

# Analiza fleksibilnih konstrukcija pod utjecajem pokretnog opterećenja metodom konačnih traka

---

**Torić Malić, Neira**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2012**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:188:929529>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-30**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka Library - SVKRI Repository](#)



Sveučilište u Rijeci  
Građevinski fakultet

**Neira Torić Malić**

**Analiza fleksibilnih konstrukcija pod utjecajem  
pokretnog opterećenja metodom konačnih traka**

Disertacija

Mentor  
Prof.dr.sc. Ivica Kožar

Rijeka, 2012.

*Svom mentoru prof.dr.sc. Ivici Kožaru iskreno zahvaljujem na nesebičnoj pomoći, vrijednim savjetima i prenosom znanju tijekom višegodišnje suradnje u znanstveno-istraživačkom radu.*

*Zahvaljujem i cijeloj svojoj obitelji na razumijevanju i podršci.*

# SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	1
SAŽETAK.....	4
SUMMARY .....	5
1. UVOD .....	6
1.1. Postojeća saznanja na području teme disertacije.....	6
1.2. Formulacija problema .....	8
1.3. Hipoteza .....	10
1.4. Predmet i ciljevi istraživanja.....	10
1.5. Metodologija istraživanja.....	11
2. FORMULACIJA METODE KONAČNIH TRAKA .....	13
2.1. Uvod u metodu konačnih traka .....	13
2.2. Usporedba metode konačnih elemenata i klasične metode konačnih traka.....	15
2.3. Odabir odgovarajućih interpolacijskih funkcija .....	17
2.4. Problem savijanja ploče .....	19
2.4.1. Općenito .....	19
2.4.2. Formulacija metode konačnih traka za problem savijanja tankih ploča.....	20
2.4.3. Matrica fleksije.....	21
2.5. Kompleksno opterećena konačna traka: konačna trakasta ljuska.....	22
2.6. Transformacija koordinata .....	26
2.7. Diskretizacija domene sa više konačnih traka.....	28
2.8. Formiranje globalne matrice krutosti i globalnog vektora opterećenja.....	30
2.9. Određivanje parametara konačnih traka primjenom principa minimizacije potencijalne energije.....	31

2.10.	Parametarska analiza utjecaja broja konačnih traka i broja članova razvoja u red na točnost izračuna pomaka .....	32
3.	DINAMIČKA ANALIZA .....	36
3.1	Izvod matrice krutosti i matrice masa za različite uvjete oslanjanja .....	36
3.1.1	Općenito .....	36
3.1.2	Ploča slobodno oslonjena na dvije suprotne strane .....	37
3.1.3	Ploča slobodno oslonjena na svim stranama .....	40
3.1.4	Ploča ukliještena na dvije suprotne strane .....	42
3.1.5	Ploča ukliještena na svim stranama .....	44
3.2	Parametarska analiza utjecaja broja konačnih traka i članova razvoja u red na točnost izračuna vlastitih vrijednosti .....	46
3.2.1.	Ploča slobodno oslonjena na dvije suprotne strane .....	46
3.2.2.	Ploča slobodno oslonjena na svim stranama .....	48
3.2.3.	Ploča ukliještena na dvije suprotne strane .....	49
3.2.4.	Ploča ukliještena na svim stranama .....	50
3.3	Dinamička analiza plošnog nosača opterećenog pokretnom silom konstantnog intenziteta 51	
3.3.1.	Rješenje u zatvorenom obliku .....	51
3.3.2.	Usporedba numeričkog rješenja primjenom metode konačnih trakastih ljuski s analitičkim rješenjem .....	56
4.	MODELI POKRETNOG OPTEREĆENJA .....	57
4.1.	Pokretna sila .....	57
4.2.	Pokretna masa .....	60
4.3.	Model pokretnog opterećenja sa 2 stupnja slobode .....	61
4.4.	Model pokretnog opterećenja sa 5 stupnjeva slobode .....	63
4.5.	Model pokretnog opterećenja sa 9 stupnjeva slobode .....	67
4.6.	Model pokretnog opterećenja sa 13 stupnjeva slobode .....	76
5.	POKRETNI KONAČNI TRAKASTI ELEMENT .....	82
6.	OPISIVANJE NEPRAVILNOSTI PODLOGE .....	84
7.	ODREĐIVANJE KRITIČNE BRZINE .....	86

8.	NUMERIČKA INTEGRACIJA.....	88
8.1	Newmarkova $\beta$ -metoda .....	88
8.2	Metoda impulsnog ubrzanja .....	90
9.	FORMULACIJA ITERATIVNOG POSTUPKA .....	92
10.	NUMERIČKI PRIMJERI .....	95
10.1.	Analiza plošnog nosača uslijed djelovanja pokretnog opterećenja .....	99
10.2.	Analiza plošnog nosača s ukutama uslijed djelovanja pokretnog opterećenja.....	101
10.3.	Usporedba ponašanja plošnog nosača bez ukruta i sa ukutama uslijed djelovanja pokretnog opterećenja .....	103
10.3.1.	Usporedba dinamičkih progiba za različite modele vozila.....	103
10.3.2.	Utjecaj mase i brzine vozila na dinamički progib konstrukcije.....	105
10.3.3.	Utjecaj broja osovina i dimenzija vozila na dinamički progib konstrukcije.....	108
10.3.4.	Utjecaj krutosti poprečnog presjeka na dinamički progib konstrukcije.....	111
10.3.5.	Utjecaj neravnina podolge na dinamički progib konstrukcije .....	112
10.3.6.	Prikaz kontaktnih sila .....	114
10.3.7.	Usporedba vertikalnih brzina i ubrzanja na konstrukciji.....	116
11.	VERIFIKACIJA MODELA USPOREDBOM S REZULTATIMA EKSPERIMENTALNIH ISPITIVANJA.....	119
11.1.	Usporedba numeričkih i eksperimentalno dobivenih dinamičkih progiba na cestovnom mostu Mavrovija .....	119
11.2.	Usporedba izračunatih i eksperimentalno dobivenih dinamičkih faktora na cestovnom mostu Vransko .....	122
12.	ZAKLJUČNE NAPOMENE.....	124
12.1	Izvorni znanstveni doprinos disertacije.....	124
12.2	Praktični značaj istraživanja.....	126
12.3	Smjernice budućih istraživanja .....	126
13.	ZAKLJUČAK .....	127
	LITERATURA.....	129
	POPIS SLIKA .....	134
	PREGLED TABELARNIH PRIKAZA .....	137

## SAŽETAK

Predmet istraživanja bila je izrada detaljnog modela interakcije pokretnog vozila i stvarne mostovne konstrukcije, uzimanjem u obzir svih stupnjeva slobode vozila i oblika poprečnog presjeka konstrukcije. Načinjena je parametarska analiza da bi se istražilo koji parametri vozila i konstrukcije i u kolikoj mjeri utječu na njihovo ponašanje. Cilj je procijeniti da li je modeliranje mostova kao plošnih nosača dovoljno za dobivanje točnih rezultata i koji model opterećenja daje rezultate najbliže stvarnima, dobivenim eksperimentalnim ispitivanjem.

Analizirana su dva tipa konstrukcije: slobodno oslonjena ploča bez i sa uzdužnim ukrutama. Promatrano je pet tipova pokretnog opterećenja: pokretna sila, pokretna masa, pokretna masa s oprugom (sa 2 stupnja slobode), dvodimenzionalni model vozila (sa 5 stupnjeva slobode) i trodimenzionalni model vozila (sa 9 stupnjeva slobode).

Konstrukcija je diskretizirana ravnim konačnim trakastim ljuskama. Za diskretizaciju i sprezanje modela vozila s modelom konstrukcije uveden je pokretni konačni trakasti element. Predložen je drugačiji iterativni postupak za analizu interakcije vozila i konstrukcije primjenom metode konačnih traka.

Provedena je parametarska analiza utjecaja brzine kretanja opterećenja, odnosa mase opterećenja i mase konstrukcije, oblika i krutosti poprečnog presjeka konstrukcije i geometrijskih karakteristika površine konstrukcije na dinamički progib konstrukcije.

Model plošnog nosača opterećenog pokretnom silom i pokretnom masom testiran je usporedbom numeričkog rješenja sa rješenjem u zatvorenom obliku. Rezultati analize interakcije složene prostorne konstrukcije (ploča s ukrutama) i punog modela vozila verificirani su usporedbom s rezultatima dinamičkih ispitivanja izvedenih na konstrukciji cestovnog mosta. Iz dobivenih dinamičkih i statičkih progiba, za prelazak dva vozila preko mostovne konstrukcije izračunati su dinamički faktori i uspoređeni s vrijednostima iz literature.

## SUMMARY

The subject of this reaserch was creation of detailed vehicle-bridge interaction model, taking into account all degrees of freedom of the vehicle and shape of the structure cross-section. A parametric analysis is made in order to investigate which of the vehicle and structure parameters affect their behaviour and to what extent. The aim was to examine whether modelling of the bridge structure as a plate is adequate for obtaining accurate results, and which of the moving loading models gives results approximate to the ones obtained from experimental testing.

Two types of structure were analysed: simply supported plate and simply supported stiffened plate. Five types of moving loading were observed: moving force, moving mass, sprung mass model (with 2 degrees of freedom), two-dimensional vehicle model (with 5 degrees of freedom) and three-dimensional vehicle model (with 9 degrees of freedom). Structure is discretised with use of the flat shell strip elements. In order to discretise and couple vehicle model with the structure, vehicle strip element is introduced.

Different iterative procedure is proposed for the vehicle-structure interaction analysis with the application of finite strip method.

An influence analysis is made for moving loading velocity, vehicle and structure mass ratio, structure cross-section shape and stiffness and geometric properties of the structure surface, concerning dynamic displacement of the structure.

Finite strip plate model for a moving force and a moving mass loading is tested by comparison of numerical results with the closed-form solution.

Interaction model for the complex spatial structure (stiffened plate) and a full vehicle model is verified in the way that interaction analysis results are compared with the ones obtained during experimental dynamic testing of the road bridge.

Dynamic amplification factors are calculated from numerically obtained static and dynamic bridge displacements and they are compared with values from the literature.



# 1. UVOD

## 1.1. Postojeća saznanja na području teme disertacije

Interakcija između vozila i konstrukcije je problem proučavan dugi niz godina. Razlozi za proučavanje i poznavanje ponašanja konstrukcija uslijed djelovanja pokretnog opterećenja su višestruki. Neki od njih su projektiranje konstrukcija (ceste, nadvožnjaci, mostovi, željeznice), održavanje konstrukcija tijekom uporabe, produljenje uporabnog vijeka konstrukcije, prevencija i detekcija oštećenja konstrukcija, kao i sigurnost i udobnost putnika.

Primjena metode konačnih elemenata u analizi konstrukcija kod djelovanja pokretnog opterećenja rezultira velikim sustavima jednadžbi, koji su nepraktični za rješavanje. Zbog toga je većina autora u svojim radovima pribjegli maksimalnom pojednostavljenju modela konstrukcije ili vozila, a često i jednog i drugog. Kvalitativni pristupi modeliranju ove vrste interakcije u literaturi se značajno razlikuju. Tako se konstrukcija najčešće idealizira grednim nosačem prema Euler-Bernoulli (Akin i Mofid 1989, Dehestani i sur. 2009, Kožar 2009, Smith 1973, Siddiqui i sur 1998, Zhuchao i Chen 2009) ili Timoshenkovoj teoriji savijanja grednih nosača (Lou i sur. 2006, Timoshenko i sur. 1974, Yavary i sur. 2002, Younesian i sur. 2008, Moghaddas i sur. 2009). Drugi način je modeliranje konstrukcije kao plošnog nosača prema Mindlinovoj ili Kirchhoff-Love teoriji savijanja plošnih nosača (Agrawal i sur. 2004, Cheung 1968, Gbadeyan i Dada 2006, Shadnam i sur. 2001, Yagiz i Sakman 2006, Wang i Kuo 1999, Wu 2003). Za potrebe analize konstrukcija na tlu gredni i plošni modeli mogu biti zadovoljavajući (Huang i Thambiratnam 2001, Torić i Kožar 2009), dok su za složene prostorne konstrukcije, poput mostova, neprikladni.

Počeci proučavanja pokretnog opterećenja zasnovani su na modelu pokretne sile i taj model se najduže zadržao u upotrebi (Lou i sur. 2007, Fryba 1999, Wu 2003). Ukoliko se promatra utjecaj vozila velikih dimenzija, tada se jedna pokretna sila često zamjenjuje nizom pokretnih koncentriranih sila na konstantnom razmaku, koji odgovara međusobnoj

udaljenosti kotača vozila (Gonzalez i sur. 2010, Wang i Kuo 1999). Model pokretne sile ima više nedostataka, a to su da se tretira samo opterećenje vozila na konstrukciju, dok su dinamička svojstva i ponašanje vozila, kao i interakcija vozila i konstrukcije zanemareni. Kod niza pokretnih sila se uzima u obzir utjecaj raspona ovjesa, te način prijenosa opterećenja, no masa i ostale dinamičke karakteristike vozila su također zanemarene. Utjecaj mase vozila se promatra samo u obliku gravitacijskog opterećenja na konstrukciju. Kod pokretne sile se promatra samo utjecaj pokretnog opterećenja na konstrukciju, bez interakcije vozila i konstrukcije. Ukoliko masa vozila nije zanemariva u odnosu na masu konstrukcije, potrebno ju je uzeti u obzir, zbog inercijalnih učinaka na konstrukciju (Yang i sur. 2004). Masa vozila se obično tretira kao kontinuirana (Gbadeyon i Dada 2006, Agrawal i sur. 2004) ili koncentrirana, konstantnog položaja u vremenu. No, položaj mase vozila se mijenja kao funkcija brzine i vremena, stoga je korektno odrediti položaj mase u svakom vremenskom koraku, te prema trenutnom položaju pribrojiti masi konstrukcije (Akin i Mofid 1989, Dehestani i sur. 2009, Kožar 2009, Lou i sur. 2006, Yavari i sur. 2002).

Prvi model koji uzima u obzir neke od dinamičkih karakteristika vozila je masa sa elastičnom oprugom i prigušivačem (Timoshenko i sur. 1974, Smith 1973, Fryba 1999, Tso-Chien i Li 2002, Torić Malić 2009). Ovaj model može imati jedan ili dva stupnja slobode, ovisno da li ima jednu ili dvije mase (masa vozila i masa ovjesa), koje su međusobno povezane elastičnom oprugom i prigušivačem. Ukoliko je masa vozila oslonjena na više paralelno povezanih elastičnih opruga na određenom razmaku, tada se aktivira dodatni stupanj slobode vozila, rotacija oko poprečne težišne osi (Jalili i Esmailzadeh 2002, Esmailzadeh i Jalili 2003). Friberg i Yagiz su uveli model vozila s mogućnošću rotacije oko obje težišne osi (Friberg i sur. 2000, Yagiz i Sakman 2006).

Diskretizacija u vremenu se najčešće bazira na metodi konačnih razlika, koja vodi ka numeričkoj integraciji primjenom Newmarkovih metoda (Podworna 2011, Kožar 2009). Rješavanje dobivenog sustava jednadžbi se najčešće provodi iterativnim postupcima (Ji-Seong i sur. 2008), dok neki autori predlažu i direktni način rješavanja (Neves i sur. 2012). Kod diskretizacije u prostoru gotovo uvijek se susreće metoda konačnih elemenata (Gbadeyon i Dada 2006, Lou i sur. 2007, Wu i Law 2010) ili specijalni tip konačnih elemenata (Tso-Chien i Li 2002, Cheung i Chidiac 1996).

## 1.2. Formulacija problema

Problem pokretnog opterećenja vrlo je čest na području inženjerstva. Bilo koja konstrukcija ili tijelo izloženo opterećenju koje mijenja svoj položaj u prostoru i time pobuđuje drugu konstrukciju ili tijelo predstavlja problem ovakve vrste. Ukoliko su angažirane brzine vrlo male u usporedbi s kritičnom brzinom, takvi problemi se smatraju konvencionalnim problemom nepomičnog opterećenja. Može se načiniti podjela problema pokretnog opterećenja prema vrsti konstrukcija koje su uključene u interakciju (Ouyang 2011):

- interakcija vozila i mosta
- interakcija vozila i kolnika (tla)
- interakcija vlaka i tračnica
- kranovi
- fleksibilni diskovi (interakcija diska i okolnog zraka)
- disk pločice izložene trenju (interakcija dvije pločice)
- opruge (električni kabeli, tramvaji)

Interakcija vozila i mosta je nedvojbeno najintenzivnije proučavan problem od svih problema pokretnog opterećenja. Dinamički utjecaj vozila na konstrukcije prepoznat je tek sredinom 19-tog stoljeća, padom mosta Stephenson preko rijeke Dee u Engleskoj.

Stokes se smatrao zaslužnim za prve analize problema pokretnog opterećenja (Ouyang 2011), koji je zapravo bio problem pokretne sile. Fryba je također u svojoj monografiji opisao mnoge probleme pokretnog opterećenja (Fryba 1972). Konstruktivne komponente uglavnom čine jednostavni kontinuirano elastični elementi kao što su štapovi, grede, ploče i ljuske, jer oni podliježu analitičkim rješenjima. No, za složene konstrukcije neizbježna je primjena numeričkih metoda, poput metode konačnih elemenata. Ukoliko je cijela konstrukcija diskretizirana konačnim elementima, dobiju se veliki sustavi jednadžbi s mnogo nepoznanica i karakterističnim matricama velikih dimenzija. Pored toga, u svakom vremenskom koraku potrebno je ponavljati izračun karakterističnih matrica i rješavanje jednadžbi koristeći neki od postupaka za numeričku integraciju, što je vremenski i

računalno vrlo zahtjevan i dugotrajan proces, osobito kada je broj jednadžbi koje se rješavaju velik.

Ukoliko dvije konstrukcije imaju različitu geometriju i opterećenje, a jedna od njih je u pokretu, njihove mreže konačnih elemenata nisu više kompatibilne od trenutka kad se jedna od konstrukcija počne gibati. Velika je prednost analitičke formulacije problema pokretnog opterećenja u tome što položaj opterećenja u prostornoj domeni uvijek odgovara stupnju slobode, odnosno izražen je preko konvektivnih koordinata. Tako je lakše osigurati kontinuitet pomaka i ravnotežu sila pokretnog i stacionarnog tijela u pomičnim koordinatama. Suprotno analitičkoj formulaciji, u formulaciji konačnih elemenata pokretno opterećenje se nalazi u domeni različitih konačnih elemenata u različitim vremenskim trenucima, te je teško konstantno pratiti njegov položaj i povezati njegovo kretanje sa vektorom pomaka konačnog elementa, jer prolazi domene više različitih elemenata. Stoga je numerički postupak za rješavanje problema pokretnog opterećenja baziran na klasičnim konačnim elementima puno složeniji, a često zbog navedenih nedostataka, i manje točan od analitičkog.

Rješenje u zatvorenom obliku postoji samo za najjednostavniji slučaj pokretnog opterećenja, pokretnu silu, koja djeluje na gredni ili plošni nosač. Za složeniju konstrukciju ili opterećenje ne postoji analitička formulacija. Problem nastaje već kada se uz pokretnu silu uvede i masa vozila, jer diferencijalna jednadžba dobiva novi član koji sadrži derivaciju nepoznanice drugog reda. Svaki dodatni stupanj slobode koji se omogući pokretnom opterećenju uvodi dodatnu diferencijalnu jednadžbu u sustav.

Većina numeričkih algoritama su iterativne prirode i koncipirani su tako da je u svakom vremenskom koraku potrebno prije rješavanja sustava jednadžbi (iteriranja) ažurirati matricu masa i vektor opterećenja, jer se mijenja položaj opterećenja i njegove mase u vremenu, što značajno usporava proračun. Obično se kao rezultat dobiva progib konstrukcije, a sile međudjelovanja se ne dobivaju eksplicitno.

Posebno je zanimljiv utjecaj teretnih vozila sa tri ili pet osovina, koja čine standardnu kategoriju u klasifikaciji prometnih vozila. Utvrđeno je već da ovakva vozila rijetko ugrožavaju nosivost, ali sustavno degradiraju uporabna svojstva i uporabni vijek mostovnih konstrukcija (Green i Cebon 1997). Za proučavanje njihovog utjecaja na konstrukciju nije adekvatan model pokretne sile, niti model pokretne mase, jer osim velike mase, ova vozila imaju i velike dimenzije, te više osovina preko kojih se raspoređuje i prenosi opterećenje. Stoga je potrebno načiniti detaljan model teretnog vozila s više osovina, da bi se dobio točan uvid u interakciju s konstrukcijom.

### **1.3. Hipoteza**

Proučavajući postojeća saznanja i istraživanja iz područja interakcije vozila i konstrukcije nametnule su se slijedeće hipoteze: (i) iako je interakcija vozila i konstrukcije ovdje promatrana sa gledišta konstrukcije, svi stupnjevi slobode vozila su također bitni za interakciju vozila i konstrukcije, te u velikoj mjeri mogu utjecati na rezultate analize, (ii) poprečni presjek konstruktivnih elemenata je bitan faktor utjecaja na ponašanje konstrukcije uslijed djelovanja opterećenja i potrebno ga je uzeti u obzir, (iii) primjena konačnih traka na model pokretnog opterećenja može ubrzati proračun uz istovremeno povećanje broja stupnjeva slobode koji se tretiraju, (iv) primjena konačnih traka na model pokretnog opterećenja omogućiti će eksplicitno dobivanje svih nepoznatih veličina koje opisuju ponašanje vozila i konstrukcije kao rezultat njihovog međudjelovanja.

### **1.4. Predmet i ciljevi istraživanja**

Predmet istraživanja je izrada detaljnog i kompleksnog modela interakcije vozila i konstrukcije koji bi uzimao u obzir sve stupnjeve slobode vozila i konstrukcije, kao i sve dinamičke i ostale karakteristike bitne za interakciju. Namjera je načiniti numeričku proceduru, koja će uz složeni matematički model vozila i model stvarne prostorne konstrukcije mosta, učiniti proračun bržim i učinkovitijim, uz mogućnost dobivanja svih nepoznanica koje opisuju ponašanje konstrukcije, ali i vozila. Model je verificiran usporedbom s rezultatima eksperimentalnog mjerenja na stvarnoj konstrukciji. Cilj je ujedno i procijeniti da li je modeliranje mostova složenih poprečnih presjeka kao plošnih nosača primjereno za dobivanje točnih rezultata i koji model pokretnog opterećenja daje rezultate najbliže stvarnima, dobivenim eksperimentalnim ispitivanjem. Numerički model nastao kao rezultat ovog rada koristit će se za izradu parametarske studije utjecaja različitih faktora na interakciju vozila i konstrukcije.

## 1.5. Metodologija istraživanja

Za istraživanje interakcije vozila i konstrukcije korištena su teorijska znanja iz područja modeliranja konstrukcija, standardni i neki noviji numerički postupci, kao i eksperimentalna ispitivanja provedena na stvarnoj konstrukciji, opterećenoj vozilima u pokretu.

Teorijske postavke metode konačnih traka primijenjene su na pokretno vozilo, te je tako uvedena nova varijacija konačne trake nazvana pokretna konačna traka. Uvođenjem pokretne konačne trake omogućeno je drugačije sprežanje modela konstrukcije s modelom pokretnog vozila kao zasebnog dinamičkog sustava, uzimajući pri tom u obzir sve njegove stvarne stupnjeve slobode. Za diskretizaciju konstrukcije korištene su konačne trakaste ravne ljuske.

Analizirana su dva tipa konstruktivnog modela: plošni nosač i plošni nosač s ukrutama u uzdužnom smjeru, koji odgovara modelu stvarnog mosta. Pet vrsta opterećenja je promatrano i uspoređeno njihovo ponašanje: pokretna sila, pokretna masa, pokretna masa na opruzi, 2D model vozila sa 5 stupnjeva slobode i 3D model vozila sa 9 stupnjeva slobode.

Model konstrukcije opterećen pokretnom silom i masom testiran je usporedbom numeričkog rješenja, dobivenog primjenom metode konačnih traka, sa rješenjem u zatvorenom obliku za plošni nosač, koje je također samostalno izvedeno i dano u disertaciji. Naime, samo za gredni i plošni nosač opterećen pokretnom silom može se odrediti analitičko rješenje. Ukoliko se u modelu pokretne mase, masa opterećenja dovoljno reducira, rješenje se približava onom za pokretnu silu. Time je potvrđena ispravnost modela pokretne mase. Za složenije modele opterećenja ne može se dobiti analitičko rješenje. Stoga je analizirana stvarna konstrukcija cestovnog nadvožnjaka opterećenog punim modelom vozila s tri osovine, te su rezultati uspoređeni s rezultatima ekperimantalnog ispitivanja izvedenog na istoj konstrukciji. Poklapanje rezultata u velikoj mjeri verificira načinjeni model interakcije vozila i konstrukcije, kao i samu formulaciju pokretne konačne trake.

Model je uspoređen i s rezultatima iz literature, usporedbom dinamičkih faktora dobivenih iz progiba konstrukcije i dinamičkih faktora danih u literaturi, a indirektno dobivenih iz deformacija, mjerenih na mostovnoj konstrukciji.

Za rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi u vremenu korištena je metoda impulsnog ubrzanja.

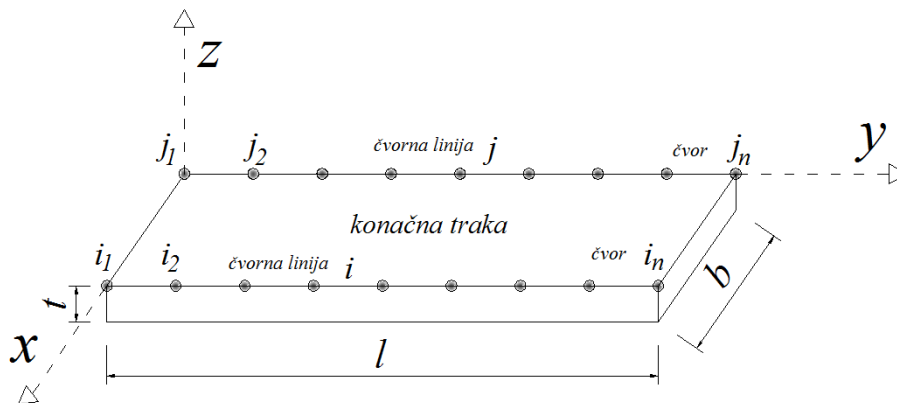
## 2. FORMULACIJA METODE KONAČNIH TRAKA

### 2.1. Uvod u metodu konačnih traka

Metoda konačnih traka prepoznata je kao svestran i učinkovit alat u numeričkoj analizi. Vrlo je učinkovita u analizi konstrukcija kompleksne geometrije, materijalnih svojstava i opterećenja, no zahtijeva vrlo jednostavne uvjete oslanjanja. Ova metoda je našla svoju primjenu u statičkoj, kao i u dinamičkoj analizi konstrukcija.

Metoda konačnih elemenata, kao najsvestraniji alat, zahtijeva diskretizaciju u svakoj dimenziji, što ima za posljedicu više nepoznanica za aproksimaciju nego druge metode. Alternativne metode mogu reducirati napor u računanju i zahtjeve računala. Jedna od takvih metoda je metoda konačnih traka, koja se razvija od kasnih 60-ih godina. Zasnovana je na principu metode Kantorovich za dimenzionalnu redukciju, koja se koristi u transformaciji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u obične ili parcijalne diferencijalne jednadžbe nižeg reda (Cheung i Tham 1998). Kod konačnih traka se ovakva redukcija postiže separacijom varijabli ili odgovarajućim transformacijama. Za interpolacijske funkcije ova metoda koristi jednostavne polinome u jednom smjeru, a kontinuirano derivabilne trigonometrijske redove u drugom smjeru. Opći oblik funkcije pomaka dan je kao produkt polinoma i reda.

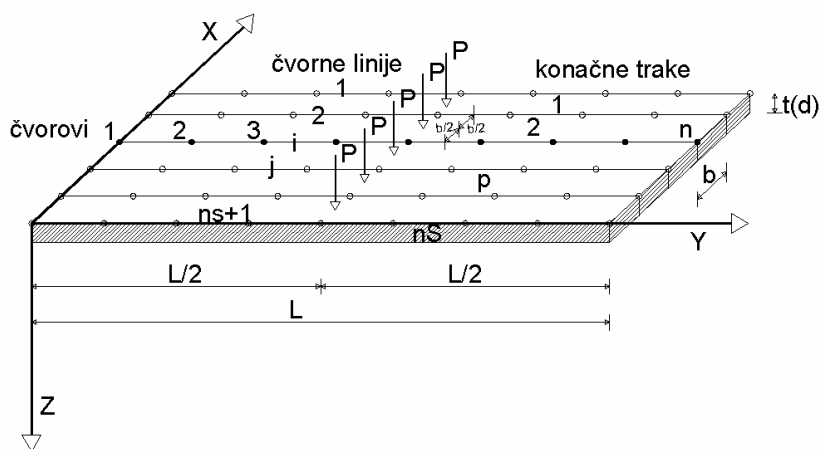




Slika 2.1. Prikaz konačnog trakastog elementa

Na Slici 2.1. prikazana je konačna traka. Na dužim rubovima trake nalaze se čvorne linije na kojima su raspoređeni čvorovi. Više konačnih traka se spaja duž čvornih linija. Okvirni prikaz procedure primjene metode konačnih traka:

- (i) kontinuum se podijeli u dvodimenzionalne poddomene tako da dva suprotna para stranica domene koncidiraju s rubovima domene;
- (ii) pretpostavlja se da su trake međusobno povezane duž konačnog broja čvornih linija koje koincidiraju sa uzdužnim rubovima trake, Slika 2.2.;
- (iii) interpolacijske funkcije su odabrane tako da zadovoljavaju rubne uvjete;
- (iv) na osnovu odabranih funkcija oblika odgovarajuće karakteristične matrice se mogu dobiti preko varijacijskog ili energetskog principa;
- (v) karakteristične matrice za sve trake se spajaju tako da formiraju skup jednažbi za domenu koja se promatra.



Slika 2.2. Prikaz spajanja više konačnih traka duž čvornih linija

## 2.2 Usporedba metode konačnih elemenata i klasične metode konačnih traka

**Tablica 2.1.** Usporedba glavnih karakteristika konačnog elementa i konačne trake (Cheung i Tham 1998)

<i>Konačni element (MKE)</i>	<i>Konačna traka (MKT)</i>
Može se primijeniti na bilo kakvu geometriju, rubne uvjete i vrstu materijala. Vrlo raznolik i primjenjiv na različite probleme.	U statičkoj analizi, češće se koristi za konstrukcije sa dva suprotna ruba slobodno oslonjena bez unutarnjih elastičnih oslonaca. U dinamičkoj analizi koristi se za konstrukcije sa svim rubnim uvjetima i sa diskretnim osloncima.
Obično daje veliki broj jednadžbi. Može biti vrlo zahtjevno ili čak nemoguće doći do rješenja zbog ograničenja kapaciteta računala.	Obično daje znatno manji broj jednadžbi, što je posebno je izraženo kod problema sa dva suprotna kraja slobodno oslonjena. Posljedica je znatno kraće vrijeme računanja za rješenja usporedive točnosti.
Velika količina ulaznih podataka i veća mogućnost pogreške. Zahtijeva automatsko mrežiranje i sheme za generiranje opterećenja.	Vrlo mala količina ulaznih podataka zbog malog broja mrežnih linija, kao posljedica dimenzionalne redukcije.
Velika količina izlaznih veličina. U pravilu, ispisuju se svi čvorni pomaci i naprezanja.	Vrlo je lako specificirati samo one pozicije na kojima je potrebno dobiti pomake i naprezanja kao izlazne veličine.
Zahtijeva veliki kapacitet računala i složena je za programiranje. Često je nužno primijeniti napredne metode poput kondenzacije masa, podprostorno iteriranje i sl. da bi se reducirao opseg proračuna.	Zahtijeva manje računalnih jezgri i lakša je za programiranje. Već prva dva ili tri člana reda obično daju dovoljno točne rezultate.

U Tablici 2.2. dana je usporedba točnosti metode konačnih traka i metode konačnih elemenata kod izračuna vlastitih vrijednosti na primjeru slobodno oslonjene grede.

**Tablica 2.2.** *Usporedba vlastitih vrijednosti grede dobivenih primjenom metoda konačnih traka i konačnih elemenata*

Vlastite vrijednosti slobodno oslonjene grede						
m	analitički $\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$	konačna traka		konačni element		
		n = 1, r = 1	n = 1, r = 50	n = 2	n = 10	n = 150
1	7,629	7,628	7,628	9,766	7,722	7,629
2	30,516	30,513	30,513	33,87	32,018	30,523
3	68,661	68,654	68,654	66,769	76,259	68,695
4	122,064	122,052	122,052	155,213	145,554	122,17

n – broj elemenata

m – broj tonova

r – broj članova razvoja u red

Iz vrijednosti danih u Tablici 2.2. očito je da je dovoljan jedan konačni trakasti element i samo prvi član reda interpolacijske funkcije da bi se dobile točne vlastite vrijednosti. Ovo se može objasniti činjenicom da se kod konačnih traka za interpolacijske funkcije u uzdužnom smjeru primjenjuju upravo vlastiti vektori slobodno oslonjene grede.

Ovim jednostavnim primjerom se može interpretirati prednost i učinkovitost metode konačnih traka, u odnosu na metodu konačnih elemenata.

### 2.3. Odabir odgovarajućih interpolacijskih funkcija

Izbor prikladne interpolacijske funkcije za konačnu traku zasniva se na separaciji varijabli i predstavlja ključan dio analize. Pogrešno odabrana funkcija oblika može pored nesuvislih rezultata, voditi i ka rezultatima koji konvergiraju pogrešnom rješenju i za vrlo profinjenu mrežu. Klasična metoda konačnih traka reducira dvodimenzionalni problem na jednodimenzionalni. Funkcije oblika za interpolacijske varijable dane su kao (Cheung i Tham 1998):

$$\delta = \sum_{m=1}^r f_m(x) Y_m(y) \quad (2.1)$$

U gornjem izrazu  $\delta$  je vektor čvornih parametara,  $f_m(x)$  predstavlja polinomne izraze sa neodređenim konstantama za  $m$ -ti član reda, dok je  $Y_m(y)$  red koji zadovoljava rubne uvjete u  $y$  smjeru.  $r$  predstavlja ukupan broj članova reda koji se uzimaju u obzir. Da bi se osigurala konvergencija rezultata slijedeći zahtjevi moraju biti zadovoljeni (Cheung i Tham 1998):

(i) dio interpolacijske funkcije koji se opisuje preko reda  $Y_m(y)$  trebao bi *a priori* zadovoljavati rubne uvjete;

(ii) polinomni dio interpolacijske funkcije  $f_m(x)$  mora moći predstavljati stanje konstantne deformacije u poprečnom ( $x$ ) smjeru; u suprotnom nema konvergencije;

(iii) interpolacijska funkcija mora zadovoljavati uvjete komaptibilnosti duž rubova sa susjednim trakama, što uključuje kontinuitet parcijalnih derivacija interpoliranih varijabli, kao i samih varijabli.

Interpolacijske funkcije u uzdužnom smjeru, ovisno o prirodi problema koji se razmatra i rubnim uvjetima mogu biti vlastiti vektori, eksponencijalne funkcije ili redovi. Najčešći izbor kod analize naprezanja su svojstveni vektori, koji su izvedeni iz rješenja parcijalne diferencijalne jednadžbe četvrtog reda, koja opisuje vibracije grede

:

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial y^4} = \frac{\mu^4}{l^4} Y \quad (2.2)$$

gdje  $Y$  predstavlja interpolacijsku funkciju u uzdužnom smjeru,  $l$  dužinu konačne trake, a  $\mu$  je dan izrazom (2.6). Opće rješenje jednadžbe (2.2) je:

$$Y_m(y) = C_1 \sin\left(\frac{\mu y}{l}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\mu y}{l}\right) + C_3 \sinh\left(\frac{\mu y}{l}\right) + C_4 \cosh\left(\frac{\mu y}{l}\right) \quad (2.3)$$

Koeficijenti  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$  određuju se prema rubnim uvjetima.

U literaturi su dana rješenja jednadžbe (2.3) za različite uvjete oslanjanja (Cheung i Chidiac 1996), a ovdje je prikazano rješenje za slobodno oslonjene rubove :

$$Y(0) = Y''(0) = Y(l) = Y''(l) = 0 \quad (2.4)$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\mu_m y}{l}\right) \quad (2.5)$$

$$\mu_m = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, m\pi \quad (2.6)$$

Interpolacijske funkcije u poprečnom smjeru su polinomi vezani za čvorne interpolacijske parametre, a opisuju odgovarajuće interpolacijsko polje u smjeru okomito na uzdužnu os trake. Ovakve funkcije oblika su izvedene tako da se definira jedinična vrijednost promatrane interpolacijske komponente u vlastitom čvoru, a nulta vrijednost za istu interpolacijsku komponentu u svim ostalim čvorovima. Za interpolacijske funkcije se koriste funkcije oblika umjesto običnih polinoma da bi se osigurala kompatibilnost pomaka duž susjednih traka. Mogu se koristiti različite funkcije oblika, no ovdje su odabrani Hermitovi polinomi koji zadovoljavaju vrijednosti funkcije u točkama, kao i vrijednost derivacije funkcije u istim točkama (translatorne i rotacijske deformacije), (Kožar 2006):

$$[C_1] = [(1 \quad 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3), x(1 \quad 2\bar{x} + \bar{x}^2)] \quad (2.7)$$

$$[C_2] = [(3\bar{x}^2 \quad 2\bar{x}^3), x(\bar{x}^2 \quad \bar{x})] \quad (2.8)$$

## 2.4. Problem savijanja ploče

### 2.4.1. Općenito

Formulacija konačnih traka pokazuje znatne prednosti nad konvencionalnom metodom konačnih elemenata za problem savijanja ploče u slučaju relativno jednostavne geometrije koja se ne mijenja u uzdužnom smjeru (Cheung i sur. 1996). Budući da zahtijeva manje stupnjeva slobode u čvoru, veličina matrica je uvelike reducirana.

Prvi rad na temu metode konačnih traka izdao je Cheung (Cheung 1968), pišući o problemu tankih ploča koristeći slobodno oslonjene pravokutne trake. Kasnije su neovisno o Cheungu Powell i Ogden (Powell i Ogden 1969) izdali rad o formulaciji traka istog tipa. Metodu je kasnije Cheung poopćio tako da obuhvaća i druge uvjete oslanjanja. U navedenim radovima uvedene su konačne trake nižeg reda sa kubnim polinomom kao funkcijom oblika. Dok su dobiveni pomaci gotovo uvijek bili točni, kod grube mreže se javljao diskontinuitet na rubovima traka i rezidualni poprečni momenti, no progušćivanjem mreže konačnih traka ove pojave bi se eliminirale. Inače, povećanje točnosti se može postići povećanjem broja traka za diskretizaciju domene, povećanjem reda funkcije oblika (konačne trake višeg reda) ili uvođenjem dodatne čvorne linije unutar konačne trake (Cheung i Tham 1998). Metoda konačnih traka je našla svoju primjenu na vitoperenim pločama (Brown i Ghali 1975, Mukhopadhyay 1976), pločama promjenljive debljine (Mawenya i Davies 1974), debelim pločama (Hinton i Zienkiewicz 1977, Onate i Suarez 1983, Chulya i Mullen 1989), pločama nepravilnog oblika, lameliranim pločama itd. Primjenu metode konačnih traka na analizu vibracija i stabilnosti su priširili Benson i Dawe (Benson i Hinton 1976, Dawe 1978).

### 2.4.2. Formulacija metode konačnih traka za problem savijanja tankih ploča

Teorija tankih ploča razvijena je preko principa minimalne ukupne potencijalne energije (Cheung i Tham 1998). Kod metode konačnih traka deformacije od savijanja ploče su definirane kao preko funkcije oblika  $[N]$  i čvornih parametara pomaka  $\{\delta\}$ :

$$w = [N]\{\delta\} \quad (2.9)$$

Vektori deformacija  $\{\varepsilon\}$  i naprezanja  $\{\sigma\}$  su:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [B]\{\delta\} \\ \{\sigma\} &= [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Gdje je  $[B]$  deformacijska matrica a  $[D]$  matrica materijalnih svojstava. Ukupna potencijalna energija je:

$$\Phi = U + W = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [B]^T [D][B]\{\delta\}dA + \{\delta\}^T [N]^T \{q\}dA \quad (2.11)$$

gdje  $U$  predstavlja energiju od rada unutarnjih, a  $W$  vanjskih sila.

Minimizirajući gornji izraz za energiju u odnosu na parametre pomaka  $\{\delta\}$ , dobije se jednačba ravnoteže:

$$[K^e]\{\delta\} - \{F^e\} = \{0\} \quad (2.12)$$

gdje je  $[K^e]$  matrica krutosti,  $\{F^e\}$  vektor opterećenja. Eksplicitni oblik karakterističnih matrica ovisi o odabranim funkcijama oblika.

### 2.4.3. Matrica fleksije

Cheung i suradnici (Cheung i Chidiac 1996, Cheung i Tham 1998) samo općenito spominju primjenu metode sila na kontinuirane konstrukcije preko više oslonaca. Kako se matrica fleksije za konačni ntrakasti element ne može naći u navedenoj literaturi, biti će ovdje izvedena. Funkcija pomaka  $w(x,y)$  za konačnu traku jednaka je umnošku interpolacijskih funkcija u dva okomita smjera i parametara pomaka:

$$w(x,y) = N_n(x) \sum_m \{\delta\}_{mn} Y_m(y) \quad (2.13)$$

gdje je  $N_n(x)$  interpolacijska funkcija u poprečnom,  $Y_m(y)$  interpolacijska funkcija u uzdužnom smjeru, a  $\{\delta\}$  vektor parametara pomaka. Iz principa minimuma energije dobije se:

$$\{\delta\}_{mn} = [K]_{mn}^{-1} \{F\}_m \quad (2.14)$$

Tada je funkcija pomaka:

$$w(x,y) = N_n(x) \sum_m [K]_{mn}^{-1} \{F\}_m Y_m(y) \quad (2.15)$$

gdje je  $[K]_{mn}$  matrica krutosti, a  $\{F\}_m$  vektor vanjskog opterećenja. Kako vrijedi da je vektor opterećenja:

$$\{F\}_m = P \cdot Y_m(y) N_n(x) \quad (2.16)$$

gdje je  $P$  djelujuća koncentrirana sila. Tada je:

$$w(x,y) = P \cdot N_n(x) \sum_m [K]_{mn}^{-1} N_n(x) Y_m(y) Y_m(y) \quad (2.17)$$

Matrica fleksije konačne traka je onda:

$$[F]_{mn} = N_n(x) \sum_m [K]_{mn}^{-1} N_n(x) Y_m(y) Y_m(y) \quad (2.18)$$

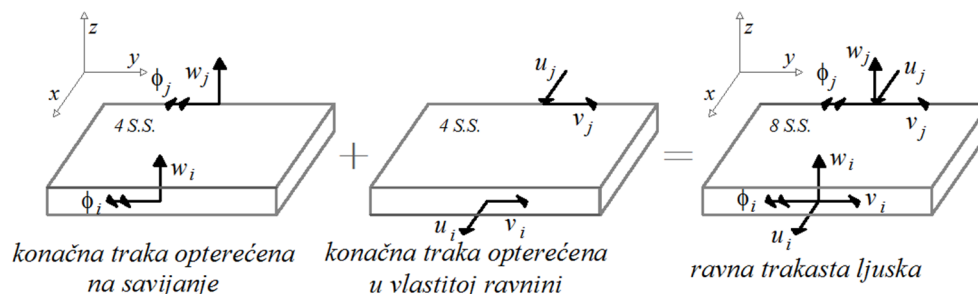


## 2.5. Kompleksno opterećena konačna traka: konačna trakasta ljuska

Prizmatičnu složenu konstrukciju ("folded plate") ili sandučasti gredni nosač čini skup pravokutnih ploča koje pružaju otpor i savijanju i opterećenju u ravnini ploče. Ovakva vrsta konstrukcije može se analizirati upotrebom ravnih konačnih trakastih ljuski. Ravne trake sa svojstvima ljuski se formiraju spajanjem konačne trake opterećene okomito na svoju ravninu i konačne trake sa ravninskim stanjem naprezanja u vlastitoj ravnini. Ukupna potencijalna energija ravne konačne trake sa svojstvima ljuske, za geometrijski linearnu teoriju (nema veze između savijanja i uzdužnih naprezanja), odgovara algebarskom zbroju potencijalne energije od savijanja i uzdužnih deformacija. Tako je za slučaj slobodno oslonjene trake ukupna potencijalna energija je (Cheung i sur. 1996, Cheung i Tham 1998):

$$\Pi = U + W = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \{\delta\}_m^T [K]_{mn} \{\delta\}_m - \sum_{m=1}^r \{\delta\}_m^T \{p\}_m \quad (2.19)$$

gdje je  $U$  energija od rada unutarnjih sila, a  $W$  od vanjskih sila.  $\{\delta\}_m$  je vektor čvornih parametara,  $[K]_{mn}$  je matrica krutosti,  $\{p\}_m$  je vektor opterećenja, a  $r$  je ukupan broj članova reda  $m$ .



Slika 2.3. Prikaz konačne trakaste ljuske i pripadajućih stupnjeva slobode

Kod složeno opterećene konačne trake prisutna su četiri čvorna parametra, te stoga vektor parametara pomaka za jednu traku ima osam članova, Slika 2.3.:

$$\{\delta\}_m = [u_{im} \quad v_{im} \quad w_{im} \quad \theta_{im} \quad u_{jm} \quad v_{jm} \quad w_{jm} \quad \theta_{jm}]^T \quad (2.20)$$

gdje  $u$  označava translatorni pomak čvora u smjeru osi  $x$ ,  $v$  translatorni pomak u smjeru osi  $y$ , a  $w$  pomak u smjeru osi  $z$ .  $\theta$  označava rotacijski pomak. Indeks  $i$  označava lijevu čvornu liniju konačne trake, a  $j$  desnu čvornu liniju iste konačne trake.  $m$  je oznaka broja članova reda.

Vektor opterećenja  $\{p\}_m$  za slučaj koncentrirane sile  $F$  koja djeluje u točki  $x_c, y_c$  je (Cheung i sur. 1996):

$$\{p\}_m = [X_{im} \quad Y_{im} \quad Z_{im} \quad M_{im} \quad X_{jm} \quad Y_{jm} \quad Z_{jm} \quad M_{jm}]^T \quad (2.21)$$

$$X_{im} = F_x(1 - \bar{x}_c) \sin\left(\frac{\mu_m}{l} y_c\right) \quad (2.22)$$

$$Y_{im} = F_y(1 - \bar{x}_c) \cos\left(\frac{\mu_m}{l} y_c\right) \quad (2.23)$$

$$Z_{im} = F_z(1 - 3\bar{x}_c^2 + 2\bar{x}_c^3) \sin\left(\frac{\mu_m}{l} y_c\right) \quad (2.24)$$

$$M_{im} = F_z x_c(1 - 2\bar{x}_c + \bar{x}_c^2) \sin\left(\frac{\mu_m}{l} y_c\right) \quad (2.25)$$

$$X_{jm} = F_x \bar{x}_c \sin\left(\frac{\mu_m}{l} y_c\right) \quad (2.26)$$

$$Y_{jm} = F_y \bar{x}_c \cos\left(\frac{\mu_m}{l} y_c\right) \quad (2.27)$$

$$Z_{jm} = F_z(3\bar{x}_c^2 - 2\bar{x}_c^3) \sin\left(\frac{\mu_m}{l} y_c\right) \quad (2.28)$$

$$M_{jm} = F_z x_c(\bar{x}_c^2 - \bar{x}_c) \sin\left(\frac{\mu_m}{l} y_c\right) \quad (2.29)$$

Pri čemu koncentrirana sile ima komponente  $F_x, F_y, i F_z$  u smjeru osi  $x, y$  i  $z$  respektivno.  $\mu_m = m \cdot \pi, m = 1, 2 \dots r$ , gdje  $m$  označava broj člana reda, a  $r$  ukupan broj članova reda koji se uzimaju u obzir.  $X, Y$  i  $Z$  su komponente vektora opterećenja, a odnose se na sile u smjeru osi  $x, y$  i  $z$  respektivno, dok  $M$  označava moment savijanja oko osi  $y$ . Može se vidjeti da je svako opterećenje potrebno prilagoditi formulaciji konačnih traka, tako da se pomnoži s interpolacijskim funkcijama u uzdužnom i poprečnom smjeru.

Matrica krutosti izgleda:

$$[K]_m = \begin{bmatrix} [K_{ii}]_r & 0 & [K_{ij}]_r & 0 \\ 0 & [K_{ii}]_s & 0 & [K_{ij}]_s \\ [K_{ij}]_r^T & 0 & [K_{jj}]_r & 0 \\ 0 & [K_{ij}]_s^T & 0 & [K_{jj}]_s \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Odnosno, ako se umjesto podmatrica s indeksom  $r$  koje se odnose na ravninsko stanje naprezanja, i one s indeksom  $s$  koje se odnose na čisto savijanje, uvrste odgovarajući izrazi dobije se:

$$[K]_m = \begin{bmatrix} k_1 & k_3 & 0 & 0 & k_4 & k_6 & 0 & 0 \\ k_3 & k_2 & 0 & 0 & -k_6 & k_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_7 & k_9 & 0 & 0 & k_{10} & -k_{11} \\ 0 & 0 & k_9 & k_8 & 0 & 0 & k_{11} & k_{12} \\ k_4 & -k_6 & 0 & 0 & k_1 & -k_3 & 0 & 0 \\ k_6 & k_5 & 0 & 0 & k_3 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{10} & k_{11} & 0 & 0 & k_7 & k_9 \\ 0 & 0 & -k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & -k_9 & k_8 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$k_1 = \frac{tlE_1}{2b} + \frac{tlb\mu_m^2G}{6} \quad (2.32)$$

$$k_2 = \frac{tlb\mu_m^2E_2}{6} + \frac{tlG}{2b} \quad (2.33)$$

$$k_3 = \frac{tl\mu_m\nu_xE_2}{4} - \frac{tl\mu_mG}{4} \quad (2.34)$$

$$k_4 = -\frac{tlE_1}{2b} + \frac{tlb\mu_m^2G}{12} \quad (2.35)$$

$$k_5 = -\frac{tlG}{2b} + \frac{tlb\mu_m^2E_1}{12} \quad (2.36)$$

$$k_6 = -\frac{tl\mu_m\nu_xE_2}{4} + \frac{l\mu_mG}{4} \quad (2.37)$$

$$E_1 = \frac{E_x}{(1 - \nu_x\nu_y)} \quad (2.38)$$

$$E_2 = \frac{E_y}{(1 - \nu_x\nu_y)} \quad (2.39)$$

$$k_1 = \frac{13lb}{70}k_m^4D_y + \frac{12l}{5b}k_m^2D_{xy} + \frac{6l}{5b}k_m^2D_1 + \frac{6l}{b^3}D_x \quad (2.40)$$

$$k_2 = \frac{lb^3}{210}k_m^4D_y + \frac{4l}{15}k_m^2D_{xy} + \frac{6l}{5b}k_m^2D_1 + \frac{6l}{b^3}D_x \quad (2.41)$$

$$k_3 = \frac{11lb^2}{70} k_m^4 D_y + \frac{12l}{5b} k_m^2 D_{xy} + \frac{6l}{5b} k_m^2 D_1 + \frac{6l}{b^3} D_x \quad (2.42)$$

$$k_4 = \frac{9lb^2}{140} k_m^4 D_y - \frac{12l}{5b} k_m^2 D_{xy} - \frac{6l}{5b} k_m^2 D_1 - \frac{3l}{b^2} D_x \quad (2.43)$$

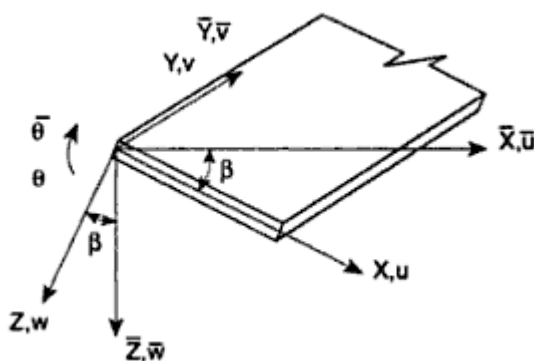
$$k_5 = \frac{13lb^2}{840} k_m^4 D_y - \frac{l}{5} k_m^2 D_{xy} - \frac{l}{10} k_m^2 D_1 - \frac{3l}{b^2} D_x \quad (2.44)$$

$$k_6 = -\frac{lb^3}{280} k_m^4 D_y - \frac{lb}{15} k_m^2 D_{xy} - \frac{lb}{30} k_m^2 D_1 + \frac{l}{b} D_x \quad (2.45)$$

gdje su  $b$ ,  $l$  i  $t$  širina, dužina i debljina konačne trake,  $E$  modul elastičnosti materijala,  $G$  modul posmika,  $\nu$  Poissonov koeficijent, a  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  i  $D_1$  komponente matrice elastičnosti.

## 2.6. Transformacija koordinata

Karakteristične veličine za ravnu konačnu ljusku su gore dane u lokalnom koordinatnom sustavu. U takvom sustavu osi  $x$  i  $y$  koincidiraju sa središnjom ravninom konačne trake, Slika 2.4. Kod složenih plošnih konstrukcija, bilo koje dvije ploče biti će međusobno spojene pod nekim kutem. U svrhu spajanja lokalnih matrica krutosti, vektora opterećenja i pomaka pojedinih konačnih traka, koje ne leže u istoj ravnini, u globalne matrice i vektore za cijelu konstrukciju, potrebno uvodi se globalni koordinatni sustav, koji će biti zajednički za sve konačne trake (Cheung i Tham 1998).



Slika 2.4. Transformacija koordinata

Oznake  $x$ ,  $y$  i  $z$  označavaju lokalne koordinate jedne trake, a  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  i  $\bar{z}$  označavaju globalne koordinate. Pri tom osi  $y$  i  $\bar{y}$  koincidiraju sa zajedničkom linijom dvaju susjednih traka. Lokalne i globalne komponente pomaka su međusobno povezane relacijom:

$$u_{im} = \bar{u}_{im} \cos \beta + \bar{w}_{im} \sin \beta \quad (2.46)$$

$$v_{im} = \bar{v}_{im} \quad (2.47)$$

$$w_{im} = -\bar{u}_{im} \sin \beta + \bar{w}_{im} \cos \beta \quad (2.48)$$

$$\theta_{im} = \bar{\theta}_{im} \quad (2.49)$$

gdje je  $\beta$  kut za koji je zarotirana konačna traka u odnosu na globalni koordinatni sustav. Transformacije se odnose na pomake na određenoj čvornoj liniji, a indeks  $i$  se odnosi na broj čvorne linije. Za konačnu traku se onda transformacija veličina iz lokalnog u globalni koordinatni sustav može pisati (Cheung i sur. 1996):

$$\{\delta\}_m = \begin{bmatrix} [t] & 0 \\ 0 & [t] \end{bmatrix} \{\bar{\delta}\}_m = [T] \{\bar{\delta}\}_m \quad (2.50)$$

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

gdje matrica  $[T]$  predstavlja matricu transformacije.

Tada je ukupna potencijalna energija deformacije za cijelu konstrukciju:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \{\bar{\delta}\}_m^T [T]^T [K]_m [T] \{\bar{\delta}\}_m - \sum_{m=1}^r \{\bar{\delta}\}_m^T [T]^T \{p\}_m \quad (2.52)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \{\bar{\delta}\}_m^T [\bar{K}]_m \{\bar{\delta}\}_m - \sum_{m=1}^r \{\bar{\delta}\}_m^T \{\bar{p}\}_m \quad (2.53)$$

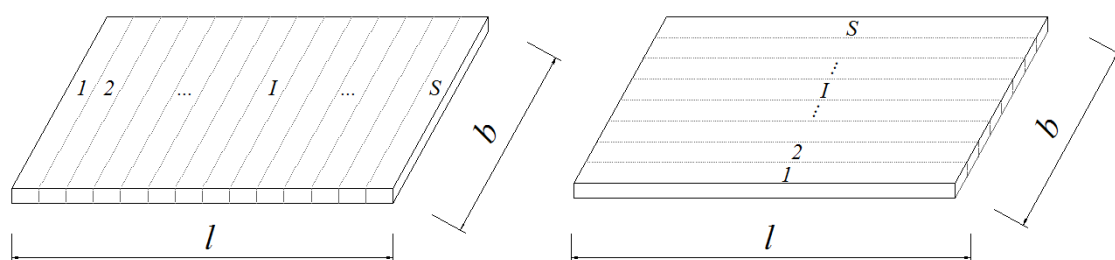
Slijedi da je:

$$[\bar{K}]_m = [T]^T [K]_m [T] \quad (2.54)$$

$$\{\bar{p}\}_m = [T]^T \{p\}_m = [\bar{K}]_m \{\bar{\delta}\}_m \quad (2.55)$$

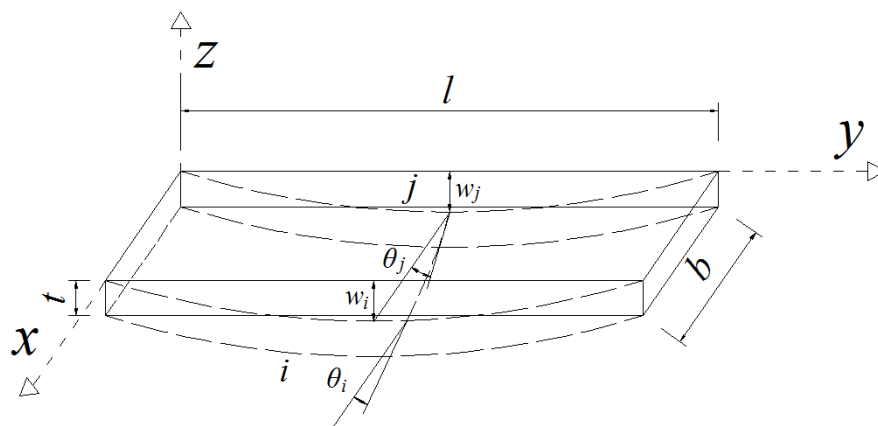
## 2.7. Diskretizacija domene sa više konačnih traka

Jedan od načina povećanja točnosti u analizi metodom konačnih traka je povećanje broja konačnih traka u diskretizaciji domene (Cheung i sur. 1996). U slučaju jedne konačne trake dovoljna točnost se postiže povećanjem članova reda u uzdužnom i poprečnom smjeru. Specifičnost metode konačnih traka je u tome, što se domena diskretizira samo u jednom smjeru, obično poprečnom. U uzdužnom smjeru je domena diskretizirana sa samo jednom konačnom trakom, tako da dužina konačne trake odgovara dužini konstrukcije koja se diskretizira. Diskretizacija u okomitom smjeru je također moguća, Slika 2.5.



**Slika 2.5.** Dva moguća načina diskretizacije domene konačnim trakama

U ovom slučaju dvije konačne trake, osim krajnjih imaju zajedničku čvornu liniju i zajedničke čvorove. Ova činjenica implicira da dvije susjedne trake imaju jednaku veličinu progiba duž zajedničke čvorne linije  $i$ , jer im pripadaju isti čvorovi  $i_n$ . Da bi se osigurala glatka progibna ploha za cijelu ploču, kut zaokreta mora biti kontinuiran na spojevima konačnih traka. Zbog toga je potrebno uzeti amplitudu poprečnog nagiba kao čvorni parametar. Jedna klasična konačna traka ima četiri stupnja slobode:  $w_{im}, \theta_{im}, w_{jm}, \theta_{jm}$ , Slika 2.6.



**Slika 2.6.** Prikaz konačne trake sa stupnjevima slobode čvornih linija



## 2.8. Formiranje globalne matrice krutosti i globalnog vektora opterećenja

Energija deformacije  $U_t$  i potencijalna energija od vanjskog opterećenja za cijelu konstrukciju  $W_t$  dobije se sumiranjem doprinosa od svih konačnih traka (Cheung i sur. 1996):

$$U_t = \frac{I}{2} \sum_{l=1}^S \sum_{m=1}^r \{\delta\}_{lm}^T [K]_{lm} \{\delta\}_{lm} \quad (2.56)$$

$$W_t = \sum_{l=1}^S \sum_{m=1}^r \{\delta\}_{lm}^T \{p\}_{lm} \quad (2.57)$$

Gdje je  $S$  ukupan broj konačnih traka na koje je konstrukcija podijeljena,  $I$  je indeks koji označava pojedinu traku, a  $t$  je indeks koji označava globalne veličine koje se odnose na cijelu konstrukciju.  $\{\delta\}_m$  označava vektor parametara pomaka,  $\{p\}_m$  vektor vanjskog opterećenja, a  $[K]_m$  matrica krutosti konačne trake. Da bi se izvelo sumiranje po svim trakama potrebno je izvršiti postupak spajanja. Analogno metodi konačnih elemenata, karakteristične globalne matrice i vektori se dobiju umetanjem odgovarajućih koeficijanata krutosti i vrijednosti opterećenja iz lokalne matrice za odgovarajuću traku na njihovo mjesto u globalnoj matrici, i 0 na opreostala mjesta u globalnoj matrici (Cheung i sur. 1996, Potočnik 2005). S obzirom na činjenicu da je matrica krutosti slobodno oslonjene trake simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, globalna matrica krutosti će također biti simetrična. Globalna matrica krutosti se slaže spajanjem lokalnih matrica tako da se preklapaju i zbrajaju članovi koji su zajednički za dvije susjedne trake.

## 2.9. Određivanje parametara konačnih traka primjenom principa minimizacije potencijalne energije

Energetski princip se zasniva na činjenici da ukoliko je sustav u ravnoteži s vanjskim opterećenjem ukupna potencijalna energija mora poprimiti minimalnu vrijednost (Cheung i Tham 1998). Odnosno, prva derivacija izraza za ukupnu potencijalnu energiju  $\Pi_t$  u odnosu na parametre pomaka  $\{\delta\}_{tm}$  mora biti jednaka nuli:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial \{\delta\}_{tm}} = \{0\} \quad (2.58)$$

Uvrštavanjem u gornju jednadžbu izraz za ukupnu potencijalnu energiju za konstrukciju diskretiziranu konačnim trakama:

$$\Pi_t = U_t + W_t = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \{\delta\}_{tm}^T [K]_{tm} \{\delta\}_{tm} - \sum_{m=1}^r \{\delta\}_{tm}^T \{p\}_{tm} \quad (2.59)$$

dobije se sustav linearnih algebarskih jednadžbi za  $m$ -ti član reda:

$$[K]_{tm} \{\delta\}_{tm} = \{p\}_{tm} \quad (2.60)$$

Rješavanjem gornjeg sustava iz poznate matrice krutosti  $[K]_{tm}$  i vektora pomaka  $\{p\}_{tm}$  dobiju se nepoznati parametri pomaka  $\{\delta\}_{tm}$  za sve članove reda, a pomoću njih se dolazi do vrijednosti stvarnih pomaka i momenata savijanja u bilo kojoj točki na konstrukciji.

## 2.10. Parametarska analiza utjecaja broja konačnih traka i broja članova razvoja u red na točnost izračuna pomaka

Na točnost izračuna pomaka i reznih sila primjenom metoda konačnih traka se može utjecati povećanjem ukupnog broja konačnih traka i povećanjem broja članova reda interpolacijskih funkcija (Cheung i Tham 1998). Podaci dani u tablicama 2.3.-2.5. potvrđuju ovu tvrdnju. Tablica 2.3. odnosi se na točnost klasične konačne trake opterećene na savijanje, Tablica 2.4. na konačnu ravnu trakastu ljusku, a Tablica 2.5. prikazuje usporedbu rezultata za ova dva tipa konačnog trakastog elementa. Kao točno rješenje progiba slobodno oslonjene ploče opterećene koncentriranom silom na sredini raspona uzet je izraz (3.108) izveden u slijedećem poglavlju.

**Tablica 2.3.** Utjecaj broja traka na točnost izračuna statičkog progiba primjenom klasičnih konačnih traka

KONAČNA TRAKA $r = 4$							
$P = 1$ [kN]	širina $b$ [m]	dužina $l$ [m]	$b/l$	točno rješenje [m]	$w_{l/2}$ za $nS = 1$ [m]	$w_{l/2}$ za $nS = 20$ [m]	$\left  \frac{w_{l/2, nS=20} - w_{l/2, nS=1}}{w_{l/2, nS=20}} \right  \cdot 100$ [%]
	2,5	10	0,25	$2,667 \cdot 10^{-5}$	$2,663 \cdot 10^{-5}$	$2,665 \cdot 10^{-5}$	0,1
	4	10	0,40	$1,852 \cdot 10^{-5}$	$1,67 \cdot 10^{-5}$	$1,677 \cdot 10^{-5}$	0,4
<b>PLOČA</b>	5	10	0,50	$1,481 \cdot 10^{-5}$	$1,343 \cdot 10^{-5}$	$1,353 \cdot 10^{-5}$	0,7
	6	10	0,60	$1,235 \cdot 10^{-5}$	$1,127 \cdot 10^{-5}$	$1,142 \cdot 10^{-5}$	1,3
	10	10	1	$8,642 \cdot 10^{-6}$	$7,093 \cdot 10^{-6}$	$7,515 \cdot 10^{-6}$	5,6

$nS$  – broj konačnih traka

$r$  – broj članova razvoja u red

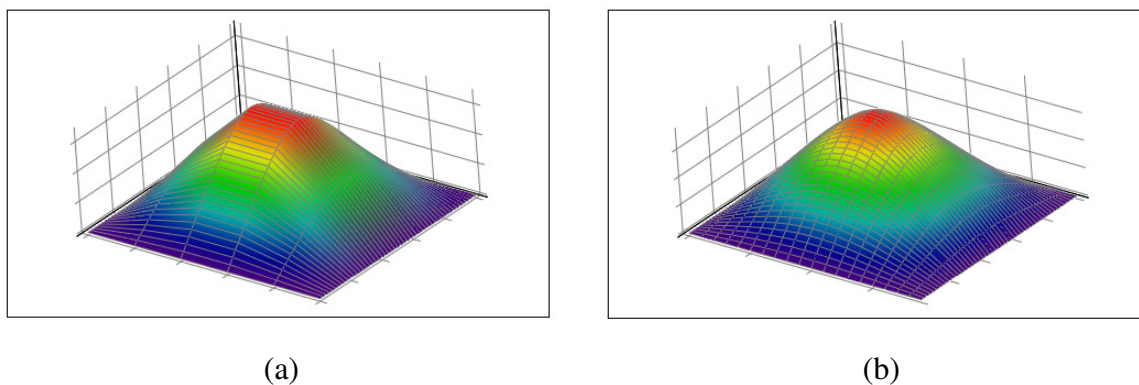
**Tablica 2.4.** Utjecaj broja traka na točnost izračuna statičkog progiba primjenom konačnih trakastih ljuski

RAVNA KONAČNA TRAKASTA LJUSKA $r = 4$							
$P = 1$ [kN]	širina $b$ [m]	dužina $l$ [m]	$b/l$	točno rješenje [m]	$w_{l/2}$ za $nS = 1$ [m]	$w_{l/2}$ za $nS = 20$ [m]	$\left  \frac{w_{l/2, nS=20} - w_{l/2, nS=1}}{w_{l/2, nS=20}} \right  \cdot 100$ [%]
PLOČA	2,5	10	0,25	$2,667 \cdot 10^{-5}$	$2,656 \cdot 10^{-5}$	$2,665 \cdot 10^{-5}$	0,3
	4	10	0,40	$1,852 \cdot 10^{-5}$	$1,648 \cdot 10^{-5}$	$1,676 \cdot 10^{-5}$	1,7
	5	10	0,50	$1,481 \cdot 10^{-5}$	$1,306 \cdot 10^{-5}$	$1,353 \cdot 10^{-5}$	3,5
	6	10	0,60	$1,235 \cdot 10^{-5}$	$1,073 \cdot 10^{-5}$	$1,142 \cdot 10^{-5}$	6
	10	10	1	$8,642 \cdot 10^{-6}$	$5,769 \cdot 10^{-6}$	$7,496 \cdot 10^{-6}$	23

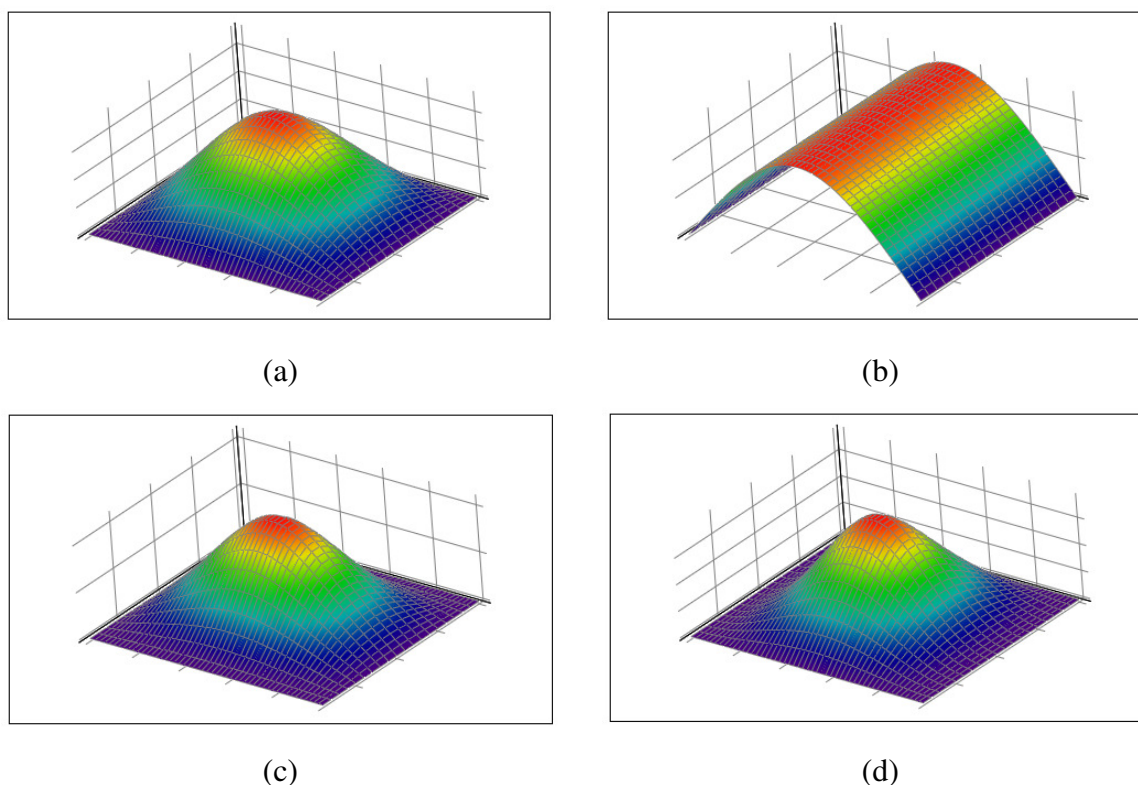
$nS$  – broj konačnih traka

$r$  – broj članova razvoja u red

Na Slici 2.7. dana je grafička usporedba progiba za različit broj konačnih traka. Slika 2.8. prikazuje raspodjelu progiba plošnog nosača za različite uvjete oslanjanja.



**Slika 2.7.** Statički progib ploče slobodno oslonjene na svim stranama diskretizirane sa: (a) 5 konačnih traka; (b) 19 konačnih traka



**Slika 2.8.** Statički progib ploče diskretizirane sa konačnimtrakastimljuskama: (a) slobodno oslonjene na svim stranama; (b) slobodno oslonjene na dvije suprotne strane; (c) upete na dvije suprotne strane; (d) upete na svim stranama

**Tablica 2.5.** Usporedba rješenja statičkog progiba metodom konačnih traka i konačnih trakastih ljuski

KONAČNA TRAKA I RAVNA KONAČNA TRAKASTA LJUSKA					
$P = 1$ [kN]	$b/l$	točno rješenje [m]	$w_{l/2}$ za konačnu traku [m]	$w_{l/2}$ za konačnu trakastu ljusku [m]	$\left  \frac{w_{l/2, nS=20} - w_{l/2, nS=1}}{w_{l/2, nS=20}} \right  \cdot 100$ [%]
	0,25	$2,667 \cdot 10^{-5}$	$2,672 \cdot 10^{-5}$	$2,665 \cdot 10^{-5}$	0,1
	0,40	$1,852 \cdot 10^{-5}$	$1,683 \cdot 10^{-5}$	$1,676 \cdot 10^{-5}$	0,5
<b>PLOČA</b>	0,50	$1,481 \cdot 10^{-5}$	$1,359 \cdot 10^{-5}$	$1,353 \cdot 10^{-5}$	1,5
	0,60	$1,235 \cdot 10^{-5}$	$1,148 \cdot 10^{-5}$	$1,142 \cdot 10^{-5}$	2,8
	1	$8,642 \cdot 10^{-6}$	$7,554 \cdot 10^{-6}$	$7,496 \cdot 10^{-6}$	12,4

$nS$  – broj konačnih traka

$r$  – broj članova razvoja u red

U Tablici 2.6. dana je usporedba statičkih progiba ploče slobodno oslonjene na dvije strane, za različit broj traka i različit broj članova reda interpolacijske funkcije. Kao točno rješenje je ovdje uzeto ono za 20 konačnih traka i 50 članova reda.

**Tablica 2.6.** *Usporedba utjecaja broja konačnih traka i broja članova reda na vrijednosti statičkog progiba*

RAVNA KONAČNA TRAKA							
<b>P = 1</b>	<b>b/l</b>	<b>nS = 1</b>	<b>nS = 1</b>	<b>nS = 1</b>	<b>nS = 20</b>	<b>nS = 20</b>	<b>nS = 20</b>
[kN]		<b>r = 1</b>	<b>r = 10</b>	<b>r = 50</b>	<b>r = 1</b>	<b>r = 10</b>	<b>r = 50</b>
<b>PLOČA</b>	0,25	$2,63 \cdot 10^{-5}$	$2,67 \cdot 10^{-5}$	$2,67 \cdot 10^{-5}$	$2,631 \cdot 10^{-5}$	$2,672 \cdot 10^{-5}$	$2,674 \cdot 10^{-5}$
	0,50	$1,324 \cdot 10^{-5}$	$1,347 \cdot 10^{-5}$	$1,347 \cdot 10^{-5}$	$1,332 \cdot 10^{-5}$	$1,359 \cdot 10^{-5}$	$1,361 \cdot 10^{-5}$
	1	$6,97 \cdot 10^{-6}$	$7,119 \cdot 10^{-6}$	$7,122 \cdot 10^{-6}$	$7,323 \cdot 10^{-6}$	$7,578 \cdot 10^{-6}$	$7,59 \cdot 10^{-6}$
RAVNA KONAČNA TRAKASTA LJUSKA							
<b>P = 1</b>	<b>b/l</b>	<b>nS = 1</b>	<b>nS = 1</b>	<b>nS = 1</b>	<b>nS = 20</b>	<b>nS = 20</b>	<b>nS = 20</b>
kN		<b>r = 1</b>	<b>r = 10</b>	<b>r = 50</b>	<b>r = 1</b>	<b>r = 10</b>	<b>r = 50</b>
<b>PLOČA</b>	0,25	$2,625 \cdot 10^{-5}$	$2,66 \cdot 10^{-5}$	$2,66 \cdot 10^{-5}$	$2,631 \cdot 10^{-5}$	$2,672 \cdot 10^{-5}$	$2,674 \cdot 10^{-5}$
	0,50	$1,294 \cdot 10^{-5}$	$1,306 \cdot 10^{-5}$	$1,306 \cdot 10^{-5}$	$1,332 \cdot 10^{-5}$	$1,359 \cdot 10^{-5}$	$1,361 \cdot 10^{-5}$
	1	$5,771 \cdot 10^{-6}$	$5,758 \cdot 10^{-6}$	$5,757 \cdot 10^{-6}$	$7,323 \cdot 10^{-6}$	$7,578 \cdot 10^{-6}$	$7,59 \cdot 10^{-6}$

nS – broj konačnih traka

r – broj članova razvoja u red

Može se zaključiti da klasična konačna traka daje točnija rješenja i sa manjim brojem elemenata nego konačna trakasta ljuska. Konačna trakasta ljuska zahtijeva veliki broj elemenata i veliki broj članova reda interpolacijske funkcije za dobivanje točnog rješenja.

### **3. DINAMIČKA ANALIZA**

#### **3.1 Izvod matrice krutosti i matrice masa za različite uvjete oslanjanja**

##### **3.1.1 Općenito**

Kod klasične formulacije konačnih traka interpolacijska funkcija u poprečnom smjeru je polinom višeg reda. Ovakva vrsta interpolacijske funkcije zadovoljava kod konstrukcija koje imaju malu širinu u odnosu na dužinu, odnosno kod grednih nosača u statičkoj i dinamičkoj analizi, te plošnih nosača u statičkoj analizi. Ukoliko krenemo u dinamičku analizu plošnih nosača, uočiti ćemo da se s polinomima ne može opisati ponašanje plošnih nosača. To se posebno ističe kod dobivanja asimetričnih tonova na ploči. Naime, polinomne interpolacijske funkcije imaju takva svojstva da ne mogu dati asimetrične oblike osciliranja kod ploče, već samo simetrične. Vlastite vrijednosti koje se dobiju za plošnu konstrukciju odgovaraju onima za ekvivalentnu grednu konstrukciju. Zbog toga je za interpolacijsku funkciju u poprečnom smjeru potrebno uzeti također neku od trigonometrijskih funkcija ili njihovu kombinaciju, kao što se čini u uzdužnom smjeru. Na sličan način je formulirana metoda konačnih slojevitih traka koja se primjenjuje u trodimenzionalnoj analizi, da bi se reducirala na jednodimenzionalnu.

Naime, ideja je primijeniti interpolacijske funkcije za konačne trake u uzdužnom smjeru i na poprečni smjer. Matrica krutosti i masa se tada izvodi slično kao kod metode slojevitih konačnih traka, s tom razlikom što se vrši integracija po površini konačne trake, a ne po volumenu. Odnosno, pretpostavlja se da su pomaci i rezne sile konstantne u smjeru okomitom na površinu konačne trake. Ovdje je po prvi put izvedena takva kombinacija elemenata konačne trake i slojevite konačne trake.

### 3.1.2 Ploča slobodno oslonjena na dvije suprotne strane

Interpolacijske funkcije glase (Cheung i Tham 1998):

$$\beta_m = \frac{m\pi}{l}, \quad m = 1, 2 \dots r \quad (3.1)$$

$$n = 1, 2 \quad (3.2)$$

$$X_1(x) = 1 \quad (3.3)$$

$$X_2(x) = 1 - 2\frac{x}{b} \quad (3.4)$$

$$\alpha_n = \frac{2n-3}{2}\pi, \quad n = 3, 4 \dots r \quad (3.5)$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right) - \eta_n \left[ \cos\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right) + \cosh\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right) \right] \quad (3.6)$$

$$\eta_n = \frac{\sin\alpha_n - \sinh\alpha_n}{\cos\alpha_n - \cosh\alpha_n} \quad (3.7)$$

$$[N]_{mn} = X_n(x)Y_m(y) \quad (3.8)$$

#### 3.1.2.1 Matrica deformacija

$$[B]_{m1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\beta_m^2 \sin(\beta_m y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$[B]_{m2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\left(1 - 2\frac{x}{b}\right)\beta_m^2 \sin(\beta_m y) \\ -2\frac{x}{b}\beta_m \cos(\beta_m y) \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

#### 3.1.2.2 Matrica krutosti

$$[K]_{mn} = \int_0^b \int_0^l [B]_m^T [D] [B]_n dx dy \quad (3.11)$$

$$[K]_{m1} = D_x \frac{bl}{2} \beta_m^4 \quad (3.12)$$



$$[K]_{m2} = D_x \frac{bl}{6} \beta_m^4 + D_{xy} \frac{2l}{b} \beta_m^2 \quad (3.13)$$

$$[K]_{mn} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4, \quad m = 3, 4 \dots r$$

$$K_1 = D_x \frac{l}{4} \left( 2(\alpha_n^4 - \beta_m^4) \left( (1 - \eta_n^2) \sinh(2\alpha_n b) \cos(\alpha_n b) \right. \right. \\ \left. \left. - (1 + \eta_n^2) \sin(\alpha_n b) \cosh(\alpha_n b) + 2 \sin(\alpha_n b) \sinh(\alpha_n b) \right) \right) \quad (3.14)$$

$$K_2 = D_x \frac{l}{4} \left( 2(\alpha_n^4 - \beta_m^4) \left( \frac{1}{2} (1 + \eta_n^2) \sinh(2\alpha_n b) - \frac{1}{2} (1 - \eta_n^2) \sin(2\alpha_n b) \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cos(2\alpha_n b) - \eta_n \cosh(2\alpha_n b) + 2\eta_n^2(\alpha_n b) \right) \right) \quad (3.15)$$

$$K_3 = -D_1 \frac{l}{4} \alpha_n \beta_m^2 \left( 4\eta_n - 4(\alpha_n b) + (1 - \eta_n^2) \sin(2\alpha_n b) \right. \\ \left. + (1 + \eta_n^2) \sinh(2\alpha_n b) - 2\eta_n \cosh(2\alpha_n b) \right) \quad (3.16)$$

$$K_4 = D_{xy} l \alpha_n \beta_m^2 \left( 6\eta_n + 2(\alpha_n b) + \sin(2\alpha_n b) - \eta_n \cos(2\alpha_n b) + \right. \\ \left. + \cosh(2\alpha_n b) + (2 - \eta_n^2) \sin(\alpha_n b) \cosh(2\alpha_n b) \right. \\ \left. + (2 + \eta_n^2) \sinh(\alpha_n b) \cos(2\alpha_n b) \right) \quad (3.17)$$

### 3.1.2.3 Matrica masa

$$[M]_{mn} = \rho t \int_0^b \int_0^l [N]_{mn}^T [N]_{mn} dx dy \quad (3.18)$$

$$[M]_{m1} = \rho t \frac{bl}{2} \quad (3.19)$$

$$[M]_{m2} = \rho t \frac{bl}{6} \quad (3.20)$$

$$[M]_{mn} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4, \quad n = 3, 4 \dots r \quad (3.21)$$

$$M_1 = \eta_n^2 \left( b + \frac{1}{2\alpha_n} \cosh(\alpha_n b) \sinh(\alpha_n b) \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha_n} \left( \cosh(\alpha_n b) \sin(\alpha_n b) + \cos(\alpha_n b) \sinh(\alpha_n b) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{4\alpha_n} \sin(2\alpha_n b) \right) \quad (3.22)$$

$$M_2 = -\frac{\eta_n}{\alpha_n} (2\sin^2(\alpha_n b) + 2\sinh(\alpha_n b)\sin(\alpha_n b) + \cosh(\alpha_n b)\sin(\alpha_n b) + \sinh(\alpha_n b)\cos(\alpha_n b)) \quad (3.23)$$

$$M_3 = \frac{1}{\alpha_n} \left( \cosh(\alpha_n b)\sinh(\alpha_n b) - \frac{1}{4}\sin(2\alpha_n b) - \frac{b}{2} \right) + \frac{b}{2} \quad (3.24)$$

### 3.1.3 Ploča slobodno oslonjena na svim stranama

Interpolacijske funkcije glase (Cheung i Tham 1998):

$$X_n(x) = \sin(\alpha_n x) \quad (3.25)$$

$$Y_m(y) = \sin(\beta_m y) \quad (3.26)$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{b}, \beta_m = \frac{m\pi}{l} \quad (3.27)$$

$$[N]_{mn} = X_n(x)Y_m(y) \quad (3.28)$$

#### 3.1.3.1 Matrica deformacija

$$[B]_{mn} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 [N]_{mn}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 [N]_{mn}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 [N]_{mn}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha_n^2 X_n(x)Y_m(y) \\ -\beta_m^2 X_n(x)Y_m(y) \\ 2\alpha_n\beta_m X_n'(x)Y_m'(y) \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

$$[B]_{mn} = \begin{Bmatrix} -\alpha_n^2 \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \\ -\beta_m^2 \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \\ 2\alpha_n\beta_m \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

#### 3.1.3.2 Matrica krutosti

Matrica krutosti se može izvesti množenjem matrice deformacija  $[B]_{mn}$  i elastične matrice  $[D]$  i integriranjem po površini ploče:

$$[K]_{mn} = \int_0^b \int_0^l [B]_m^T [D] [B]_n dx dy \quad (3.31)$$

$$[K]_{mn} = \frac{bl}{4} [D_x(\alpha_n^2 + \beta_m^2) + D_1 2\alpha_n^2 \beta_m^2 + D_{xy} 4\alpha_n^2 \beta_m^2] \quad (3.32)$$

gdje su  $b$  i  $l$  dimenzije konačne trake, a  $D_x$ ,  $D_{xy}$  i  $D_l$  članove elastične matrice (Cheung i Chidiac 1996). Matrica krutosti je funkcija broja članova reda  $m$  i  $n$  i dimenzija je  $m \times n$ .

### 3.1.3.3 Matrica masa

Kontinuirana matrica  $[M]_{mn}$  masa se može izvesti množenjem interpolacijskih funkcija u oba smjera i integriranjem po površini ploče:

$$[M]_{mn} = \rho t \int_0^b \int_0^l [N]_{mn}^T [N]_{mn} dx dy \quad (3.33)$$

$$[M]_{mn} = \rho t \int_0^b \int_0^l X_n(x)^2 X_m(y)^2 dx dy = \rho t \int_0^b \int_0^l \sin^2(\alpha_n x) \sin^2(\beta_m y) dx dy \quad (3.34)$$

$$[M]_{mn} = \rho t \frac{bl}{4} \quad (3.35)$$

što odgovara vrijednosti za jednu zamjenjujuću koncentriranu masu na sredini raspona ploče.  $\rho$  je gustoća materijala,  $b$ ,  $l$  i  $t$  su širina, dužina i debljina konačne trake respektivno.  $X_n(x)$  i  $X_m(y)$  predstavljaju interpolacijske funkcije u poprečnom i uzdužnom smjeru,  $n$  je broj članova reda za poprečni smjer, a  $m$  za uzdužni smjer.

### 3.1.4 Ploča ukliještena na dvije suprotne strane

Interpolacijske funkcije glase (Cheung i Tham 1998):

$$\beta_m = \frac{2m+1}{2l} \pi, \quad m = 1, 2 \dots r \quad (3.36)$$

$$Y_m(y) = \sin(\beta_m y) - \sinh(\beta_m y) - \alpha_m [\cos(\beta_m y) - \cosh(\beta_m y)] \quad (3.37)$$

$$\eta_m = \frac{\sin(\beta_m l) - \sinh(\beta_m l)}{\cos(\beta_m l) - \cosh(\beta_m l)} \quad (3.38)$$

$$n = 1, 2 \quad (3.39)$$

$$X_1(x) = 1 \quad (3.40)$$

$$X_2(x) = 1 - 2 \frac{x}{b} \quad (3.41)$$

$$\alpha_n = \frac{2n-3}{2b} \pi, \quad n = 3, 4 \dots r \quad (3.42)$$

$$X_n(x) = \sin(\alpha_n x) + \sinh(\alpha_n x) - \eta_n [\cos(\alpha_n x) + \cosh(\alpha_n x)] \quad (3.43)$$

$$\eta_n = \frac{\sin(\alpha_n b) - \sinh(\alpha_n b)}{\cos(\alpha_n b) - \cosh(\alpha_n b)} \quad (3.44)$$

$$[N]_{mn} = X_n(x) Y_m(y) \quad (3.45)$$

#### 3.1.4.1 Matrica krutosti

$$[K]_{mn} = K_x + K_y + K_1 + K_{xyy} + K_{xyx}, \quad m = 3, 4 \dots r \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} K_x = D_x \alpha_n^4 & \left( b \eta_n^2 + \frac{1}{\alpha_n} \left( \frac{1}{2} + \eta_n^2 \right) \cosh(\alpha_n b) \sinh(\alpha_n b) \right. \\ & - \frac{1}{\alpha_n} (1 + \eta_n^2) \cosh(\alpha_n b) \sin(\alpha_n b) \\ & - \frac{1}{\alpha_n} (1 + \eta_n^2) \cos(\alpha_n b) \sinh(\alpha_n b) + \frac{2}{\alpha_n} \eta_n \sinh(\alpha_n b) \sin(\alpha_n b) \\ & \left. - \frac{1}{\alpha_n} \eta_n \sinh^2(\alpha_n b) - \frac{1}{\alpha_n} \eta_n \sin^2(\alpha_n b) - \frac{1}{4\alpha_n} \sin(2\alpha_n b) \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}
K_y = D_x \beta_m^4 & \left( l \eta_m^2 + \frac{1}{\beta_m} \left( \frac{1}{2} + \eta_m^2 \right) \cosh(\beta_m l) \sinh(\beta_m l) \right. \\
& + \frac{1}{\beta_m} (1 + \eta_m^2) \cosh(\beta_m l) \sin(\beta_m l) \\
& + \frac{1}{\beta_m} (\eta_m^2 - 1) \sinh(\beta_m l) \cos(\beta_m l) - \frac{2}{\beta_m} \eta_m \sinh(\beta_m l) \sin(\beta_m l) \\
& \left. - \frac{1}{\beta_m} \eta_m \sinh^2(\beta_m l) - \frac{1}{\beta_m} \eta_m \sin^2(\beta_m l) - \frac{1}{4\beta_m} \sin(2\beta_m l) \right) \quad (3.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1 = D_1 & \left[ \beta_m \left( 2 \sinh^2 \left( \beta_m \frac{l}{2} \right) + 2 \sin^2 \left( \beta_m \frac{l}{2} \right) - \eta_m (\sinh(\beta_m l) + \sin(\beta_m l)) \right) \right. \\
& + \alpha_n \left( 2 \sinh^2 \left( \alpha_n \frac{b}{2} \right) + 2 \sin^2 \left( \alpha_n \frac{b}{2} \right) \right. \\
& \left. \left. - \eta_m (\sinh(\alpha_n b) - \sin(\alpha_n b)) \right) \right] \quad (3.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{xyy} = D_{xy} 2\beta_m^2 & \left( \frac{1}{2\beta_m} (\eta_m^2 + 1) \cosh(\beta_m l) \sinh(\beta_m l) \right. \\
& + \frac{1}{\beta_m} (\eta_m^2 - 1) \cosh(\beta_m l) \sin(\beta_m l) \\
& - \frac{1}{\beta_m} (1 + \eta_m^2) \sinh(\beta_m l) \cos(\beta_m l) - \frac{2}{\beta_m} \eta_m \cosh(\beta_m l) \cos(\beta_m l) \\
& - \frac{1}{4\beta_m} (1 - \eta_m^2) \sin(2\beta_m l) - \frac{1}{\beta_m} \eta_m \sinh^2(\beta_m l) \\
& \left. + \frac{1}{\beta_m} \eta_m \sin^2(\beta_m l) - \frac{1}{\beta_m} \eta_m + l \right) \quad (3.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{xyx} = D_{xy} 2\alpha_n^2 & \left( \frac{1}{2\alpha_n} (\eta_n^2 + 1) \cosh(\alpha_n b) \sinh(\alpha_n b) \right. \\
& + \frac{1}{\alpha_n} (1 - \eta_n^2) \cosh(\alpha_n b) \sin(\alpha_n b) \\
& + \frac{1}{\alpha_n} (1 + \eta_n^2) \cos(\alpha_n b) \sinh(\alpha_n b) - \frac{2}{\alpha_n} \eta_n \cosh(\alpha_n b) \cos(\alpha_n b) \\
& + \frac{1}{4\alpha_n} (1 - \eta_n^2) \sin(2\alpha_n b) - \frac{1}{\alpha_n} \eta_n \sinh^2(\alpha_n b) \\
& \left. + \frac{1}{\alpha_n} \eta_n \sin^2(\alpha_n b) + \frac{2}{\alpha_n} \eta_n + b \right) \quad (3.51)
\end{aligned}$$

### 3.1.5 Ploča ukliještena na svim stranama

Interpolacijske funkcije glase (Cheung i Tham 1998):

$$\beta_m = \frac{2m + 1}{2l} \pi, \quad m = 1, 2 \dots r \quad (3.52)$$

$$Y_m(y) = \sin(\beta_m y) - \sinh(\beta_m y) - \alpha_m [\cos(\beta_m y) - \cosh(\beta_m y)] \quad (3.53)$$

$$\eta_m = \frac{\sin(\beta_m l) - \sinh(\beta_m l)}{\cos(\beta_m l) - \cosh(\beta_m l)} \quad (3.54)$$

$$n = 1, 2 \quad (3.55)$$

$$X_1(x) = 1 \quad (3.56)$$

$$X_2(x) = 1 - 2 \frac{x}{b} \quad (3.57)$$

$$\alpha_n = \frac{2n - 3}{2b} \pi, \quad n = 3, 4 \dots r \quad (3.58)$$

$$X_n(x) = \sin(\alpha_n x) - \sinh(\alpha_n x) - \eta_n [\cos(\alpha_n x) - \cosh(\alpha_n x)] \quad (3.59)$$

$$\eta_n = \frac{\sin(\alpha_n b) - \sinh(\alpha_n b)}{\cos(\alpha_n b) - \cosh(\alpha_n b)} \quad (3.60)$$

$$[N]_{mn} = X_n(x) Y_m(y) \quad (3.61)$$

#### 3.1.5.1 Matrica krutosti

$$[K]_{mn} = K_x + K_y + K_1 + K_{xyy} + K_{xyx}, \quad m = 3, 4 \dots r \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} K_x = D_x \alpha_n^4 & \left( b \eta_n^2 + \frac{1}{\alpha_n} \left( \frac{1}{2} + \eta_n^2 \right) \cosh(\alpha_n b) \sinh(\alpha_n b) \right. \\ & + \frac{1}{\alpha_n} (1 + \eta_n^2) \cosh(\alpha_n b) \sin(\alpha_n b) \\ & + \frac{1}{\alpha_n} (\eta_n^2 - 1) \cos(\alpha_n b) \sinh(\alpha_n b) - \frac{2}{\alpha_n} \eta_n \sinh(\alpha_n b) \sin(\alpha_n b) \\ & \left. - \frac{1}{\alpha_n} \eta_n \sinh^2(\alpha_n b) - \frac{1}{\alpha_n} \eta_n \sin^2(\alpha_n b) - \frac{1}{4\alpha_n} \sin(2\alpha_n b) \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
K_y = D_x \beta_m^4 & \left( l \eta_m^2 + \frac{1}{\beta_m} \left( \frac{1}{2} + \eta_m^2 \right) \cosh(\beta_m l) \sinh(\beta_m l) \right. \\
& + \frac{1}{\beta_m} (1 + \eta_m^2) \cosh(\beta_m l) \sin(\beta_m l) \\
& + \frac{1}{\beta_m} (\eta_m^2 - 1) \sinh(\beta_m l) \cos(\beta_m l) - \frac{2}{\beta_m} \eta_m \sinh(\beta_m l) \sin(\beta_m l) \\
& \left. - \frac{1}{\beta_m} \eta_m \sinh^2(\beta_m l) - \frac{1}{\beta_m} \eta_m \sin^2(\beta_m l) - \frac{1}{4\beta_m} \sin(2\beta_m l) \right) \quad (3.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1 = D_1 & \left[ \beta_m \left( 2 \sinh^2 \left( \beta_m \frac{l}{2} \right) + 2 \sin^2 \left( \beta_m \frac{l}{2} \right) - \eta_m (\sinh(\beta_m l) + \sin(\beta_m l)) \right) \right. \\
& + \alpha_n \left( 2 \sinh^2 \left( \alpha_n \frac{b}{2} \right) + 2 \sin^2 \left( \alpha_n \frac{b}{2} \right) \right. \\
& \left. \left. - \eta_m (\sinh(\alpha_n b) + \sin(\alpha_n b)) \right) \right] \quad (3.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{xyy} = D_{xy} 2\beta_m^2 & \left( \frac{1}{2\beta_m} (\eta_m^2 + 1) \cosh(\beta_m l) \sinh(\beta_m l) \right. \\
& - \frac{1}{\beta_m} (\eta_m^2 - 1) \cosh(\beta_m l) \sin(\beta_m l) \\
& - \frac{1}{\beta_m} (1 + \eta_m^2) \sinh(\beta_m l) \cos(\beta_m l) - \frac{2}{\beta_m} \eta_m \cosh(\beta_m l) \cos(\beta_m l) \quad (3.66) \\
& - \frac{1}{4\beta_m} (1 - \eta_m^2) \sin(2\beta_m l) - \frac{1}{\beta_m} \eta_m \sinh^2(\beta_m l) \\
& \left. + \frac{1}{\beta_m} \eta_m \sin^2(\beta_m l) - \frac{1}{\beta_m} \eta_m + l \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{xyx} = D_{xy} 2\alpha_n^2 & \left( \frac{1}{2\alpha_n} (\eta_n^2 + 1) \cosh(\alpha_n b) \sinh(\alpha_n b) \right. \\
& + \frac{1}{\alpha_n} (1 - \eta_n^2) \cosh(\alpha_n b) \sin(\alpha_n b) \\
& - \frac{1}{\alpha_n} (1 + \eta_n^2) \cos(\alpha_n b) \sinh(\alpha_n b) - \frac{2}{\alpha_n} \eta_n \cosh(\alpha_n b) \cos(\alpha_n b) \quad (3.67) \\
& - \frac{1}{4\alpha_n} (1 - \eta_n^2) \sin(2\alpha_n b) - \frac{1}{\alpha_n} \eta_n \sinh^2(\alpha_n b) \\
& \left. + \frac{1}{\alpha_n} \eta_n \sin^2(\alpha_n b) - \frac{2}{\alpha_n} \eta_n + b \right)
\end{aligned}$$



## 3.2 Parametarska analiza utjecaja broja konačnih traka i članova razvoja u red na točnost izračuna vlastitih vrijednosti

U Tablicama 3.1.-3.4. dana je usporedba vlastitih vrijednosti ploče za različite uvjete oslanjanja dobivene analitički (Leissa 1973) s vrijednostima dobivenim numerički za različit broj konačnih traka i različitih broja članova reda korištenog za interpolacijsku funkciju.

Na Slikama 3.1., 3.3.-3.5. prikazane su grafički uzdužne vibracije ploče za različite uvjete oslanjanja, dok su na Slici 3.2. prikazane i poprečne vibracije ploče za prva tri tona.

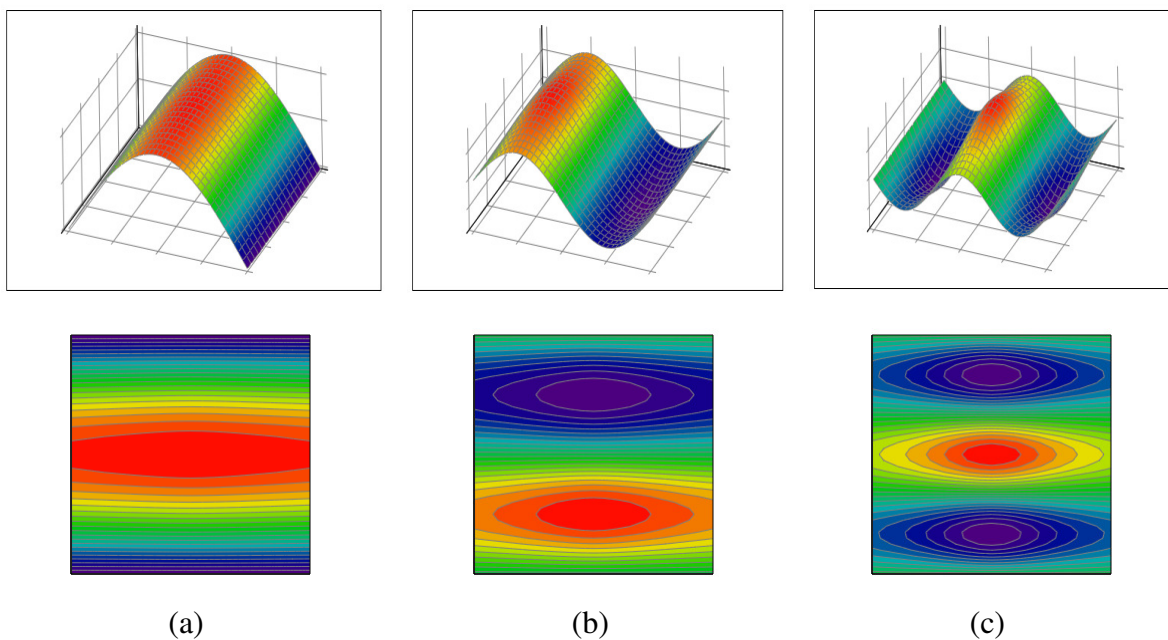
### 3.2.1. Ploča slobodno oslonjena na dvije suprotne strane

**Tablica 3.1.** Utjecaj broja konačnih trakastih ljuski na točnost vlastitih vrijednosti za ploču slobodno oslonjenu na dvije suprotne strane

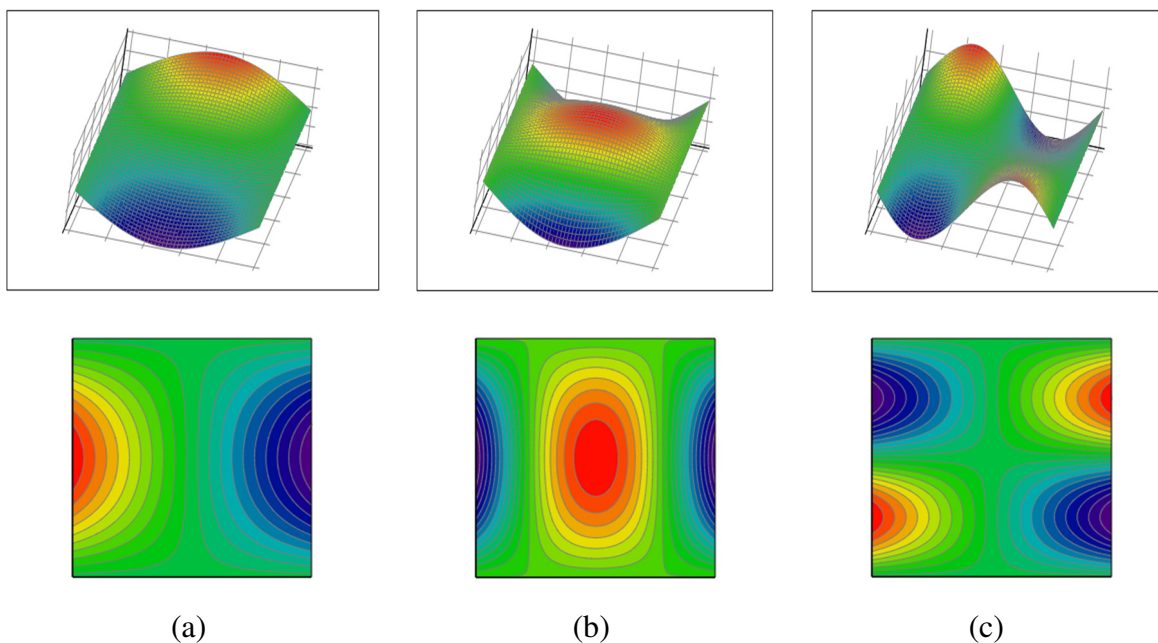
KONAČNA TRAKASTA LJUSKA			
Ploča slobodno oslonjena na dvije suprotne strane			
analitički $\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{Eh^3}{12\rho h}}$	numerički		
	broj traka nS = 1, r = 1	broj traka nS = 1, r = 20	broj traka nS = 20, r = 20
19,739	17,619	17,619	19,726
78,957	70,477	70,477	78,906
177,653	158,574	158,574	177,538
315,827	281,91	281,91	315,622
493,48	440,484	440,484	493,16

nS – broj konačnih traka

r – broj članova razvoja u red



**Slika 3.1.** Slobodne vibracije ploče slobodno oslonjene na dvije suprotne strane: (a) prvi ton; (b) drugi ton; (c) treći ton



**Slika 3.2.** Slobodne vibracije ploče slobodno oslonjene na dvije suprotne strane: (a)  $m = 1, n = 2$ ; (b)  $m = 1, n = 3$ ; (c)  $m = 2, n = 2$

Iz podataka navedenih u Tablicama 3.1.-3.4. može se zaključiti da kod plošnih nosača veći utjecaj na točnost rezultata ima broj konačnih trakastih elemenata, nego broj članova reda interpolacijske funkcije.

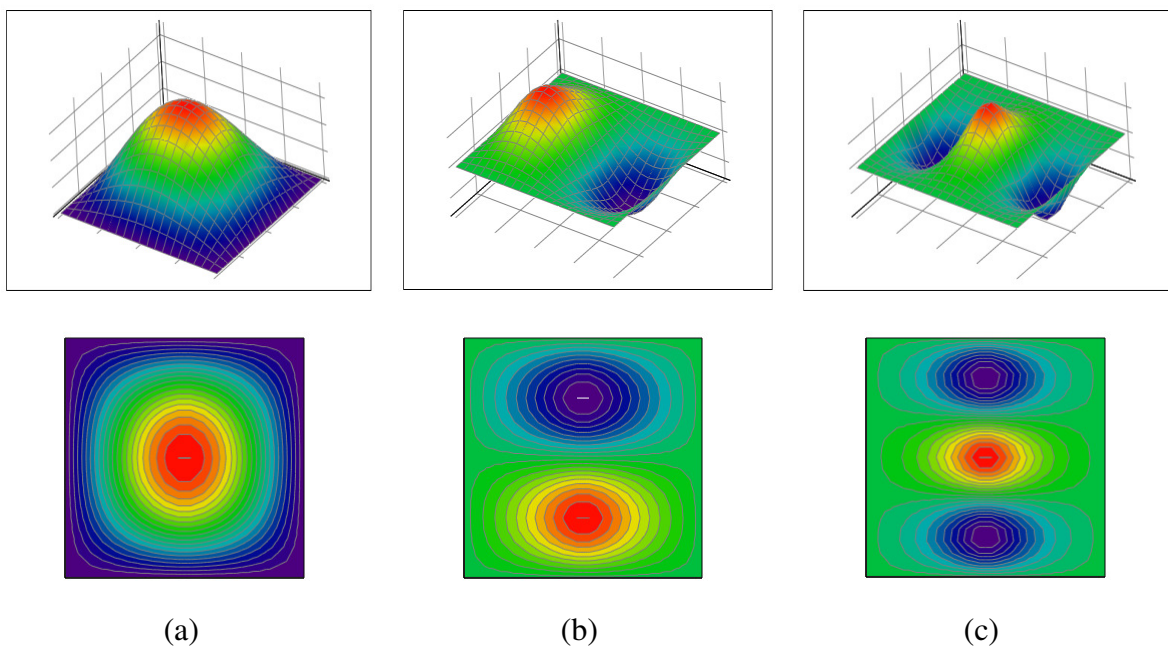
### 3.2.2. Ploča slobodno oslonjena na svim stranama

**Tablica 3.2.** Utjecaj broja konačnih trakastih ljuski na točnost vlastitih vrijednosti za ploču slobodno oslonjenu na svim stranama

KONAČNA TRAKASTA LJUSKA			
Ploča slobodno oslonjena na svim stranama			
analitički $\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{Eh^3}{12\rho h}}$	numerički		
	broj traka nS = 1, r = 1	broj traka nS = 1, r = 20	broj traka nS = 20, r = 20
19,739	16,663	16,663	19,689
78,957	66,654	66,654	78,754
177,653	149,971	149,971	177,197
315,827	266,616	266,616	315,016
493,48	416,587	416,587	492,213

nS – broj konačnih traka

r – broj članova razvoja u red



**Slika 3.3.** Slobodne vibracije ploče slobodno oslonjene na svim stranama: (a) prvi ton; (b) drugi ton; (c) treći ton

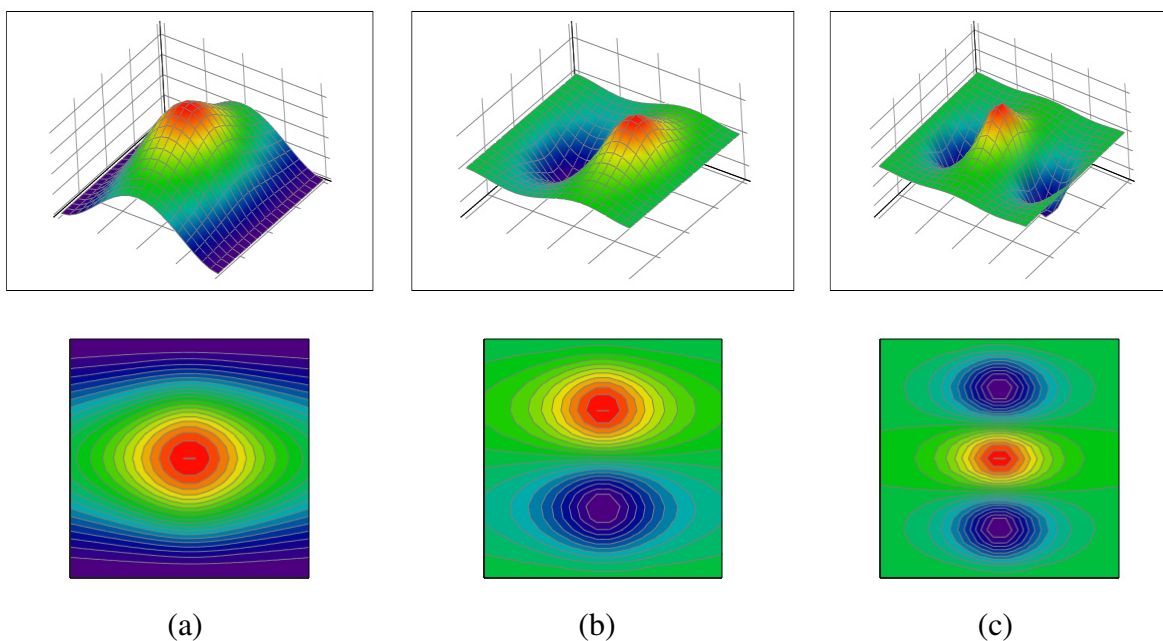
### 3.2.3. Ploča ukliještena na dvije suprotne strane

**Tablica 3.3.** Utjecaj broja konačnih trakastih ljuski na točnost vlastitih vrijednosti za ploču ukliještenu na dvije suprotne strane

KONAČNA TRAKASTA LJUSKA			
Ploča ukliještena na dvije suprotne strane			
analitički $\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 \sqrt{\frac{Eh^3}{12\rho h}}$	numerički		
	broj traka nS = 1, r = 1	broj traka nS = 1, r = 20	broj traka nS = 20, r = 20
44,413	37,493	37,493	44,299
123,37	104,147	104,147	123,053
241,805	204,128	204,128	241,184
399,719	337,436	337,436	398,693
597,111	504,071	504,071	595,578

nS – broj konačnih traka

r – broj članova razvoja u red



**Slika 3.4.** Slobodne vibracije ploče ukliještene na dvije suprotne strane: (a) prvi ton; (b) drugi ton; (c) treći ton

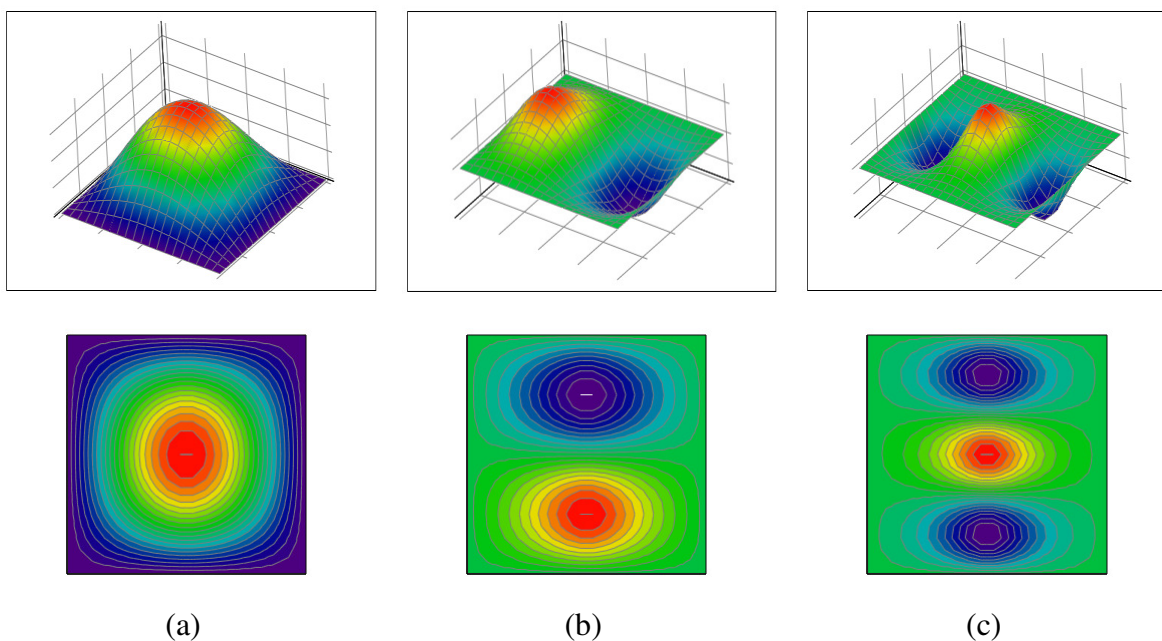
### 3.2.4. Ploča ukliještena na svim stranama

**Tablica 3.4.** Utjecaj broja konačnih trakastih ljuski na točnost vlastitih vrijednosti za ploču ukliještenu na svim stranama

KONAČNA TRAKASTA LJUSKA			
Ploča ukliještena na svim stranama			
analitički $\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{Eh^3}{12\rho h}}$	numerički		
	broj traka nS = 1, r = 1	broj traka nS = 1, r = 20	broj traka nS = 20, r = 20
19,739	17,619	17,619	19,726
78,957	70,477	70,477	78,906
177,653	158,574	158,574	177,538
315,827	281,91	281,91	315,622
493,48	440,484	440,484	493,16

nS – broj konačnih traka

r – broj članova razvoja u red



**Slika 3.5.** Slobodne vibracije ploče ukliještene na svim stranama: (a) prvi ton; (b) drugi ton; (c) treći ton

### 3.3 Dinamička analiza plošnog nosača opterećenog pokretnom silom konstantnog intenziteta

#### 3.3.1. Analitičko rješenje

Diferencijalna jednadžba ploče glasi (Brčić 1978):

$$D\Delta\Delta w + \rho t \ddot{w} = q(x, y, t) \quad (3.68)$$

Ili:

$$\rho t \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] = q(x, y, t) \quad (3.69)$$

gdje je  $\rho$  gustoća materijala,  $t$  je debljina ploče,  $D = \frac{Et^3}{12(1+\nu^2)}$ ,  $w(x, y, t)$  funkcija pomaka ploče,  $q(x, y, t)$  funkcija opterećenja. Početni i rubni uvjeti glase:

$$w(x, y, 0) = f(x, y) = 0 \quad (3.70)$$

$$\dot{w}(x, y, 0) = g(x, y) = 0 \quad (3.71)$$

Nakon primjene Laplaceove transformacije dobije se:

$$D\Delta\Delta \bar{w}(x, y, s) + \rho t s^2 \bar{w}(x, y, s) = \bar{q}(x, y, s) \quad (3.72)$$

gdje je prema definiciji Laplaceove transformacije funkcije iz  $t$  domene u  $s$  domenu:

$$\bar{w}(x, y, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} w(x, y, t) dt \quad (3.73)$$

$$\bar{q}(x, y, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} q(x, y, t) dt \quad (3.74)$$

Funkcije  $\bar{w}$  i  $\bar{q}$  razvijaju se u redove po funkcijama oblika  $W_{nm}(x,y)$  koje zadovoljavaju jednadžbu:

$$\Delta\Delta W_{nm} - \lambda_{nm}^4 W_{nm} = 0 \quad (3.75)$$

$$\lambda_{nm}^4 = \frac{\omega^2}{c^2}, c^2 = \frac{D}{\rho t} \quad (3.76)$$

$$\bar{w}(x, y, p) = \sum_{n,m} A_{nm}(p) W_{nm}(x, y) \quad (3.77)$$

$$\bar{q}(x, y, p) = \sum_{n,m} q_{nm}(p) W_{nm}(x, y) \quad (3.78)$$

Koeficijenti redova  $A_{nm}(p)$  i  $q_{nm}(p)$  izražavaju se pomoću integrala:

$$A_{nm}(p) = \int_0^a \int_0^b \bar{w}(x, y, p) W_{nm}(x, y) dx dy \quad (3.79)$$

$$q_{nm}(p) = \int_0^a \int_0^b \bar{q}(x, y, p) W_{nm}(x, y) dx dy \quad (3.80)$$

Jednadžba (3.72) množi se sa  $W_{nm}(x,y)$  i integrira po površini ploče:

$$DW_{nm}(x, y)\Delta\Delta\bar{w}(x, y, s) + \rho t s^2 W_{nm}(x, y)\bar{w}(x, y, s) = W_{nm}(x, y)\bar{q}(x, y, s) \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} D \int_0^b \int_0^l W_{nm}(x, y)\Delta\Delta\bar{w}(x, y, s) dx dy + \rho t s^2 \int_0^b \int_0^l W_{nm}(x, y)\bar{w}(x, y, s) dx dy \\ = \int_0^b \int_0^l W_{nm}(x, y)\bar{q}(x, y, s) dx dy \end{aligned} \quad (3.82)$$

Prema (3.77), (3.78), (3.79) i (3.80), jednadžba (3.82) postaje:

$$DW_{nm}(x, y)\Delta\Delta\bar{w}(x, y, s) + \rho t s^2 W_{nm}(x, y)\bar{w}(x, y, s) = W_{nm}(x, y)\bar{q}(x, y, s) \quad (3.83)$$

$$D \int_0^b \int_0^l W_{nm}(x, y) \Delta \Delta A_{nm}(p) W_{nm}(x, y) dx dy + \rho t s^2 A_{nm} = q_{nm} \quad (3.84)$$

$$D \int_0^b \int_0^l W_{nm}(x, y) A_{nm}(p) \overbrace{\Delta \Delta W_{nm}(x, y)}^{(3)} dx dy + \rho t s^2 A_{nm} = q_{nm} \quad (3.85)$$

Prema (3.75):

$$D \int_0^b \int_0^l \underbrace{A_{nm}(p) W_{nm}(x, y)}_{(4)} \lambda_{nm}^2 W_{nm}(x, y) dx dy + \rho t s^2 A_{nm} = q_{nm} \quad (3.86)$$

Prema (3.77):

$$D \lambda_{nm}^4 \overbrace{\int_0^b \int_0^l \bar{w}(x, y, p) W_{nm}(x, y) dx dy}^{(6)} + \rho t s^2 A_{nm} = q_{nm} \quad (3.87)$$

Prema (3.79):

$$D \lambda_{nm}^4 A_{nm} + \rho t s^2 A_{nm} = q_{nm} \Rightarrow A_{nm} = \frac{q_{nm}}{D \lambda_{nm}^4 + \rho t s^2} \quad (3.88)$$

$$\lambda_{nm}^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho t \omega^2}{D} \quad (3.89)$$

$$A_{nm} = \frac{q_{nm}}{\rho t (\omega^2 + s^2)} \quad (3.90)$$

Nakon uvrštavanja u (3.77) dobije se:

$$\bar{w}(x, y, p) = \sum_{nm} A_{nm}(p) W_{nm}(x, y) = \sum_{nm} \frac{q_{nm} W_{nm}(x, y)}{\rho t (\omega^2 + s^2)} \quad (3.91)$$

$$\bar{w}(x, y, p) = \sum_{nm} \frac{W_{nm}(x, y) \int_0^b \int_0^l \bar{q}(x, y, p) W_{nm}(x, y) dx dy}{\rho t (\omega^2 + s^2)} \quad (3.92)$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije vraćaju se funkcije u vremensku domenu:



$$\begin{aligned}
& w(x, y, t) \\
& = \frac{1}{\rho t} \sum_{nm}^{\infty} W_{nm}(x, y) \int_0^b \int_0^l W_{nm}(u, v) dudv \int_0^t q(u, v, \tau) \frac{\sin(\omega_{nm}(t - \tau))}{\omega_{nm}} d\tau \quad (3.93)
\end{aligned}$$

Gornji izraz predstavlja opće rješenje diferencijalne jednadžbe gibanja slobodno oslonjene ploče. Ukoliko se pretpostavi da je opterećenje pokretna sila, tada vrijedi za opterećenje:

$$q(x, y, t) = \begin{cases} F(t)\delta(x - \xi)\delta(y - vt) & \text{za } vt \leq l \\ 0 & \text{za } vt > l \end{cases} \quad (3.94)$$

gdje  $\xi$  označava položaj sile u  $x$  smjeru i ovdje je konstantan u vremenu.

Uvrsti li se izraz za pokretno opterećenje u izraz (3.93) dobije se:

$$\begin{aligned}
w(x, y, t) & = \frac{1}{\rho t} \sum_{nm}^{\infty} W_{nm}(x, y) \int_0^b \int_0^l W_{nm}(u, v) dudv \int_0^t F(\tau)\delta(x - \xi)\delta(y \\
& \quad - vt) \frac{\sin(\omega_{nm}(t - \tau))}{\omega_{nm}} d\tau \quad (3.95)
\end{aligned}$$

Uvaži li se da vrijedi:

$$\int_0^b \int_0^l \delta(x - \xi)\delta(y - vt)W_{nm}(u, v) dudv = W_{nm}(\xi, vt)X_n(\xi)Y_m(vt) \quad (3.96)$$

Tada se dobije:

$$w(x, y, t) = \frac{1}{\rho t} \sum_{nm}^{\infty} W_{nm}(x, y) \int_0^t F(\tau)W_{nm}(\xi, vt) \frac{\sin(\omega_{nm}(t - \tau))}{\omega_{nm}} d\tau \quad (3.97)$$

Ako se pretpostavi da je pokretna sila konstantnog intenziteta u vremenu:

$$F(t) = P_0 H(t) \quad (3.98)$$

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.99)$$

$$w(x, y, t) = \frac{P_0}{\rho t} \sum_{nm}^{\infty} W_{nm}(x, y) \int_0^t W_{nm}(\xi, v\tau) \frac{\sin(\omega_{nm}(t - \tau))}{\omega_{nm}} d\tau \quad (3.100)$$

Ukoliko je ploča slobodno oslonjena, tada je:

$$W_{nm}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{bl}} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \quad (3.101)$$

$$W_{nm}(\xi, v\tau) = \frac{2}{\sqrt{bl}} \sin(\alpha_n \xi) \sin(\beta_m v\tau) \quad (3.102)$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{b} \quad (3.103)$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{l} \quad (3.104)$$

$$\omega_{nm}^2 = (\alpha_n^2 + \beta_m^2) \frac{D}{\rho t} \quad (3.105)$$

$$w(x, y, t) = \frac{P_0}{\rho t} \sum_{nm}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{bl}} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \int_0^t \frac{2}{\sqrt{bl}} \sin(\alpha_n \xi) \sin(\beta_m v\tau) \frac{\sin(\omega_{nm}(t - \tau))}{\omega_{nm}} d\tau \quad (3.106)$$

Na kraju se dobije konačno rješenje:

$$w(x, y, t) = \frac{4P_0}{bl\rho t} \sum_{nm}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sin(\alpha_n \xi)}{\omega_{nm} (\beta_m^2 v^2 - \omega_{nm}^2)} [\beta_m v \sin(\omega_{nm} t) - \omega_{nm} \sin(\beta_m v\tau)] \quad (3.107)$$

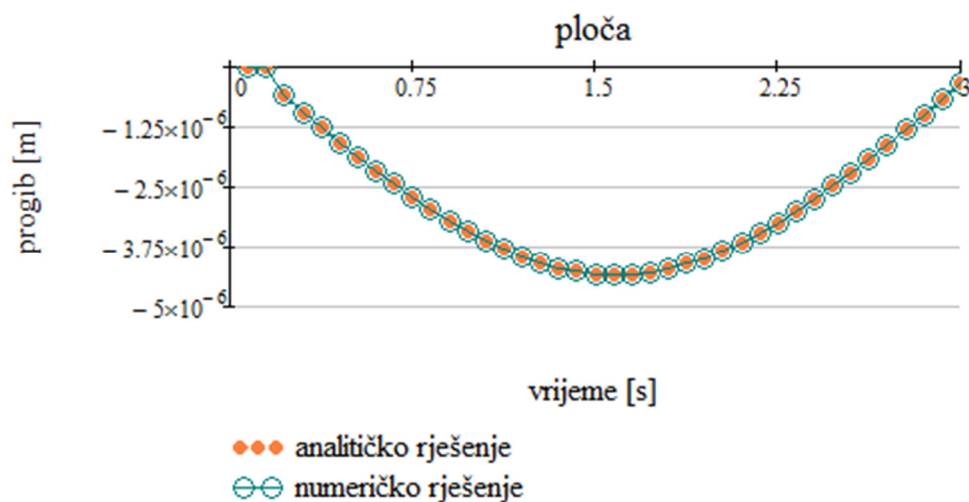
Ukoliko se pretpostavi da  $v$  teži ka 0, dobije se rješenje za statički progib ploče od djelovanja sile  $P_0$  na mjestu s koordinatama  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ :

$$w(x, y, t) = \frac{4P_0}{blD} \sum_{nm}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sin(\alpha_n \xi) \sin(\beta_m \eta)}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} [\beta_m v \sin(\omega_{nm} t) - \omega_{nm} \sin(\beta_m v\tau)] \quad (3.108)$$

U izraz (3.100) se mogu uvrsti funkcije oblika za drugačije uvjete oslanja, te tako dobiti rješenja za dinamički i statički progib ploče za različite uvjete oslanjanja. Ukoliko se uvrste funkcije oblika za ploču slobodno oslonjenu na svim stranama, dođe se do Navierovog rješenja za statički progib ploče, (Reddy 2006).

### 3.3.2. Usporedba numeričkog rješenja primjenom metode konačnih trakastih ljski s analitičkim rješenjem

Model utjecaja pokretnog opterećenja na plošnu konstrukciju načinjenu primjenom konačne trakaste ljske, koja je modificirana uvođenjem trigonometrijskih funkcija kao interpolacijskih funkcija u poprečnom smjeru, verificiran je usporedbom sa rješenjem u zatvorenom obliku izvedenim u poglavlju 3.3.1. Usporedba ta dva rješenja prikazana je na Slici 3.6., gdje se vidi potpuno poklapanje rezultata.

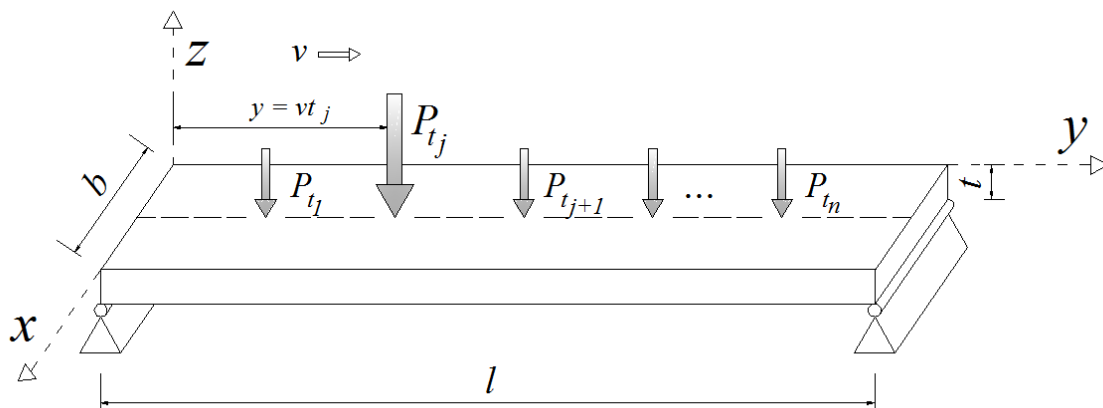


**Slika 3.6.** Usporedba numeričkog i analitičkog rješenja za ploču opterećenu pokretnom silom

## 4. MODELI POKRETNOG OPTEREĆENJA

### 4.1. Pokretna sila

Pokretna sila se svrstava u impulsno opterećenje po svom načinu djelovanja. Može biti konstantnog ili promjenljivog intenziteta, a položaj u prostoru ovisi o brzini kretanja, Slika 4.1. Pokretna sila je najjednostavniji model pokretnog opterećenja, jer uzima u obzir samo gravitacijsko djelovanje, a zanemaruje djelovanje inercijalnih sila.



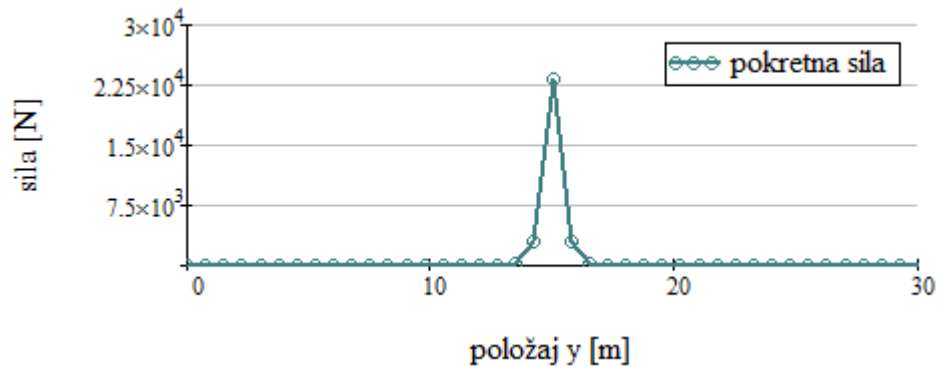
Slika 4.1. Pokretna sila na konstrukciji

Pokretna sila se može opisati Dirac-ovom funkcijom preko Kronecker-ovog  $\delta$  operatora u obliku  $\delta(x-vt)$ , gdje je  $v$  brzina pokretne sile (Giordano i Weir, 1991.), Slika 4.2. Kako su primijenjene konačne trake, koje se zasnivaju na razvoju u redove, potrebno je i zadano opterećenje prilagoditi tome. Tako se pokretno opterećenje u metodu konačnih traka uvodi na način da se koncentrirana sila također razvije u red, a zatim množi s odabranim funkcijama oblika za uzdužni i poprečni smjer:

$$P(y, t) = P \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \cdot \sin\left(k\pi \frac{t}{L}\right) \sin\left(k\pi \frac{\Delta y}{L}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{L}\right) \quad (4.1)$$

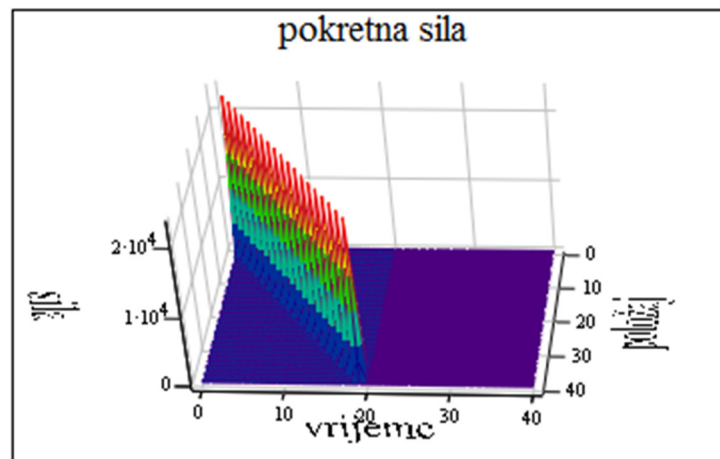
$$P(t, m) = \sum_i \Lambda(t, m) N(x_0)^T P(y_i, t) \quad (4.2)$$

gdje  $k = 1, 2, \dots, 2n$  i  $m$  predstavljaju broj članova reda koji se uzimaju u obzir,  $t$  označava vremensku, a  $y$  prostornu koordinatu,  $L$  je ukupna dužina na kojoj djeluje sila  $P$ ,  $A$  i  $N$  su interpolacijske funkcije u uzdužnom i poprečnom smjeru respektivno.



**Slika 4.2.** Vektor opterećenja na konstrukciju za položaj pokretne sile na sredini raspona

Na Slici 4.3. prikazana je matrica sa podacima o intenzitetu (koordinata  $z$ ) i položaju sile (koordinata  $y$ ) u određenom trenutku (koordinata  $x$ ).



**Slika 4.3.** Matrica s podacima o položaju i intenzitetu opterećenja u svakom vremenskom trenutku

Dinamička jednačina koja opisuje ponašanje ploče uslijed opterećenja pokretnom silom (Timoshenko i Krieger 1959):

$$\rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right) = F(t) \delta(x - \xi) \delta(y - vt) \quad (4.3)$$

gdje  $\rho$  predstavlja masu ploče po jediničnoj površini,  $h$  je debljina ploče,  $P$  je vanjsko

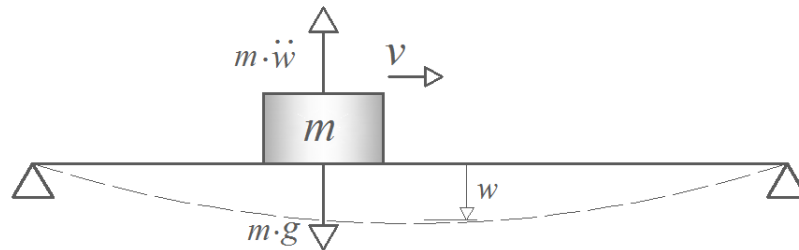
opterećenje,  $\delta(y - \xi)$  i  $\delta(y - vt)$  su Diracove funkcije

$$D = \frac{Eh^3}{12(1+\nu^2)}$$

## 4.2. Pokretna masa

Pokretna masa, za razliku od pokretne sile uzima u obzir inercijalne učinke na konstrukciju. Pretpostavlja se da pokretno opterećenje djeluje na konstrukciju u samo jednoj točki, kao i kod pokretne sile. Dinamička svojstva vozila kao pokretnog opterećenja nisu uzeta u obzir. Pokretna masa na konstrukciju djeluje silom, Slika 4.4.:

$$F = m \cdot (g - \ddot{w}) \quad (4.4)$$



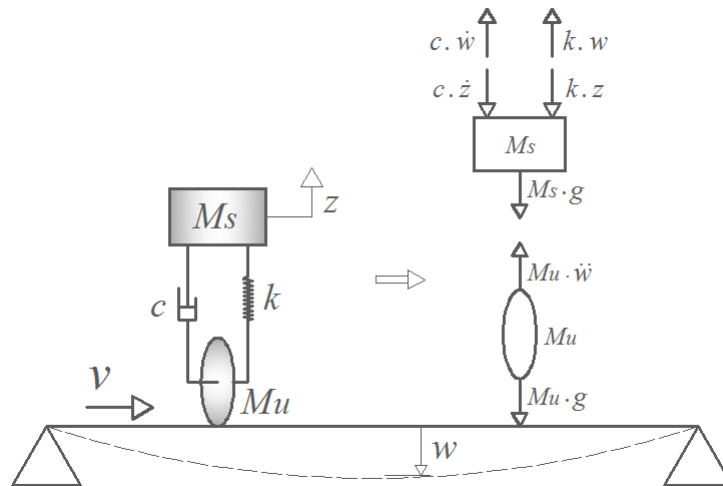
**Slika 4.4.** Pokretna masa s pripadajućim silama

Dinamička jednačba koja opisuje ponašanje ploče uslijed opterećenja pokretnom masom (Fryba 1999):

$$\begin{aligned} \rho t \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] \\ = \delta(y - vt) \left[ q(x, y, t) - m \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Vozilo je idealizirano koncentriranom masom. Desna strane jednačbe (4.5) predstavlja gibanje sile skupa s masom vozila  $m$  uključujući njene inercijalne učinke na konstrukciju. Zbog parcijalne derivacije drugog reda na desnoj strani rješavanje jednačbe (4.5.) je vrlo zahtjevan zadatak. Ovaj model je detaljnije elaborirao Kožar (Kožar 2009).

### 4.3. Model pokretnog opterećenja sa 2 stupnja slobode



**Slika 4.5.** Model pokretnog opterećenja sa 2 stupnja s pripadajućim silama

Najjednostavniji model pokretnog opterećenja koji uzima u obzir neke dinamičke karakteristike vozila čine dvije koncentrirane mase povezane elastičnom oprugom i prigušivačem (Fryba 1999, Brčić 1978) prikazan na Slici 4.5. Masa  $M_s$  je povezana elastičnom oprugom i predstavlja masu vozila, dok je masa  $M_u$  direktno oslonjena na podlogu i predstavlja masu ovjesa i kotača vozila. Ovaj model realnije opisuje pokretno opterećenje, a variranjem parametara (vrijednosti mase i krutost opruge) može se reducirati na prethodno spomenute modele pokretnog opterećenja. Sile u oprugama iznose:

$$F_k = -k \cdot z \quad (4.6)$$

$$F_c = -c \cdot v = -c \cdot \dot{z} \quad (4.7)$$

gdje je  $k$  [N/m] koeficijent krutosti opruge, a  $c$  [Ns/m] koeficijent prigušenja,  $z$  označava pomak mase  $M_s$ .

Iz drugog Newtonovog zakona slijedi da je:



$$\sum F = m \cdot a = M_u \cdot \ddot{w} = F_k + F_c \quad (4.8)$$

gdje  $w$  označava pomak konstrukcije. Inercijalna sila koja ima suprotan smjer u odnosu na pomak jednaka je, Slika 4.5. :

$$M_u \cdot \ddot{w} = -k \cdot z - c \cdot \dot{z} \quad (4.9)$$

Dinamička sila kojom vozilo djeluje na konstrukciju je tada:

$$F = (M_u + M_s) \cdot g - M_u \cdot \ddot{w} + k \cdot (z - w) + c \cdot (\dot{z} - \dot{w}) \quad (4.10)$$

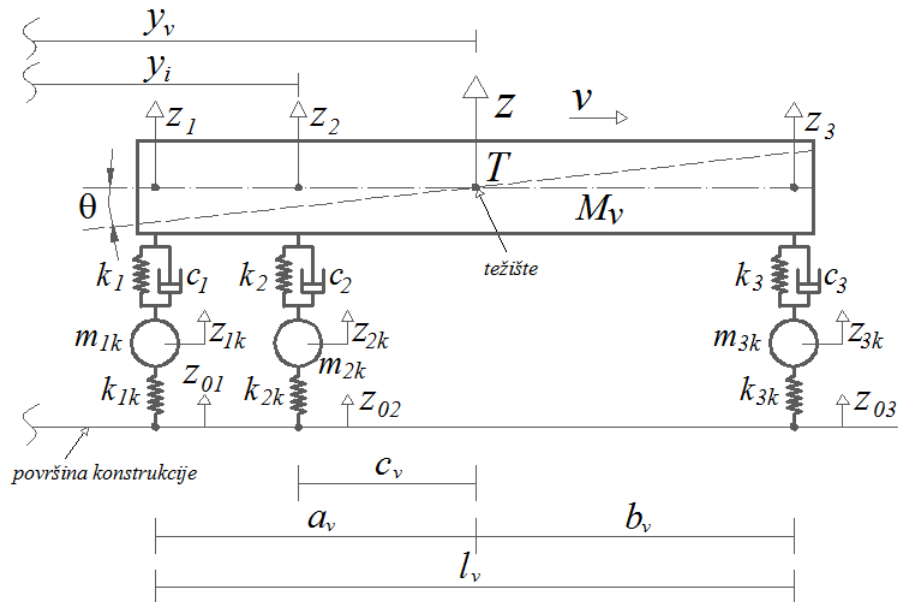
gdje je  $M_u$  masa bez opruge - masa kotača, a  $M_s$  masa s oprugom – masa vozila bez kotača. Zbroj masa  $M_u$  i  $M_s$  daje ukupnu masu vozila  $M_v$ .

Dinamička sila  $F$  je u parcijalnu diferencijalnu jednadžbu uvedena preko veličine  $P$ :

$P = F_M + F_I + F_D$	(4.11)
$F_M = (M_u + M_s)g \cdot \delta(x - vt)$	(4.12)
$F_I = -M_u \cdot \ddot{w} \cdot \delta(x - vt)$	(4.13)
$F_D = k(z - w) \cdot \delta(x - vt)$	(4.14)

$F_M$  predstavlja gravitacijsko djelovanje mase na konstrukciju,  $F_I$  predstavlja inercijski učinak mase, a  $F_D$  predstavlja sile u elastičnoj opruzi i prigušivaču.

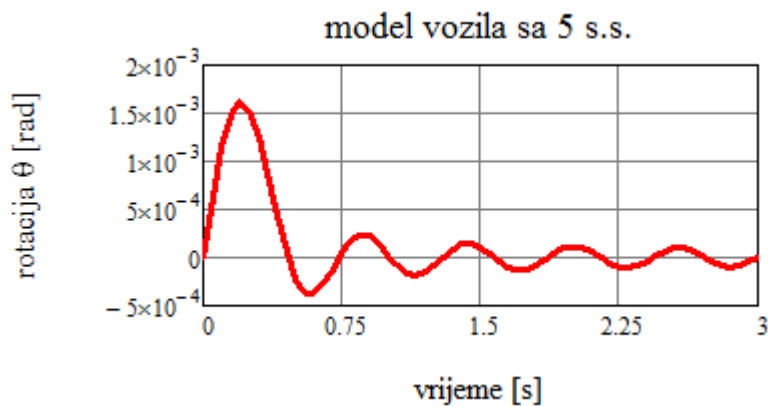
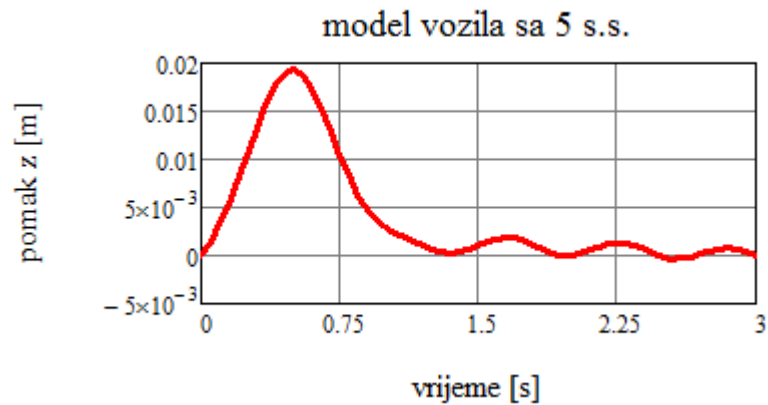
#### 4.4. Model pokretnog opterećenja sa 5 stupnjeva slobode



Slika 4.6. Model vozila sa 5 stupnjeva slobode

Zasnovan na osnovnom 2D modelu vozila s 4 stupnja slobode (Fryba 1999), ovdje je primijenjen 2D model vozila s 5 stupnjeva slobode, da bi odgovarao teškom vozilu s 3 osovine. Na Slici 4.6. dan je prikaz modela.  $M_v$  predstavlja masu vozila s teretom i ima dva stupnja slobode: vertikalni pomak  $z$  i rotaciju oko poprečne težišne osi  $\theta$ . Pri tom  $I_\theta$  označava moment tromosti vozila u odnosu na poprečnu težišnu os. Mase  $m_{1k}$ ,  $m_{2k}$  i  $m_{3k}$  predstavljaju masu osovina i kotača i imaju po jedan stupanj slobode – vertikalni pomak  $z_{1k}$ ,  $z_{2k}$  i  $z_{3k}$ , što skupa s dva stupnja slobode mase vozila, čini ukupno 5 stupnjeva slobode.  $z_{01}$ ,  $z_{02}$  i  $z_{03}$  su zapravo pomaci kotača koji sadrže i eventualne neravnine podloge. Jednadžbe gibanja vozila sa  $n$  opruga u općenitom zapisu:

$M_v \cdot \ddot{z} + \sum_{i=1}^n k_i (z - z_{ik} + \theta(y_v - y_i)) = -M_v g$	(4.15)
$I_\theta \cdot \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^n k_i (z - z_{ik} + \theta(y_v - y_i))(y_v - y_i) = 0$	(4.16)
$m_{ik} \cdot \ddot{z}_{ik} - k_i (z - z_{ik} + \theta(y_v - y_i)) = k_{ik} \cdot z_{0i}$	(4.17)



**Slika 4.7.** (a) Vertikalni pomak i (b) rotacija modela vozila sa 5 stupnjeva slobode

Na Slici 4.7. prikazana je promjena vertikalnog pomaka težišta vozila  $z$  i rotacije oko poprečne težišne osi  $\theta$  u vremenu za model sa 5 stupnjeva slobode, prilikom prelaska preko slobodno oslonjene ploče s ukrutama dužine 30 m. Ukupno vrijeme prelaska vozila preko

konstrukcije je 1,5 s. U početnom trenutku i vozilo i konstrukcija miruju, a vozilo se nalazi izvan raspona konstrukcije. U slijedećem vremenskom koraku vozilo se počinje kretati konstantnom brzinom i dolazi na konstrukciju. U ovom prvom vremenskom koraku gravitacijske i inercijalne sile vozila djeluju na konstrukciju i uzrokuju pomak konstrukcije. Uslijed pomaka konstrukcije mijenjaju se kontaktne sile, koje onda djeluju na vozilo i njegov pomak i rotaciju, te se tako pomak vozila povećava dok se povećava i pomak konstrukcije. Vertikalni pomak vozila doseže maksimum otprilike u trenutku kad se vozilo nalazi na polovici raspona konstrukcije (0,6 s), a nakon toga se smanjuje i dolazi u nulu kada pređe preko konstrukcije (1,3 s), Slika 4.7.

2D model s 3 opruge i 5 stupnjeva slobode je razmatran ovdje. Sustav jednačbi za takav model dan je u matričnom zapisu:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{F} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{Y} = \{w \quad z \quad \theta \quad z_{1k} \quad z_{2k} \quad z_{3k}\}^T \quad (4.19)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{1k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{3k} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^3 k_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^3 k_i (y_v - y_i)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$F = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 k_i (z_i - z)(y_v - y_i) - M_v g \\ \sum_{i=1}^3 k_i (z_i - z)(y_v - y_i) - M_v g \\ \sum_{i=1}^3 k_i (z_i - \theta(y_v - y_i)) \\ k_1(z + a\theta) + k_{1k}z_{01} - m_{1k}g \\ k_2(z + b\theta) + k_{2k}z_{02} - m_{2k}g \\ k_3(z + c\theta) + k_{3k}z_{03} - m_{3k}g \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

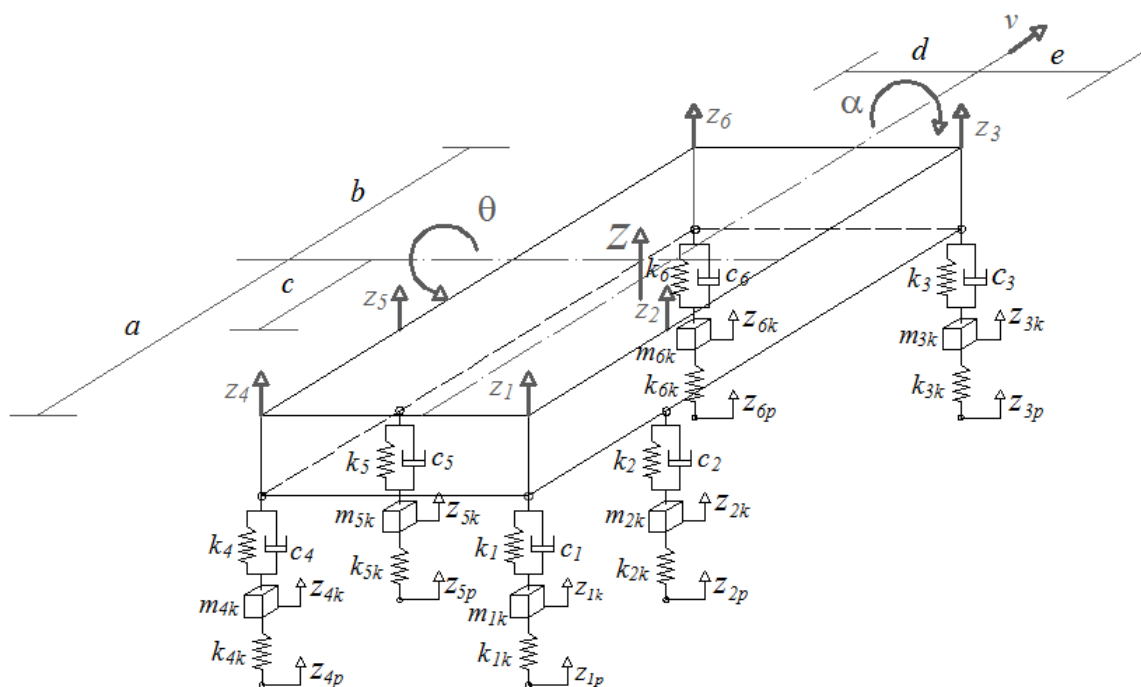
$$y_v - y_1 = a; y_v - y_2 = b; y_v - y_3 = c \quad (4.23)$$

Gdje je  $Y$  vektor pomaka,  $M$  matrica s podacima o masama i momentima tromosti masa,  $K$  je matrica krutosti i  $F$  je vektor opterećenja koji sadrži podatke o dinamičkim (kontaktnim) silama.

## 4.5. Model pokretnog opterećenja sa 9 stupnjeva slobode

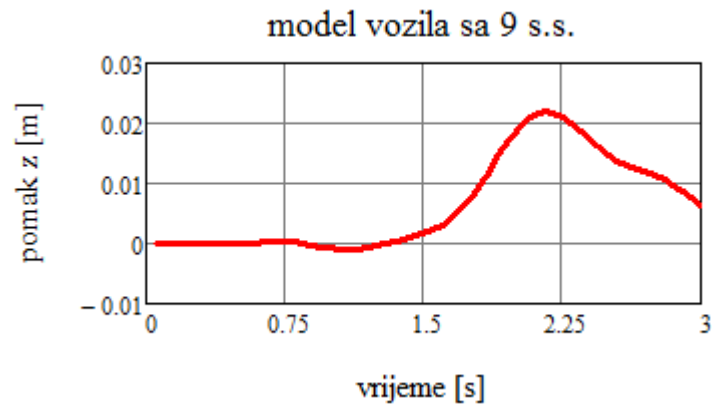
Kod punog modela vozila centar masa ima tri stupnja slobode: odskakanje, prevrtanje (obrtanje) i nagnjanje (engl. bounce, roll and pitch effect), dok kotači imaju po jedan stupanj slobode – odskakanje. Nagnjanje je posljedica međudjelovanja prednje i stražnje osovine vozila. Moment tromosti površine vozila u odnosu na zamišljenu poprečnu os umanjuje mogućnost da opterećenje prednjeg i stražnjeg ovjesa bude konstantno na neravnim površinama, te time omogućava lakše savladavanje neravnina u cilju redukcije dinamičkih djelovanja vozila na konstrukciju kao i poboljšanja udobnosti osoba koje se nalaze u vozilu.

Prevrtanje vozila je zapravo rotacijsko gibanje vozila oko uzdužne osi koja prolazi kroz težište vozila. Moment tromosti vozila u odnosu na zamišljenu uzdužnu os osigurava takvu raspodjelu opterećenja između kotača na lijevoj i desnoj strani vozila da ne dođe do bočnog prevrtanja.

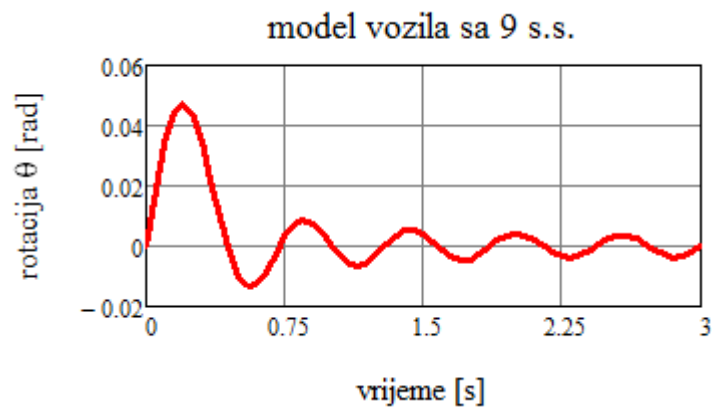


Slika 4.8. Model vozila sa 9 stupnjeva slobode

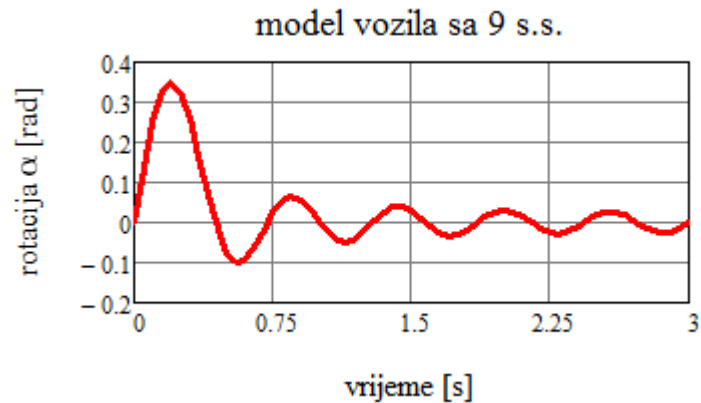
Na Slici 4.8. prikazan je 3D model vozila s 9 stupnjeva slobode i odgovara prostornom modelu vozila s tri osovine. Vozilo je predstavljeno kao kruto tijelo mase  $m_v$ , dok su mase ovjesa i kotača predstavljene masama  $m_{ik}$ , gdje je  $i$  broj masa, koji odgovara broju kotača vozila, u ovom slučaju je  $i = 6$ .  $k_i$  i  $c_i$  označavaju krutost i prigušenje elastičnih opruga i prigušivača na koje je oslonjena masa vozila, a  $k_{ik}$  predstavlja krutost elastične opruge na koje je oslonjena masa  $m_{ik}$  i odgovara krutosti kotača vozila.  $z_{ik}$  je pomak mase  $m_{ik}$ , a  $z_{ip}$  je pomak podloge, koji se sastoji od pomaka konstrukcije i neravnine podloge.  $z$ ,  $\alpha$  i  $\theta$  su translatorni pomak, rotacija oko uzdužne i rotacija oko poprečne težišne osi, respektivno.  $v$  predstavlja brzinu kretanja vozila, Slika 4.9.



(a)



(b)



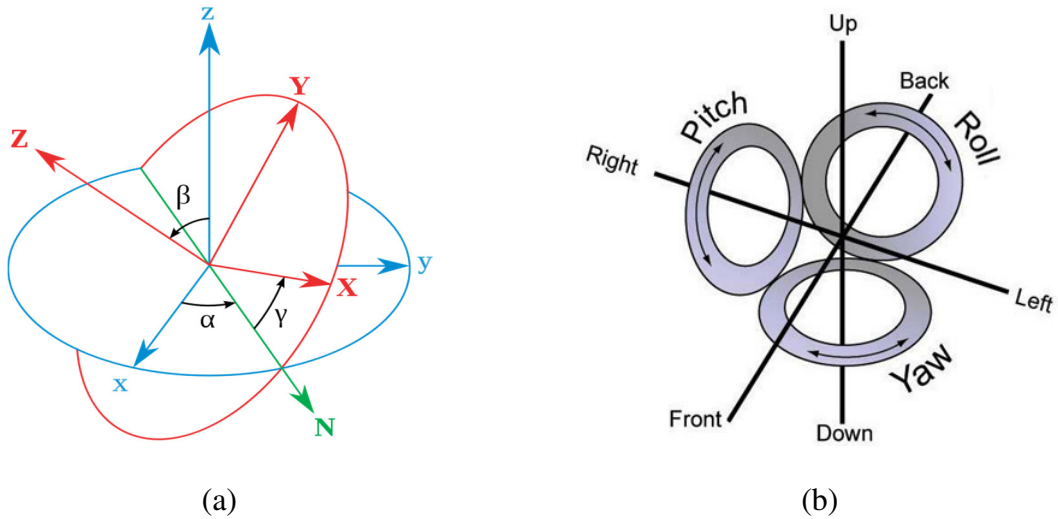
(c)

**Slika 4.9.** (a) Vertikalni pomak, (b) rotacija oko poprečne težišne osi i (c) oko uzdužne težišne osi modela vozila sa 9 stupnjeva slobode

Na Slici 4.9. prikazana je promjena vertikalnog pomaka težišta vozila  $z$  i rotacije oko poprečne  $\theta$  i uzdužne težišne osi  $\alpha$  u vremenu za model sa 9 stupnjeva slobode, prilikom prelaska preko slobodno oslonjene ploče s ukrutama dužine 30 m. U početnom trenutku i vozilo i konstrukcija miruju, a vozilo se nalazi izvan raspona konstrukcije. U slijedećem vremenskom koraku vozilo se počinje kretati konstantnom brzinom i dolazi na konstrukciju. U ovom prvom vremenskom koraku gravitacijske i inercijalne sile vozila djeluju na konstrukciju i uzrokuju pomak konstrukcije. Ovdje je za prelazak vozila preko konstrukcije bilo potrebno ukupno 3 s. Za razliku od modela vozila sa 5 stupnjeva slobode, ovdje se pomak vozila realizira sa vremenskim odmakom. Razlog tomu je i drugačija distribucija maksimalnih progiba konstrukcije u vremenu, te drugačija vrsta interakcije (uključuje više stupnjeva slobode vozila).

Skretanje, naginjanje i prevrtanje (engl. yaw, pitch and roll) poznati i kao Tait-Bryanovi kutevi su specifična vrsta Eulerovih kuteva koji se često koriste u zrakoplovnom inženjerstvu da bi se definirala relativna orijentacija zrakoplova u odnosu na referentni okvir, Slika 4.10. Eulerovi kutevi služe za opisivanje orijentacije krutog tijela u 3D Euklidskom prostoru.





**Slika 4.10.** (a) Eulerovi kutevi između nepomičnog sustava (plavo) i zarotiranog sustava (crveno); (b) Prikaz ravnina koje odgovaraju gibanju vozila

U svrhu pojednostavljenja jednadžbi uvode se slijedeće pretpostavke:

1. vozilo se promatra kao jedno kruto tijelo
2. kinematičke jednadžbe se odnose na aproksimaciju malih pomaka
3. početni položaj osi u odnosu na rotaciju oko uzdužne i poprečne osi dobiveni su korištenjem geometrijskih relacija i rješavanjem diferencijalnih jednadžbi dinamičke ravnoteže
4. položaj težišta vozila ne ovisi o osima rotacije
5. nema gubitka kontakta između kotača i podloge
6. brzina gibanja vozila je konstantna u vremenu

Jednadžbe gibanja se dobivaju iz D'Alembertovog principa.

Za ravnotežu vertikalnih pomaka:

$$\sum F_z = m_v \cdot \ddot{z}_v \quad (4.24)$$

$$M_v \cdot \ddot{z} + \sum_{i=1}^6 k_i \cdot z + [c(k_3 + k_6) - a(k_1 + k_4) - b(k_2 + k_5)] \cdot \theta - \left( d \cdot \sum_{i=1}^3 k_i - e \cdot \sum_{i=4}^6 k_i \right) \cdot \alpha - \sum_{i=1}^6 (k_i \cdot z_{ik}) = 0 \quad (4.25)$$

Za ravnotežu sila na prevrtanje:

$$\sum M_{\alpha} = 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} I_{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} + \left( d^2 \cdot \sum_{i=1}^3 k_i + e^2 \cdot \sum_{i=4}^6 k_i \right) \cdot \alpha - \left( d \cdot \sum_{i=1}^3 k_i + e \cdot \sum_{i=4}^6 k_i \right) \cdot z \\ - [c(dk_5 - ek_{10}) - a(dk_1 - ek_6) - b(dk_3 - ek_8)] \cdot \theta + d \\ \cdot \sum_{i=1}^3 k_i + e \cdot \sum_{i=4}^6 k_i = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Za ravnotežu sila naginjanja:

$$\sum M_{\theta} = 0 \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} I_{\theta} \cdot \ddot{\theta} + [c^2(k_3 + k_6) + a^2(k_1 + k_4) + b^2(k_2 + k_5)] \cdot \theta \\ + [c(k_3 + k_6) - a(k_1 + k_4) - b(k_2 + k_5)] \cdot z \\ - [c(ck_3 - dk_6) - a(ck_1 - dk_4) - b(ck_2 - dk_5)] \cdot \alpha \\ - c(k_3 \cdot z_{3k} + k_6 \cdot z_{6k}) + a(k_1 \cdot z_{1k} + k_4 \cdot z_{4k}) \\ + b(k_2 \cdot z_{2k} + k_5 \cdot z_{5k}) = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Za ravnotežu vertikalnih sila u kotačima:

$$\sum F_z = m_k \cdot \ddot{z}_k \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} m_{ik} \cdot \ddot{z}_{ik} + (k_i + k_{ik}) \cdot z_{ik} - k_i(z + (y_v - y_i) \cdot \theta + (x_v - x_i) \cdot \alpha + z_{ip}) = 0, i \\ = 1 \dots 6 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Pokretno opterećenje na konstrukciju:

$$P_i = M_v g \frac{(y_{i+1} - y_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})}{2B_v L_v} + m_{ik} g + k_{ik}(z_{ik} - z_{ip}) \quad (4.32)$$

Uvažavajući oznake na slici i odvajajući opterećenje na desnu stranu dobivamo:

$$M_v \cdot \ddot{z} + \sum_{i=1}^6 k_i \cdot z = F(t) \quad (4.33)$$

$$I_\theta \cdot \ddot{\theta} + [c^2(k_3 + k_6) + a^2(k_1 + k_4) + b^2(k_2 + k_5)] \cdot \theta = F_\theta(t) \quad (4.34)$$

$$I_\alpha \cdot \ddot{\alpha} + \left( d^2 \cdot \sum_{i=1}^3 k_i + e^2 \cdot \sum_{i=4}^6 k_i \right) \cdot \alpha = F_\alpha(t) \quad (4.35)$$

$$m_{1k} \cdot \ddot{z}_{1k} + (k_1 + k_{1k}) \cdot z_{1k} = F_1(t) \quad (4.36)$$

$$m_{2k} \cdot \ddot{z}_{2k} + (k_2 + k_{2k}) \cdot z_{2k} = F_2(t) \quad (4.37)$$

$$m_{3k} \cdot \ddot{z}_{3k} + (k_3 + k_{3k}) \cdot z_{3k} = F_3(t) \quad (4.38)$$

$$m_{4k} \cdot \ddot{z}_{4k} + (k_4 + k_{4k}) \cdot z_{4k} = F_4(t) \quad (4.39)$$

$$m_{5k} \cdot \ddot{z}_{5k} + (k_5 + k_{5k}) \cdot z_{5k} = F_5(t) \quad (4.40)$$

$$m_{6k} \cdot \ddot{z}_{6k} + (k_6 + k_{6k}) \cdot z_{6k} = F_6(t) \quad (4.41)$$

Odgovarajuća opterećenja na desnim stranama su jednaka:

$$F(t) = -[c(k_3 + k_6) - a(k_1 + k_4) - b(k_2 + k_5)] \cdot \theta + \left( d \cdot \sum_{i=1}^3 k_i - e \cdot \sum_{i=4}^6 k_i \right) \cdot \alpha + \sum_{i=1}^6 (k_i \cdot z_{ik}) \quad (4.42)$$

$$F_\theta(t) = F_{\theta 1} + F_{\theta 2} + F_{\theta 3} \quad (4.43)$$

$$F_{\theta 1} = -[c(k_3 + k_6) - a(k_1 + k_4) - b(k_2 + k_5)] \cdot z \quad (4.44)$$

$$F_{\theta 2} = [c(dk_3 - ek_6) - a(dk_1 - ek_4) - b(dk_2 - ek_5)] \cdot \alpha \quad (4.45)$$

$$F_{\theta 3} = c(k_3 \cdot z_{3k} + k_6 \cdot z_{6k}) - b(k_1 \cdot z_{1k} + k_4 \cdot z_{4k}) - b_1(k_2 \cdot z_{2k} + k_5 \cdot z_{5k}) \quad (4.46)$$

$$F_\alpha(t) = F_{\alpha 1} + F_{\alpha 2} + F_{\alpha 3} \quad (4.47)$$

$$F_{\alpha 1} = \left( d \cdot \sum_{i=1}^3 k_i + e \cdot \sum_{i=4}^6 k_i \right) \cdot z \quad (4.48)$$

$$F_{\alpha 2} = [c(ck_3 - dk_6) - a(ck_1 - dk_4) - b(ck_2 - dk_5)] \cdot \theta \quad (4.49)$$

$$F_{\alpha 3} = -d \cdot \sum_{i=1}^3 k_i - e \cdot \sum_{i=4}^6 k_i \quad (4.50)$$

$$F_1(t) = k_1(z + a\theta + d\alpha + z_{1p}) \quad (4.51)$$

$$F_2(t) = k_2(z + b\theta + d\alpha + z_{2p}) \quad (4.52)$$

$$F_3(t) = k_3(z + c\theta + d\alpha + z_{3p}) \quad (4.53)$$

$$F_4(t) = k_4(z + a\theta + e\alpha + z_{4p}) \quad (4.54)$$

$$F_5(t) = k_5(z + b\theta + e\alpha + z_{5p}) \quad (4.55)$$

$$F_6(t) = k_6(z + c\theta + e\alpha + z_{6p}) \quad (4.56)$$

Gibanje 3D modela vozila sa 9 stupnjeva slobode, prikazanog na Slici 4.8. opisano je sustavom od 9 diferencijalnih jednadžbi (4.33) do (4.41).

Pokretno opterećenje na konstrukciju se računa prema izrazima:

$$P_1 = M_v g \frac{d(a-b)}{2(a+c)(d+e)} + m_{1k}g + k_{1k}(z_{1k} - z_{1p}) \quad (4.57)$$

$$P_2 = M_v g \frac{d(a+c)}{2(a+c)(d+e)} + m_{2k}g + k_{2k}(z_{2k} - z_{2p}) \quad (4.58)$$

$$P_3 = M_v g \frac{d(b+c)}{2(a+c)(d+e)} + m_{3k}g + k_{3k}(z_{3k} - z_{3p}) \quad (4.59)$$

$$P_4 = M_v g \frac{e(a-b)}{2(a+c)(d+e)} + m_{4k}g + k_{4k}(z_{4k} - z_{4p}) \quad (4.60)$$

$$P_5 = M_v g \frac{e(a+c)}{2(a+c)(d+e)} + m_{5k}g + k_{5k}(z_{5k} - z_{5p}) \quad (4.61)$$

$$P_6 = M_v g \frac{e(b+c)}{2(a+c)(d+e)} + m_{6k} g + k_{6k}(z_{6k} - z_{6p}) \quad (4.62)$$

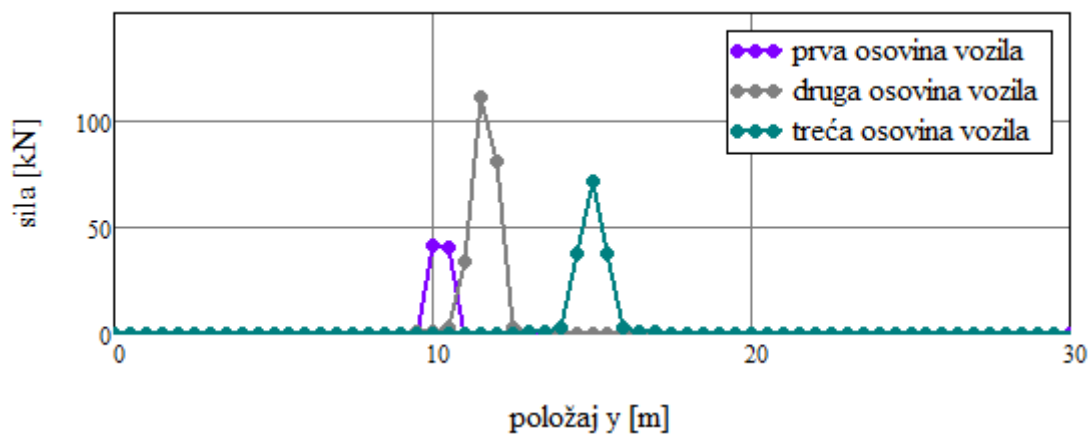
Položaj pojedinog kotača  $y_{0i}$  u svakom vremenskom koraku, ovisno o brzini kretanja  $v$  se može odrediti kotača:

$$y_{01} = y_{04} = v \cdot t_i - (a + c) \quad (4.63)$$

$$y_{02} = y_{05} = v \cdot t_i - (b + c) \quad (4.64)$$

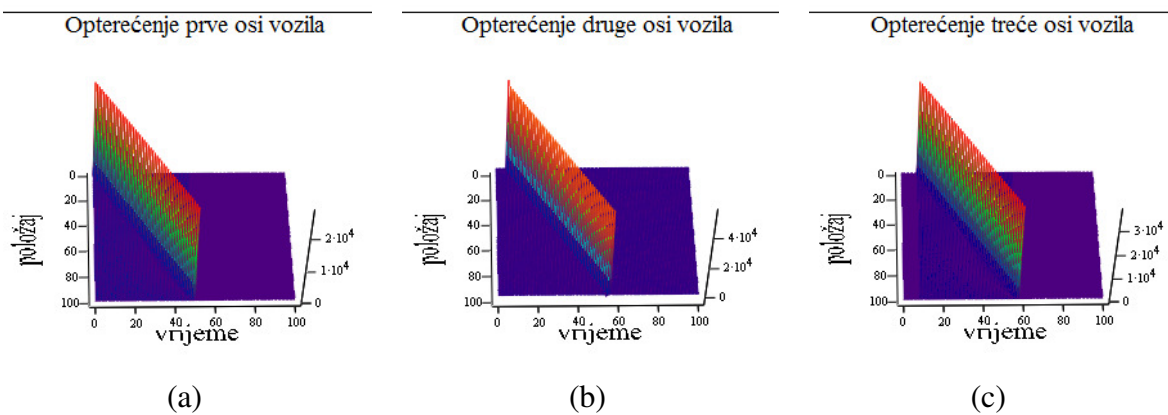
$$y_{03} = y_{06} = v \cdot t_i \quad (4.65)$$

Na Slici 4.11. prikazana je raspodjela gravitacijskog opterećenja od vozila na čvorove konstrukcije u trenutku kada se vozilo nalazi na sredini raspona. Čvorovi koji odgovaraju trenutnom položaju pojedine osovine vozila imaju ekvivalentno opterećenja, dok u ostalim čvorovima opterećenja nema.



**Slika 4.11.** Prikaz distribucije opterećenja u čvorovima konstrukcije kad je vozilo na sredini raspona

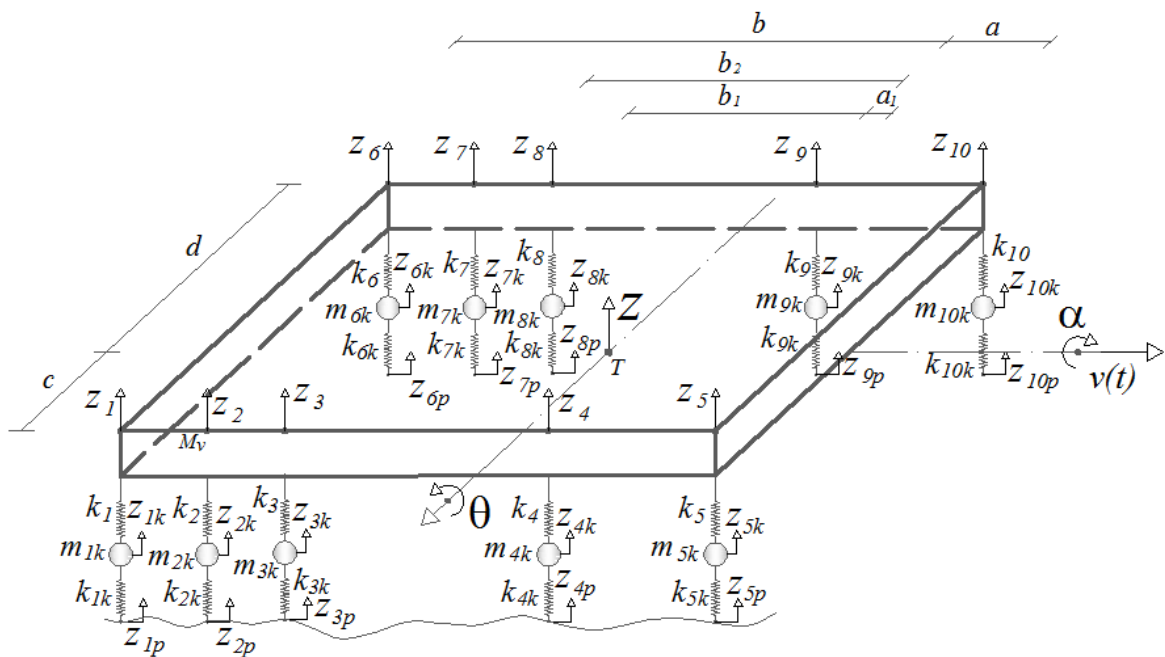
Na Slici 4.12. dan je grafički prikaz matrice opterećenja koja sadrži podatke o položaju i intenzitetu opterećenja pojedine osovine vozila u svakom vremenskom trenutku. Kako se osovine vozila nalaze na određenom razmaku, jasno je da one neće u istom trenutku stupiti na konstrukciju. Postoji vremenski odmak u opterećenju od prve, druge i treće osi vozila, što je vidljivo na Slici 4.12.



**Slika 4.12.** Grafički prikaz matrice opterećenja za: (a) prvu; (b) drugu i (c) treću os vozila

## 4.6. Model pokretnog opterećenja sa 13 stupnjeva slobode

3D model vozila sa 13 stupnjeva slobode, zapravo se bazira na onom sa 9 stupnjeva slobode. Razlika je u broju opruga i broju točaka prijenosa opterećenja. Naime, model sa 12 stupnjeva slobode odgovara vozilu s pet osovina. Na Slici 4.13. dan je prikaz modela sa odgovarajućim oznakama. Vozilo je predstavljeno kao kruto tijelo mase  $m_v$ , dok su mase ovjesa i kotača predstavljene masama  $m_{ik}$ , gdje je  $i$  broj masa, koji odgovara broju kotača vozila, u ovom slučaju je  $i = 10$ .  $k_i$  označava krutost elastičnih opruga i prigušivača na koje je oslonjena masa vozila, a  $k_{ik}$  predstavlja krutost elastične opruge na koje je oslonjena masa  $m_{ik}$  i odgovara krutosti kotača vozila.  $z_{ik}$  je pomak mase  $m_{ik}$ , a  $z_{ip}$  je pomak podloge, koji se sastoji od pomaka konstrukcije i neravnine podloge.  $z$ ,  $\alpha$  i  $\theta$  su translatorsni pomak, rotacija oko uzdužne i rotacija oko poprečne težišne osi, respektivno. Brzinu kretanja vozila označena je oznakom  $v$ .



Slika 4.13. 3D modela vozila sa 13 stupnjeva slobode

$$\begin{aligned}
M_v \cdot \ddot{z} + \sum_{i=1}^{10} k_i \cdot z &+ [a(k_5 + k_{10}) + a_1(k_4 + k_9) - b(k_1 + k_6) - b_1(k_3 + k_8) \\
&- b_2(k_2 + k_7)] \cdot \theta - \left( c \cdot \sum_{i=1}^5 k_i - d \cdot \sum_{i=6}^{10} k_i \right) \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{10} (k_i \cdot z_{ik}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
I_\theta \cdot \ddot{\theta} + [a^2(k_5 + k_{10}) + a_1^2(k_4 + k_9) + b^2(k_1 + k_6) + b_1^2(k_3 + k_8) \\
+ b_2^2(k_2 + k_7)] \cdot \theta &+ [a(k_5 + k_{10}) + a_1(k_4 + k_9) - b(k_1 + k_6) - b_1(k_3 + k_8) \\
&- b_2(k_2 + k_7)] \cdot z \\
&- [a(ck_5 - dk_{10}) + a_1(ck_4 - dk_9) - b(ck_1 - dk_6) \\
&- b_1(ck_3 - dk_8) - b_2(ck_2 - dk_7)] \cdot \alpha \\
&- a(k_5 \cdot z_{5k} + k_{10} \cdot z_{10k}) - a_1(k_4 \cdot z_{4k} + k_9 \cdot z_{9k}) \\
&+ b(k_1 \cdot z_{1k} + k_6 \cdot z_{6k}) + b_1(k_3 \cdot z_{3k} + k_8 \cdot z_{8k}) \\
&+ b_2(k_2 \cdot z_{2k} + k_7 \cdot z_{7k}) = 0
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
I_\alpha \cdot \ddot{\alpha} + \left( c^2 \cdot \sum_{i=1}^5 k_i + d^2 \cdot \sum_{i=6}^{10} k_i \right) \cdot \alpha - \left( c \cdot \sum_{i=1}^5 k_i + d \cdot \sum_{i=6}^{10} k_i \right) \cdot z \\
&- [a(ck_5 - dk_{10}) + a_1(ck_4 - dk_9) - b(ck_1 - dk_6) \\
&- b_1(ck_3 - dk_8) - b_2(ck_2 - dk_7)] \cdot \theta + c \cdot \sum_{i=1}^5 k_i + d \cdot \sum_{i=6}^{10} k_i \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$m_{1k} \cdot \ddot{z}_{1k} + (k_1 + k_{1k}) \cdot z_{1k} - k_1(z + b\theta + c\alpha + z_{1p}) = 0 \tag{4.69}$$

$$m_{2k} \cdot \ddot{z}_{2k} + (k_2 + k_{2k}) \cdot z_{2k} - k_2(z + b_2\theta + c\alpha + z_{2p}) = 0 \tag{4.70}$$

$$m_{3k} \cdot \ddot{z}_{3k} + (k_3 + k_{3k}) \cdot z_{3k} - k_3(z + b_1\theta + c\alpha + z_{3p}) = 0 \tag{4.71}$$

$$m_{4k} \cdot \ddot{z}_{4k} + (k_4 + k_{4k}) \cdot z_{4k} - k_4(z + a_1\theta + c\alpha + z_{4p}) = 0 \tag{4.72}$$

$$m_{5k} \cdot \ddot{z}_{5k} + (k_5 + k_{5k}) \cdot z_{5k} - k_5(z + a\theta + c\alpha + z_{5p}) = 0 \tag{4.73}$$

$$m_{6k} \cdot \ddot{z}_{6k} + (k_6 + k_{6k}) \cdot z_{6k} - k_6(z + b\theta + d\alpha + z_{6p}) = 0 \tag{4.74}$$

$$m_{7k} \cdot \ddot{z}_{7k} + (k_7 + k_{7k}) \cdot z_{7k} - k_7(z + b_2\theta + d\alpha + z_{7p}) = 0 \tag{4.75}$$

$$m_{8k} \cdot \ddot{z}_{8k} + (k_8 + k_{8k}) \cdot z_{8k} - k_8(z + b_1\theta + d\alpha + z_{8p}) = 0 \tag{4.76}$$

$$m_{9k} \cdot \ddot{z}_{9k} + (k_9 + k_{9k}) \cdot z_{9k} - k_9(z + a_1\theta + d\alpha + z_{9p}) = 0 \tag{4.77}$$



$$m_{10k} \cdot \ddot{z}_{10k} + (k_{10} + k_{10k}) \cdot z_{10k} - k_{10}(z + a\theta + d\alpha + z_{10p}) = 0 \quad (4.78)$$

Ukoliko opterećenja prebacimo na desnu stranu, jednadžbe gibanja izgledaju:

$$M_v \cdot \ddot{z} + \sum_{i=1}^{10} k_i \cdot z = F(t) \quad (4.79)$$

$$I_\theta \cdot \ddot{\theta} + [a^2(k_5 + k_{10}) + a_1^2(k_4 + k_9) + b^2(k_1 + k_6) + b_1^2(k_3 + k_8) + b_2^2(k_2 + k_7)] \cdot \theta = F_\theta(t) \quad (4.80)$$

$$I_\alpha \cdot \ddot{\alpha} + \left( c^2 \cdot \sum_{i=1}^5 k_i + d^2 \cdot \sum_{i=6}^{10} k_i \right) \cdot \alpha = F_\alpha(t) \quad (4.81)$$

$$m_{1k} \cdot \ddot{z}_{1k} + (k_1 + k_{1k}) \cdot z_{1k} = F_1(t) \quad (4.82)$$

$$m_{2k} \cdot \ddot{z}_{2k} + (k_2 + k_{2k}) \cdot z_{2k} = F_2(t) \quad (4.83)$$

$$m_{3k} \cdot \ddot{z}_{3k} + (k_3 + k_{3k}) \cdot z_{3k} = F_3(t) \quad (4.84)$$

$$m_{4k} \cdot \ddot{z}_{4k} + (k_4 + k_{4k}) \cdot z_{4k} = F_4(t) \quad (4.85)$$

$$m_{5k} \cdot \ddot{z}_{5k} + (k_5 + k_{5k}) \cdot z_{5k} = F_5(t) \quad (4.86)$$

$$m_{6k} \cdot \ddot{z}_{6k} + (k_6 + k_{6k}) \cdot z_{6k} = F_6(t) \quad (4.87)$$

$$m_{7k} \cdot \ddot{z}_{7k} + (k_7 + k_{7k}) \cdot z_{7k} = F_7(t) \quad (4.88)$$

$$m_{8k} \cdot \ddot{z}_{8k} + (k_8 + k_{8k}) \cdot z_{8k} = F_8(t) \quad (4.89)$$

$$m_{9k} \cdot \ddot{z}_{9k} + (k_9 + k_{9k}) \cdot z_{9k} = F_9(t) \quad (4.90)$$

$$m_{10k} \cdot \ddot{z}_{10k} + (k_{10} + k_{10k}) \cdot z_{10k} = F_{10}(t) \quad (4.91)$$

A odgovarajuća opterećenja na desnim stranama:

$$F(t) = -[a(k_5 + k_{10}) + a_1(k_4 + k_9) - b(k_1 + k_6) - b_1(k_3 + k_8) - b_2(k_2 + k_7)] \cdot \theta + \left( c \cdot \sum_{i=1}^5 k_i - d \cdot \sum_{i=6}^{10} k_i \right) \cdot \alpha + \sum_{i=1}^{10} (k_i \cdot z_{ik}) \quad (4.92)$$

$$F_{\theta}(t) = F_{\theta 1} + F_{\theta 2} + F_{\theta 3} \quad (4.93)$$

$$F_{\theta 1} = -[a(k_5 + k_{10}) + a_1(k_4 + k_9) - b(k_1 + k_6) - b_1(k_3 + k_8) - b_2(k_2 + k_7)] \cdot z \quad (4.94)$$

$$F_{\theta 2} = [a(ck_5 - dk_{10}) + a_1(ck_4 - dk_9) - b(ck_1 - dk_6) - b_1(ck_3 - dk_8) - b_2(ck_2 - dk_7)] \cdot \alpha \quad (4.95)$$

$$F_{\theta 3} = a(k_5 \cdot z_{5k} + k_{10} \cdot z_{10k}) + a_1(k_4 \cdot z_{4k} + k_9 \cdot z_{9k}) - b(k_1 \cdot z_{1k} + k_6 \cdot z_{6k}) - b_1(k_3 \cdot z_{3k} + k_8 \cdot z_{8k}) - b_2(k_2 \cdot z_{2k} + k_7 \cdot z_{7k}) \quad (4.96)$$

$$F_{\alpha}(t) = F_{\alpha 1} + F_{\alpha 2} + F_{\alpha 3} \quad (4.97)$$

$$F_{\alpha 1} = \left( c \cdot \sum_{i=1}^5 k_i + d \cdot \sum_{i=6}^{10} k_i \right) \cdot z \quad (4.98)$$

$$F_{\alpha 2} = [a(ck_5 - dk_{10}) + a_1(ck_4 - dk_9) - b(ck_1 - dk_6) - b_1(ck_3 - dk_8) - b_2(ck_2 - dk_7)] \cdot \theta \quad (4.99)$$

$$F_{\alpha 3} = -c \cdot \sum_{i=1}^5 k_i - d \cdot \sum_{i=6}^{10} k_i \quad (4.100)$$

$$F_1(t) = k_1(z + b\theta + c\alpha + z_{1p}) \quad (4.101)$$

$$F_2(t) = k_2(z + b_2\theta + c\alpha + z_{2p}) \quad (4.102)$$

$$F_3(t) = k_3(z + b_1\theta + c\alpha + z_{3p}) \quad (4.103)$$

$$F_4(t) = k_4(z + a_1\theta + c\alpha + z_{4p}) \quad (4.104)$$

$$F_5(t) = k_5(z + a\theta + c\alpha + z_{5p}) \quad (4.105)$$

$$F_6(t) = k_6(z + b\theta + d\alpha + z_{6p}) \quad (4.106)$$

$$F_7(t) = k_7(z + b_2\theta + d\alpha + z_{7p}) \quad (4.107)$$

$$F_8(t) = k_8(z + b_1\theta + d\alpha + z_{8p}) \quad (4.108)$$

$$F_9(t) = k_9(z + a_1\theta + d\alpha + z_{9p}) \quad (4.109)$$

$$F_{10}(t) = k_{10}(z + a\theta + d\alpha + z_{10p}) \quad (4.110)$$

Pokretno opterećenje na konstrukciju:

$$P_1 = M_v g \frac{c(b - b_2)}{2(a + b)(c + d)} + m_{1k}g + k_{1k}(z_{1k} - z_{1p}) \quad (4.111)$$

$$P_2 = M_v g \frac{c(b - b_1)}{2(a + b)(c + d)} + m_{2k}g + k_{2k}(z_{2k} - z_{2p}) \quad (4.112)$$

$$P_3 = M_v g \frac{c(a_1 + b_2)}{2(a + b)(c + d)} + m_{3k}g + k_{3k}(z_{3k} - z_{3p}) \quad (4.113)$$

$$P_4 = M_v g \frac{c(a + b_1)}{2(a + b)(c + d)} + m_{4k}g + k_{4k}(z_{4k} - z_{4p}) \quad (4.114)$$

$$P_5 = M_v g \frac{c(a - a_1)}{2(a + b)(c + d)} + m_{5k}g + k_{5k}(z_{5k} - z_{5p}) \quad (4.115)$$

$$P_6 = M_v g \frac{d(b - b_2)}{2(a + b)(c + d)} + m_{6k}g + k_{6k}(z_{6k} - z_{6p}) \quad (4.116)$$

$$P_7 = M_v g \frac{d(b - b_1)}{2(a + b)(c + d)} + m_{7k}g + k_{7k}(z_{7k} - z_{7p}) \quad (4.117)$$

$$P_8 = M_v g \frac{d(a_1 - b_2)}{2(a + b)(c + d)} + m_{8k}g + k_{8k}(z_{8k} - z_{8p}) \quad (4.118)$$

$$P_9 = M_v g \frac{d(a + b_1)}{2(a + b)(c + d)} + m_{9k}g + k_{9k}(z_{9k} - z_{9p}) \quad (4.119)$$

$$P_{10} = M_v g \frac{d(a - a_1)}{2(a + b)(c + d)} + m_{10k}g + k_{10k}(z_{10k} - z_{10p}) \quad (4.120)$$

Položaj pojedinog kotača ovisno o brzini kretanja i vremenu:

$$y_{01} = y_{06} = v \cdot t_i - (a + b) \quad (4.121)$$

$$y_{02} = y_{07} = v \cdot t_i - (a + b_2) \quad (4.122)$$

$$y_{03} = y_{08} = v \cdot t_i - (a + b_1) \quad (4.123)$$

$$y_{04} = y_{09} = v \cdot t_i - (a - a_1) \quad (4.124)$$

$$y_{05} = y_{10} = v \cdot t_i \quad (4.125)$$

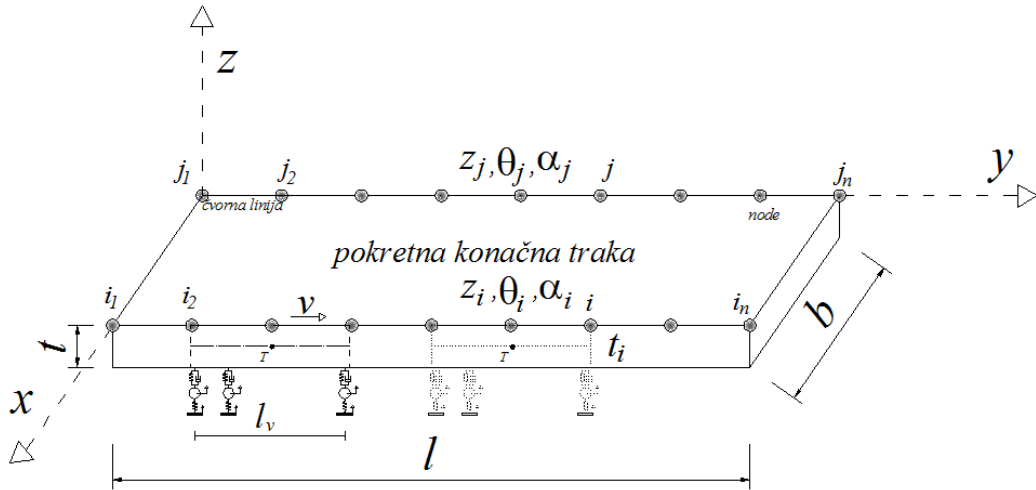
## 5. POKRETNI KONAČNI TRAKASTI ELEMENT

Temeljeno na ideji pokretnih i interaktivnih elementa iz literature (Tso-Chien i Li 2002, Lou 2005), ovdje je razvijena pokretna konačna traka kao novi tip konačne trake, a u svrhu diskretizacije pokretnog vozila i lakšeg sprezanja s konstrukcijom. Ovakva konačna traka omogućuje integriranje modela pokretnog vozila u konstruktivni sustav (Torić Malić i Kožar, 2012). Vozilo se tako diskretizira nekom vrstom konačne trake, koja je slična onoj koja se primjenjuje na konstrukciju. Pokretna konačna traka s pripadajućim parametrima prikazana je na Slici 5.1. Pokretna konačna traka koincidira sa onom ravnom konačnom ljuskom na konstrukciji koja je u kontaktu s vozilom. Tako sve konačne trake na konstrukciji i njihove karakteristične matrice ostaju nepromijenjene, izuzev onih u kontaktu s vozilom – pokretne konačne trake. Karakteristične matrice za pokretnu konačnu traku jednake su veličine kao i one za ravnu konačnu ljusku koja je primijenjena za diskretizaciju konstrukcije jer su stupnjevi slobode vozila ugrađeni u konstruktivni sustav. Ova činjenica ostavlja mogućnost vrlo jednostavnog naknadnog uvođenja dodatnih uvjeta u model interakcije vozila i konstrukcije. Matrica masa i vektor opterećenja za pokretnu konačnu traku formiraju se prema izrazima:

$$M(t, m) = M_v N(x_0) N(x_0)^T \Lambda(t, m)^2 \quad (5.1)$$

$$P_i(t, m) = P_i N(x_0) \Lambda(t, m) \quad (5.2)$$

gdje je  $N(x)$  oznaka za interpolacijsku funkciju u uzdužnom, a  $\Lambda(t, m)$  u poprečnom smjeru.  $M_v$  je oznaka za masu vozila, a  $P$  intenzitet pokretnog opterećenja.



Slika 5.1. Pokretni konačni trakasti element

Jednadžbe gibanja konstrukcije i vozila su:

$$[M_s] \cdot \{\ddot{w}\}_s + [K_s] \cdot \{w\}_s = \{F\}_s \quad (5.3)$$

$$[M_v] \cdot \{\ddot{w}\}_v + [K_v] \cdot \{w\}_v = \{F\}_v \quad (5.4)$$

gdje indeks  $s$  označava veličine koje se odnose na konstrukciju, a indeks  $v$  one veličine koje se odnose na vozilo. Očuvanje kontakta između vozila i konstrukcije je osigurano preko jednakosti kontaktnih sila:

$$\{F_c\}_i = \{k_i\} \cdot ([N_v]\{w\}_v + \{z_r\}) + \sum_i \{k_i\}(y_v - y_i) \cdot \{\theta\} + \sum_i \{k_i\}(x_v - x_i) \cdot \{\alpha\} - M_v g \quad (5.5)$$

gdje  $F_c$  predstavlja kontaktnu ili interaktivnu silu,  $k$  krutost elastične opruge između vozila i konstrukcije,  $w$  je pomak konstrukcije,  $z$  je pomak mase kotača vozila,  $\theta$  i  $\alpha$  predstavljaju rotacije vozila u dvije okomite ravnine,  $M_v$  je masa vozila,  $x$  i  $y$  su koordinate položaja osi vozila, a  $x_v$  i  $y_v$  su koordinate položaja težišta vozila.

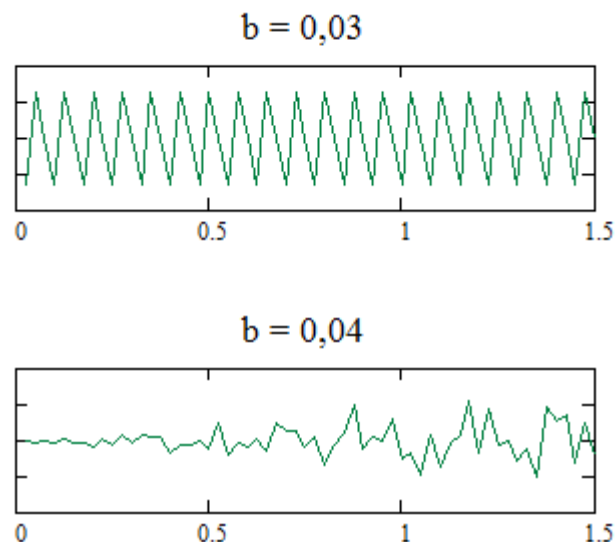
## 6. OPISIVANJE NEPRAVILNOSTI PODLOGE

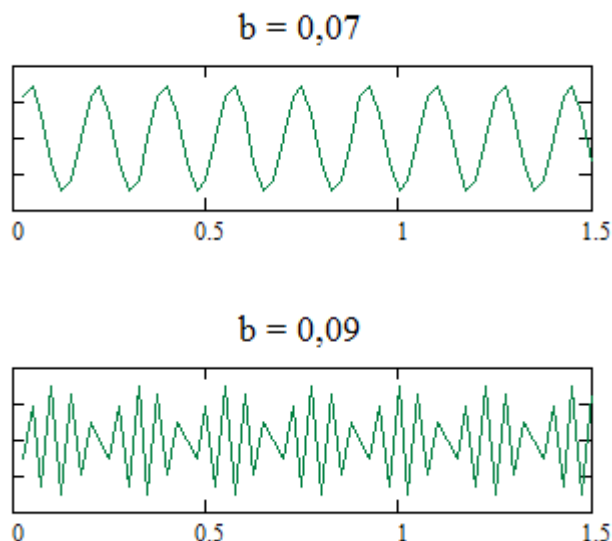
Profil podloge po kojoj se kreće vozilo opisuje nepravilnosti i neravnine površine konstrukcije. Obično su podaci o profilu podloge nepoznati, te ih je potrebno nekako odrediti, bilo deterministički ili stohastički. U literaturi se mogu naći različiti načini, no najčešći je opisivanje neravnina podloge preko trigonometrijskih funkcija (Lou i sur. 2007), Slika 6.1.:

$$r_1(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{b} x\right) \quad (6.1)$$

$$r_2(x) = \begin{cases} A\sqrt{a^2 - (x - a)^2} & , 0 \leq x \leq 2a \\ 0 & , 2a < x \leq l \end{cases} \quad (6.2)$$

gdje  $r_1(x)$  predstavlja nepravilnosti podloge, a  $r_2(x)$  prijelazne naprave ili početne vibracije pri dolasku vozila na konstrukciju ili odlaska s nje. Za  $r_1(x)$  vrijedi  $A = 0.02$  m, te za  $r_2(x)$   $A = 0.05$  m i  $0.1$  m i  $a = 0.5$  m.





**Slika 6.1.** *Primjeri profila podloge opisanih izrazom (6.1.) za različite vrijednosti parametra  $b$*

Ili (Markulak i Truhar 2004):

$$r(x) = \frac{1}{2} \bar{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{l_a} y \right) \quad (6.3)$$

gdje je  $\bar{a}$  amplituda udubljenja ili izbočenja na podlozi,  $l_a$  duljina udubljenja ili izbočenja,  $\bar{a} = 10^{-3} \text{ m}$ ,  $l_a = 1 \text{ m}$ ,  $l = 30 \text{ m}$ .

Neki autor (Dodds i Robson 1973, Law and Zhu, 2005) pokazali su da se površina kolnika može promatrati kao realizacija homogenog i izotropnog dvodimenzionalnog Gaussovog slučajnog procesa. Ovakva spoznaja omogućava zasebno tretiranje povremenih većih nepravilnosti površine kolnika kao što su jame.

U ISO-8608 standardima za mehaničke vibracije i profile površine kolnika, hrapavost površine kolnika povezana je s brzinom kretanja vozila preko izraza za spektralnu gustoću snage brzine i pomaka. Spektralno opisivanje površine kolnika uz poznavanje dinamičkih karakteristika vozila omogućit će dovoljno točnu analizu odziva sustava. Opisivanje površine kolnika mora biti dovoljno detaljno da može adekvatno opisati pomak ispod svakog kotača i korelaciju između pomaka svih kotača.



## 7. ODREĐIVANJE KRITIČNE BRZINE

Iz izraza koji daje točno rješenje za progib ploče uslijed djelovanja pokretne koncentrirane sile može se odrediti kritična brzina plošnog nosača:

$$w(x, y, t) = \frac{4P_0}{bl\rho t} \sum_{nm}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sin(\alpha_n \xi)}{\omega_{nm}(\beta_m^2 v^2 - \omega_{nm}^2)} [\beta_m v \sin(\omega_{nm} t) - \omega_{nm} \sin(\beta_m vt)] \quad (7.1)$$

gdje je  $w(x, y, t)$  progibna funkcija,  $P_0$  intenzitet sile koja se giba pravolinijski po ploči, te joj je poprečna koordinata  $x = \xi$ ,  $b$ ,  $l$  i  $t$  su dimenzije ploče,  $\rho$  je gustoća materijala, a  $v$  je brzina kretanja sile.

Uvjet (Fryba 1999):

$$\omega_{nm}(\beta_m^2 v^2 - \omega_{nm}^2) = 0 \quad (7.2)$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{l} \quad (7.3)$$

daje izraz za izračun donje najniže rezonantne brzine, koja se naziva i kritična brzina:

$$v_{krit} = \frac{l\omega_{nm}(1)}{\pi} \quad (7.4)$$

Iz izraza (7.1) vidljivo je da ako vrijedi izraz (7.2), tada se sila ponaša kao harmonijska pobuda sa frekvencijom ekvivalentnom prirodnoj frekvenciji ploče, te zbog toga čak i konstantna pokretna sila može pobuditi konstrukciju na vibriranje u rezonantnom području (Ouyang 2011).

Kritična brzina je svojstvo konstrukcije, no na nju se može indirektno utjecati, ako se utječe na vlastite vrijednosti konstrukcije  $\omega_{nm}(m)$ . Ova činjenica je vrlo bitna kod proučavanja interakcije teških vozila i konstrukcije, jer se uslijed kretanja vozila masa konstrukcije mijenja, a samim time se mijenja i  $\omega_{nm}$ .

Bitno je naglasiti da izraz (7.4) vrijedi samo za ploču slobodno oslonjenu na dvije suprotne strane opterećenu pokretnom silom. Ovaj izraz za kritičnu brzinu se može primijeniti na opterećenje pokretnom masom, tako da se masa vozila pribroji ukupnoj masi konstrukcije. Za složenije uvjete oslanjanja i složenije modele pokretnog opterećenja kritična brzina se ne može analitički odrediti, već se određuje eksperimentalno.

U Tablici 7.1. dan je prikaz utjecaja mase vozila na vlastite vrijednosti konstrukcije, te time i na vrijednost kritične brzine.

**Tablica 7.1.** *Utjecaj mase vozila na kritičnu brzinu konstrukcije*

masa konstrukcije [kg]	masa vozila [kg]	povećanje mase [%]	$\omega(1)$	$v_{krit}$ [m/s]	smanjenje kritične brzine [%]
$187 \cdot 10^3$	0	0	50,431	482	0
$187 \cdot 10^3$	$15 \cdot 10^3$	8	42,622	407	16
$187 \cdot 10^3$	$30 \cdot 10^3$	16	37,589	359	26
$187 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$	32	31,276	299	38

## 8. NUMERIČKA INTEGRACIJA

### 8.1 Newmarkova $\beta$ -metoda

Od svih postupaka za direktnu numeričku integraciju Newmarkova grupa metoda daje najbolje rezultate (Newmark 1959, Bathe 1996). U Newmarkovoj formulaciji osnovne jednadžbe za brzinu i pomak su dane u obliku:

$$\dot{v}_1 = \dot{v}_0 + (1 - \gamma)h \cdot \ddot{v}_0 + \gamma h \cdot \ddot{v}_1 \quad (8.1)$$

$$v_1 = v_0 + h \cdot \dot{v}_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2 \cdot \ddot{v}_0 + \beta h^2 \cdot \ddot{v}_1 \quad (8.2)$$

Parametar  $\gamma$  iz gornjeg izraza osigurava numeričko (algoritamsko) prigušenje unutar vremenskog koraka, dok parametar  $\beta$  kontrolira promjenu ubrzanja unutar vremenskog koraka (Weaver i Johnston, 1987). Za  $\gamma = 1/2$  numeričko prigušenje nije prisutno, tako da se preporuča upotreba ove vrijednosti u standardnim proračunima. Za  $\gamma = 1/2$  i  $\beta = 1/4$  dolazi se do specijalnog slučaja Newmarkove metode poznate kao metoda konstantnog prosječnog ubrzanja. U disertaciji je primijenjena eksplicitna formulacija metode prosječnog ubrzanja. Koraci u provođenju postupka numeričkog integriranja su:

(a) početni izračun

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} \quad (8.3)$$

(b) odabir vremenskog koraka  $\Delta t$

(c) izračun potrebnih parametara

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta t} c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} m \quad (8.4)$$

$$a = \frac{1}{\beta \Delta t} m + \frac{\gamma}{\beta} c \quad (8.5)$$

$$b = \frac{1}{2\beta} m + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c \quad (8.6)$$

(d) izračun nepoznanica za svaki vremenski korak  $i$ :

$$\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + a \dot{u}_i + b \ddot{u}_i \quad (8.7)$$

$$\Delta u_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}} \quad (8.8)$$

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i \quad (8.9)$$

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i \quad (8.10)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i \quad (8.11)$$

## 8.2 Metoda impulsnog ubrzanja

Metoda impulsnog ubrzanja je noviji postupak za numeričku integraciju (Kožar, 2009.), koji je nastao kao kombinacija Newmarkovih metoda konstantnog i linearnog ubrzanja. Metoda impulsnog ubrzanja omogućuje sprežanje ova dva postupka u proizvoljnim omjerima. Velika prednost ovog postupka je sposobnost svakog konstrukcijskog čvora da mijenja parametre u vremenu, na način da zapravo određene vrijednosti integracijskih parametara slijede pokretno opterećenje. Implicitna integracijska shema je dana u nastavku. Inkrementalna brzina i ubrzanje u vektorskom zapisu su:

$$\Delta \dot{D} = \ddot{D} \Delta t + \frac{1}{2} (\gamma_{2I}) \Delta \ddot{D} \Delta t \quad (8.12)$$

$$\gamma_{2I} = (2I - \gamma I) \quad (8.13)$$

$$2I = \begin{bmatrix} \dots & 2 & 0 & \dots \\ & 0 & 2 & 0 \\ & \dots & 0 & 2 \dots \end{bmatrix}, \quad \gamma I = \begin{bmatrix} \dots & \gamma_{i-1} & 0 & \dots \\ & 0 & \gamma_i & 0 \\ & \dots & 0 & \gamma_{i+1} \dots \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

$$\Delta \ddot{D} = \frac{4}{\Delta t^2} (\gamma_{2I})^{-1} \Delta D - Q, \quad Q = (\gamma_{2I})^{-1} \left( \frac{4}{\Delta t} \Delta \dot{D} + 2\ddot{D} \right) \quad (8.15)$$

$$\Delta \dot{D} = \frac{2}{\Delta t} \Delta D - 2\dot{D} \quad (8.16)$$

$$\Delta D = \left( \frac{4}{\Delta t^2} (\gamma_{2I})^{-1} M + \frac{2}{\Delta t} C + K \right)^{-1} (\Delta F + MQ + 2CD) \quad (8.17)$$

$\mathbf{M}$  je matrica masa,  $\mathbf{C}$  je matrica prigušenja,  $\mathbf{K}$  je matrica krutosti, a  $D$ ,  $\dot{D}$  i  $\ddot{D}$  su vektori pomaka, brzine i ubrzanja, respektivno. Ukupne vrijednosti pomaka, brzine i ubrzanja se ažuriraju se za svaki vremenski korak:

$$D_j = D_{j-1} + \Delta D_j, \quad \dot{D}_j = \dot{D}_{j-1} + \Delta \dot{D}_j, \quad \ddot{D}_j = \ddot{D}_{j-1} + \Delta \ddot{D}_j \quad (8.18)$$

Uravnoteženje opterećenja u svakom vremenskom koraku je vrlo bitno, jer se analiza pokretno opterećenje. Postiže se u svakom vremenskom koraku s vrijednostima iz prethodnog vremenskog koraka (Clough i Penzien, 2003):

$$\ddot{D}_{j-1} = M^{-1}(F_{j-1} - KD_{j-1} - C\dot{D}_{j-1}) \quad (8.19)$$

## 9. FORMULACIJA ITERATIVNOG POSTUPKA

Što je model pokretnog vozila složeniji, broj diferencijalnih jednadžbi koje se rješavaju u analizi interakcije vozila i konstrukcije je veći. Kod opterećenja konstrukcije pokretnom silom, potrebno je riješiti samo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu gibanja konstrukcije, jednadžba (4.3). Kod modela pokretne mase, i dalje se rješava jednadžba gibanja konstrukcije s dodatnim članom koji opisuje djelovanje inercijalnih sila na konstrukciju, jednadžba (4.5). Model pokretne mase s elastičnom oprugom opisan je zasebnom diferencijalnom jednadžbom gibanja (4.9), koja se rješava istovremeno s jednadžbom gibanja konstrukcije. Broj diferencijalnih jednadžbi kojima je opisano ponašanje modela pokretnog vozila općenito, odgovara broju stupnjeva slobode.

Sustav jednadžbi koje se rješavaju može se zapisati općenito u matričnom obliku:

$$[M_s] \cdot \{\ddot{w}\}_s + [K_s] \cdot \{w\}_s = \{F\}_s + \{F_c\}_s \quad (9.1)$$

$$[M_v] \cdot \{\ddot{z}\}_v + [K_v] \cdot \{z\}_v = \{F\}_v + \{F_c\}_v \quad (9.2)$$

gdje se jednadžba (9.1) odnosi na konstrukciju, a jednadžba (9.2) na vozilo.

Kako bi se osiguralo postojanje interakcije između vozila i konstrukcije za cijelo vrijeme analize, usvojena je pretpostavka konstantnog očuvanja kontakta vozila i podloge. Ova pretpostavka se može realizirati na dva načina, uvjetom jednakosti kontaktnih sila na konstrukciji i vozilu i uvjetom jednakosti pomaka. Ovdje je kontakt ostvaren preko uvjeta jednakosti sila, tako da se izraz za kontaktnu (interaktivnu) silu pojavljuje kao član u obje jednadžbe gibanja, i vozila i konstrukcije, (9.1) i (9.2):

$$\{F_c\}_s = \{F_c\}_v \quad (9.3)$$

Uvjet jednakosti pomaka je također zadovoljen.

Numeričke metode za rješavanje problema interakcije vozila i konstrukcije mogu se prema načinu rješavanja podijeliti na iterativne i direktne. Kod direktnih metoda, interaktivna sila

između konstrukcije i pokretnog vozila se izračuna jednom za zadani položaj mase kotača. No, u svakom vremenskom koraku je potrebno, prema trenutnom položaju kotača vozila, ažurirati matrice sustava (Ji-Seong 2008). Nedostatak direktnih metoda je taj što njihova formulacija ovisi o modelu konstrukcije i vozila, te za drugačiji tip konstrukcije ili vozila cijela formulacija se mora mijenjati. Iterativne metode koje se primjenjuju kod analize interakcije vozila i konstrukcije koriste iste matrice sustava, neovisno o položaju kotača, ali se interaktivne sile računaju iterativno. Dakle, iterativne metode se baziraju na izračunu interaktivnih sila (Chatterjee i sur. 1994, Ji Seong i sur. 2008) ili pomaka (Yang i Fonder 1996), koji onda služe i kao kriterij konvergencije.

U ovom radu je formuliran je novi iterativni postupak koji koristi prednosti i direktnih i iterativnih metoda, a zasnovan je na primjeni pokretne konačne trake. Prednosti ovog postupka su: (i) matrice sustava se računaju tako da se uzima u obzir stvarni položaj kotača u svakom vremenskom koraku, no mogu se dobiti unaprijed zahvaljujući pokretnoj konačnoj traci, te ih nije potrebno ažurirati za vrijeme iteriranja, (ii) baziran je na izračunu pomaka, no u svakom vremenskom koraku se računaju i interaktivne sile, (iii) postupak se vrlo jednostavno može prilagoditi promjeni tipa konstrukcije ili vozila, (iv) zahvaljujući primjeni metode konačnih traka vrijeme izračuna je znatno reducirano u usporedbi s drugim iterativnim postupcima.

U svrhu validiranja predložene numeričke formulacije načinjena je računalna implementacija prijašnje izloženih poglavlja. U tu svrhu razvijen je autorski kod koji je načinjen u komercijalnom programskom paketu Mathcad. Razvijeni programski kod sadržava sve opisane modele opterećenja, kao i analizirane tipove konstrukcija, te je jednostavan za prilagodbu nekim novim uvjetima i modelima.

Postupak rješavanja se može ukratko opisati na slijedeći način:

1. definirati veličine:  $m_v$ ,  $m_{ik}$ ,  $k_{ik}$ ,  $k_i$ ,  $c_i$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  i  $e$
2. definirati nepoznanice:  $w$ ,  $z$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $z_{ik}$
3. odrediti veličinu vremenskog inkrementa  $\Delta t$
4. odrediti gravitacijsko opterećenje na konstrukciju
5. odrediti matricu s podacima o intenzitetu i položaju opterećenja u vremenu
6. odrediti matricu s podacima o promjeni opterećenja u novom vremenskom koraku u odnosu na prošli korak
7. odrediti matricu masa za svaki položaj opterećenja
8. odrediti utjecaj podloge na vozilo



9. riješiti jednadžbu gibanja konstrukcije te odrediti pomak konstrukcije  $w_I$  i kontaktne sile  $F_c$  uz pretpostavku ostalih nepoznanica:  $z_I = \alpha_1 = \theta_I = z_{ikl} = 0$
10. riješiti jednadžbe gibanja mase kotača za dobivanje vrijednosti  $z_{ikl}$  uz pretpostavku  $z_I = \alpha_1 = \theta_I = 0$  i poznate vrijednosti pomaka  $w_I$  dobivene u 6. koraku
11. riješiti jednadžbe za ravnotežu vertikalnih sila za dobivanje pomaka vozila  $z_I$  uz pretpostavku  $\alpha_1 = \theta_I = 0$ , te  $w_I$  dobivene u 6. koraku, i  $z_{ik}$  dobivene u 7. koraku
12. izračunati vrijednosti rotacije vozila  $\theta_I$  za poznate vrijednosti  $w_I$ ,  $z_{ikl}$  i  $z_I$  dobivene u prethodnim koracima
13. prijeći na novi iterativni korak, odnosno ponavljati izvođenje koraka 9. do 12.
14. ponavljati iterativni postupak dok se ne dobije rješenje zadovoljavajuće točnosti

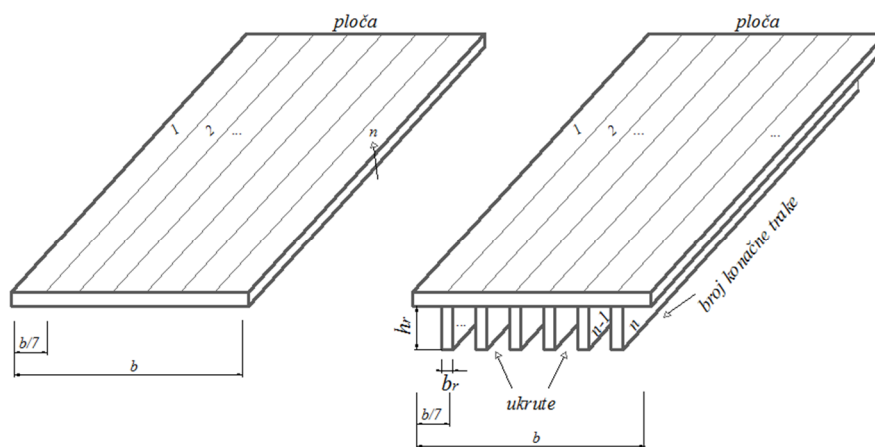
## 10. NUMERIČKI PRIMJERI

U ovom poglavlju dani su rezultati parametarske analize utjecaja različitih veličina na interakciju vozila i konstrukcije. Promatran je utjecaj mase i brzine vozila, oblika poprečnog presjeka konstrukcije, te utjecaj neravnina na površini konstrukcije, na dinamički progib konstrukcije.

Analizirana su dva tipa konstrukcije:

1. slobodno oslonjena ploča, Slika 10.1
2. slobodno oslonjena ploča sa šest uzdužnih ukruta, Slika 10.1. i 10.2

Ploča i ukrute su diskretizirane konačnim trakastim ljuskama, kako je preikazano na Slici 10.1.



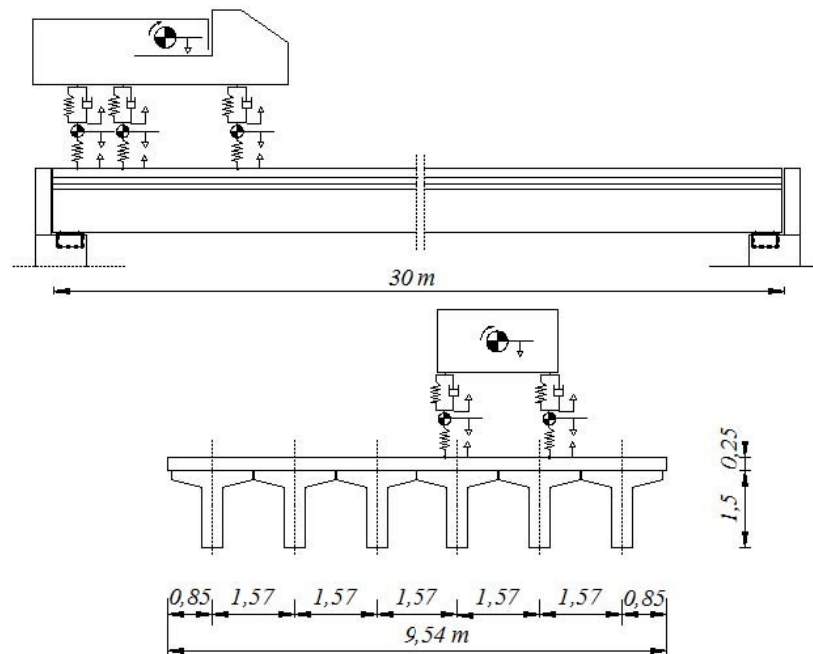
Slika 10.1. Modeli analiziranih konstrukcija

Promatrano je pet tipova pokretnog opterećenja:

1. pokretna sila,
2. pokretna masa,
3. pokretna masa s oprugom (2 stupnja slobode),
4. dvodimenzionalni model vozila (5 stupnjeva slobode) i

## 5. trodimenzionalni model vozila (9 stupnjeva slobode), Slika 10.2.

Model interakcije koji je rezultat istraživanja odgovara modelu stvarnog cestovnog mosta opterećenog 3D modelom vozila sa 9 stupnjeva slobode, Slika 10.2.



**Slika 10.2.** Prikaz uzdužnog i poprečnog presjeka analiziranog modela mosta s modelom vozila s tri osovine

U Tablicama 10.1. – 10.5. dani su podaci o analiziranim modelima konstrukcije i opterećenja.

**Tablica 10.1.** Podaci o konstrukciji

Model konstrukcije	L [m]	b [m]	h [m]	E [N/m <sup>2</sup> ]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\nu$	I [m <sup>4</sup> ]
ploča	30	10	1.5	$3.5 \cdot 10^{10}$	2500	0.2	2.67
ploča s ukrutama	30	10	0.7	$3.5 \cdot 10^{10}$	2500	0.2	2.67



**Tablica 10.4.** Veličine korištene u parametarskoj analizi i njihove vrijednosti

$M_v$ [kg]	$M_v/M_k$	$v$ [m/s]	$I_p$ [m <sup>4</sup> ]	$m_i$ [kg]	$m_i/M_v$
$15 \cdot 10^3$	0,035	10	1,02	0	0
$30 \cdot 10^3$	0,045	15	2,67	1500	0,05
$40 \cdot 10^3$	0,055	30	4,15	3000	0,10
$60 \cdot 10^3$	0,065	40	5,64	4500	0,15
$90 \cdot 10^3$	0,15	60	6,67	6000	0,20

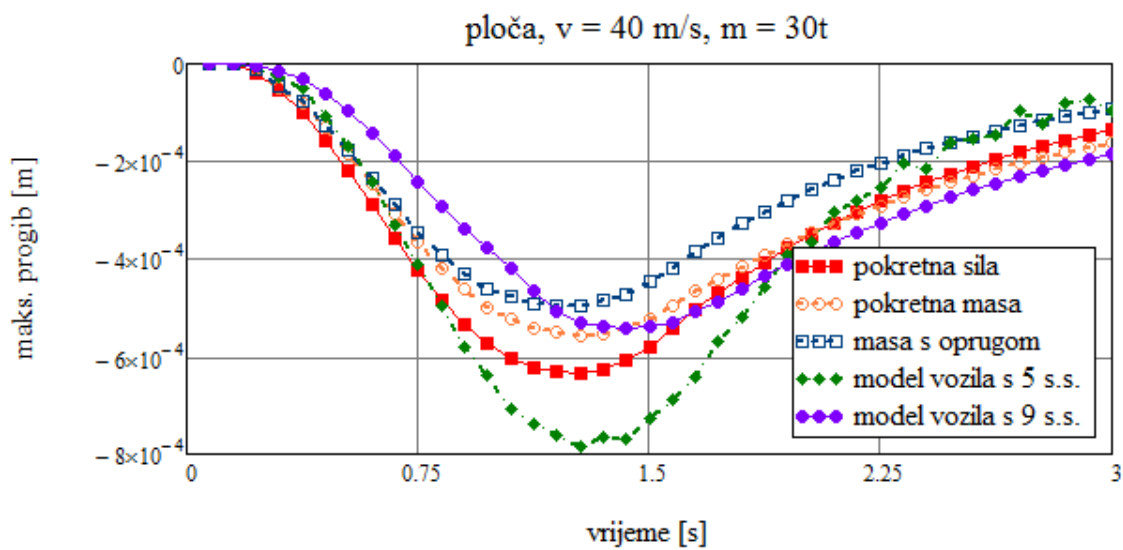
**Tablica 10.5.** Dimenzije promatranih poprečnih presjeka konstrukcije

Krutost p.p. $I_p$ [m <sup>4</sup> ]	Dimenzije p.p. ploče	Dimenzije p.p. ploče s	
		ukrutama	
		ploča	ukrute
1,02	$b = 10$ m	$b = 10$ m	$b_u = 0,4$ m
	$h = 1,07$ m	$h = 0,7$ m	$h_u = 0,7$ m
2,67	$b = 10$ m	$b = 10$ m	$b_u = 0,4$ m
	$h = 1,48$ m	$h = 0,7$ m	$h_u = 1,25$ m
4,15	$b = 10$ m	$b = 10$ m	$b_u = 0,4$ m
	$h = 1,71$ m	$h = 1,0$ m	$h_u = 1,25$ m
5,64	$b = 10$ m	$b = 10$ m	$b_u = 0,4$ m
	$h = 1,89$ m	$h = 1,0$ m	$h_u = 1,44$ m
6,67	$b = 10$ m	$b = 10$ m	$b_u = 0,4$ m
	$h = 2,00$ m	$h = 1,2$ m	$h_u = 1,5$ m

p.p. – poprečni presjek

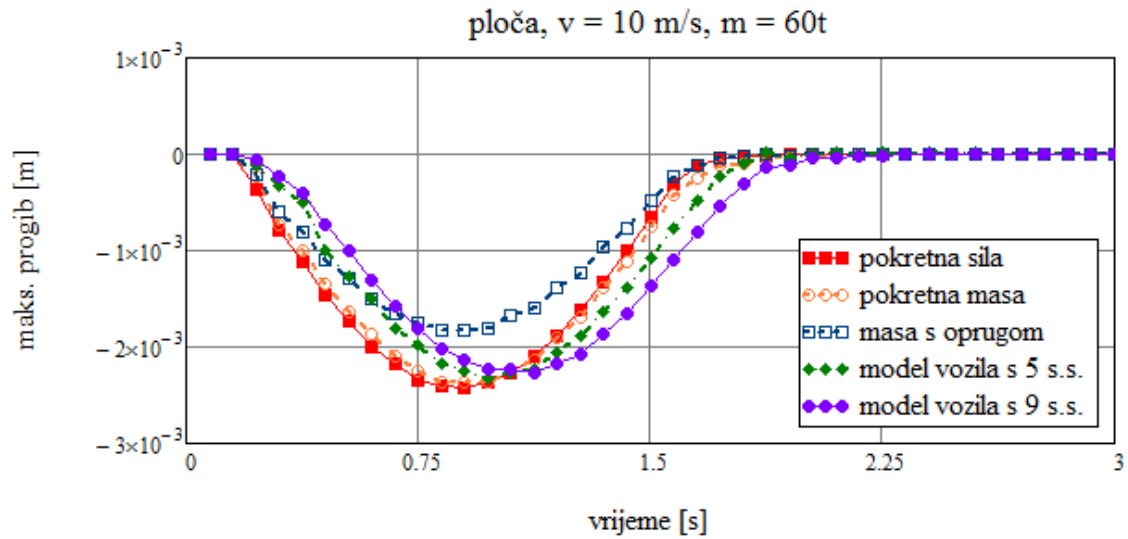
## 10.1. Analiza plošnog nosača uslijed djelovanja pokretnog opterećenja

Na Slikama 10.3. i 10.4. dana je usporedba maksimalnih dinamičkih progiba slobodno oslonjene ploče, za različite modele pokretnog opterećenja.



**Slika 10.3.** Dinamički progib plošnog nosača za različite modele opterećenja,  $v = 40 \text{ m/s}$ ,  
 $m = 30 \text{ t}$

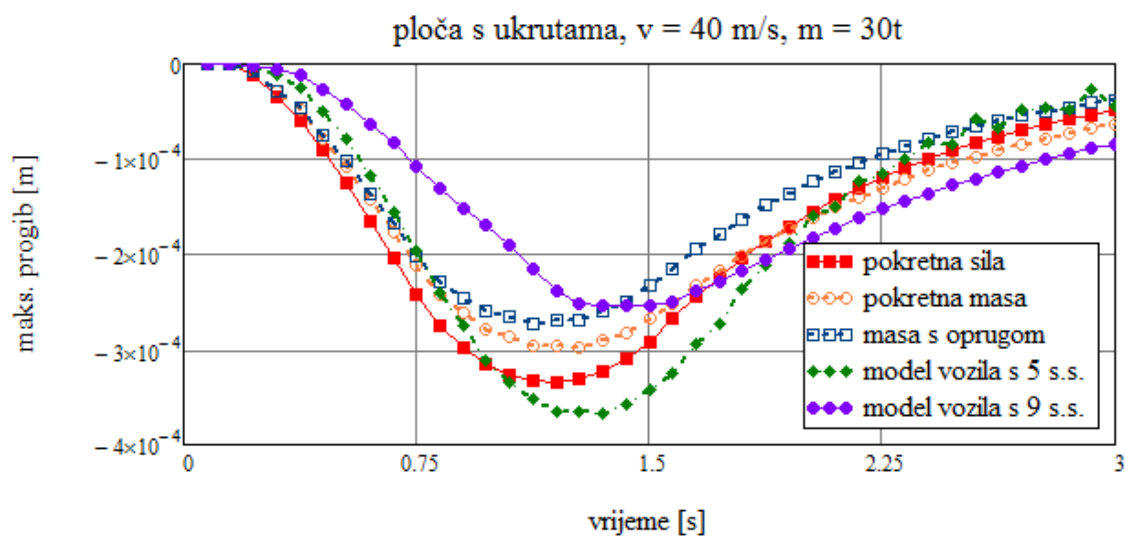
Na Slici 10.3. dana je promjena maksimalnog dinamičkog progiba za malu masu i veliku brzinu vozila, dok je na Slici 10.4. prikazan dinamički progib za veliku masu i malu brzinu vozila.



**Slika 10.4.** Dinamički progib plošnog nosača za različite modele opterećenja,  $v = 10 \text{ m/s}$ ,  
 $m = 60 \text{ t}$

## 10.2. Analiza plošnog nosača s ukрутama uslijed djelovanja pokretnog opterećenja

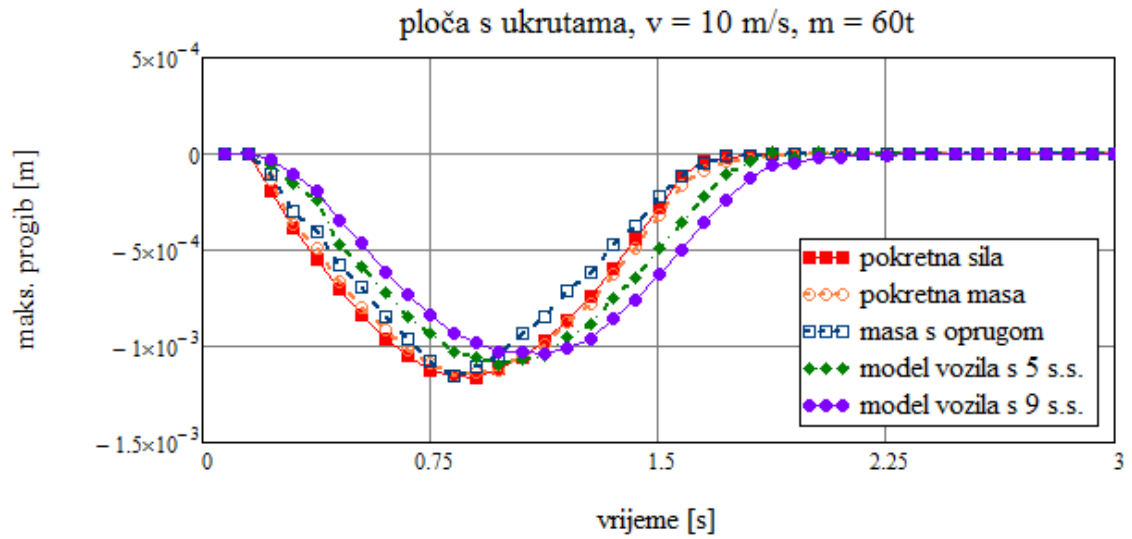
Na Slikama 10.5. i 10.6. dana je usporedba promjene maksimalnog progiba slobodno oslonjene ploče s ukрутama, za različite modele pokretnog opterećenja.



**Slika 10.5.** Dinamički progib ploče s ukрутama za različite modele opterećenja,  $v = 40 \text{ m/s}$ ,  $m = 30 t$

Na Slici 10.5., dana je promjena dinamičkog progiba za malu masu vozila i veliku brzinu kretanja, dok je na Slici 10.6. prikazan dinamički progib za veliku masu vozila i malu brzinu kretanja. Iz dijagrama na Slikama 10.3-10.6. vidljivo je da model vozila sa 9 stupnjeva slobode značajno odstupa od ostalih modela.



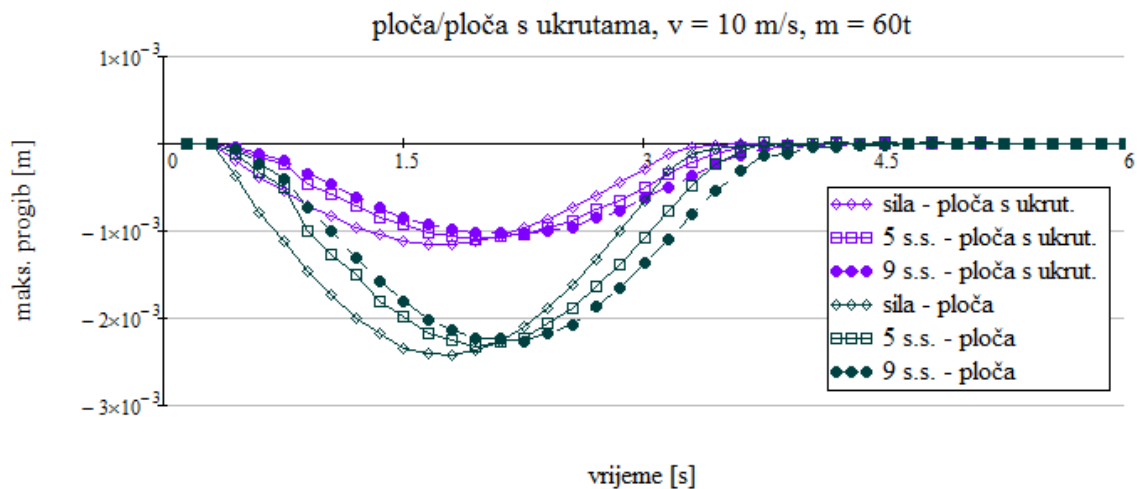


**Slika 10.6.** Dinamički progib ploče s ukрутama za različite modele opterećenja,  $v = 10 \text{ m/s}$ ,  $m = 60 \text{ t}$

### 10.3. Usporedba ponašanja plošnog nosača bez ukruta i sa ukrutama uslijed djelovanja pokretnog opterećenja

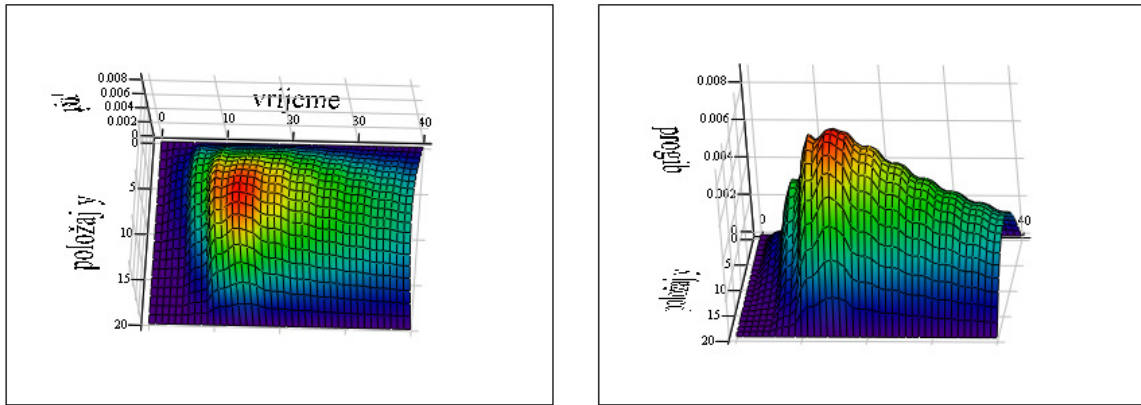
#### 10.3.1. Usporedba dinamičkih progiba za različite modele vozila

Slika 10.7. prikazuje grafičku usporedbu distribucije maksimalnog progiba u vremenu za ploču bez ukruta i ploču sa ukrutama. Krutost poprečnog presjeka ploče ekvivalentna je krutosti ploče s ukrutama. Razlika u dinamičkim progibima između ploče bez i sa ukrutama se smanjuje sa povećanjem složenosti modela vozila.

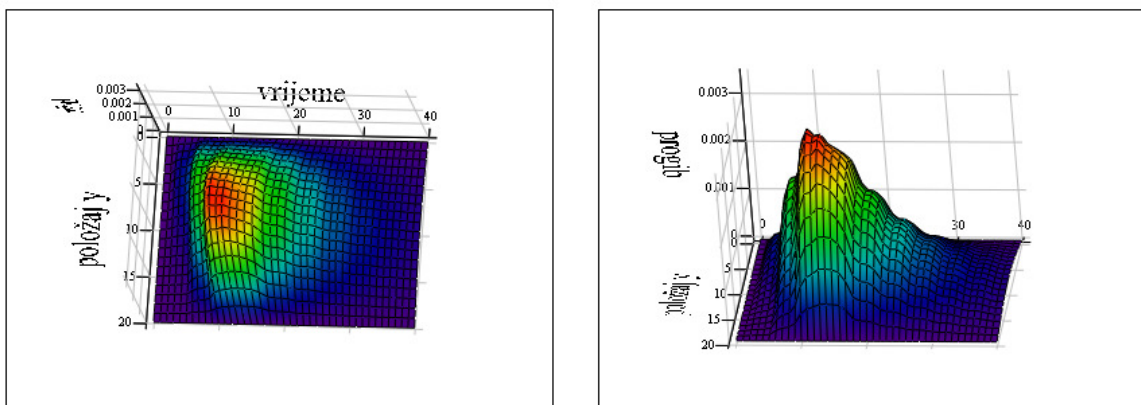


**Slika 10.7.** Usporedba dinamičkih progiba slobodno olonjene ploče bez i sa ukrutama

Na Slici 10.8. dan je grafički prikaz distribucije maksimalnih dinamičkih progiba u vremenu i prostoru za ploču bez ukruta i ploču s ukrutama, iz dva različita pogleda.



(a)



(b)

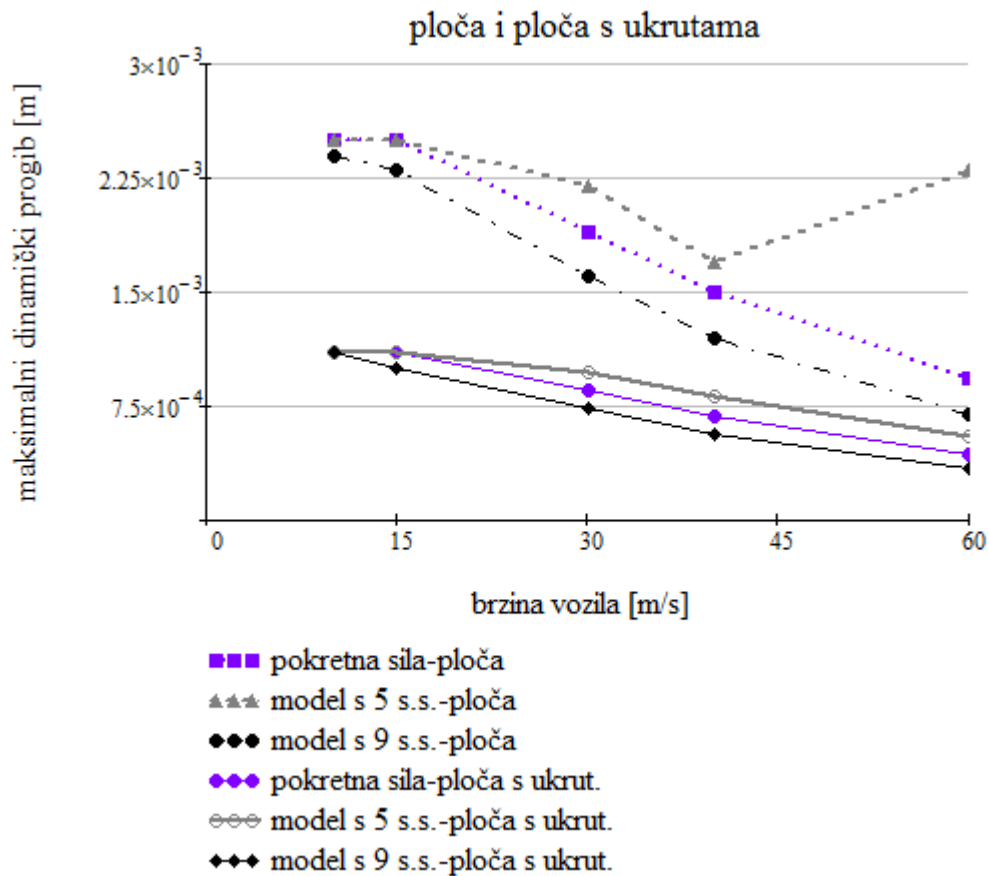
**Slika 10.8.** Prikaz distribucije progiba u prostornoj i vremenskoj domeni za: (a) ploču bez ukruta i (b) ploču s ukrutama

Na Slici 10.8. vidljivo je da ploča bez ukruta uslijed djelovanja prostornog modela vozila ima veće vrijednosti progiba od ploče sa ukrutama, te da se dinamički progib ove dvije konstrukcije različito mijenja u vremenu.

### 10.3.2. Utjecaj mase i brzine vozila na dinamički progib konstrukcije

Na Slici 10.9. prikazan je utjecaj promjene brzine pokretnog opterećenja na promjenu maksimalnog progiba slobodno oslonjene ploče bez i sa ukрутama, za tri različita modela vozila: pokretnu silu, modele vozila sa 5 i sa 9 stupnjeva slobode.

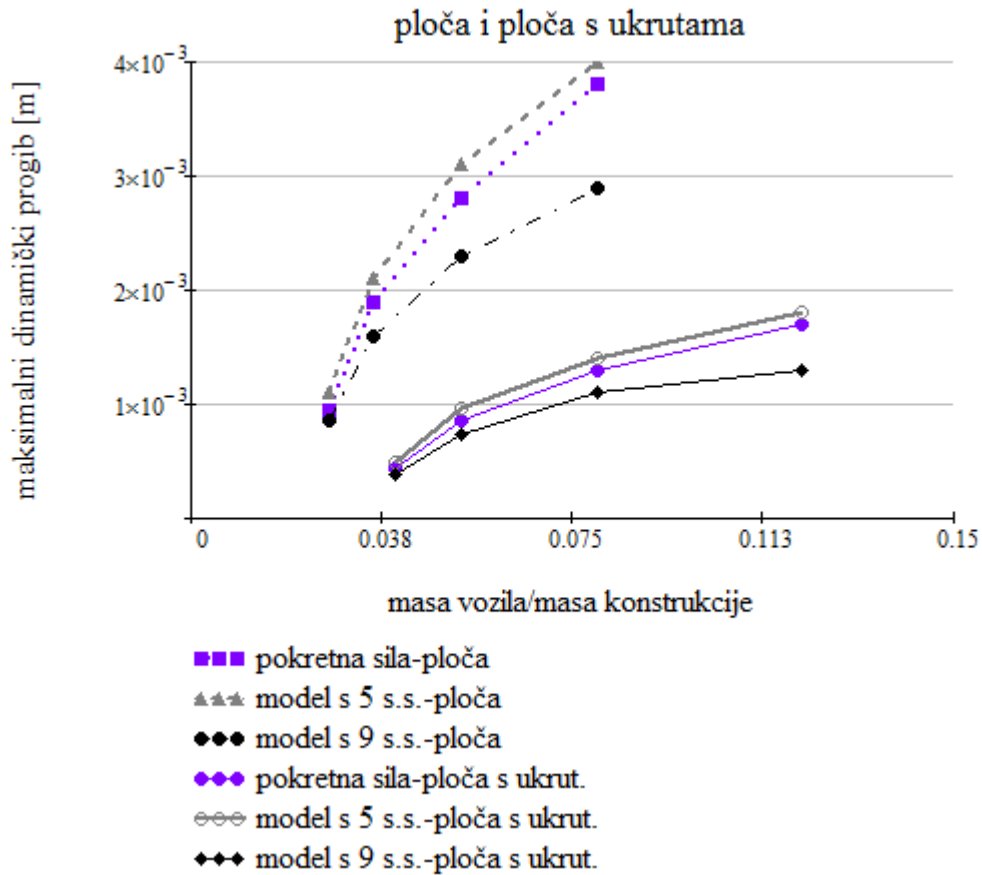
Model vozila sa 9 stupnjeva slobode daje najniže vrijednosti progiba, za razliku od modela sa 5 stupnjeva slobode. Razlika se javlja zbog drugačijeg prijenosa opterećenja i različitih stupnjeva slobode koji se uzimaju u obzir kod ta dva modela.



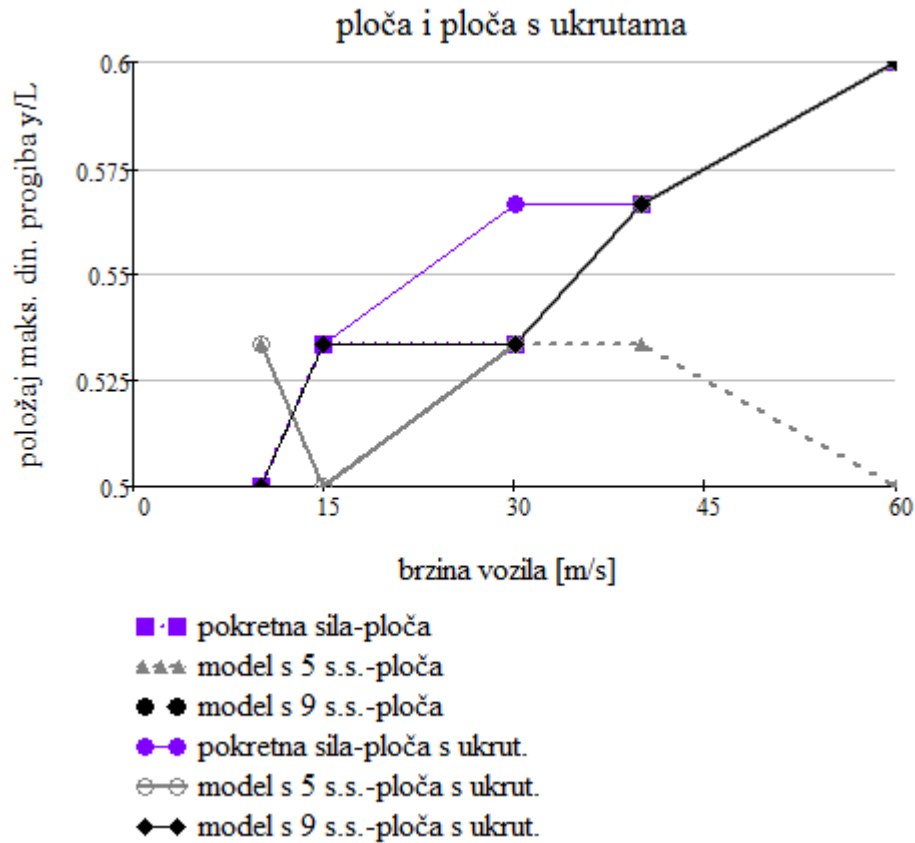
**Slika 10.9.** Usporedba krivulja ovisnosti dinamičkog progiba o promjeni brzine vozila za ploču bez i sa ukрутama za različite modele vozila

Na Slici 10.10. prikazana je ovisnost maksimalnog dinamičkog progiba ploče bez i sa ukрутama o promjeni mase vozila. Na apscisi je prikazan odnos mase vozila i mase

konstrukcije. Može se zaključiti da je rast maksimalnog progiba konstrukcije s porastom mase vozila značajno sporiji kod modela vozila sa 9 stupnjeva slobode, što se može objasniti većom površinom preko koje se prenosi opterećenje na konstrukciju. Kod modela pokretne sile, utjecaj promjene mase ogleda se samo u promjeni intenziteta gravitacijskog opterećenja, nema doprinosa promjeni mase konstrukcije. Zbog toga je ovisnost mase i progiba kod ploče s ukрутama i modela pokretne sile gotovo linearna.



**Slika 10.10.** Usporedba krivulja ovisnosti dinamičkog progiba o odnosu mase vozila i mase konstrukcije za ploču bez i sa ukрутama za različite modele vozila

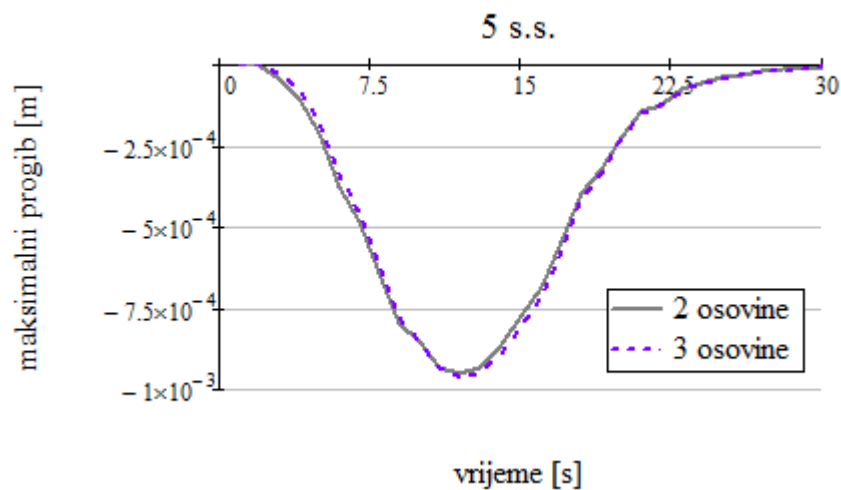


**Slika 10.11.** Dijagram promjene položaja maksimalnog dinamičkog progiba ploče bez i sa ukрутama, ovisno o promjeni brzine kretanja vozila

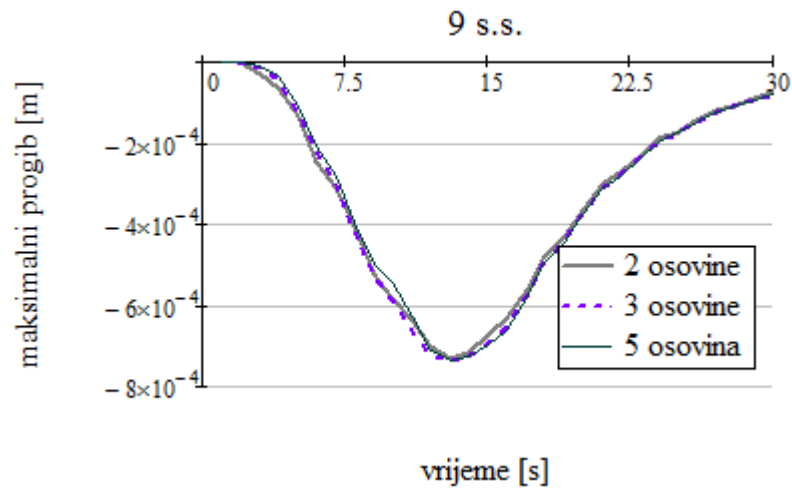
Slika 10.11. prikazuje promjenu položaja točke s najvećom vrijednosti dinamičkog progiba ovisno o promjeni brzine kretanja vozila. Dana je usporedba za tri modela vozila: pokretnu silu, model vozila sa 5 stupnjeva slobode i model vozila sa 9 stupnjeva slobode. Krivulje za pokretnu silu model sa 5 stupnjeva slobode se u nekom trenutku račvaju kad se radi o ploči bez i sa ukрутama, dok se krivulja za model vozila sa 9 stupnjeva slobode za ploču bez ukruta poklapa s krivuljom za ploču s ukрутama. Dakle za model vozila sa 9 stupnjeva slobode položaj maksimalnog dinamičkog progiba se ne mijenja ako se na ploču dodaju ukroute.

### 10.3.3. Utjecaj broja osovina i dimenzija vozila na dinamički progib konstrukcije

Na Slici 10.12. je prikazan utjecaj broja osovina pokretnog vozila na raspodjelu dinamičkog progiba u vremenu, za model vozila sa 5, a na Slici 10.13. za model vozila sa i sa 9 stupnjeva slobode. Može se vidjeti da broj osi nema značajan utjecaj, ukoliko su raspoređene na malom razmaku, odnosno, ukoliko je vozilo relativno malih dimenzija.

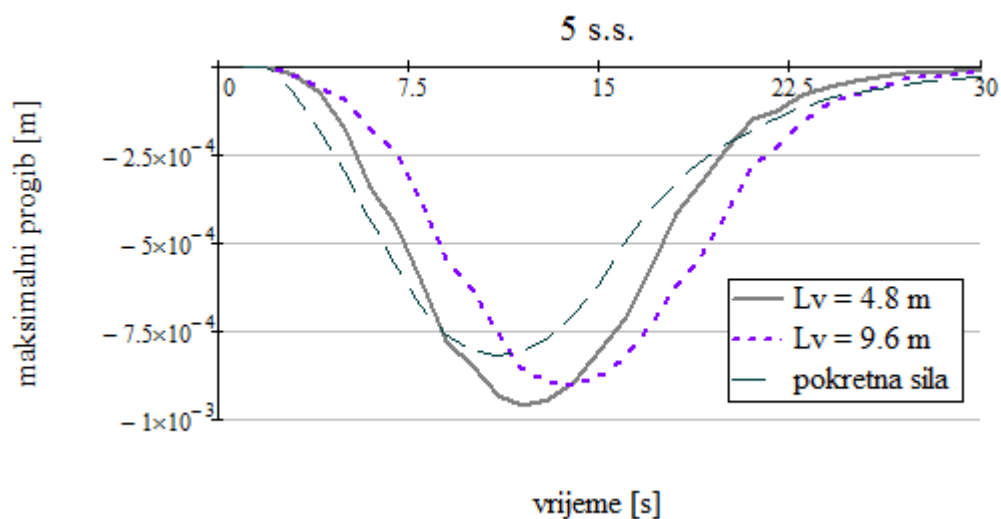


**Slika 10.12.** Usporedba dinamičkih progiba za različit broja osovina modela vozila sa 5 stupnjeva slobode (2D model)



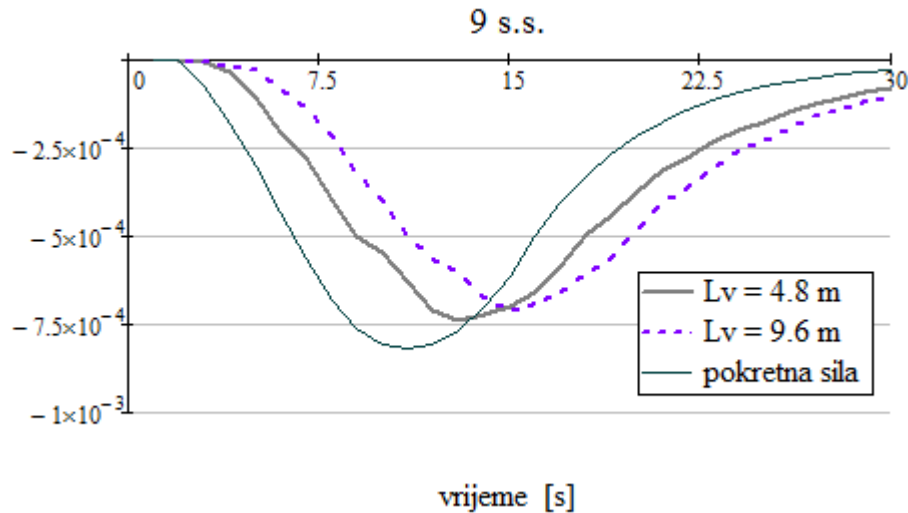
**Slika 10.13.** Usporedba dinamičkih progiba za različit broja osovina modela vozila sa 9 stupnjeva slobode (3D model)

Slike 10.14. i 10. 15. prikazuju utjecaj dimenzija vozila na ponašanje ploče s ukрутama.



**Slika 10.14.** Usporedba dinamičkih progiba za različite dimenzije modela vozila sa 5 stupnjeva slobode (2D model)





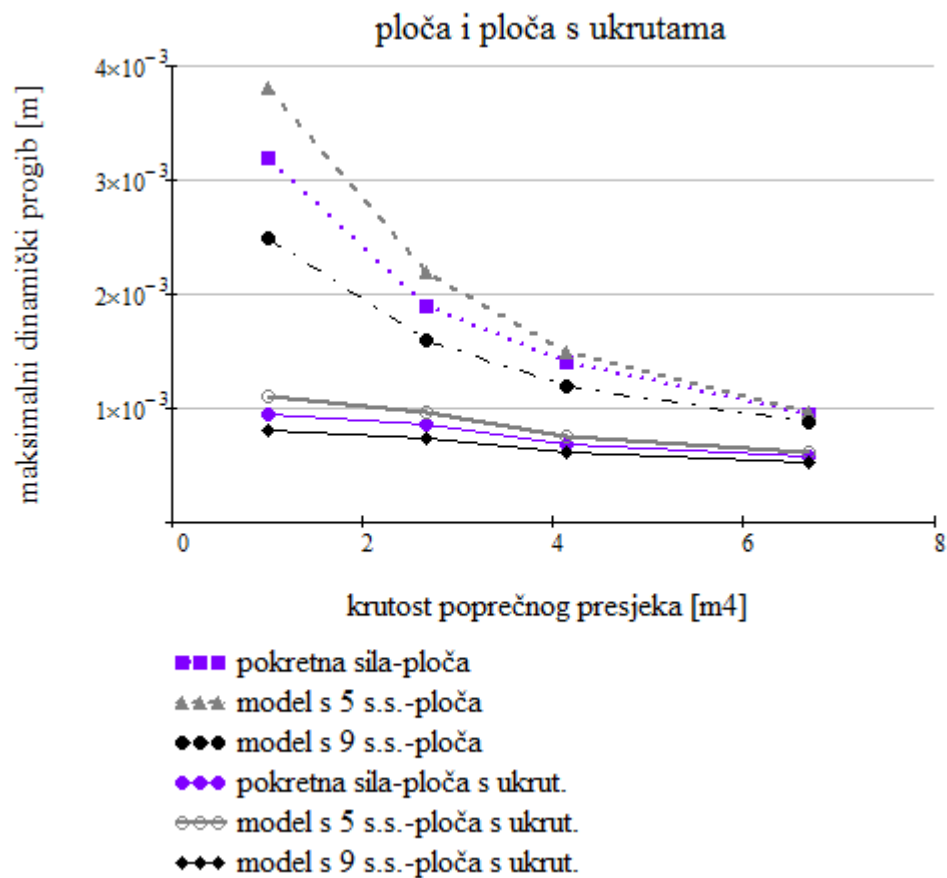
**Slika 10.15.** Usporedba dinamičkih progiba za različite dimenzije modela vozila sa 9 stupnjeva slobode (3D) model

Iz dijagrama na Slikama 10.14. i 10.15. se vidi da se s povećanjem dimenzija vozila odgovor konstrukcije mijenja. To se odnosi na modele vozila sa 5 i 9 stupnjeva slobode, čiji se rezultati značajno udaljavaju od rezultata za pokretnu silu. Na model pokretne sile i mase promjena dimenzija vozila nema nikakvog utjecaja.

Može se zaključiti da raspon između krajnjih osovina vozila značajno utječe na ponašanje konstrukcije. Najveći je utjecaj zabilježen kod prostornog modela vozila sa 9 stupnjeva slobode, koji je najsloženiji među promatranim modelima. Sa povećanjem raspona osovina povećava se i utjecaj broja osovina vozila, te tako nije dovoljno model vozila svesti na osnovni prostorni model sa samo dvije krajnje osovine. Prva tri promatrana modela: pokretna sila, pokretna masa i model sa 2 stupnja slobode uopće ne ovise od dimenzijama vozila i broju osovina, jer ih niti ne uzimaju u obzir. Stoga su neprikladni za modeliranje vozila sa više osovina.

### 10.3.4. Utjecaj krutosti poprečnog presjeka na dinamički progib konstrukcije

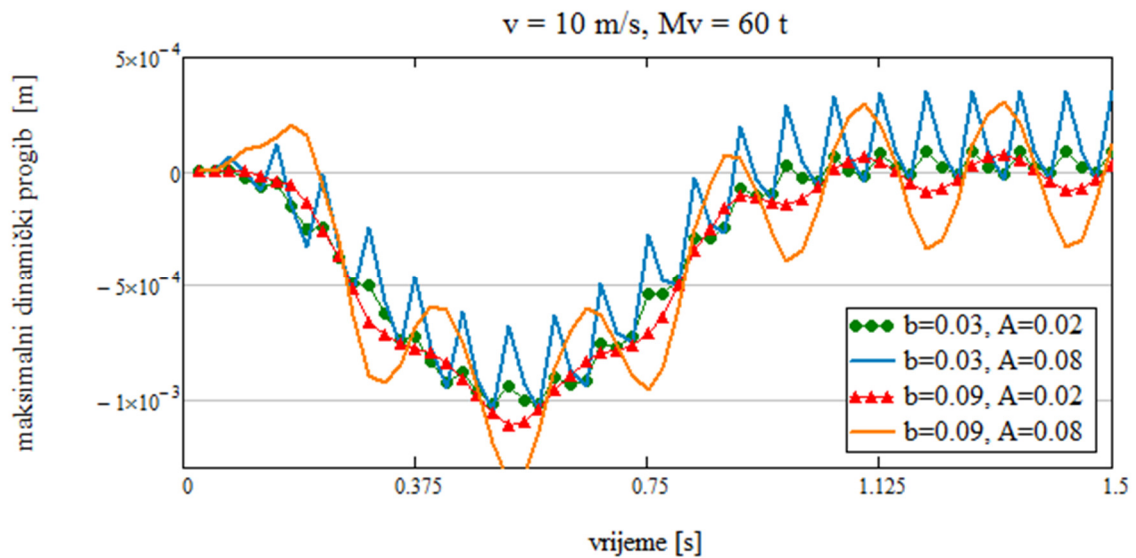
Jedna od hipoteza ovog rada je ta da su oblik i krutost poprečnog presjeka vrlo važni utjecajni faktori za interakciju vozila i konstrukcije. Da bi se ta tvrdnja dokazala, provedena je analiza slobodno oslonjene ploče i slobodno oslonjene ploče sa šest vertikalnih ukruta u uzdužnom smjeru, te su uspoređeni rezultati. Ova dva tipa konstrukcije imaju ekvivalentnu krutost. Tako je na Slici 10.16. dana usporedba krivulja ovisnosti progiba i krutosti poprečnog presjeka za ova dva tipa konstruktivnih modela. Može se vidjeti da kod ploče s ukrutama sva tri modela opterećenja pokazuju gotovo jednaku ovisnost, što nije slučaj kod ploče bez ukruta. No, i za vrlo veliku krutost poprečnog presjeka još uvijek postoji razlika u rezultatima za različite modele. Treba imati u vidu da je usporedba na Slici 10.16. načinjena za relativno mali odnos masa vozila i konstrukcije.



**Slika 10.16.** Usporedba krivulja ovisnosti dinamičkog progiba o krutosti poprečnog presjeka za ploču bez i sa ukrutama za različite modele vozila

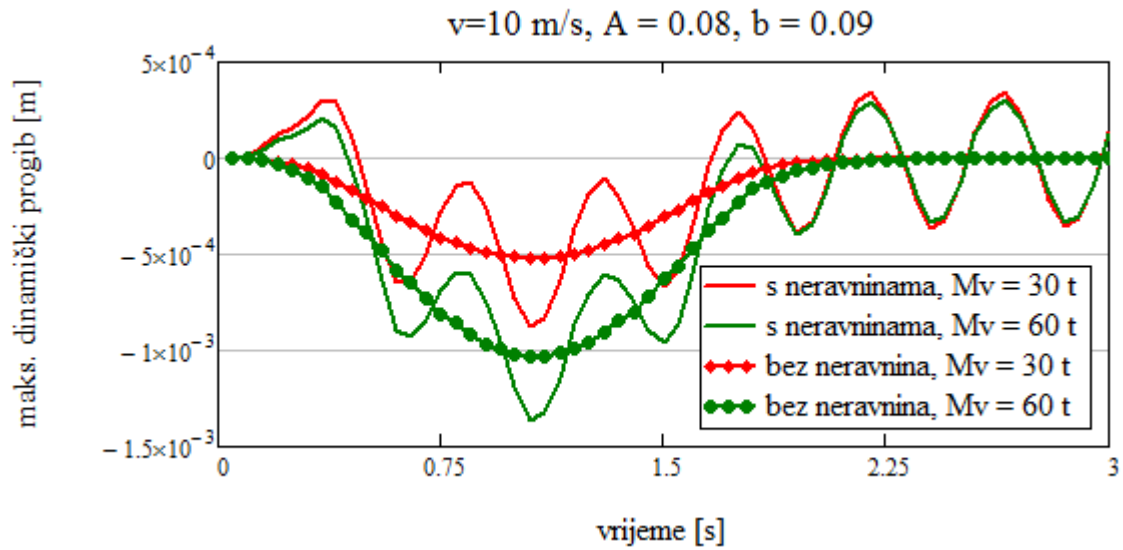
### 10.3.5. Utjecaj neravnina podolge na dinamički progib konstrukcije

Na Slici 10.17. je prikazan utjecaj oblika profila podloge na dinamički odgovor konstrukcije. Ovdje je promatran samo utjecaj modela vozila sa 9 stupnjeva slobode.

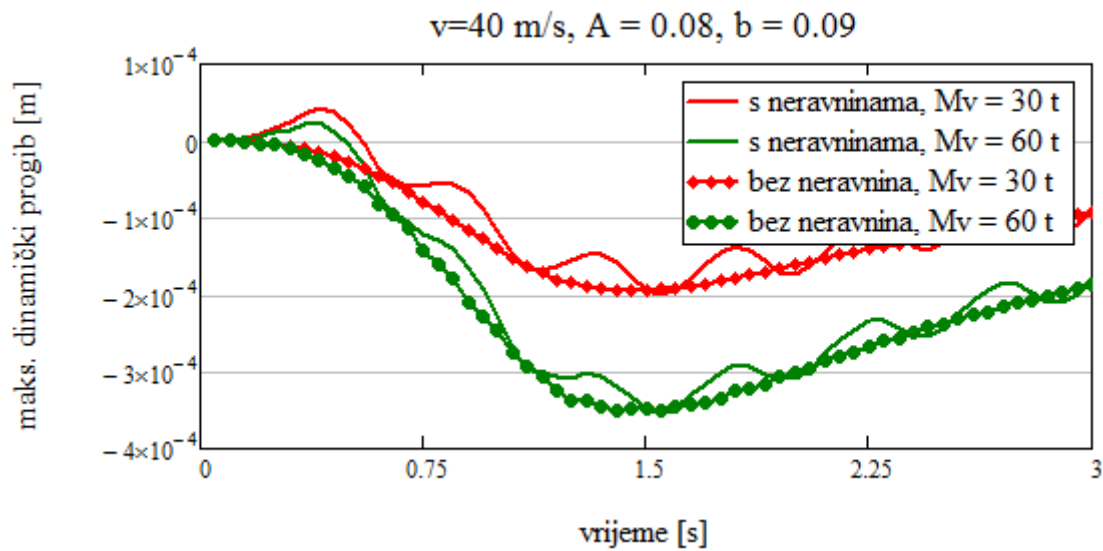


**Slika 10.17.** Usporedba dinamičkih progiba ploče s ukrutama za različite parametre funkcije opisivanja neravnina podloge

Dijagrami dinamičkog progiba na Slikama 10.18. i 10.19. pokazuju da povećanje mase i brzine vozila umanjuje utjecaj neravnina podloge, što se objašnjava djelovanjem inercijalnih sila.



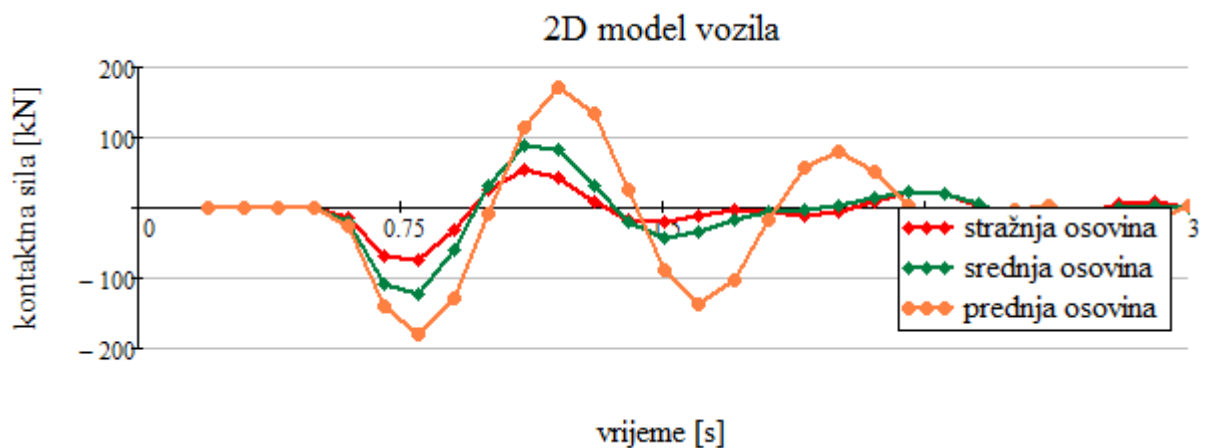
**Slika 10.18.** Utjecaj neravnina podloge na dinamički progib ploče s ukрутama za različite mase vozila i  $v = 10 \text{ m/s}$



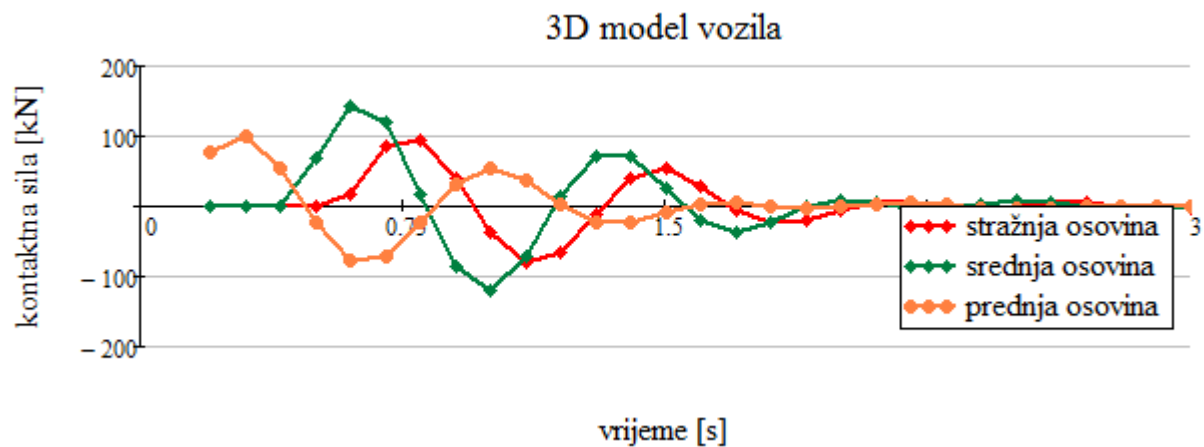
**Slika 10.19.** Utjecaj neravnina podloge na dinamički progib ploče s ukрутama za različite mase vozila i  $v = 40 \text{ m/s}$

### 10.3.6. Prikaz kontaktnih sila

Na Slici 10.20. je prikazana usporedba kontaktnih sila između vozila i ploče s ukрутama za model vozila sa 5 stupnjeva slobode, a na Slici 10.21. za model vozila sa 9 stupnjeva slobode. Usporedbom kontaktnih sila za ova dva modela vozila može se zaključiti da su kontaktne sile kod složenijeg modela vozila (9 s.s.) manjeg intenziteta, nego kod jednostavnijeg modela vozila (5 s.s.). Objašnjenje za to je činjenica da se opterećenje kod modela vozila s više osovina prenosi na konstrukciju preko više točaka. Pojava negativnih vrijednosti kontaktnih sila je posljedica pretpostavke da su vozila i konstrukcija konstantno u kontaktu, tj. nema odvajanja vozila.



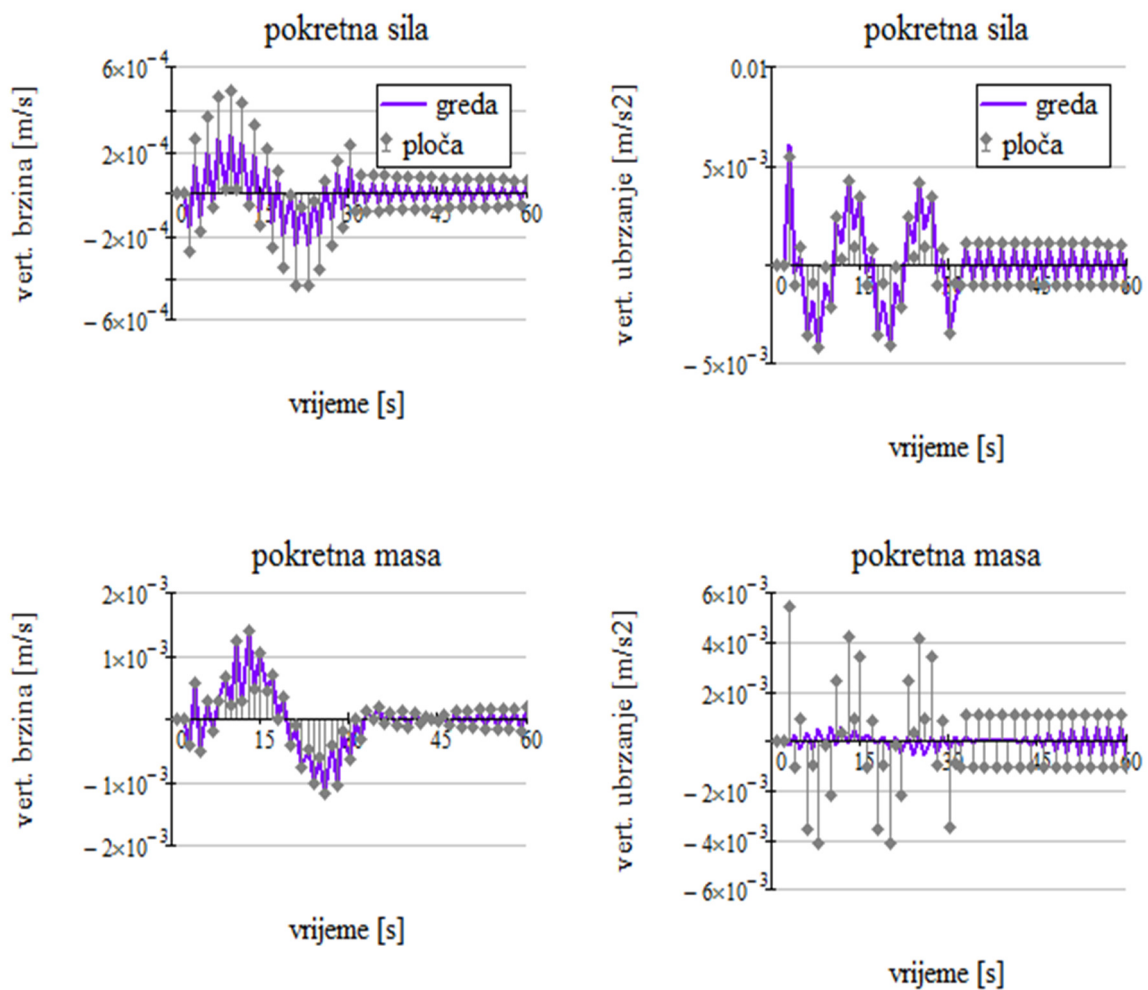
**Slika 10.20.** Kontaktne sile između ploče s ukрутama i modela vozila sa 5 stupnjeva slobode

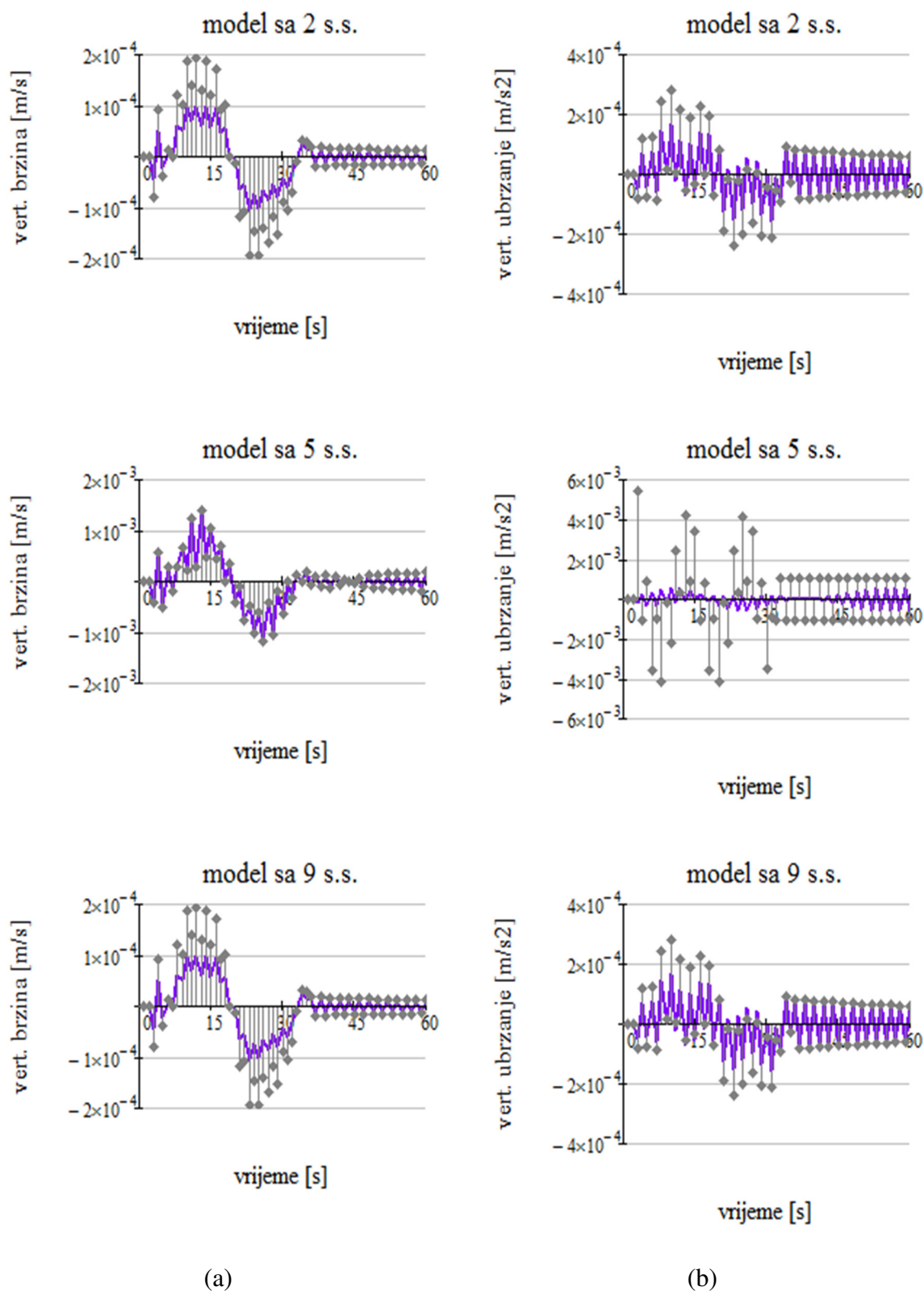


**Slika 10.21.** Kontaktne sile između ploče s ukrutama i modela vozila sa 9 stupnjeva slobode

### 10.3.7. Usporedba vertikalnih brzina i ubrzanja na konstrukciji

Slika 10.22. prikazuje usporedbu vertikalnih brzina i ubrzanja za ploču bez i sa ukрутama za različite modele pokretnog opterećenja i to brzinu kretanja od 10 m/s i masu vozila od 30 t.





**Slika 10.22.** Usporedba (a) vertikalnih brzina i (b) vertikalnih ubrzanja za ploču bez i sa ukрутama za različite modele opterećenja

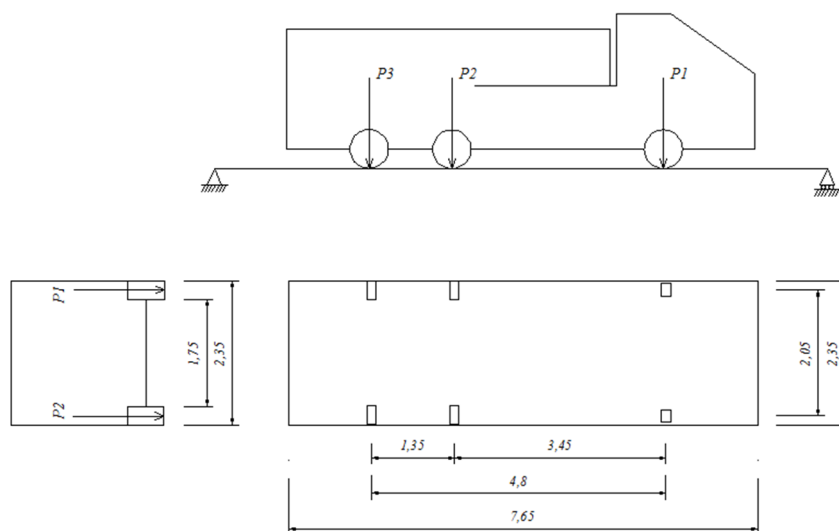


Iz dijagrama na Slici 10.22. uočljivo je da model ploče bez ukruta daje veće vrijednosti vertikalnih brzina i ubrzanja, i to za svaki model vozila. Ova činjenica također potvrđuje tvrdnju da poprečni presjek bitno mijenja odgovor konstrukcije u interakciji s pokretnim vozilom.

## 11. VERIFIKACIJA MODELA USPOREDBOM S REZULTATIMA EKSPERIMENTALNIH ISPITIVANJA

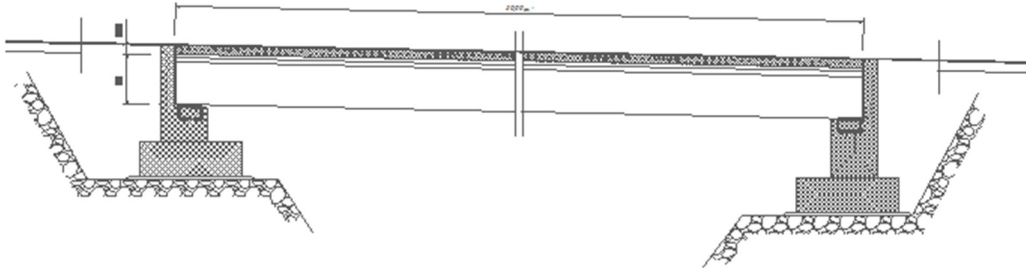
### 11.1. Usporedba numeričkih i eksperimentalno dobivenih dinamičkih progiba na cestovnom mostu Mavrovija

Za verificiranje modela mosta opterećenog pokretnim vozilom, osim rješenja u zatvorenom obliku korištena su i eksperimentalna ispitivanja cestovnog nadvožnjaka Mavrovija na dionici ceste tunel Učka – Kršan. Izvršeno je dinamičko opterećenje nadvožnjaka prelaskom dva troosovinska vozila pojedinačne mase od 30,92 t i 30,88 t, brzinom od 15 km/h, Slika 11.1.

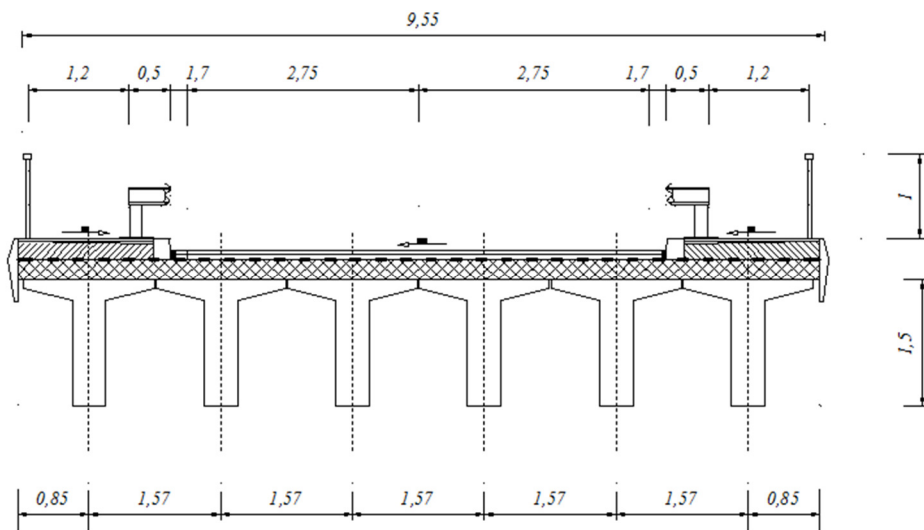


**Slika 11.1.** Skica troosovinskog vozila kojim je opterećena konstrukcija nadvožnjaka pri dinamičkom ispitivanju

Poprečni presjek nadvožnjaka čini šest standardnih predgotovljenih betonskih nosača T-presjeka, prosječne visine 150 cm, na kojima se nalazi AB ploča debljine 25 cm, Slika 11.3. Rasponska konstrukcija je 30 m duga i 9,8 m široka, Slika 11.2.

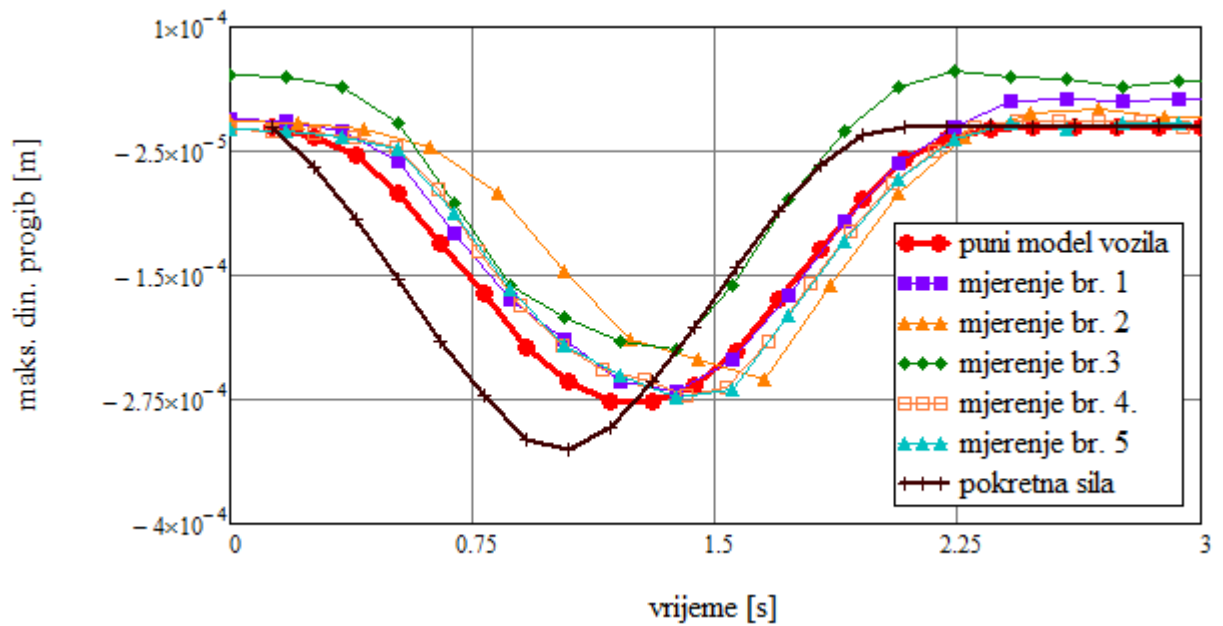


**Slika 11.2** Prikaz uzdužnog presjeka cestovnog nadvožnjaka Mavrovija



**Slika 11.3.** Prikaz poprečnog presjeka cestovnog nadvožnjaka Mavrovija

Na Slici 11.4. dana je usporedba rezultata 5 setova eksperimentalnih mjerenja na mostu Mavrovija s rezultatom numeričke analize za pokretnu silu, kao najjednostavniji model pokretnog opterećenja, i za 3D model vozila s 9 stupnjeva slobode. Iz priloženog prikaza dinamičkog progiba može se vidjeti da se rezultati za 3D model vozila izvrsno slažu s rezultatima mjerenja na mostu, dok se rješenje za pokretnu silu značajno razlikuje.



**Slika 11.4.** Usporedba izmjerenog i izračunatog dinamičkog progiba cestovnog mosta Mavrovija

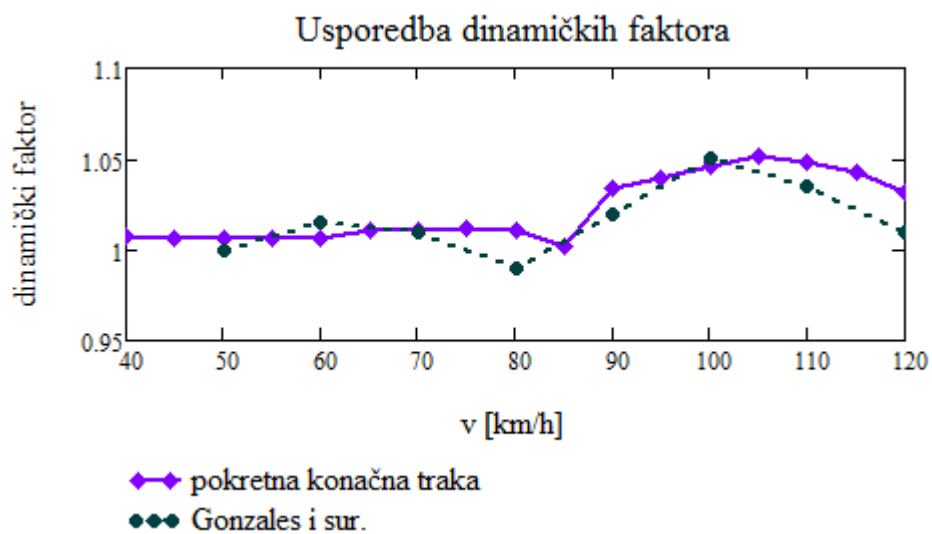
## 11.2. Usporedba izračunatih i eksperimentalno dobivenih dinamičkih faktora na cestovnom mostu Vransko

Gonzalez i sur. su u svom radu prikazali dinamičke faktore izračunate iz odnosa statičkih i dinamičkih momenata savijanja, koji su dobiveni iz deformacija izmjerenih na mostu Vransko u Sloveniji (Gonzalez i sur. 2010). Most Vransko je cestovni most koji se nalazi 40-ak km SI od Ljubljane. Konstruktivni sastav mosta čini slobodno oslonjena ploča, ojačana s pet uzdužnih greda, dužine 24,8 m. Izvršeno je dinamičko opterećenje mosta prelaskom dva vozila s pet osovina pojedinačne mase 48,5 t. Na Slici 11.5. dana je usporedba dinamičkih faktora dobivenih kao odnos maksimalnog dinamičkog i maksimalnog statičkog progiba, primjenom pokretne konačne trake, s dinamičkim faktorima iz literature (Gonzalez i sur. 2010).

Dinamički faktori dobiveni numerički primjenom metode konačnih traka se vrlo dobro poklapaju s onima iz literature, uz maksimalno odstupanje od 2 %, Tablica 11.1. Ova manja odstupanja od vrijednosti iz literature, samo za pojedine vrijednosti brzine mogu se pripisati razlici u profilima podloge i manjim varijacijama modela.

**Tablica 11.1.** *Usporedba dinamičkih faktora*

Brzina v [km/h]	Dinamički faktor		
	Pokretna konačna traka	Gonzalez i sur.	Odstupanje u %
50	1,006	1,0	0,6
60	1,006	1,015	0,9
70	1,01	1,01	0
80	1,011	0,99	2,1
90	1,033	1,02	1,3
100	1,046	1,05	0,4
110	1,048	1,035	1,3
120	1,032	1,01	2,2



**Slika 11.5.** Usporedba dinamičkih faktora dobivenih metodom konačnih traka s dinamičkim faktorima preuzetim iz literature

## 12. ZAKLJUČNE NAPOMENE

### 12.1 Izvorni znanstveni doprinos disertacije

Znanstveni doprinos istraživanja prikazanog u disertaciji ogleda se u slijedećem:

- razvoju originalnog pokretnog trakastog konačnog elementa za pokretno opterećenje
- sprezanju konačnog trakastog ljuskastog elementa i konačnog slojevitog trakastog elementa na novi način
- primjeni punog (3D) modela vozila na stvarnu prostornu konstrukciju
- promatranju utjecaja poprečnog presjeka mosta na interakciju vozila i mostovne konstrukcije
- razvoju drugačije iterativne sheme, kojom se dobivaju vrijednosti pomaka i kontaktnih sila u svakom vremenskom koraku, bez ažuriranja matrica masa i opterećenja
- model interakcije vozila i konstrukcije sadrži sve jednostavnije modele pokretnog opterećenja, te se uz minimalnu promjenu svodi na bilo koji od njih
- model je koncipiran tako da omogućuje vrlo jednostavno uvođenje bilo kakvih promjena svojstava konstrukcije (geometriju, rubne uvjete, oblik poprečnog presjeka i sl.)
- kombinacija pokretnog konačnog trakastog elementa i konačnog trakastog ljuskastog elementa ubrzava i pospješuje analizu interakcije uz istovremeno povećavanje broja stupnjeva slobode koji se tretiraju

Zasnovan na formulaciji metode konačnih traka, uveden je novi element - pokretni konačni trakasti element, namijenjen isključivo modeliranju pokretnog opterećenja. U sprezi sa konačnim trakastim ljuskama, primjena pokretne konačne trake omogućila je obuhvaćanje

svih stupnjeva slobode vozila, oblika poprečnog presjeka konstrukcije, istovremeno reducirajući rad potreban za izradu modela i vrijeme potrebno za numeričku analizu.

Poseban doprinos je mogućnost izrazito detaljnog analiziranja interakcije vozila i konstrukcije, što rezultira realističnom i pouzdanom analizom mostova uslijed djelovanja pokretnog opterećenja.



## 12.2 Praktični značaj istraživanja

Numerički model interakcije vozila i mosta nastao kao dio istraživanja na temu disertacije je utoliko značajan što omogućuje trodimenzionalnu analizu prostornih konstrukcija i detaljno modeliranje teških vozila sa mnogo stupnjeva slobode. Primjena ovog modela je u predviđanju ponašanja konstrukcija kao što su mostovi i nadvožnjaci uslijed dinamičkih utjecaja od teških vozila. Ovo istraživanje predstavlja bazu za daljnju optimizaciju ovakvih konstrukcija, koje predstavljaju okosnicu prometne infrastrukture.

## 12.3 Smjernice budućih istraživanja

Istraživanje na temi disertacije otvorilo je mnoga nova pitanja i ideje za buduća istraživanja. Ono što nije pokriveno sadržajem disertacije, a zanimljivo je i bitno za područje interakcije vozila i konstrukcije je utjecaj promjene brzine gibanja vozila, te promjena putanje vozila; dakle nejednoliko i krivolinijsko gibanje vozila. U načinjenom modelu interakcije vrijedi pretpostavka konstantnog kontakta između vozila i površine konstrukcije. Realno se, osobito u slučaju neravne površine kolnika, javlja odskakanje i odvajanje vozila od konstrukcije, te ostvarenje ponovnog kontakta, što predstavlja vrlo zahtjevan i izazovan zadatak za proučavanje.

## 13. ZAKLJUČAK

Predmet istraživanja je izrada detaljnog modela interakcije pokretnog vozila i stvarne mostovne konstrukcije, uzimanjem u obzir svih stupnjeva slobode vozila i oblika poprečnog presjeka konstrukcije. Načinjena je parametarska analiza da bi se uočilo i naglasilo koji parametri vozila i konstrukcije i u kolikoj mjeri utječu na njihovo ponašanje. Cilj je procijeniti da li je modeliranje mostova kao plošnih nosača dovoljno za dobivanje točnih rezultata i koji model opterećenja daje rezultate najbliže stvarnima, dobivenim eksperimentalnim ispitivanjem. U svrhu provođenja detaljne anize realističnog vozila i stvarne prostorne konstrukcije, za modeliranje pokretnog opterećenja uvedena je pokretna konačna traka.

Analizirana su dva tipa konstrukcije: slobodno oslonjena ploča bez ukruta i slobodno oslonjena ploča sa šest uzdužnih ukruta, modeliranih ravnim konačnim trakastim ljuskama. Promatrano je pet tipova pokretnog opterećenja: pokretna sila, pokretna masa, pokretna masa s oprugom (2 stupnja slobode), dvodimenzionalni model vozila (5 stupnjeva slobode) i trodimenzionalni model vozila (9 stupnjeva slobode).

Model plošnog nosača opterećenog pokretnom silom i pokretnom masom testiran je usporedbom s rješenjima u zatvorenom obliku. Dalje su ti modeli nadograđeni uzdužnim ukrutama na ploči i složenijim modelima opterećenja koji uzimaju u obzir masu vozila. Složeni model konstrukcije je načinjen prema izvedenom cestovnom nadvožnjaku, a model vozila prema karakteristikama teških vozila korištenih pri eksperimentalnom ispitivanju nadvožnjaka. Rezultati analize interakcije prostorne konstrukcije i punog modela vozila verificirani su usporedbom s rezultatima provedenih dinamičkih ispitivanja na konstrukciji. Dane su krivulje ovisnosti maksimalnog dinamičkog progiba o promjeni: brzine kretanja opterećenja, odnosa mase opterećenja i konstrukcije, krutosti poprečnog presjeka konstrukcije i geometrijskih karakteristika površine konstrukcije, te profila podloge.

Izračunate su kontaktne sile, te vertikalne brzine i ubrzanja koji se javljaju na konstrukciji za različite modele pokretnog opterećenja.

Iz rezultata provedenog istraživanja može se izvući nekoliko zaključaka:

- (i) modeliranje konstrukcija složenog poprečnog presjeka plošnim nosačem nije preporučljivo, jer daje rezultate koji se uvelike razlikuju od eksperimentalno utvrđenih, te stoga može poslužiti samo kao okvirni uvid u ponašanje konstrukcija opterećenih vozilima zanemarivo male mase u odnosu na masu konstrukcije
- (ii) oblik i krutost poprečnog presjeka konstrukcije imaju veliki utjecaj na ponašanje konstrukcije i vozila
- (iii) 3D model vozila daje najtočnije rezultate i najbolje opisuje proces interakcije, od svih promatranih modela pokretnog opterećenja
- (iv) model pokretne sile je prikladan samo kod djelovanja vozila male mase
- (v) model pokretne mase uopće ne razmatra interakciju vozila i konstrukcije
- (vi) broj osovina vozila nema veliki utjecaj na interakciju, ukoliko je vozilo male dužine, dok udaljenost između krajnjih osovina značajno utječe na ponašanje konstrukcije
- (vii) sa povećanjem dimenzija vozila, povećava se i utjecaj broja osovina u modela vozila
- (viii) kontaktne sile između vozila i konstrukcije ovise direktno o krutosti, prigušenju i masi osovine vozila
- (ix) neravnine podloge utječu na odgovor konstrukcije, kod djelovanja 2D i 3D modela vozila

## LITERATURA

- Agrawal, O.P., Stanišić, M.M., Saigal S. *Dynamic responses of orthotropic plates under moving masses*, Archieve of Applied Mechanics, 2004, 58, 9-14.
- Akin, J.E., Mofid, M. *Numerical solution for response of beams with moving mass*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 1989, 115, 120-131.
- Bathe, K.J. *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 1996
- Chatterjee, P.K., Datta, T.K., Surana, C.S., *Vibration of suspension bridge under vehicular movement*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 1994, 120(3), 681-703.
- Cheung, Y.K. *Finite strip method analysis of elastic slabs*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1968, 94, 1365-1968
- Cheung, Y.K., *Finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite ends simply supported*, Proc Inst Civ Eng, 1968, 40, 1-7.
- Cheung, Y.K., Li, W, Chidiac, S.E. *Finite Strip Method Analysis of Bridges*, E&FN Spoo, an imprint of Chapman & Hall, London, 1996
- Cheung, Y.K., Tham, L.G., *Finite Strip Method*, CRC Press LLC, Boca Raton, 1998
- Chulya, A., Mullen, R.L., *Assumed strain distributions for a finite strip plate bending element using Mindin-Reissner plate theory*, Computers and Structures, 33(2), 1989, 513-521.
- Clough, R.W., Penzien J. *Dynamics of Structures*, Third edition, Computers & Structures Inc., Berkeley, 2003
- Dehestani, M. , Mofid, M., Vafai, A. *Investigation of critical influential speed for moving mass problems on beams*, Applied Mathematical Modelling, 2009, 33, 3885–3895
- Dodds, C.J., Robson, J.D., *The description of road surface roughness*, Journal of Sound and Vibration, 1973, 31(2), 175-183.
- Esmailzadeh, E., Jalili N. *Vehicle–passenger–structure interaction of uniform bridges traversed by moving vehicles*, J. Sound & Vib., 2003, 260, 611-635.

Friberg, O., Möller, P., Thorvald, B., *A time integration method for simulations of tyre vehicles on flexible structures*, Proc. Instn. Mech. Engrs., PartK: Journal of Multy-body Dynamics, 2000, 214, 111-122.

Fryba, L. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Prague: Thomas Telford, 1999 (1972 first edition), 94-156.

Gbadeyan, J.A., Dada, M.S. *Dynamic response of a Mindlin elastic rectangular plate under a distributed moving mass*, International Journal of Mechanical Sciences, 2006, 48, 323–340.

Giordano, F. R., Weir, M. D., *Differential equations: A modeling approach*, Addison-Wesley Pub. Co., Boston, 1991

Green, M.F., Cebon, D., *Dynamic interaction between heavy vehicles and highway bridges*, Computers and Structures, 1997, 62, 253-264.

Gonzalez, A., Obrien, E.J., Cantero, D., et al. *Critical speed for the dynamics of truck events on bridges with a smooth road surface*, Journal of Sound and Vibration, 2010, 329, 2127-2146.

Hinton, E., Zienkiewicz, O.C., *A note on simple thick finite strip*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, 1977, 905-909.

Ouyang, H., *Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview)*, Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, 25, 2039-2060.

Huang, M.-H., Thambiratnam, D.P. *Deflection response of plate on Winkler foundation to moving accelerated loads*, Engineering Structures, 2001, 23, 1134–1141.

Jalili, N., Esmailzadeh E., *Adaptive-passive structural vibration attenuation using distributed absorbers*. Proc. Instn. Mech. Engrs., PartK: Journal of Multy-body Dynamics, 2002, 216, 343-350.

Ji-Seong, J., Hyung-Jo, J., Hongjin, K., *Finite element analysis of vehicle-bridge interaction by an iterative method*, 2008, 30(2), 165-176.

Kožar, I., *Security aspects of vertical actions on bridge structure: comparison of earthquake and vehicle induced dynamical forces*, Engineering Computations, 2009, 26(1), 155-165.

Kožar, I., *Uvod u numeričku analizu i MKE*, Skripta iz kolegija Računalno modeliranje, 2006

- Law, S.S., Zhu, X.Q., *Bridge dynamic responses due to road surface roughness and braking of vehicle*, Journal of Sound and Vibration, 2005, 282, 805-830.
- Leissa, A. W., *The Free Vibration of Rectangular Plates*, Journal of Sound and Vibration, 1973, **31**, 257–293.
- Lou, P., *A vehicle-track-bridge interaction element considering vehicle's pitching effect*, Finite Elements in Analysis and Design, 2005, 41, 397-427.
- Lou, P., Dai, G.L. and Zeng, Q.Y., *Finite element analysis for a Timoshenko beam subjected to a moving mass*, Proc. Instn. Mech. Engrs., PartC: Journal of mechanical Engineering Science, 2006, 220, 669-678.
- Lou, P., Dai, G.L., Zeng, Q.Y., *Dynamic Analysis of a Timoshenko Beam Subjected to a Moving Concentrated Forces using Finite Element Method*, Shock and Vibration, 2007, 14, 459-468.
- Markulak, D., Truhar, N., *Dinamička interakcija vozila i cestovnog grednog mosta*, Tehnički Vjesnik, 2004, 4, 15-21.
- Mawenya, A.S., Davies, J.D., *Finite strip analysis of plate bending including transverse shear effects*, Building Science, 9, 1974, 175-180.
- Moghaddas, M., Sedaghati, R., Esmailzadeh, E. and Khosravi, P., *Finite element analysis of a Timoshenko beam traversed by a moving vehicle*, Proc. Instn Mech. Engrs, Part K: Journal of Multi-body Dynamics, 2009, 223, 231-243.
- Neves, S.G.M., A.F.M., Azevedo, R. Calçada, *A direct method for analyzing the vertical vehicle–structure interaction*, Engineering Structures, 2012, 34, 414-420.
- Newmark, N.M. *A Method of Computation for Structural Dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1959, 85, 67-94.
- Onate, E., Suarez, B., *A comparison of the linear, quadratic and cubic Mindlin strip elements for the analysis of thick and thin plates*, Computers and Structures, 17, 1983, 427-439.
- Podworna, M., *Dynamics of a bridge beam under a stream of moving elements. Part I – Modeling and numerical integration*, Structural Engineering and Mechanics, 2011, 38(3), 283-300.
- Potočnik, T., *Metoda konačnih traka i njena primjena na proračun staklene ploče*, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2005
- Powell, G.H., Ogden, D.W., *Analysis of Orthotropic Steel Plate Bridge Decks*, Proceedings ASCE, 1969, 95, 909-922.

- Reddy, J.N., *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, Second Edition, CRC Press, New York, 2006
- Shadnam, M.R., Mofid, M., Akin, J.E. *On the dynamic response of rectangular plate with moving mass*, *Thin-Walled Structures*, 2001, 39, 797-806.
- Siddiqui, S.A.Q., Golnaraghi, M.F., Heppler, G.R. *Dynamics of a Flexible Cantiliver Beam Carrying a Moving Mass*, *Nonlinear dynamics*, 1998, 15, 137-154.
- Siddiqui, S.A.Q., Golnaraghi, M.F., Heppler G.R. *Large free vibrations of a beam carrying a moving mass*, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38, 1481 – 1493.
- Smith, J.W., *Finite Strip Analysis of the Dynamic Response of Beam and Slab Highway Bridges*, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1973, 1, 357-370.
- Torić, N., Kožar, I., *Long Structures on Infinite Soil under Moving Loading*, 6th ICCSM Book of Abstracts, Smojver, I. ; Sorić, J. (ur.), Zagreb : Croatian Society of Mechanics, 2009, 90-90.
- Torić Malić, N., Kožar, I., *Vehicle strip element in the analysis of stiffened plate under realistic moving loading*, *Proc. Instn. Mech. Engrs., PartK: Journal of Multy-body Dynamics*, 2012 (in press, DOI: 10.1177/1464419312444972).
- Torić Malić, N., *Dynamic Analysis of Long Structures Supported by the Ground under Moving Loading by Finite Strip Method*, Abstracts of the Fifth International PhD&DLA Symposium, Prof. Miklos Ivanyi (ur.), Pecs : Rotary Press, 2009, 66-66.
- Timoshenko, S.P., Young, D.H., Weaver, W., *Vibration problems in engineering*, Wiley, New York, 1974
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959
- Tso-Chien, P., Li, J., *Dynamic Vehicle Element Method for Transient Response of Coupled Vehicle-Structure Systems*, *J. Struct. Eng.*, 2002, 128 , 214-223.
- Yagiz, N., Sakman, L.E., *Vibrations of a Rectangular Bridge as an Isotropic Plate under a Traveling Full Vehicle Model*, *Journal of Vibrations and Control*, 2006, 12, 83-98.
- Yang, F., Fonder, G.A., *An iterative solution method for dynamic response of bridge-vehicle systems*, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1996, 25, 195-215.
- Yang, Y.B., Yan, J.D., Wu, Y.S. *Vehicle-Bridge Interaction Dynamics with Application to High Speed Railways*, World Scientific Publishing, London, 2004
- Yavari, A., Nouri, M., Mofid, M., *Discrete element analysis of dynamic response of Timoshenko beams under moving mass*, *Advances in Engineering Software*, 2002, 33, 143-153.

Younesian, D., Kargarnovin, M.H., Esmailzadeh, E., *Optimal passive vibration control of Timoshenko beams with arbitrary boundary conditions traversed by moving loads*, Proc. Instn. Mech. Engrs., PartK: Journal of Multy-body Dynamics, 2008, 222, 179-188.

Wang, R.T., Kuo, N.Y., *Nonlinear vibration of Mindlin plate subjected to moving forces including the effect of weight of the plate*, Structural Engineering and Mechanics, 1999, 8, 151.

Weaver, W., Johnston, P.R., *Structural Dynamics by Finite Elements*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1987

Wu, J.J. *Vibration of rectangular plate undergoing forces moving along a circular path*, Finite Elements in analysis and Design, 2003, 40, 677-695.

Wu, S.Q., Law, S.S., *Dynamic analysis of bridge-vehicle system with uncertainties based on the finite element model*. Probabil. Engng. Mech., 2010, 25, 425-432.

Zhuchao, Y.E., Chen, H. *Vibration analysis of a simply supported beam under moving mass based on moving finite element method*, Frontiers of Mechanical Engineering in China, 2009, 4, 397-400.



## POPIS SLIKA

**Slika 2.1.** *Prikaz konačnog trakastog elementa*

**Slika 2.2.** *Prikaz spajanja više konačnih traka duž čvornih linija*

**Slika 2.3.** *Prikaz konačne trakaste ljuske i pripadajućih stupnjeva slobode*

**Slika 2.4.** *Transformacija koordinata*

**Slika 2.5.** *Dva moguća načina diskretizacije domene konačnim trakama*

**Slika 2.6.** *Prikaz konačne trake sa stupnjevima slobode čvornih linija*

**Slika 2.7.** *Statički progib ploče slobodno oslonjene na svim stranama diskretizirane sa: (a) 5 konačnih traka; (b) 19 konačnih traka*

**Slika 2.8.** *Statički progib ploče diskretizirane sa konačnimtrakastimljuskama: (a) slobodno oslonjene na svim stranama; (b) slobodno oslonjene na dvije suprotne strane; (c) upete na dvije suprotne strane; (d) upete na svim stranama*

**Slika 3.1.** *Slobodne vibracije ploče slobodno oslonjene na dvije suprotne strane: (a) prvi ton; (b) drugi ton; (c) treći ton*

**Slika 3.2.** *Slobodne vibracije ploče slobodno oslonjene na dvije suprotne strane: (a)  $m = 1, n = 2$ ; (b)  $m = 1, n = 3$ ; (c)  $m = 2, n = 2$*

**Slika 3.3.** *Slobodne vibracije ploče slobodno oslonjene na svim stranama: (a) prvi ton; (b) drugi ton; (c) treći ton*

**Slika 3.4.** *Slobodne vibracije ploče ukliještene na dvije suprotne strane: (a) prvi ton; (b) drugi ton; (c) treći ton*

**Slika 3.5.** *Slobodne vibracije ploče ukliještene na svim stranama: (a) prvi ton; (b) drugi ton; (c) treći ton*

**Slika 3.6.** *Usporedba numeričkog i analitičkog rješenja za ploču opterećenu pokretnom silom*

**Slika 4.1.** *Pokretna sila na konstrukciji*

**Slika 4.2.** *Vektor opterećenja na konstrukciju za položaj pokretne sile na sredini raspona*

**Slika 4.3.** *Matrica s podacima o položaju i intenzitetu opterećenja u svakom vremenskom trenutku*

**Slika 4.4.** *Pokretna masa s pripadajućim silama*

**Slika 4.5.** Model pokretnog opterećenja sa 2 stupnja slobode

**Slika 4.6.** Model vozila sa 5 stupnjeva slobode

**Slika 4.7.** (a) Vertikalni pomak i (b) rotacija modela vozila sa 5 stupnjeva slobode

**Slika 4.8.** Model vozila sa 9 stupnjeva slobode

**Slika 4.9.** (a) Vertikalni pomak, (b) rotacija oko poprečne težišne osi i (c) oko uzdužne težišne osi modela vozila sa 9 stupnjeva slobode

**Slika 4.10.** (a) Eulerovi kutevi između nepomičnog sustava (plavo) i zarotiranog sustava (crveno); (b) Prikaz ravnina koje odgovaraju gibanju vozila

**Slika 4.11.** Prikaz distribucije opterećenja u čvorovima konstrukcije kad je vozilo na sredini raspona

**Slika 4.12.** Grafički prikaz matrice opterećenja za: (a) prvu; (b) drugu i (c) treću os vozila

**Slika 4.13.** 3D model vozila sa 12 stupnjeva slobode

**Slika 5.1.** Pokretni konačni trakasti element

**Slika 6.1.** Primjeri profila podloge opisanih izrazom (6.1.) za različite vrijednosti parametra  $b$

**Slika 10.1.** Modeli analiziranih konstrukcija

**Slika 10.2.** Prikaz uzdužnog i poprečnog presjeka analiziranog modela mosta s modelom vozila s tri osovine

**Slika 10.3.** Dinamički progib plošnog nosača za različite modele opterećenja,  $v = 40$  m/s,  $m = 30$  t

**Slika 10.4.** Dinamički progib plošnog nosača za različite modele opterećenja,  $v = 10$  m/s,  $m = 60$  t

**Slika 10.5.** Dinamički progib ploče s ukrutama za različite modele opterećenja,  $v = 40$  m/s,  $m = 30$  t

**Slika 10.6.** Dinamički progib ploče s ukrutama za različite modele opterećenja,  $v = 10$  m/s,  $m = 60$  t

**Slika 10.7.** Usporedba dinamičkih progiba slobodno olonjene ploče bez i sa ukrutama

**Slika 10.8.** Prikaz distribucije progiba u prostornoj i vremenskoj domeni za: (a) ploču bez ukruta i (b) ploču s ukrutama

**Slika 10.9.** Usporedba krivulja ovisnosti dinamičkog progiba opromjeni brzine vozila za ploču bez i sa ukrutama za različite modele vozila

**Slika 10.10.** *Usporedba krivulja ovisnosti dinamičkog progiba o odnosu mase vozila i mase konstrukcije za ploču bez i sa ukрутama za različite modele vozila*

**Slika 10.11.** *Dijagram promjene položaja maksimalnog dinamičkog progiba ploče bez i sa ukрутama, ovisno o promjeni brzine kretanja vozila*

**Slika 10.12.** *Usporedba dinamičkih progiba za različit broj osovina modela vozila sa 5 stupnjeva slobode (2D model)*

**Slika 10.13.** *Usporedba dinamičkih progiba za različit broj osovina modela vozila sa 9 stupnjeva slobode (3D model)*

**Slika 10.14.** *Usporedba dinamičkih progiba za različite dimenzije modela vozila sa 5 stupnjeva slobode (2D model)*

**Slika 10.15.** *Usporedba dinamičkih progiba za različite dimenzije modela vozila sa 9 stupnjeva slobode (3D) model*

**Slika 10.16.** *Usporedba krivulja ovisnosti dinamičkog progiba o krutosti poprečnog presjeka za ploču bez i sa ukрутama za različite modele vozila*

**Slika 10.17.** *Usporedba dinamičkih progiba ploče s ukрутama za različite parametre funkcije opisivanja neravnina podloge*

**Slika 10.18.** *Utjecaj neravnina podloge na dinamički progib ploče s ukрутama za različite mase vozila i  $v = 10$  m/s*

**Slika 10.19.** *Utjecaj neravnina podloge na dinamički progib ploče s ukрутama za različite mase vozila i  $v = 40$  m/s*

**Slika 10.20.** *Kontaktne sile između ploče s ukрутama i modela vozila sa 5 stupnjeva slobode*

**Slika 10.21.** *Kontaktne sile između ploče s ukрутama i modela vozila sa 9 stupnjeva slobode*

**Slika 10.22.** *Usporedba (a) vertikalnih brzina i (b) vertikalnih ubrzanja za ploču bez i sa ukрутama za različite modele opterećenja*

**Slika 11.1.** *Skica troosovinskog vozila kojim je opterećena konstrukcija nadvožnjaka pri dinamičkom ispitivanju*

**Slika 11.2** *Prikaz uzdužnog presjeka cestovnog nadvožnjaka Mavrovija*

**Slika 11.3.** *Prikaz poprečnog presjeka cestovnog nadvožnjaka Mavrovija*

**Slika 11.4.** *Usporedba izmjerenog i izračunatog dinamičkog progiba cestovnog mosta Mavrovija*

**Slika 11.5.** *Usporedba dinamičkih faktora dobivenih metodom konačnih traka s dinamičkim faktorima preuzetim iz literature*

## PREGLED TABELARNIH PRIKAZA

**Tablica 2.1.** *Usporedba glavnih karakteristika konačnog elementa i konačne trake (Cheung i Tham 1998)*

**Tablica 2.2.** *Usporedba vlastitih vrijednosti grede dobivenih primjenom metoda konačnih traka i konačnih elemenata*

**Tablica 2.3.** *Utjecaj broja traka na točnost izračuna statičkog progiba primjenom klasičnih konačnih traka*

**Tablica 2.4.** *Utjecaj broja traka na točnost izračuna statičkog progiba primjenom konačnih trakastih ljuski*

**Tablica 2.5.** *Usporedba rješenja statičkog progiba metodom konačnih traka i konačnih trakastih ljuski*

**Tablica 2.6.** *Usporedba utjecaja broja konačnih traka i broja članova reda na vrijednosti statičkog progiba*

**Tablica 3.1.** *Utjecaj broja konačnih trakastih ljuski na točnost vlastitih vrijednosti za ploču slobodno oslonjenu na dvije suprotne strane*

**Tablica 3.2.** *Utjecaj broja konačnih trakastih ljuski na točnost vlastitih vrijednosti za ploču slobodno oslonjenu na svim stranama*

**Tablica 3.3.** *Utjecaj broja konačnih trakastih ljuski na točnost vlastitih vrijednosti za ploču ukliještenu na dvije suprotne strane*

**Tablica 3.4.** *Utjecaj broja konačnih trakastih ljuski na točnost vlastitih vrijednosti za ploču ukliještenu na svim stranama*

**Tablica 7.1.** *Utjecaj mase vozila na kritičnu brzinu konstrukcije*

**Tablica 10.1.** *Podaci o konstrukciji*

**Tablica 10.2.** *Podaci o pokretnom opterećenju*

**Tablica 10.3.** *Dimenzije modela vozila*

**Tablica 10.4.** *Veličine korištene u parametarskoj analizi i njihove vrijednosti*

**Tablica 10.5.** *Dimenzije promatranih poprečnih presjeka konstrukcije*

**Tablica 11.1.** *Usporedba dinamičkih faktora*

Istraživanje obuhvaćeno ovom disertacijom provedeno je u sklopu znanstvenog projekta " *Duge fleksibilne konstrukcije* " br. 114-0982562-1460 kojeg financira Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Za izradu disertacije korišten je je licencirani programski paket Mathcad 15.0:

Copyright © 2010 Parametric Technology Corporation. All Rights Reserved.

Parametric Technology Corporation, 140 Kendrick Street, Needham, MA 02494 USA