl. 2.3. Iterativno rješavanje elevacije slobodne površine .....	9
Sl. 2.4. Dvostruki model .....	10
Sl. 2.5. Prikaz točaka na rubnim površinama .....	14
Sl. 3.1. Diskretizacija rubnih površina panelima .....	16
Sl. 3.2. Raspored ravninskih panela na oplakivanoj površini .....	17
Sl. 3.3. Diskretizacija slobodne površine .....	23
Sl. 3.4. Struktura matrice koeficijenata <b>A</b> .....	26
Sl. 5.1. Shema proračunskog postupka .....	33
Sl. 5.2. Struktura programa SGRID .....	34
Sl. 5.3. Područja oplakivane površine .....	34
Sl. 5.4. Podjela rebra na segmente .....	35
Sl. 5.5. Primjeri diskretizacije oplakivane površine .....	35
Sl. 5.6. Smanjenje oštih prijelaza mreže na slobodnoj površini .....	36
Sl. 5.7. Struktura programa FSFLOW .....	37
Sl. 6.1. Wigleyeva matematička forma .....	41
Sl. 6.2. Raspored panela za Wigleyevu matematičku formu .....	42
Sl. 6.3. Profili valova uz oplakivanu površinu Wigleyeve matematičke forme .....	42
Sl. 6.4. Vektori brzina za Wigleyevu matematičku formu, $F_n = 0.350$ .....	42
Sl. 6.5. Profil vala za Wigleyevu matematičku formu, $F_n = 0.22$ .....	43
Sl. 6.6. Profil vala za Wigleyevu matematičku formu, $F_n = 0.31$ .....	43
Sl. 6.7. Profili valova za Wigleyevu matematičku formu .....	44
Sl. 6.8. Ekstrapolacija vala na oplakivanu površinu .....	44
Sl. 6.9. Koeficijent otpora valova za Wigleyevu formu .....	45
Sl. 6.10. Hidrodinamički uron za Wigleyevu formu .....	46
Sl. 6.11. Hidrodinamički trim za Wigleyevu formu .....	46
Sl. 6.12. Promjena gaza na pramcu za Wigleyevu formu .....	46
Sl. 6.13. Serija 60, $C_B = 0.60$ .....	47
Sl. 6.14. Raspored panela za formu iz Serije 60 .....	47
Sl. 6.15. Vektori brzina, Serija 60, $C_B = 0.60$ , $F_n = 0.289$ .....	48
Sl. 6.16. Profili valova za formu iz Serije 60, $C_B = 0.60$ .....	48
Sl. 6.17. Koeficijent otpora valova za formu iz Serije 60, $C_B = 0.60$ .....	49
Sl. 6.18. Hidrodinamički trim za formu iz Serije 60, $C_B = 0.60$ .....	50
Sl. 6.19. Promjena gaza na pramcu za formu iz Serije 60, $C_B = 0.60$ .....	50
Sl. 6.20. Serija 60, $C_B = 0.70$ .....	51
Sl. 6.21. Serija 60, $C_B = 0.80$ .....	52

Sl. 6.22.	Koeficijent otpora valova za formu iz Serije 60, $C_B = 0.60$ .....	52
Sl. 6.23.	Koeficijent otpora valova za formu iz Serije 60, $C_B = 0.70$ .....	53
Sl. 6.24.	Koeficijent otpora valova za formu iz Serije 60, $C_B = 0.80$ .....	54
Sl. 6.25.	Seriya 60, $C_B = 0.60$ , $F_n = 0.250$ (val uvećan 5 puta) .....	55
Sl. 6.26.	Seriya 60, $C_B = 0.70$ , $F_n = 0.250$ (val uvećan 5 puta) .....	56
Sl. 6.27.	Seriya 60, $C_B = 0.80$ , $F_n = 0.225$ (val uvećan 5 puta) .....	57
Sl. 7.1.	Umjetne jedinke u populaciji i operatori genetskog algoritma .....	59
Sl. 7.2.	Linearno skaliranje u normalnim uvjetima .....	62
Sl. 7.3.	Problemi sa skaliranjem u kasnijim naraštajima .....	62
Sl. 7.4.	Križanje s jednim rezom .....	64
Sl. 7.5.	Mutacija .....	64
Sl. 8.1.	Raspored panela za postupak optimiziranja .....	67
Sl. 8.2.	Mreža za definiranje parametara .....	67
Sl. 8.3.	Pramčana rebra forme P1 (————) i osnovne forme (----) .....	68
Sl. 8.4.	Profil vala forme P1 (————) i osnovne forme (----) .....	68
Sl. 8.5.	Pramčana rebra forme P2 (————) i osnovne forme (----) .....	68
Sl. 8.6.	Profil vala forme P2 (————) i osnovne forme (----) .....	69
Sl. 8.7.	Pramčana rebra forme P3 (————) i osnovne forme (----) .....	69
Sl. 8.8.	Profil vala forme P3 (————) i osnovne forme (----) .....	69
Sl. 8.9.	Pramčana rebra forme P4 (————) i osnovne forme (----) .....	70
Sl. 8.10.	Profil vala forme P4 (————) i osnovne forme (----) .....	70
Sl. 8.11.	Pramčana rebra forme P5 (————) i osnovne forme (----) .....	70
Sl. 8.12.	Profil vala forme P5 (————) i osnovne forme (----) .....	71
Sl. 8.13.	Koeficijenti otpora valova .....	71
Sl. 8.14.	Areale rebara .....	72
Sl. 8.15.	Mreža za definiranje parametara .....	72
Sl. 8.16.	Rebra forme K1 (————) i osnovne forme (----) .....	73
Sl. 8.17.	Profil vala forme K1 (————) i osnovne forme (----) .....	73
Sl. 8.18.	Rebra forme K2 (————) i osnovne forme (----) .....	73
Sl. 8.19.	Profil vala forme K2 (————) i osnovne forme (----) .....	74
Sl. 8.20.	Rebra forme K3 (————) i osnovne forme (----) .....	74
Sl. 8.21.	Profil vala forme K3 (————) i osnovne forme (----) .....	74
Sl. 8.22.	Rebra forme K4 (————) i osnovne forme (----) .....	75
Sl. 8.23.	Profil vala forme K4 (————) i osnovne forme (----) .....	75
Sl. 8.24.	Rebra forme K5 (————) i osnovne forme (----) .....	75
Sl. 8.25.	Profil vala forme K5 (————) i osnovne forme (----) .....	76
Sl. 8.26.	Koeficijenti otpora valova .....	76
Sl. 8.27.	Areale rebara .....	77
Sl. P2.1.	Četverokutni ravninski panel u lokalnom koordinatnom sustavu .....	95
Sl. P2.2.	Formiranje osnovnih potencijalnih funkcija za stranice panela .....	96
Sl. P3.1.	<i>Spline</i> .....	103
Sl. P3.2.	Nosač opterećen na savijanje .....	103

Sl. P3.3.	Teorijsko rebro broda kao elastična linija .....	104
Sl. P3.4.	Matematički <i>spline</i> .....	104
Sl. P3.5.	Hermiteova interpolacija za segment kubične krivulje .....	105
Sl. P3.6.	Mješovite funkcije parametarskih kubičnih krivulja .....	107
Sl. P3.7.	Funkcije prvih derivacija mješovitih funkcija .....	107
Sl. P3.8.	Krivulja ravninskog kubičnog <i>spline-a</i> .....	110
Sl. P3.9.	Osciliranje krivulje .....	114
Sl. P3.10.	Stranice mnogokuta kao parametar <i>spline</i> krivulje .....	116
Sl. P3.11.	Primjeri krivulja za definiranje brodske forme .....	117

## POPIS TABLICA

	Str.	
Tab. 6.1.	Rezultati numeričkog proračuna za Wigleyevu matematičku formu .....	45
Tab. 6.2.	Rezultati numeričkog proračuna za Seriju 60, $C_B = 0.60$ .....	49
Tab. 6.3.	Značajke ispitanih modela .....	51
Tab. 6.4.	Rezultati numeričkog proračuna za Seriju 60, $C_B = 0.70$ .....	53
Tab. 6.5.	Rezultati numeričkog proračuna za Seriju 60, $C_B = 0.80$ .....	54
Tab. 8.1.	Hidrostatski podaci forme iz Serije 60 sa $C_B = 0.60$ , [67] .....	66
Tab. 8.2.	Hidrostatski podaci .....	71
Tab. 8.3.	Hidrostatski podaci .....	76

## PRILOZI

	Str.
Prilog 1. Elementarno rješenje Laplaceove diferencijalne jednačbe .....	93
Prilog 2. Određivanje brzine inducirane četverokutnim ravninskim izvorom .....	95
Prilog 3. Ravninski kubični <i>spline</i> .....	103



## Prilog 1. Elementarno rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe

Tipičan primjer funkcije koja predstavlja rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe je funkcija potencijala Rankineova jediničnog izvora:

$$\frac{1}{r(P,Q)} = \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{P1.1})$$

gdje je  $Q(x', y', z')$  zadana točka prostora, a  $P(x, y, z)$  proizvoljna od  $Q$  različita točka. Jedinični izvor smješten u točki  $Q$  prema izrazu (2.30) inducira u točki  $P$  potencijal brzine:

$$\phi'(P) = \frac{1}{r(P,Q)}. \quad (\text{P1.2})$$

Iz (P1.2) slijedi:

$$\partial_x \phi' = \partial_x \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \partial_x r; \quad (\text{P1.3})$$

$$\partial_x r = \frac{1}{2} \left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{1}{2}-1} \cdot \partial_x (x-x')^2 \quad (\text{P1.4})$$

Budući da je:

$$\partial_x (x-x')^2 = 2(x-x'), \quad (\text{P1.5})$$

slijedi

$$\partial_x r = \frac{(x-x')}{r} \quad (\text{P1.6})$$

te konačno:

$$\partial_x \phi' = -\frac{x-x'}{r^3}. \quad (\text{P1.7})$$

Slično se dobiva za ostale koordinate:

$$\partial_y \phi' = -\frac{y-y'}{r^3}, \quad \partial_z \phi' = -\frac{z-z'}{r^3}, \quad (\text{P1.8})$$

Nadalje je:

$$\partial_{xx}\phi' = \partial_x \left( \frac{x-x'}{r^3} \right) = \frac{r^3 - (x-x') \cdot 3r^2 \partial_x r}{r^6} = \frac{r^3 - 3(x-x')r^2 \cdot \frac{x-x'}{r}}{r^6} \quad (\text{P1.9})$$

Odavde je:

$$\partial_{xx}\phi' = \frac{r^2 - 3(x-x')^2}{r^5}, \quad (\text{P1.10})$$

odnosno za ostale koordinate:

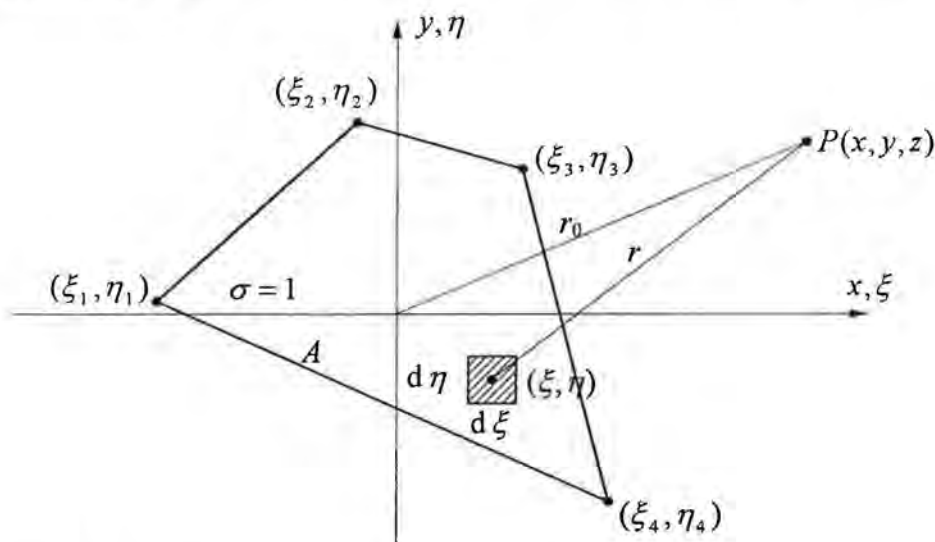
$$\partial_{yy}\phi' = \frac{r^2 - 3(y-y')^2}{r^5}, \quad \partial_{zz}\phi' = \frac{r^2 - 3(z-z')^2}{r^5}. \quad (\text{P1.11})$$

Slijedi

$$\nabla(\nabla\phi') = \Delta\phi' = \frac{3r^2 - 3[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}{r^5} = 0. \quad (\text{P1.12})$$

## Prilog 2. Određivanje brzine inducirane četverokutnim ravninskim izvorom

Hess i Smith [52,53] su razvili metodu za određivanje brzine koju u nekoj točki u prostoru inducira izvor jediničnog intenziteta smješten na ravninskom četverokutnom panelu. Formule su razvijene za ravninske četverokutne panele, ali se mogu poopćiti da vrijede za panele s proizvoljnim brojem stranica.



Sl. P2.1. Četverokutni ravninski panel u lokalnom koordinatnom sustavu

Koordinate vrhova panela dane su u globalnom koordinatnom sustavu, koji je čvrsto vezan za tijelo. Osim globalnog, potrebno je imati niz lokalnih koordinatnih sustava, po jedan za svaki panel. Formule za inducirane brzine vrijedit će se za lokalni koordinatni sustav, pa je tako određene brzine potrebno na odgovarajući način transformirati u globalni koordinatni sustav. Izvod formula najpogodnije se može obaviti usvajanjem lokalnog koordinatnog sustava tako da panel leži u njegovoj  $xy$  ravnini, sl. P2.1. Pozitivni dio osi  $z$  tada se podudara sa smjerom vanjskog jediničnog vektora normale panela. Koordinate vrhova panela su  $(\xi_k, \eta_k, 0)$ , s vrhovima panela  $k = 1, 2, 3, 4$ . Potrebno je odrediti potencijal odnosno brzinu koju izvor jediničnog intenziteta smješten na ravninskom četverokutnom panelu inducira u točki prostora  $P(x, y, z)$ . Udaljenost između točke  $P$  i točke unutar površine panela s koordinatama  $(\xi, \eta, 0)$  iznosi:

$$r = \left[ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{P2.1})$$

Potencijal brzine  $\phi'$  u točki  $P(x, y, z)$  koji inducira izvor jediničnog intenziteta  $\sigma = 1$  iznosi:

$$\phi' = \iint_A \frac{dA}{r} = \iint_A \frac{d\xi d\eta}{\left[ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{P2.2})$$

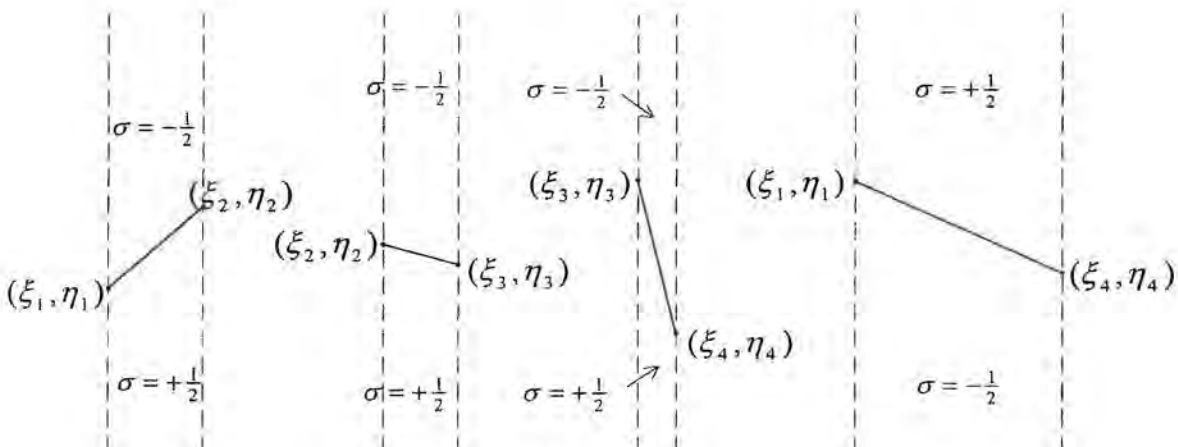
Područje integracije predstavlja površina panela  $A$ . Odatle slijedi da komponente brzine inducirane u točki  $P(x, y, z)$  iznose:

$$V_x = -\partial_x \phi' = \iint_A \frac{(x - \xi) d\xi d\eta}{r^3}, \quad (\text{P2.3})$$

$$V_y = -\partial_y \phi' = \iint_A \frac{(y - \eta) d\xi d\eta}{r^3}, \quad (\text{P2.4})$$

$$V_z = -\partial_z \phi' = \iint_A \frac{z d\xi d\eta}{r^3}. \quad (\text{P2.5})$$

Integrali u izrazima (P2.3), (P2.4) i (P2.5) mogu se analitički riješiti. Integral se prikazuje kao suma četiri člana, od kojih svaki ovisi samo o jednoj stranici panela. Vrhovi panela numerirani su na način da jedinični vektor normale panela bude vanjski, tj. da je usmjeren izvan tijela. Za svaku stranicu panela može se definirati lijeva i desna strana u odnosu na smjer obilaženja po vrhovima panela, tako da površina panela leži s desne strane. Sada se za svaku stranicu panela može formirati osnovna potencijalna funkcija u obliku sume potencijala dvije polubeskonačne vrpce izvora, koji za rubove imaju jednu stranicu panela te dva polupravca paralelna s jednom od koordinatnih osi. Vrpca izvora na desnoj strani ima intenzitet  $\sigma = +1/2$ , a vrpca na lijevoj strani intenzitet  $\sigma = -1/2$ . Polupravci mogu biti paralelni i s drugim koordinatnim osima. Sl. P2.2. prikazuje niz vrpca koje odgovaraju stranicama panela prikazanim na sl. P2.1., za slučaj kada su polupravci uzeti paralelni s  $y$  osi. Stranice prikazane na sl. P2.2. stavljene zajedno tvore panel na sl. P2.1. Intenziteti izvora na vrpcama izvan panela se poništavaju, dok unutar panela daju jediničnu vrijednost. Na taj su način potencijal i brzina uslijed panela jednaki sumi četiri para polubeskonačnih vrpca prikazanih na sl. P2.2. Može se pokazati da je ova postavka neovisna o relativnom položaju vrhova panela, i osim toga, da će slična superpozicija dati potencijal i brzinu za panele s bilo kojim brojem stranica.



Sl. P2.2. Formiranje osnovnih potencijalnih funkcija za stranice panela

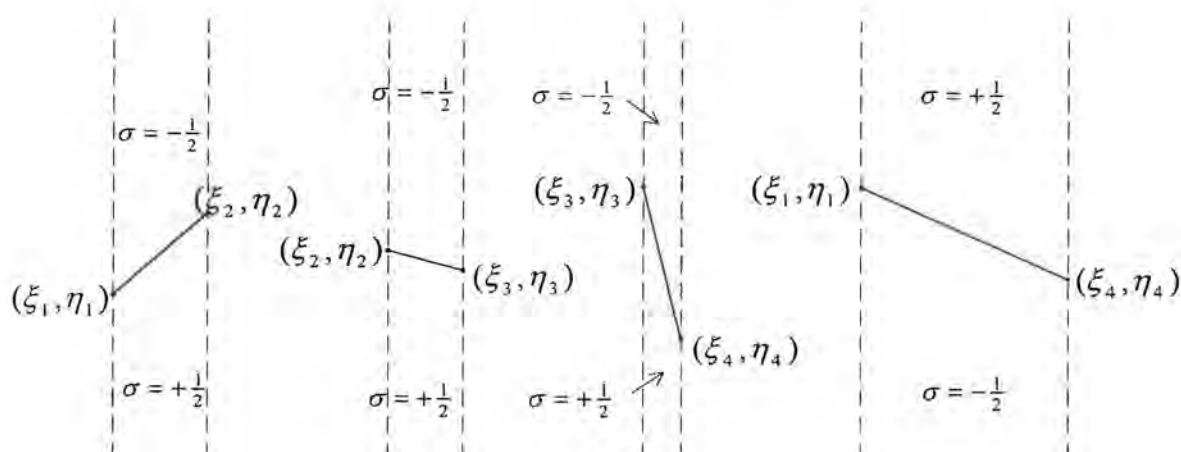
Područje integracije predstavlja površina panela  $A$ . Odatle slijedi da komponente brzine inducirane u točki  $P(x, y, z)$  iznose:

$$V_x = -\partial_x \phi' = \iint_A \frac{(x - \xi) d\xi d\eta}{r^3}, \quad (\text{P2.3})$$

$$V_y = -\partial_y \phi' = \iint_A \frac{(y - \eta) d\xi d\eta}{r^3}, \quad (\text{P2.4})$$

$$V_z = -\partial_z \phi' = \iint_A \frac{z d\xi d\eta}{r^3}. \quad (\text{P2.5})$$

Integrali u izrazima (P2.3), (P2.4) i (P2.5) mogu se analitički riješiti. Integral se prikazuje kao suma četiri člana, od kojih svaki ovisi samo o jednoj stranici panela. Vrhovi panela numerirani su na način da jedinični vektor normale panela bude vanjski, tj. da je usmjeren izvan tijela. Za svaku stranicu panela može se definirati lijeva i desna strana u odnosu na smjer obilaženja po vrhovima panela, tako da površina panela leži s desne strane. Sada se za svaku stranicu panela može formirati osnovna potencijalna funkcija u obliku sume potencijala dvije polubeskonačne vrpce izvora, koji za rubove imaju jednu stranicu panela te dva polupravca paralelna s jednom od koordinatnih osi. Vrpca izvora na desnoj strani ima intenzitet  $\sigma = +1/2$ , a vrpca na lijevoj strani intenzitet  $\sigma = -1/2$ . Polupravci mogu biti paralelni i s drugim koordinatnim osima. Sl. P2.2. prikazuje niz vrpce koje odgovaraju stranicama panela prikazanim na sl. P2.1., za slučaj kada su polupravci uzeti paralelni s  $y$  osi. Stranice prikazane na sl. P2.2. stavljene zajedno tvore panel na sl. P2.1. Intenziteti izvora na vrpicama izvan panela se poništavaju, dok unutar panela daju jediničnu vrijednost. Na taj su način potencijal i brzina uslijed panela jednaki sumi četiri para polubeskonačnih vrpce prikazanih na sl. P2.2. Može se pokazati da je ova postavka neovisna o relativnom položaju vrhova panela, i osim toga, da će slična superpozicija dati potencijal i brzinu za panele s bilo kojim brojem stranica.



Sl. P2.2. Formiranje osnovnih potencijalnih funkcija za stranice panela



Komponenta brzine  $V_y$  u točki  $P(x, y, z)$  koju inducira par polubeskonačnih vrpki koji se odnose na stranicu panela koja se nalazi između točaka  $(\xi_1, \eta_1)$  i  $(\xi_2, \eta_2)$  dana je integralom oblika (P2.4) po površini vrpki primjenom vrijednosti  $\sigma = +1/2$  i  $\sigma = -1/2$ , radije nego  $\sigma = 1$  koja se koristi u izrazu (P2.4). Može se napisati:

$$V_{y12} = \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \left\{ \int_{-\infty}^{\eta_2} \frac{(y - \eta) d\eta}{\left[ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{(y - \eta) d\eta}{\left[ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}, \quad (\text{P2.6})$$

pri čemu  $\eta_{12}$  označava  $\eta$  koordinatu točke na stranici panela. Premda je jednadžba (P2.6) dana za slučaj prikazan na sl. P2.2. gdje je  $\xi_2 - \xi_1 > 0$ , ona također vrijedi za slučaj gdje je  $\xi_2 - \xi_1 < 0$ . Nakon obavljene integracije, dobiva se:

$$V_{y12} = \frac{\xi_1 - \xi_2}{d_{12}} \ln \left( \frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} \right), \quad (\text{P2.7})$$

gdje je:

$$\begin{aligned} r_1 &= \left[ (x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ r_2 &= \left[ (x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ d_{12} &= \left[ (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{P2.8})$$

Komponenta brzine  $V_x$  koja se odnosi na stranicu panela koja se nalazi između točaka  $(\xi_1, \eta_1)$  i  $(\xi_2, \eta_2)$  najjednostavnije se dobiva postavljanjem polubeskonačnih vrpki paralelno s osi  $x$  umjesto sa  $y$ . Rezultat je isti kao prethodno dobiveni, osim što postoji razlika u predznaku, te u zamjeni  $x$  sa  $y$  i  $\xi$  sa  $\eta$ . Slijedi:

$$V_{x12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{d_{12}} \ln \left( \frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} \right). \quad (\text{P2.9})$$

Zbrajanjem vrijednosti iz izraza (P2.7) i (P2.9) za sve četiri stranice panela dobivaju se komponente inducirane brzine  $V_x$  i  $V_y$ .

Komponenta brzine  $V_z$  koja se odnosi na stranicu panela koja se nalazi između točaka  $(\xi_1, \eta_1)$  i  $(\xi_2, \eta_2)$  dobiva se na sličan način polubeskonačnim vrpčama. Postavljanjem vrpki paralelno s osi  $y$ , nakon obavljene integracije dobiva se:

$$V_{z12} = \arctan \left( \frac{m_{12} e_1 - h_1}{z r_1} \right) - \arctan \left( \frac{m_{12} e_2 - h_2}{z r_2} \right), \quad (\text{P2.10})$$

pri čemu su

$$e_1 = z^2 + (x - \xi_1)^2, \quad e_2 = z^2 + (x - \xi_2)^2, \quad (\text{P2.11})$$

$$h_1 = (y - \eta_1)(x - \xi_1), \quad h_2 = (y - \eta_2)(x - \xi_2), \quad (\text{P2.12})$$

$$m_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1}, \quad (\text{P2.13})$$

a  $r_1$  i  $r_2$  su dani u (P2.8). Komponente brzine koju inducira panel (tj. izvor) dobivaju se sumiranjem brzina dobivenih gornjim izrazima, posebno za svaku stranicu panela jednom. Ovi se izrazi mogu poopćiti da vrijede za panele s bilo kojim brojem stranica.

Izvor jediničnog intenziteta smješten na ravninskom četverokutnom panelu, koji leži u ravnini  $xy$  i čiji vrhovi imaju koordinate  $(\xi_k, \eta_k, 0)$ ,  $(k = 1, 2, 3, 4)$ , inducira u točki  $P(x, y, z)$  sljedeće komponente brzine:

$$\begin{aligned} V_x = & \frac{\eta_2 - \eta_1}{d_{12}} \ln \left( \frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} \right) + \frac{\eta_3 - \eta_2}{d_{23}} \ln \left( \frac{r_2 + r_3 - d_{23}}{r_2 + r_3 + d_{23}} \right) + \\ & + \frac{\eta_4 - \eta_3}{d_{34}} \ln \left( \frac{r_3 + r_4 - d_{34}}{r_3 + r_4 + d_{34}} \right) + \frac{\eta_1 - \eta_4}{d_{41}} \ln \left( \frac{r_4 + r_1 - d_{41}}{r_4 + r_1 + d_{41}} \right), \end{aligned} \quad (\text{P2.14})$$

$$\begin{aligned} V_y = & \frac{\xi_1 - \xi_2}{d_{12}} \ln \left( \frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} \right) + \frac{\xi_2 - \xi_3}{d_{23}} \ln \left( \frac{r_2 + r_3 - d_{23}}{r_2 + r_3 + d_{23}} \right) + \\ & + \frac{\xi_3 - \xi_4}{d_{34}} \ln \left( \frac{r_3 + r_4 - d_{34}}{r_3 + r_4 + d_{34}} \right) + \frac{\xi_4 - \xi_1}{d_{41}} \ln \left( \frac{r_4 + r_1 - d_{41}}{r_4 + r_1 + d_{41}} \right), \end{aligned} \quad (\text{P2.15})$$

$$\begin{aligned} V_z = & \arctan \left( \frac{m_{12} e_1 - h_1}{z r_1} \right) - \arctan \left( \frac{m_{12} e_2 - h_2}{z r_2} \right) + \\ & + \arctan \left( \frac{m_{23} e_2 - h_2}{z r_2} \right) - \arctan \left( \frac{m_{23} e_3 - h_3}{z r_3} \right) + \arctan \left( \frac{m_{34} e_3 - h_3}{z r_3} \right) - \\ & + \arctan \left( \frac{m_{34} e_4 - h_4}{z r_4} \right) + \arctan \left( \frac{m_{41} e_4 - h_4}{z r_4} \right) - \arctan \left( \frac{m_{41} e_1 - h_1}{z r_1} \right). \end{aligned} \quad (\text{P2.16})$$

U tim je izrazima:

$$\begin{aligned} d_{12} &= \left[ (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ d_{23} &= \left[ (\xi_3 - \xi_2)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ d_{34} &= \left[ (\xi_4 - \xi_3)^2 + (\eta_4 - \eta_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ d_{41} &= \left[ (\xi_1 - \xi_4)^2 + (\eta_1 - \eta_4)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{P2.17})$$

$$m_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1}, \quad m_{23} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\xi_3 - \xi_2}, \quad m_{34} = \frac{\eta_4 - \eta_3}{\xi_4 - \xi_3}, \quad m_{41} = \frac{\eta_1 - \eta_4}{\xi_1 - \xi_4}, \quad (\text{P2.18})$$

$$r_k = \left[ (x - \xi_k)^2 + (y - \eta_k)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad (\text{P2.19})$$

$$e_k = z^2 + (x - \xi_k)^2, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad (\text{P2.20})$$

$$h_k = (y - \eta_k)(x - \xi_k)^2, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{P2.21})$$

Brzine poprimaju beskonačne vrijednosti na rubovima panela, te se iz tih razloga ne mogu određivati u blizini tih rubova. Određivanje  $V_z$  zahtijeva određenu pažnju, naročito u točkama unutar samog panela. Primjenom raspona vrijednosti od  $-(\pi/2)$  do  $+(\pi/2)$  za inverzne tangente, može se iz izraza (P2.16) dokazati da za slučaj kada  $z \rightarrow 0$ , tada i  $V_z \rightarrow 0$ , kako se točka  $P$  približava točki u ravnini izvan rubova panela. Kada se točka  $P$  približava točki unutar rubova panela, tada za slučaj kada  $z \rightarrow 0$ ,  $V_z \rightarrow 2\pi (\text{sgn } z)$ . Inducirana brzina određuje se u jednoj točki svakog panela, a iznos  $2\pi$  predstavlja vrijednost normalne brzine koju inducira izvor u jednoj svojoj točki, što odgovara vrijednosti  $2\pi \sigma(P')$  u izrazu (2.37). Predznak mora odgovarati smjeru približavanja panelu: iz unutrašnje strane tijela (slučaj protjecanja) ili s vanjske strane (slučaj optjecanja). Predznak je potrebno uskladiti s vektorom normale panela.

Unutar površine bilo kojeg konveksnog panela postoji samo jedna točka u kojoj je brzina inducirana u ravnini panela jednaka nuli. To je tzv. kolokacijska točka, a koja je izabrana kao točka u kojoj će se računati vrijednost inducirane brzine. Kolokacijska točka pojedinog panela određuje se uvođenjem uvjeta  $z=0$  u izrazima (P2.14) i (P2.15), te postavljanjem rezultirajućih izraza jednakim nuli. Dobivaju se dvije nelinearne jednadžbe po  $x$  i  $y$ :

$$V_x(x, y) = 0, \quad (\text{P2.22})$$

$$V_y(x, y) = 0.$$

Rješenjem ovih jednadžbi dobiva se položaj kolokacijske točke unutar panela. Jednadžbe se rješavaju primjenom Newtonove metode [74,75].

Ako su rubne površine diskretizirane s ukupno  $N_T$  panela, da bi se odredile sve brzine koje induciraju paneli u svim ostalim kolokacijskim točkama, inducirane brzine potrebno je računati ukupno  $N_T \cdot N_T$  puta. Ako se koriste jedino izrazi (P2.14), (P2.15) i (P2.16), proračun tada traje prilično dugo, zbog prilično složenog oblika tih formula. Zbog smanjenja vremena proračuna, za slučajeve kada je točka u kojoj se računaju komponente brzina dovoljno daleko od panela (izvora) koji inducira brzinu koriste se približne formule.

Radi izvoda približnih formula, u izrazu (P2.2) podintegralna se funkcija  $(1/r)$  razvija u Taylorov red po  $\xi$  i  $\eta$  u odnosu na ishodište. Koeficijenti razvoja u red, budući da su neovisni o  $\xi$  i  $\eta$  mogu se izvući izvan integrala. Kao rezultat razvoja izraza (P2.2) u red, ne uzimajući u obzir članove trećeg i višeg reda, dobiva se:

$$\phi' = Aw - (M_x \partial_x w + M_y \partial_y w) + \frac{1}{2}(I_{xx} \partial_{xx} w + 2I_{xy} \partial_{xy} w + I_{yy} \partial_{yy} w) + \dots, \quad (\text{P2.23})$$

gdje su:

$$w = \frac{1}{r_0} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{P2.24})$$

te

$$\begin{aligned} A &= \iint_A d\xi d\eta, \\ M_x &= \iint_A \xi d\xi d\eta, & M_y &= \iint_A \eta d\xi d\eta, \\ I_{xx} &= \iint_A \xi^2 d\xi d\eta, & I_{xy} &= \iint_A \xi \eta d\xi d\eta, \\ I_{yy} &= \iint_A \eta^2 d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (\text{P2.25})$$

Derivacije od  $w$  u izrazu (P2.23) ovise samo o položaju točke  $P$  u odnosu na koordinate ishodišta, a neovisne su o obliku panela. S druge strane, veličine  $A$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$  i  $I_{yy}$  ovise samo o obliku panela i neovisne su o položaju točke  $P$ . Radi toga se određuju samo jednom za svaki panel. Geometrijsko značenje ovih veličina može se dati na osnovi izraza (P2.25):  $A$  predstavlja površinu panela,  $M_x$  i  $M_y$  statičke momente površine u odnosu na osi koordinatnog sustava, a  $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$  i  $I_{yy}$  predstavljaju momente tromosti površine panela. Na sličan se način članovi višeg reda kod razvoja u red (P2.23) formiraju iz umnožaka viših derivacija od  $w$  te viših momenata površine panela u odnosu na ishodište. Poznato je da takav razvoj u red konvergira ako je točka  $P$  udaljenija od ishodišta od bilo koje druge točke panela. Zbog toga se ovakav pristup primjenjuje samo za točke koje su dovoljno udaljene od ishodišta, pa je dovoljno da su uključeni samo članovi drugog reda. U izrazu (P2.23) prvi član predstavlja potencijal točkastog izvora intenziteta  $A$ . Drugi je član suma potencijala dipola intenziteta  $M_x$  usmjerenog uzduž osi  $x$  i dipola intenziteta  $M_y$  usmjerenog uzduž osi  $y$ . Treći je član suma potencijala tri neovisna kvadrupola s osima u  $xy$  ravnini, čiji su intenziteti  $\frac{1}{2}I_{xx}$ ,  $I_{xy}$ ,  $\frac{1}{2}I_{yy}$ . Ishodište lokalnog koordinatnog sustava koji je čvrsto vezan za panel smješta se u težište površine panela. Na taj su način statički momenti  $M_x$  i  $M_y$  jednaki nuli, te izraz (P2.23) postaje jednostavniji.

Približne formule za određivanje komponenta brzina koje u točki  $P(x, y, z)$  inducira četverokutni izvor dobivaju se zatim deriviranjem izraza (P2.23). Slijedi:

$$V_x = -\partial_x \phi' = -\left(A \partial_x w + \frac{1}{2} I_{xx} \partial_{xxx} w + I_{xy} \partial_{xxy} w + \frac{1}{2} I_{yy} \partial_{xyy} w\right), \quad (\text{P2.26})$$

$$V_y = -\partial_y \phi' = -\left(A \partial_y w + \frac{1}{2} I_{xx} \partial_{xyx} w + I_{xy} \partial_{xyy} w + \frac{1}{2} I_{yy} \partial_{yyy} w\right), \quad (\text{P2.27})$$

$$V_z = -\partial_z \phi' = -\left(A \partial_z w + \frac{1}{2} I_{xx} \partial_{xxz} w + I_{xy} \partial_{xyz} w + \frac{1}{2} I_{yy} \partial_{yyz} w\right). \quad (\text{P2.28})$$

Derivacije od  $w$  dane su sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned}
 \partial_x w &= -x r_0^{-3}, \\
 \partial_y w &= -y r_0^{-3}, \\
 \partial_z w &= -z r_0^{-3}, \\
 \partial_{xx} w &= 3r(3p + 10x^2)r_0^{-7}, \\
 \partial_{xy} w &= 3y p r_0^{-7}, \\
 \partial_{xy} w &= 3r q r_0^{-7}, \\
 \partial_{yy} w &= 3y(3q + 10y^2)r_0^{-7}, \\
 \partial_{xz} w &= 3z p r_0^{-7}, \\
 \partial_{xyz} w &= -15x y z r_0^{-7}, \\
 \partial_{yz} w &= 3z q r_0^{-7}.
 \end{aligned} \tag{P2.29}$$

Pri tome je:

$$p = y^2 + z^2 - 4x^2 \quad \text{i} \quad q = x^2 + z^2 - 4y^2, \tag{P2.30}$$

a  $r_0$  je dan u izrazu (P2.24). Geometrijske veličine  $A$ ,  $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$  i  $I_{yy}$  mogu se prikazati kao funkcije koordinata vrhova panela  $(\xi_k, \eta_k)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Budući da se inducirana brzina računa za lokalni koordinatni sustav u čijoj  $xy$  ravnini leži panel, koordinatnom sustavu može se dati bilo koja orijentacija u odnosu na panel. Podesno je os  $x$  postaviti paralelno sa spojnicom prvog i trećeg vrha panela, tj. između  $(\xi_1, \eta_1)$  i  $(\xi_3, \eta_3)$ . Za ovakav izbor osi  $\eta_1 = \eta_3$ , navedene geometrijske veličine dobivaju se u obliku:

$$A = \frac{1}{2}(\xi_3 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_4),$$

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \frac{1}{12}(\xi_3 - \xi_1) \left[ \eta_1(\xi_4 - \xi_2)(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4) + (\eta_2 - \eta_4)(\xi_1^2 + \xi_1\xi_3 + \xi_3^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \xi_2\eta_2(\xi_1 + \xi_3 + \xi_2) - \xi_4\eta_4(\xi_1 + \xi_3 + \xi_4) \right],
 \end{aligned} \tag{P2.31}$$

$$I_{xy} = \frac{1}{24}(\xi_3 - \xi_1) \left[ 2\xi_4(\eta_1^2 - \eta_4^2) - 2\xi_2(\eta_1^2 - \eta_2^2) + (\xi_1 + \xi_3)(\eta_2 - \eta_4)(2\eta_1 + \eta_2 + \eta_4) \right],$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}(\xi_3 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_4) \left[ (\eta_1 + \eta_2 + \eta_4)^2 - \eta_1(\eta_2 + \eta_4) - \eta_2\eta_4 \right].$$

Približne formule (P2.26), (P2.27) i (P2.28) za određivanje inducirane brzine koriste se u dva oblika. U prvom obliku koriste se točno kako su napisane, tj. na način da se četverokutni izvor zamjenjuje s točkastim izvorom i točkastim kvadrapolom. U drugom obliku može se koristiti i samo prvi član, što je jednako zamjeni četverokutnog izvora s točkastim izvorom. Kriterij koji određuje kada se koji izraz koristi dobiva se iz omjera udaljenosti  $r_0$  između točke  $P$  i težišta površine panela te karakteristične dimenzije panela  $t$ . Kao karakteristična dimenzija panela



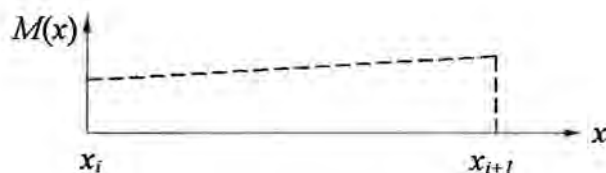
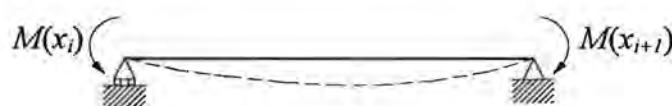
uzima se veća dijagonala panela, tj. veća vrijednost između  $\left[ (\xi_3 - \xi_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$  i  $\left[ (\xi_4 - \xi_2)^2 + (\eta_4 - \eta_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ . Prihvaćeno je da se za slučaj kada je  $(r_0/t) > 4$  primjenjuje samo točkasti izvor, za slučaj kada je  $2.45 < (r_0/t) \leq 4$  primjenjuje se točkasti izvor i točkasti kvadrapol, a kada je  $(r_0/t) \leq 2.45$  primjenjuju se egzaktne formule (P2.14), (P2.15) i (P2.16). Na taj se način ostvaruje značajan dobitak na vremenu računanja, bez utjecaja na točnost rezultata. U slučajevima kada se za diskretizaciju površina primjenjuje veliki broj panela, približno 90% induciranih brzina određuje se pomoću formule za točkasti izvor, dok se za preostalih 10% jednako koriste formule za kvadrapol te egzaktne formule.

Prilog 3, Ravninski kubični *spline*

*Spline* je tanka metalna, plastična ili drvena lako savitljiva letvica koja zbog tog svojstva ima mogućnost prolaza kroz zadani niz točaka. Letvica se zadržava u traženom obliku uz pomoć utega te se na taj način dobiva glatka krivulja, sl. P3.1. Letvica se strukturalno ponaša poput vitkog nosača, a utezi se tada mogu promatrati kao opterećenja.

Sl. P3.1. *Spline*

Na sl. P3.2. prikazan je gredni nosač, s momentom savijanja  $M(x)$  koji se po duljini nosača mijenja linearno.



Sl. P3.2. Nosač opterećen na savijanje

Formula za savijanje nosača dana je u obliku:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}, \quad (\text{P3.1})$$

gdje je:  $M(x)$  moment savijanja,  $\rho(x)$  polumjer zakrivljenosti elastične linije, a  $EI$  krutost nosača na savijanje. Zakrivljenost ravninske krivulje iznosi:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{P3.2})$$

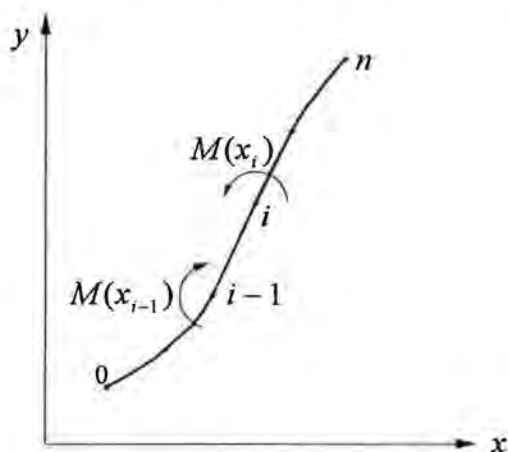
te se iz (P3.1) i (P3.2) dobiva diferencijalna jednačba elastične linije:

$$\frac{y''}{[1 + y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI} \quad (\text{P3.3})$$

Budući da je za male deformacije  $y'(x) \ll 1$ , vrijednost  $y'(x)^2$  može se zanemariti pa diferencijalna jednačina elastične linije poprima oblik:

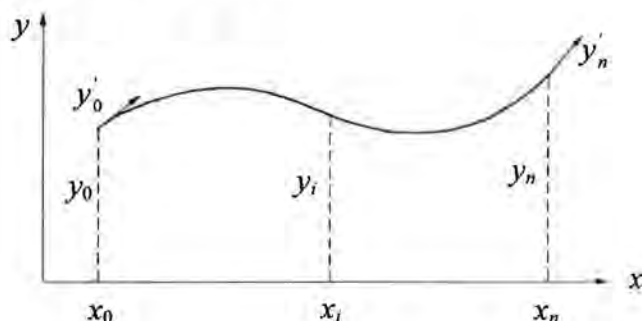
$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad (\text{P3.4})$$

Matematički se model *spline* krivulje formira pomoću teorije elastične linije grednog nosača krutosti  $EI = 1$ . Funkcija  $y(x)$  je kubični polinom budući da je po duljini nosača moment  $M(x)$  linearna funkcija. Koordinata  $y$  predstavlja progib nosača, a prva derivacija progiba predstavlja nagib tangente na elastičnu liniju nosača. Druga derivacija progiba predstavlja zakrivljenost elastične linije.



Sl. P3.3. Teorijsko rebro broda kao elastična linija

Elastična se linija može opisati pomoću neprekinutog i po dijelovima glatkog kubičnog polinoma, budući da je moment savijanja  $M(x)$  neprekinuta i po dijelovima glatka linearna funkcija. Takav neprekinut i po dijelovima glatki kubični polinom koristi se kao matematički model za opisivanje brodskih linija, sl. P3.3.



Sl. P3.4. Matematički *spline*

Definira se funkcija kubičnog *spline*-a  $y(x)$  koja odgovara zadanim točkama  $(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), sl. P3.3. Funkcija  $y(x)$  mora zadovoljavati sljedeće uvjete [76,77]:

- $y(x) = y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ),
- $y'(x)$  i  $y''(x)$  su neprekinute u čvorovima  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),
- $y(x)$  je polinom trećeg stupnja u svakom podintervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

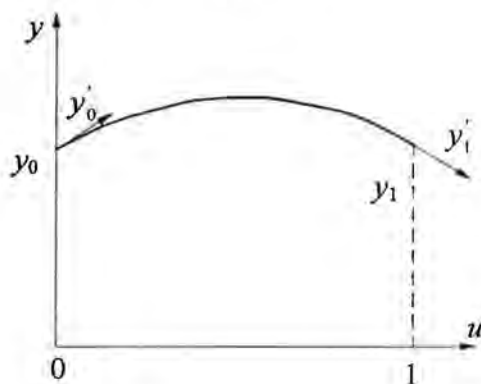
Ako su navedeni uvjeti zadovoljeni, tada se  $y(x)$  naziva funkcijom kubičnog *spline*-a, a njegova krivulja je kubični *spline*. Kada je potrebna neprekinutost derivacija većeg stupnja, koristi se *spline* većeg stupnja. Najčešće upotrebljavani *spline* je ravninski *spline*.

### P3.1. Ravninski kubični *spline* - oblik s prvom derivacijom

Prvo će se razviti jednadžba kubične krivulje u obliku s prvim derivacijama u intervalu  $0 \leq u \leq 1$ , gdje je:

$$u = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad (\text{P3.5})$$

Ako se vrijednost  $x$  mijenja od  $x_{i-1}$  do  $x_i$ , tada se vrijednost  $u$  mijenja od nula do jedan. Za Hermiteovu interpolaciju, potrebno je zadati četiri uvjeta za definiranje segmenta kubične krivulje. Te uvjete predstavljaju vrijednosti funkcije  $y_0$  i  $y_1$  te vrijednosti prvih derivacija  $y'_0$  i  $y'_1$  u odnosu na  $u$  u rubnim točkama, sl. P3.5.



Sl. P3.5. Hermiteova interpolacija za segment kubične krivulje

Jednadžba segmenta kubične krivulje pretpostavlja se u obliku:

$$y(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 \quad (\text{P3.6})$$

Deriviranjem izraza (P3.6) dobiva se:

$$y'(u) = a_1 + 2a_2 u + 3a_3 u^2 \quad (\text{P3.7})$$

Uvrštavanjem četiri zadana uvjeta u jednadžbe (P3.6) i (P3.7) slijedi:

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 , \\ a_1 &= y_0' , \\ a_2 &= (3y_1 - 3y_0 - 2y_0' - y_1') , \\ a_3 &= (2y_0 - 2y_1 + y_0' + y_1') . \end{aligned} \quad (\text{P3.8})$$

Nadalje je:

$$y(u) = y_0 + y_0' u + (3y_1 - 3y_0 - 2y_0' - y_1') u^2 + (2y_0 - 2y_1 + y_0' + y_1') u^3 , \quad (\text{P3.9})$$

što se može preraditi u oblik

$$y(u) = y_0(2u^3 - 3u^2 + 1) + y_1(-2u^3 + 3u^2) + y_0'(u^3 - 2u^2 + u) + y_1'(u^3 - u^2) . \quad (\text{P3.10})$$

Uvođenjem

$$\begin{aligned} F_0(u) &= 2u^3 - 3u^2 + 1 , \\ F_1(u) &= -2u^3 + 3u^2 , \\ G_0(u) &= u(u-1)^2 , \\ G_1(u) &= u^2(u-1) , \end{aligned} \quad (\text{P3.11})$$

kubična se jednadžba segmenta krivulje može prikazati u obliku

$$y(u) = y_0 F_0(u) + y_1 F_1(u) + y_0' G_0(u) + y_1' G_1(u) . \quad (\text{P3.12})$$

Funkcije  $F_0(u)$ ,  $F_1(u)$ ,  $G_0(u)$  i  $G_1(u)$  nazivaju se Hermiteove bazične funkcije odnosno kubične mješovite funkcije. Može se uočiti da je

$$F_0(u) + F_1(u) \equiv 1 . \quad (\text{P3.13})$$

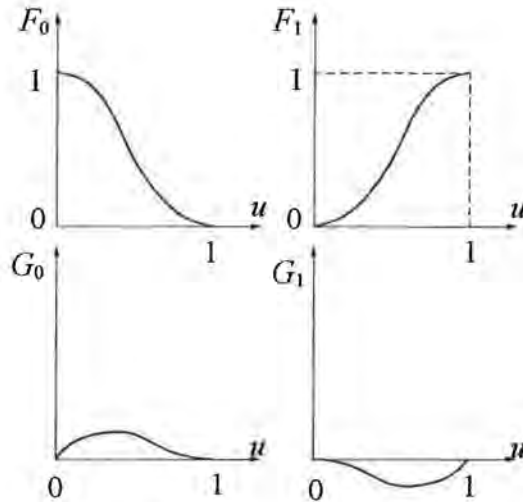
Na sl. P3.6. prikazane su četiri mješovite funkcije koje vrijede za sve parametarske kubične krivulje, a identične su za svaku od tri prostorne kordinate, budući da ovise samo o parametru  $u$ . Za  $u=0$  samo  $F_0(u)$  određuje vrijednost  $y(u)$ , jer je u tom slučaju  $F_0(0)=1$ , a  $F_1(0)=G_0(0)=G_1(0)=0$ , budući da se utjecaj  $F_0(u)$  postepeno smanjuje do nule kada vrijednost  $u$  postepeno raste do jedan. Za  $u=1$  samo  $F_1(u)$  određuje vrijednost  $y(u)$ , jer je tada  $F_1(1)=1$ , a  $F_0(1)=G_0(1)=G_1(1)=0$ , budući da se utjecaj  $F_1(u)$  postepeno povećava do jedan kada vrijednost  $u$  postepeno raste do jedan.

Deriviranjem izraza (P3.11) dobiva se:

$$\begin{aligned} F_0'(u) &= 6u(u-1) , \\ F_1'(u) &= 6u(1-u) , \end{aligned}$$

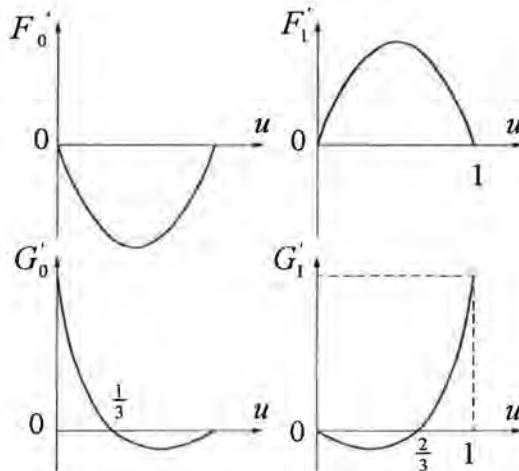


$$\begin{aligned} G'_0(u) &= 3u^2 - 4u + 1, \\ G'_1(u) &= 3u^2 - 2u. \end{aligned} \quad (\text{P3.14})$$



Sl. P3.6. Mješovite funkcije parametarskih kubičnih krivulja

Sl. P3.7. prikazuje odgovarajuće funkcije prvih derivacija mješovitih funkcija. Može se uočiti da za  $u=0$ , samo  $G'_0(u)$  određuje vrijednost  $y'(u)$ , budući da je tada  $F'_0(0) = F'_1(0) = G'_1(0) = 0$ , a  $G'_0(0) = 1$ . Za  $u=1$ , samo  $G'_1(u)$  određuje vrijednost  $y'(u)$ , jer je  $F'_0(1) = F'_1(1) = G'_0(1) = 0$ , a  $G'_1(1) = 1$ . Funkcije drugih derivacija mješovitih funkcija linearne su funkcije.



Sl. P3.7. Funkcije prvih derivacija mješovitih funkcija

Uporabom četiri mješovite funkcije i odgovarajućih funkcija derivacija, mogu se odrediti koordinate te prva i druga derivacija bilo koje točke proizvoljne parametarske kubične krivulje. Na taj se način modificiranjem rubnih uvjeta može utjecati na unutarnji oblik krivulje.

Sada se može formirati segment kubične krivulje na intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$ . Zadani rubni uvjeti su

vrijednosti funkcije  $y_{i-1}$  i  $y_i$  i vrijednosti prvih derivacija  $y'_{i-1}$  i  $y'_i$ . Između  $y'_u$  i  $y'_x$  postoji sljedeći odnos:

$$y'_u = \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{du} = y'_x \frac{dx}{du} \quad (\text{P3.15})$$

Budući da je

$$u = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad (\text{P3.16})$$

deriviranjem se dobiva

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{h_i}. \quad (\text{P3.17})$$

Ako se prva derivacija  $y'$  po  $x$  označi s  $m$ , izraz (P3.17) može se napisati u obliku:

$$y'_u = y'_x h_i = m h_i. \quad (\text{P3.18})$$

Prema izrazu (P3.12)  $i$ -ti segment krivulje može se napisati u obliku:

$$y_i(x) = y_{i-1}F_0(u) + y_iF_1(u) + h_i[m_{i-1}G_0(u) + m_iG_1(u)], \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{P3.19})$$

odnosno u matičnom obliku kao:

$$y_i(x) = \begin{bmatrix} F_0(u) & F_1(u) & G_0(u) & G_1(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ h_i m_{i-1} \\ h_i m_i \end{bmatrix} = \quad (\text{P3.20})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ h_i m_{i-1} \\ h_i m_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Izraz (P3.20) predoduje segment kubične krivulje na intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$ , za dvije poznate vrijednosti  $y_{i-1}$  i  $y_i$  i dvije nepoznate vrijednosti  $m_{i-1}$  i  $m_i$ .

Druga derivacija izraza (P3.19) po  $x$  daje:

$$y_i''(x) = y_{i-1} \frac{F_0''(u)}{h_i^2} + y_i \frac{F_1''(u)}{h_i^2} + m_{i-1} \frac{G_0''(u)}{h_i} + m_i \frac{G_1''(u)}{h_i}, \quad (\text{P3.21})$$

gdje je:

$$\begin{aligned} F_0''(u) &= 12u - 6, \\ F_1''(u) &= -12u + 6, \\ G_0''(u) &= 6u - 4, \\ G_1''(u) &= 6u - 2. \end{aligned} \quad (\text{P3.22})$$

Druga derivacija za  $u = 1$ , odnosno za  $x = x_i$  za  $i$ -ti segment, može se izračunati iz izraza (P3.21) u obliku:

$$y_i''(x_i) = \frac{6y_{i-1}}{h_i^2} + \frac{6y_i}{h_i^2} + \frac{2m_{i-1}}{h} + \frac{4m_i}{h}. \quad (\text{P3.23})$$

Slično se u  $u = 0$  za  $(i + 1)$  segment dobiva:

$$y_{i+1}''(x_i) = -\frac{6y_i}{h_{i+1}^2} + \frac{6y_{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}}. \quad (\text{P3.24})$$

Da bi se osigurala  $C^2$  neprekinutost, mora biti zadovoljen sljedeći uvjet:

$$y_i''(x_i) = y_{i+1}''(x_i). \quad (\text{P3.25})$$

Drugim riječima, desne strane izraza (P3.23) i (P3.24) moraju biti jednake. Nakon sređivanja dobiva se:

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = C_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (\text{P3.26})$$

gdje je:

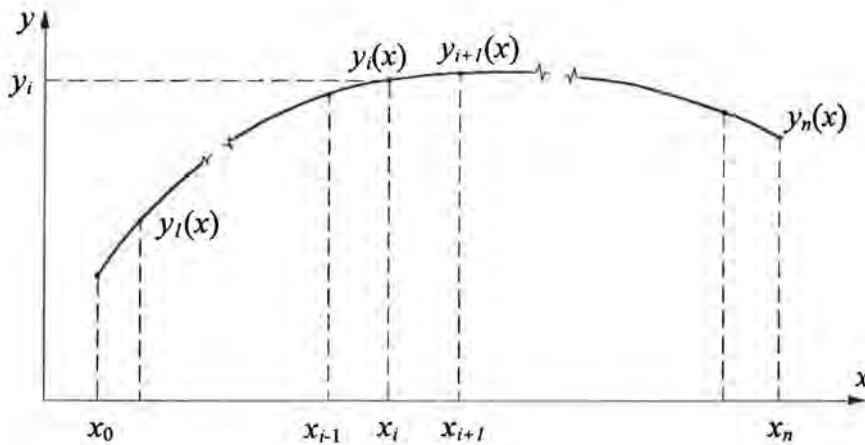
$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \\ \mu_i &= 1 - \lambda_i, \\ C_i &= 3 \left[ \frac{\lambda_i (y_i - y_{i-1})}{h_i} + \frac{\mu_i (y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{P3.27})$$

Jednadžbe (P3.26) osiguravaju  $C^2$  neprekinutost u  $(x_i, y_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ , sl. P3.8.

Izrazi (P3.26) linearne su funkcije s nepoznicama  $m_{i-1}$ ,  $m_i$  i  $m_{i+1}$ . Međutim, ti izrazi daju samo  $(n-1)$  jednadžbi za unutarnje točke  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), a postoji  $(n+1)$  nepoznanica

$m_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Radi toga je za rješavanje sustava linearnih jednačbi potrebno imati još dvije dodatne jednačbe. Te dodatne jednačbe dobivaju se iz rubnih uvjeta koji se posebno zadaju ovisno o pojedinim slučajevima.

Rubni uvjeti koji se najčešće koriste su vrijednosti prvih derivacija  $m_0$  i  $m_n$  u rubnim točkama. Na taj način preostaje samo  $n - 1$  nepoznanica u (P3.26).



Sl. P3.8. Krivulja ravninskog kubičnog *spline*-a

Prva se jednačba može zamijentiti sa

$$2m_1 + \mu_1 m_2 = C_1 - \lambda_1 m_0, \quad (\text{P3.28})$$

a  $(n - 1)$ -a jednačba sa

$$\lambda_{n-1} m_{n-2} + 2m_{n-1} = C_{n-1} - \mu_{n-1} m_n. \quad (\text{P3.29})$$

Na ovaj se način omogućava rješavanje sustava jednačbi.

Za vrijednosti drugih derivacija  $y_0''$  i  $y_n''$  u rubnim točkama, postavljanjem  $i = 0$  u (P3.24) dobiva se:

$$2m_0 + m_1 = C_0, \quad \text{gdje je } C_0 = \left[ \frac{3(y_1 - y_0)}{h_1} \right] + \left[ \frac{h_1 y_0''}{2} \right]. \quad (\text{P3.30})$$

Uvrštavanjem  $i = n$  u izraz (P3.23) dobiva se:

$$m_{n-1} + 2m_n = C_n, \quad \text{gdje je } C_n = \left[ \frac{3(y_n - y_{n-1})}{h_n} \right] + \left[ \frac{h_n y_n''}{2} \right]. \quad (\text{P3.31})$$

Ako je  $y_0'' = y_n'' = 0$ , znači da je u rubnim točkama zakrivljenost jednaka nuli, odnosno tada postoje slobodni krajevi. U rubnim točkama kubičnog *spline*-a moguće je navesti različite rubne uvjete.

Ako ne postoje neki ograničavajući rubni uvjeti u rubnim točkama, može se uvesti tzv. konični segment krivulje koji se definira pomoću prve tri zadane točke:

$$y(x) = y_0 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \quad (\text{P3.32})$$

Deriviranjem gornje jednadžbe, te postavljanjem  $x=x_0$ , nagib tangente u početnoj točki iznosi:

$$m_0 = \frac{y_0(2x_0-x_1-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{y_1(x_0-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{y_2(x_0-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \quad (\text{P3.33})$$

Slično se nagib tangente u drugoj rubnoj točki dobiva pomoću zadnje tri točke:

$$m_n = \frac{y_{n-2}(x_n-x_{n-1})}{(x_{n-2}-x_{n-1})(x_{n-2}-x_n)} + \frac{y_{n-1}(x_n-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)} + \frac{y_n(2x_n-x_{n-1}-x_{n-2})}{(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})}. \quad (\text{P3.34})$$

Na taj se način  $m_0, m_n$  mogu smatrati aproksimacijama rubnih uvjeta.

Nakon određivanja  $m_i$ , po dijelovima glatka kubična krivulja  $y_i(x)$  može se odrediti pomoću (P3.19) ili (P3.20), te se kubični *spline*  $C^2$  neprekinutosti definira se u obliku:

$$y(x) = y_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{P3.35})$$

*Spline* je po dijelovima glatka krivulja, a ujedno je i neprekinut i to je možda najvažnije svojstvo *spline*-a bilo kojeg oblika.

### P3.2. Ravninski kubični *spline* - oblik s drugom derivacijom

Segment kubične krivulje opisan s (P3.12) također se može definirati pomoću dvije vrijednosti funkcije  $y_0$  i  $y_1$  i dvije vrijednosti drugih derivacija  $y_0''$  i  $y_1''$  po  $u$  u rubnim točkama.

Deriviranjem izraza (P3.7) dobiva se:

$$y''(u) = 2a_2 + 6a_3 u, \quad (\text{P3.36})$$

te uvrštavanjem četiri zadana uvjeta u (P3.23) i (P3.36), dobivaju se četiri jednadžbe za određivanje koeficijenata:

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0, \\ a_1 &= (y_1 - y_0 - \frac{1}{6}y_0'' - \frac{1}{3}y_1''), \\ a_2 &= \frac{1}{2}y_0'', \\ a_3 &= \frac{1}{6}(y_1'' - y_0''). \end{aligned} \quad (\text{P3.37})$$



Uvrštavanjem koeficijenata u (P3.6), nakon određenog sređivanja dobiva se:

$$y(u) = y_0 \bar{F}_0(u) + y_1 \bar{F}_1(u) + y_0'' \bar{G}_0(u) + y_1'' \bar{G}_1(u) \quad (0 \leq u \leq 1), \quad (\text{P3.38})$$

gdje su

$$\begin{aligned} \bar{F}_0(u) &= 1 - u, \\ \bar{F}_1(u) &= u, \\ \bar{G}_0(u) &= \frac{1}{6}[-u(u-1)(u-2)], \\ \bar{G}_1(u) &= \frac{1}{6}[u(u-1)(u+1)]. \end{aligned} \quad (\text{P3.39})$$

Na ovaj se način formira novi niz mješovitih funkcija za kubičnu krivulju. Može se uočiti da je

$$\bar{F}_0(u) + \bar{F}_1(u) = 0. \quad (\text{P3.40})$$

Sada se može formirati segment kubične krivulje na intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  pomoću četiri rubna uvjeta uključujući dvije vrijednosti funkcije  $y_{i-1}, y_i$  i dvije vrijednosti drugih derivacija po  $x$  koje su označene kao  $M_{i-1}$  i  $M_i$ . U tom slučaju postoji odnos sličan kao (P3.18):

$$y_u'' = y_x'' \frac{d^2 x}{du^2} = y_x'' h_i^2 = M h_i^2. \quad (\text{P3.41})$$

Prema izrazu (P3.38)  $i$ -ti segment kubične krivulje može se izraziti kao:

$$y_i(x) = y_{i-1} \bar{F}_0(u) + y_i \bar{F}_1(u) + h_i^2 \left[ M_{i-1} \bar{G}_0(u) + M_i \bar{G}_1(u) \right]. \quad (\text{P3.42})$$

U matricnom se obliku izraz (P3.42) može napisati kao:

$$y_i(x) = \begin{bmatrix} \bar{F}_0(u) & \bar{F}_1(u) & \bar{G}_0(u) & \bar{G}_1(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ h_i^2 M_{i-1} \\ h_i^2 M_i \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{P3.43})$$

Time se dobiva segment kubične krivulje na intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  u ovisnosti o dvije poznate vrijednosti  $y_{i-1}, y_i$  i dvije nepoznate vrijednosti  $M_{i-1}, M_i$ .

Deriviranjem izraza (P3.43) po  $x$  dobiva se:

$$y_i'(x) = y_{i-1} \frac{\bar{F}_0'(u)}{h_i} + y_i \frac{\bar{F}_1'(u)}{h_i} + M_{i-1} \bar{G}_0'(u) h_i + M_i \bar{G}_1'(u) h_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{P3.44})$$

gdje je

$$\begin{aligned} \bar{F}_0'(u) &= -1, \\ \bar{F}_1'(u) &= 1, \\ \bar{G}_0'(u) &= \frac{1}{6}[-(3u^2 - 6u + 2)], \\ \bar{G}_1'(u) &= \frac{1}{6}[(3u^2 - 1)]. \end{aligned} \quad (\text{P3.45})$$

Prva derivacija za  $u = 1$ , odnosno  $x = x_i$ , za  $i$ -ti segment može se izračunati iz (P3.44):

$$y_i'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{1}{6}[h_i(M_{i-1} + 2M_i)]. \quad (\text{P3.46})$$

Slično se za  $u = 0$ , odnosno  $x = x_i$ , za  $(i + 1)$  segment dobiva:

$$y_{i+1}'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} + \frac{1}{6}[h_{i+1}(2M_i + M_{i+1})]. \quad (\text{P3.47})$$

Da bi se osigurala  $C^1$  neprekinutost u  $(x_i, y_i)$ , mora se zadovoljiti uvjet:

$$y_i'(x_i) = y_{i+1}'(x_i), \quad (\text{P3.48})$$

odnosno desne strane izraza (P3.46) i (P3.47) moraju biti jednake. Slijedi:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (\text{P3.49})$$

gdje je

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \\ \mu_i &= 1 - \lambda_i, \\ d_i &= 6 \left[ \frac{\lambda_i (y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}^2} - \frac{\mu_i (y_i - y_{i-1})}{h_i^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{P3.50})$$

Jednadžbe (P3.49) osiguravaju  $C^1$  neprekinutost u  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). Izrazi (P3.49) linearne su funkcije s nepoznicama  $M_{i-1}$ ,  $M_i$  i  $M_{i+1}$ . Ti izrazi daju samo  $(n-1)$  jednadžbi za unutarnje čvorove  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), a postoji  $(n+1)$  nepoznanica  $M_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Radi toga je potrebno imati još dvije dodatne jednadžbe da bi se mogao riješiti sustav linearnih

jednadžbi. Dvije dodatne jednadžbe dobivaju se zadavanjem vrijednosti drugih derivacija  $M_0$  i  $M_n$  u rubnim točkama. Zadavanjem vrijednosti prvih derivacija  $m_0$  i  $m_n$  u rubnim točkama, iz prve i zadnje jednadžbe (P3.44) slijedi:

$$2M_0 + M_1 = d_0, \quad (P3.51)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n. \quad (P3.52)$$

Pri tome je:

$$d_0 = 6 \frac{\left( \frac{y_1 - y_0}{h_1} - m_0 \right)}{h_1}; \quad d_n = 6 \frac{\left( m_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right)}{h_n} \quad (P3.53)$$

Izrazi (P3.49), (P3.51) i (P3.52) uključuju  $(n+1)$  linearnu jednadžbu. Nepoznanice  $M_i (i = 0, 1, \dots, n)$  mogu se izračunati te se pomoću (P3.42) i (P3.43) može odrediti po dijelovima glatka kubična krivulja  $y_i(x)$  uz osiguranu  $C^0$ ,  $C^1$  i  $C^2$  neprekidnost.

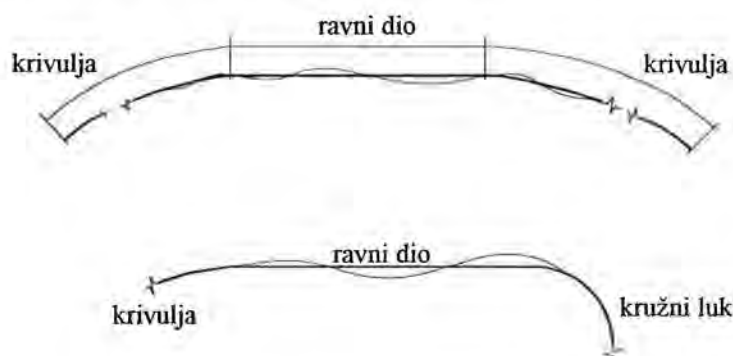
Jednadžbe prvih i drugih derivacija (P3.26) i (P3.49) formiraju trodijagonalni sustav linearnih jednadžbi koji se rješava standardnim metodama.

### P3.3. Osciliranje krivulje

Ravninska kubična *spline* krivulja je možda najjednostavniji oblik *spline* krivulje, te se iz tog razloga mnogo koristi. Međutim, takva *spline* krivulja ima neka ograničenja:

- lokalna promjena zahtijeva ponovni proračun cijelog *spline*-a;
- prikazana *spline* krivulja ne može imati vertikalnu tangentu;
- moguće je osciliranje krivulje;

Osciliranje krivulje pojavljuje se u slučajevima kada se aproksimira krivulja koja ima prekinutost u drugoj derivaciji. Kao primjer može se navesti slučaj krivulje kojoj je u nastavku ravne crte kružni luk, ili slučaj kada postoji ravni dio između dvije krivulje. Tada se osciliranje pojavljuje na ravnom dijelu ili u njegovoj blizini, sl. P3.9.



Sl. P3.9. Osciliranje krivulje



Može se uočiti da je dio između  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  i  $(x_i, y_i)$  ravan, budući da nagib tangente za taj dio iznosi

$$m_{i-1} = m_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad (\text{P3.57})$$

a jednačba ima oblik

$$y = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i). \quad (\text{P3.58})$$

Izraz (P3.56) može se jednostavno proširiti za slučajeve kada se krivulja sastoji od većeg broja ravnih i zakrivljenih dijelova.

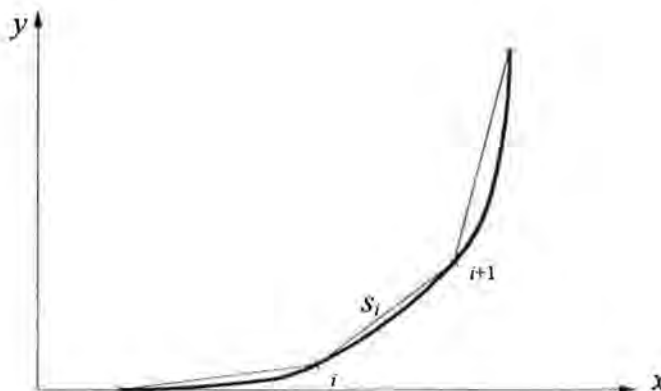
#### P3.4. Parametarski kubični *spline*

Prikazani kubični *spline* vrijedi samo za krivulje malih zakrivljenosti što često nije slučaj kod opisivanja brodskih formi. Za slučajeve većih zakrivljenosti rješenje se sastoji u primjeni parametarske *spline* krivulje, a kao parametar može poslužiti kumulativna duljina luka krivulje. Međutim, budući da je duljina luka između zadanih točaka nepoznata prije nego se formira *spline* krivulja, kao približenje koristi se kumulativna duljina tetiva, odnosno zbroj duljina stranica mnogokuta, sl. P3.10.

Uporabom kumulativne duljine tetive  $s$  kao parametra, mogu se formirati dva kubična *spline*-a koji prolaze kroz  $(s_i, x_i), (s_i, y_i)$ . Za zadani niz točaka  $(x_i, y_i) (i = 0, 1, \dots, n)$  kumulativna duljina tetive može se izračunati pomoću:

$$s_k = \sum_{i=1}^k \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{P3.59})$$

Pretpostavlja se da je  $s_0 = 0$ .



Sl. P3.10. Stranice mnogokuta kao parametar *spline* krivulje



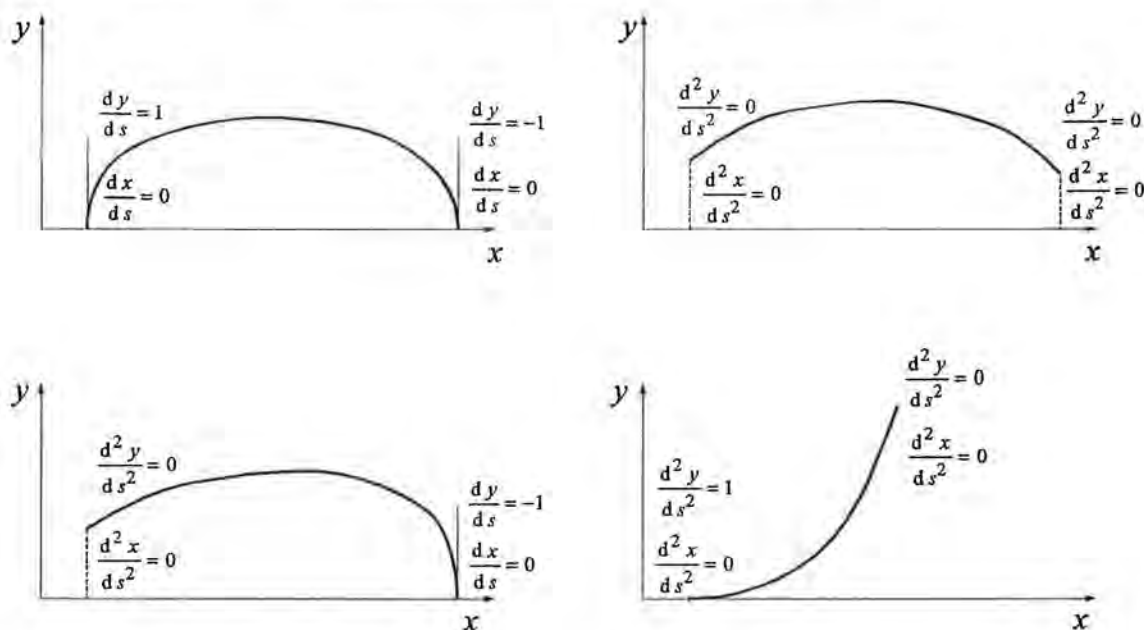
Tada se dobivaju sljedeći podaci:

$$\begin{array}{cccccc} s & s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \hline x & x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{array} \quad (\text{P3.60})$$

i mogu se formirati dva odvojena kubična *spline*-a:

$$x = x(s) \quad \text{i} \quad y = y(s). \quad (\text{P3.61})$$

Za određenu vrijednost kumulativne duljine tetive  $s$ , može se izračunati odgovarajući par vrijednosti  $(x, y)$  iz izraza (P3.61). Na taj se način definira parametarski kubični *spline* koji je po dijelovima gladak i ima  $C^2$  neprekinitost te prolazi kroz zadane točke  $(x_i, y_i)$ .



Sl. P3.11. Primjeri krivulja za definiranje brodske forme

Budući da  $s$  predstavlja približnu duljinu luka, postoji odnos:

$$ds^2 = [dx(s)]^2 + [dy(s)]^2, \quad (\text{P3.62})$$

odnosno

$$\left[ \frac{dx(s)}{ds} \right]^2 + \left[ \frac{dy(s)}{ds} \right]^2 = 1. \quad (\text{P3.63})$$

Ovaj odnos daje dvije nejednakosti:

$$\frac{dx}{ds} \leq 1, \quad \frac{dy}{ds} \leq 1, \quad (\text{P3.64})$$

koje vrijede za sve vrijednosti  $s$ . Kada je  $dy/dx = \infty$ , odnosno postoji vertikalna tangenta, obični *spline* se ne može koristiti, pa se tada koristi parametarski *spline* budući da se vertikalna tangenta može izraziti pomoću  $dy/ds = 1$  i  $dx/ds = 0$ .

Rubni se uvjeti moraju tretirati na odgovarajući način da bi se prilagodili parametarskom *spline*-u. Na sl. P3.11. prikazani su primjeri krivulja koje se najčešće pojavljuju kod opisivanja brodskih formi.

## ŽIVOTOPIS

Mr.sc. Roko Dejhalla rođen je 30. svibnja 1963. god. u Rijeci, gdje je pohađao i završio osnovnu školu. U lipnju 1981. god. završio je Pomorsku školu u Bakru gdje se obrazovao u pomorskoj struci za zanimanje kadet-nautičar.

U listopadu 1982. god. nakon povratka iz vojske, započinje sa studijem brodogradnje na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci. Za uspjehe postignute tijekom studiranja više je puta nagrađivan od strane Tehničkog fakulteta. Naslov diplomiranog inženjera brodogradnje stekao je 20. siječnja 1988. god. diplomskim radom s naslovom *Modeliranje dvodimenzionalnog strujanja idealnog fluida konačnim elementima*. Diplomski je rad izrađen pod mentorstvom prof.dr.sc. Zorana Mrše, a nagrađen je prvom nagradom Sveučilišta u Rijeci za najbolje studentske radove u šk. godini 1987./88.

Nakon završetka studija, od veljače do prosinca 1988. god. radio je u brodogradilištu "Viktor Lenac" u Rijeci, u svojstvu pripravnika-inženjera unapređenja proizvodnje.

Od prosinca 1988. god. Roko Dejhalla zaposlen je na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, na Zavodu za brodogradnju i inženjerstvo morske tehnologije, u početku kao znanstveni novak na istraživačkom projektu *Hidrodinamika propulzije*, glavnog istraživača prof.dr.sc. Alice Vučinić. Na Tehničkom je fakultetu 1988. god. upisao poslijediplomski studij, modul *Otpor i propulzija broda*, smjer *Hidrodinamika plovnih objekata*. U siječnju 1990. god. prijavio je magistarski rad s naslovom *Istraživanje karakteristika brodskih vijaka s vršnim krilcima primjenom numeričke analize* koji je obranio 23. travnja 1993. god. te je na taj način stekao stručni naziv magistra znanosti iz područja tehničkih znanosti, znanstvenog polja brodogradnja. U suradničko zvanje asistenta izabran je u travnju 1994. god.

Kao djelatnik Tehničkog fakulteta, aktivno sudjeluje u nastavnoj, znanstvenoistraživačkoj i stručnoj djelatnosti Zavoda za brodogradnju i inženjerstvo morske tehnologije. Kao asistent uključen je u nastavu iz kolegija *Forme i hidrostatika broda* na sveučilišnom i stručnom studiju brodogradnje. Od šk.godine 1996./97. povjerena su mu predavanja iz kolegija *Hidrodinamika plovnih objekata I i II* te *Propulzori broda*. Voditelj je Industrijske i Stručne prakse sveučilišnog i stručnog studija brodogradnje. U travnju 1996. god. odobrena mu je tema doktorske disertacije s naslovom *Numeričko modeliranje optjecanja plovnog objekta*. Sudjelovao je u izradi nekoliko stručnih i znanstvenih radova.

U dva je navrata, 1993. god. kao dobitnik stipendije Sveučilišta u Trstu te 1997. god. kao dobitnik stipendije Županije primorsko-goranske kraće boravio na Odsjeku za brodogradnju Sveučilišta u Trstu.

Roko Dejhalla govori i piše engleski, a služi se talijanskim jezikom.

## PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

### 1. AUTOR

Ime i prezime: Roko Dejhalla  
Datum i mjesto rođenja: 30.05.1963., Rijeka  
Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija: Tehnički fakultet Rijeka, Brodogradnja, 1988.  
Naziv fakulteta, studija i godina završetka poslijediplomskog studija: Tehnički fakultet Rijeka, Hidrodinamika plovnih objekata, 1993.  
Sadašnje zaposlenje: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

### 2. DOKTORSKA DISERTACIJA

Naslov: Numeričko modeliranje optjecanja plovnog objekta  
Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka: 119, 88, 8, 77;  
Znanstveno polje i grana: Brodogradnja, Hidromehanika plovnih objekata  
Voditelj rada: Red. prof. dr. sc. Zoran Mrša, dipl.ing.  
Fakultet na kojem je rad obranjen: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

### 3. OBRANA I OCJENA

Datum prijave teme: 16.02.1996.  
Datum predaje rada: 14.04.1999.  
Datum prihvaćanja ocjene rada: 25.06.1999.  
Sastav Povjerenstva za ocjenu: Red.prof.dr.sc. Luka Sopta, dipl.ing.  
Red.prof.dr.sc. Zoran Mrša, dipl.ing.  
Izv.prof.dr.sc. Većeslav Čorić, dipl.ing. (FSB Zagreb)  
Doc.dr.sc. Bruno Čalić, dipl.ing.  
Datum obrane: 05.07.1999.  
Sastav Povjerenstva za obranu: Red.prof.dr.sc. Luka Sopta, dipl.ing.  
Red.prof.dr.sc. Zoran Mrša, dipl.ing.  
Izv.prof.dr.sc. Većeslav Čorić, dipl.ing. (FSB Zagreb)  
Doc.dr.sc. Bruno Čalić, dipl.ing.  
Datum promocije:

Oznaka: DD

Tek. broj:

UDK:629.5.015.4:629.5.015.24:519.688(043)

## NUMERIČKO MODELIRANJE OPTJECANJA PLOVNOG OBJEKTA

Roko Dejhalla

Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
Hrvatska

Ključne riječi:    potencijalno strujanje  
                      slobodna površina  
                      panelna metoda  
                      otpor valova  
                      optimiziranje forme broda  
                      genetski algoritam

### Sažetak:

Razvijen je numerički model za rješavanje trodimenzionalnog potencijalnog optjecanja broda na mirnoj slobodnoj površini. Model se temelji na metodi Rankineovih izvora, a oplakivana i slobodna površina aproksimiraju se ravninskim panelima. Egzaktni rubni uvjet zadovoljava se na oplakivanoj površini, a linearizirani na slobodnoj površini. Sile na brod određuju se metodom integracije tlakova te primjenom Lagallijevoeg teorema. Na temelju metode razvijen je računalni program te su dani numerički rezultati za pojedine brodske forme. Rezultati numeričkih proračuna pokazuju vrlo dobro podudaranje sa eksperimentima. Metoda je primjenjena za optimiziranje forme broda sa stajališta minimalnog otpora valova. U optimizacijskom postupku primjenjen je genetski algoritam. Rezultati numeričkih proračuna iz postupka optimiziranja pokazuju da dobivene forme imaju manji otpor valova od osnovne forme.

Rad nije objavljen.

Mentor:	Red. prof. dr. sc. Zoran Mrša, dipl.ing.
Povjerenstvo za ocjenu:	Red.prof.dr.sc. Luka Sopta, dipl.ing. Red.prof.dr.sc. Zoran Mrša, dipl.ing. Izv.prof.dr.sc. Većeslav Čorić, dipl.ing. (FSB Zagreb) Doc.dr.sc. Bruno Čalić, dipl.ing.
Povjerenstvo za obranu:	Red.prof.dr.sc. Luka Sopta, dipl.ing. Red.prof.dr.sc. Zoran Mrša, dipl.ing. Izv.prof.dr.sc. Većeslav Čorić, dipl.ing. (FSB Zagreb) Doc.dr.sc. Bruno Čalić, dipl.ing.
Datum obrane: 05.07.1999.	Datum promocije:

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.  
(119 stranica, 88 slika, 8 tablica, 77 bibliografskih podataka, hrvatski jezik)



DD

1. Numeričko modeliranje optjecanja  
plovnog objekta

I Dejhalla R.

II Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
HRVATSKA

UDK: 629.5.015.4:629.5.015.24.519.688(043)

Ključne riječi:

potencijalno strujanje  
slobodna površina  
panelna metoda  
otpor valova  
optimiziranje forme broda  
genetski algoritam

Code: DD

No:

UDC:629.5.015.4:629.5.015.24:519.688(043)

## NUMERICAL MODELING OF FLOW AROUND SHIP HULL

Roko Dejhalla

University of Rijeka  
Technical Faculty  
Croatia

Key words: potential flow  
free surface  
panel method  
wave resistance  
ship form optimization  
genetic algorithm

### Summary:

The numerical method for solving the three-dimensional potential flow around a ship moving at constant speed in calm water is presented. The numerical method is based upon a Rankine source method and the hull and a part of the free surface are paneled. The exact boundary condition is satisfied on the hull and linearized boundary condition on the free surface. The forces on the hull are computed by integration of pressure and Lagally forces. A computer program has been developed and the numerical calculations for different hulls are included. The results of numerical calculations compared with experimental results show reasonably good agreement. This method is coupled with a hull optimization procedure based on minimizing the wave resistance. The optimization method used in the computational procedure is referred to the genetic algorithm. The results of optimization procedure indicate that the optimized hull form yields a reduction in wave resistance.

The thesis has not been published.

Mentor: Prof. Zoran Mrša, D.Sc.  
Reviewers: Prof. Luka Sopta, D.Sc.  
Prof. Zoran Mrša, D.Sc.  
Assoc. Prof. Većeslav Čorić, D.Sc. (FSB Zagreb)  
Assis. Prof. Bruno Čalić, D.Sc.  
Examiners: Prof. Luka Sopta, D.Sc.  
Prof. Zoran Mrša, D.Sc.  
Assoc. Prof. Većeslav Čorić, D.Sc. (FSB Zagreb)  
Assis. Prof. Bruno Čalić, D.Sc.  
Oral examination: 05.07.1999. Degree conferred:

The thesis is deposited at Technical faculty of the University of Rijeka.  
(119 pages, 88 figures, 8 tables, 77 references, original in Croatian language)

DD

1. Numerical Modeling of Flow Around  
Ship Hull

I Dejhalla R.

II University of Rijeka  
Faculty of Engineering  
CROATIA

UDC: 629.5.015.4:629.5.015.24:519.688(043)

Key words:

potential flow  
free surface  
panel method  
wave resistance  
ship form optimization  
genetic algorithm